一个精确的对称 积分形式的约翰–尼伦伯格不等式 *

Egor Dobronravov

2023年2月27日

arXiv:2302.12755v1 [math.CA] 24 Feb 2023

摘要

我们求出了约翰–尼伦伯格不等式的对称积分形式中的精确常数。该结果基于对一个新的、有趣的贝尔曼函数的计算。

1 引言。

本文旨在为单变量有界平均振荡函数给出约翰–尼伦伯格不等式的一个锐利形式，并描述一个与此问题相关的有趣的贝尔曼函数。在陈述结果之前，我们先引入记号，并介绍已知的约翰–尼伦伯格不等式的锐利版本。

对于区间 I 和函数 $\varphi \in L^1(I)$，令 $\langle\varphi\rangle_I$ 为 φ 在 I 上的平均值，即 $\langle\varphi\rangle_I = \frac{1}{|I|}\int_I \varphi$。回顾有界平均振荡（半）范数的定义：

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{BMO}(I)} = \sup\left\{\left\langle(\varphi - \langle\varphi\rangle_J)^2\right\rangle_J \,\middle|\, J \text{ is a subinterval of } I\right\}, \qquad \varphi \in L^2(I).$$

具有有限有界平均振荡(I)范数的函数构成空间有界平均振荡(I)。另令

$$\mathrm{BMO}_\varepsilon(I) = \left\{\varphi \in \mathrm{BMO}(I) \,\middle|\, \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon\right\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

为 t 的 ε-球 有界平均振荡空间。[3] 中引入的基本约翰–尼伦伯格不等式指出，有界平均振荡 O 函数是指数 本质可积。有几种表达这一原理的等价方式。

定理 (弱形式**)**。 存在 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得不等式成立

$$\frac{1}{|I|}\left|\left\{s \in I \,\middle|\, \varphi(s) - \langle\varphi\rangle_I \geqslant \lambda\right\}\right| \leqslant c_1 \exp\left(\frac{-c_2\lambda}{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}\right) \quad \textit{for any } \varphi \in \mathrm{BMO}(I). \tag{1.1}$$

对任意 $\lambda > 0$均成立。

此处及下文中，$|E|$ 表示 E, $E \subseteq \mathbb{R}$的勒贝格测度。

定理 (弱对称形式**)**。 存在 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得不等式成立

$$\frac{1}{|I|}\left|\left\{s \in I \,\middle|\, |\varphi(s) - \langle\varphi\rangle_I| \geqslant \lambda\right\}\right| \leqslant c_1 \exp\left(\frac{-c_2\lambda}{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}\right) \quad \textit{for any } \varphi \in \mathrm{BMO}(I). \tag{1.2}$$

对任意 $\lambda > 0$均成立。

定理 (积分形式**)**。 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$，都有 $C(\varepsilon) > 0$，使得对于任意有界平均振荡函数 $\varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon(I)$

$$\langle e^\varphi\rangle_I \leqslant C(\varepsilon) e^{\langle\varphi\rangle_I}, \tag{1.3}$$

或者，等价地，

$$\langle\exp(\varphi - \langle\varphi\rangle_I)\rangle_I \leqslant C(\varepsilon). \tag{1.4}$$

定理 (积分对称形式**)**。 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$，都存在 $C(\varepsilon) > 0$，使得对于任意有界平均振荡函数 $\varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon(I)$,

$$\langle\exp|\varphi - \langle\varphi\rangle_I|\rangle_I \leqslant C(\varepsilon). \tag{1.5}$$

*由俄罗斯科学基金会项目 19-71-10023 资助

从定性角度看，这四个定理是等价的。然而，如果关注这些不等式中参数的尖锐取值，那么这种等价关系至少并非显而易见（很可能并不存在）。前两个定理的尖锐形式以及贝尔曼函数

$$\mathbf{B}_{\max}(x_1,\,x_2,\,\lambda,\,\varepsilon)=\frac{1}{|I|}\sup\left\{\left|\left\{s\in I\middle|\,\varphi(s)\geqslant\lambda\right\}\right|:\varphi\in\mathrm{BMO}_\varepsilon(I),\,\langle\varphi\rangle=x_1,\,\langle\varphi^2\rangle=x_2\right\};\tag{1.6}$$

$$\mathbf{B}(x_1,\,x_2,\,\lambda,\,\varepsilon)=\frac{1}{|I|}\sup\left\{\left|\left\{s\in I\middle|\,|\varphi(s)|\geqslant\lambda\right\}\right|:\varphi\in\mathrm{BMO}_\varepsilon(I),\,\langle\varphi\rangle=x_1,\,\langle\varphi^2\rangle=x_2\right\}.\tag{1.7}$$

已在 [13] 中计算。因此，对于 $\varphi\in$有界平均振荡$_\varepsilon$，我们可以写成

$$\frac{1}{|I|}\left|\left\{s\in I\middle|\,\varphi(s)-\langle\varphi\rangle_I\geqslant\lambda\right\}\right|\leqslant C(\varepsilon,\,\lambda);\tag{1.8}$$

$$\frac{1}{|I|}\left|\left\{s\in I\middle|\,|\varphi(s)-\langle\varphi\rangle_I|\geqslant\lambda\right\}\right|\leqslant C_{sym}(\varepsilon,\,\lambda),\tag{1.9}$$

其中，$C_{\max}$ 和 C 的精确值通过以下方式由相应的贝尔曼函数计算得到

$$C(\varepsilon,\,\lambda)=\sup\left\{\mathbf{B}_{\max}(0,\,x_2,\,\lambda,\,\varepsilon)\middle|x_2\in[0,\varepsilon^2]\right\}=\begin{cases}1-\frac{\lambda}{2\varepsilon}, & 0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon,\\ \frac{e}{2}e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}, & \varepsilon\leqslant\lambda;\end{cases}\tag{1.10}$$

$$C_{sym}(\varepsilon,\,\lambda)=\sup\left\{\mathbf{B}(0,\,x_2,\,\lambda,\,\varepsilon)\middle|x_2\in[0,\varepsilon^2]\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon,\\ \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}, & \varepsilon\leqslant\lambda\leqslant2\varepsilon,\\ \frac{e^2}{4}e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}, & 2\varepsilon\leqslant\lambda.\end{cases}\tag{1.11}$$

由这些公式可知，第一和第二个定理的最优 c_2 均等于 1。若 $c_2=1$，则第一个和第二个定理的最优 c_1 分别等于 $\frac{e}{2}$ 和 e。第三个定理的精确形式及其相应的贝尔曼函数已在 [9] 中计算得到。更确切地说，公式 (2.11) 给出的贝尔曼函数已在 [9] 中计算得到。由此可知，ε_0 等于 1，而第三个定理的最优 C（ε）等于 $\frac{e^{-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$。在本文中，我们将计算第四个定理中的 ε_0 和 C（ε）的精确值（见下文的定理 2.1）。

需要指出的是，我们定义有界平均振荡范数的方式并不是最常见的，至少在实分析领域如此。一种基于 L^1 范数而非 L^2 的定义更为普遍。根据约翰–尼伦伯格不等式，这两个半范数是等价的。关于采用 L^1 范数的精确约翰–尼伦伯格不等式，参见论文 [4] 和 [5]；关于采用 L^p 范数的不等式，参见 [7] 和 [10]。

关于贝尔曼函数方法的阐述，请参阅 [6] 和 [14]；关于更具体的基于BMO的贝尔曼函数问题的一般处理，请参阅论文 [1] 和 [2]。

2 主要结果与贝尔曼函数的设置。

定理 2.1. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个区间，且 $\varphi\in$ 有界平均振荡$_\varepsilon(I)$。不等式

$$\langle\exp|\varphi-\langle\varphi\rangle_I|\rangle_I\leqslant\begin{cases}e^{\varepsilon}, & 0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2},\\ \dfrac{e^{1-\varepsilon}}{2-2\varepsilon}, & \frac{1}{2}\leqslant\varepsilon<1,\\ +\infty, & \varepsilon\geqslant1\end{cases}\tag{2.1}$$

成立。该不等式是尖锐的，并且对所有 $\varepsilon\in[0,\,1)$均可取到。

利用 [12], 中的技巧，可以将这个尖锐不等式推广到直线上。设 φ 是直线上的局部平方可和函数，设

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R})}=\sup\left\{\left(\left\langle(\varphi-\langle\varphi\rangle_J)^2\right\rangle_J\right)^{\frac{1}{2}}\,\middle|\,J\text{ is an interval}\right\}.$$

对于 $\varepsilon\geqslant0$，令 BMO$_\varepsilon(\mathbb{R})=\left\{\varphi\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R})\middle|\,\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\varepsilon\right\}$。

推论2.1。设 $\varphi\in$ 有界平均振荡$_\varepsilon(\mathbb{R})$。不等式 (2.1) 成立。对于所有 $\varepsilon\in[0,\,1)$，该不等式都是尖锐的。

定理 2.1 将由下面给出的特定贝尔曼函数公式推出，参见（2.8）和定理 2.2。设 $P=\{(x_1,x_2)\,|\,x_2=x_1^2\}$ 为标准抛物线，设 $\Omega_\varepsilon=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^2\leqslant x_2\leqslant x_1^2+\varepsilon^2\}$ 为宽度为 ε^2 的抛物线带。我们将考虑将 I 映射到 P 的可求和函数。令

$$U_\varepsilon=\left\{\varphi\in L^1(I,\,P)\,\middle|\,\forall\text{ interval }J\subseteq I\ \ \langle\varphi\rangle_J\in\Omega_\varepsilon\right\}.$$

那么，由公式 $\varphi\mapsto(\varphi,\ \ \varphi^2)$ 给出的映射 $T\colon\ L^2(I,\ \ \mathbb{R})\ \to\ L^1(I,\ \ P)$ 在有界平均振荡$_\varepsilon$ 与 U_ε之间构成一个双射。我们通过以下公式定义贝尔曼函数 $\mathbb{B}_\varepsilon\colon\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$$\mathbb{B}_\varepsilon(x_1,\,x_2)=\sup\left\{\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_I\,\middle|\,\varphi\in\mathrm{BMO}_\varepsilon(I),\,\langle\varphi\rangle_I=x_1,\,\left\langle\varphi^2\right\rangle_I=x_2\right\}.\tag{2.2}$$

我们的目标是为 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 找到一个良好的解析表达式。论文 [1] 和 [2]给出了一个更一般函数的公式

$$\mathbb{B}_{f,\varepsilon}(x_1,\,x_2)=\sup\left\{\langle f(\varphi)\rangle_I\,\middle|\,\varphi\in\mathrm{BMO}_\varepsilon(I),\,\langle\varphi\rangle_I=x_1,\,\left\langle\varphi^2\right\rangle_I=x_2\right\},\tag{2.3}$$

其中，f 是一个任意的 C^3-光滑函数，满足额外的正则性假设。由于在我们的情形中 $f(t)=e^{|t|}$，且该函数远非 C^3，甚至也不是 C^2 光滑的（所引论文中的确切光滑性条件略弱于 C^3，但显然强于 C^2），因此下文的定理 2.2 不在这些结果的涵盖范围内。事实上，代价函数 f 的非光滑性将导致一些意想不到的效应。此外，论文 [1] 和 [2] 并未给出贝尔曼函数的简单公式。它们提出了一种构造此类公式的算法。我们的代价函数使得通用算法中可以采用若干捷径，而这些捷径本身也颇具意义。

如果一个函数的定义域为 $V\subseteq\mathbb{R}^d$，且它在任意包含于 V 的线段上的限制都是凹函数，我们就称该函数为局部凹函数。我们还可以定义局部凹函数类

$$\Lambda_\varepsilon=\left\{B\colon\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\,\middle|\,B\text{ is locally concave and }B\left(x_1,\,x_1^2\right)\geqslant e^{|x_1|},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

以及逐点最小函数 $\mathcal{B}_\varepsilon\colon\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x_1,\,x_2)=\inf\left\{B(x_1,\,x_2)\,\middle|\,B\in\Lambda_\varepsilon\right\}.$$

可以看出 $\mathcal{B}_\varepsilon\in\Lambda_\varepsilon$。根据 [11]的主定理，$\mathbb{B}_\varepsilon=\mathcal{B}_\varepsilon$。为了描述 $\mathbb{B}_\varepsilon$，我们需要辅助参数 $\beta,\,\alpha,\,c,\,b$:

$$\beta=\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2},\tag{2.4}$$

$$\alpha=\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\log(1-\varepsilon)-\log\left(2\varepsilon^2\right)\right),\tag{2.5}$$

$$c=\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon^2}e^\alpha-\frac{\varepsilon+\alpha}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\},\tag{2.6}$$

$$b=\frac{1}{2\,(1-\varepsilon^2)}e^\alpha+\frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\}.\tag{2.7}$$

对于 $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}$，我们将定义域 Ω_ε 分为四个部分（见图 1）：

$$\Omega_\varepsilon^1=\left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\,x_2\leqslant\varepsilon^2\right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^2=\left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\middle|x_2\in\left[\varepsilon^2,\,\alpha^2\right]\text{ and }x_2\leqslant2\alpha|x_1|-\alpha^2-2\varepsilon(|x_1|-\alpha)\text{ when }|x_1|>\alpha-\varepsilon\right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^3=\left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\,|x_1|\in[\alpha-\varepsilon,\,\alpha+\varepsilon],\,x_2\geqslant2\alpha|x_1|-\alpha^2+|2\varepsilon(|x_1|-\alpha)|\right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^4=\left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\,|x_1|\geqslant\alpha\text{ and }x_2\leqslant2(\alpha+\varepsilon)|x_1|-\alpha^2-2\varepsilon\alpha\text{ when }|x_1|<\alpha+\varepsilon\right\},$$

并按以下公式定义候选函数 B_ε：

$$B_\varepsilon(x_1,\,x_2)=\begin{cases}e^{\sqrt{x_2}}, & \text{for }(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon^1,\\ \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1|-\beta+\varepsilon\}+\frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1|-\beta)+\varepsilon\right\}, & \text{for }(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon^2,\\ c(|x_1|-\alpha)+b\left(x_2-\alpha^2\right)+e^\alpha, & \text{for }(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon^3,\\ \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1|+\beta-\varepsilon\}, & \text{for }(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon^4.\end{cases}\tag{2.8}$$

对于$-\frac{1}{2}\leqslant\varepsilon<1$，我们将定义域 Ω_ε 划分为三个部分（见图 2）：

$$\Omega_\varepsilon^1=\left\{(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\,x_2\leqslant(1-\varepsilon)^2\right\},$$

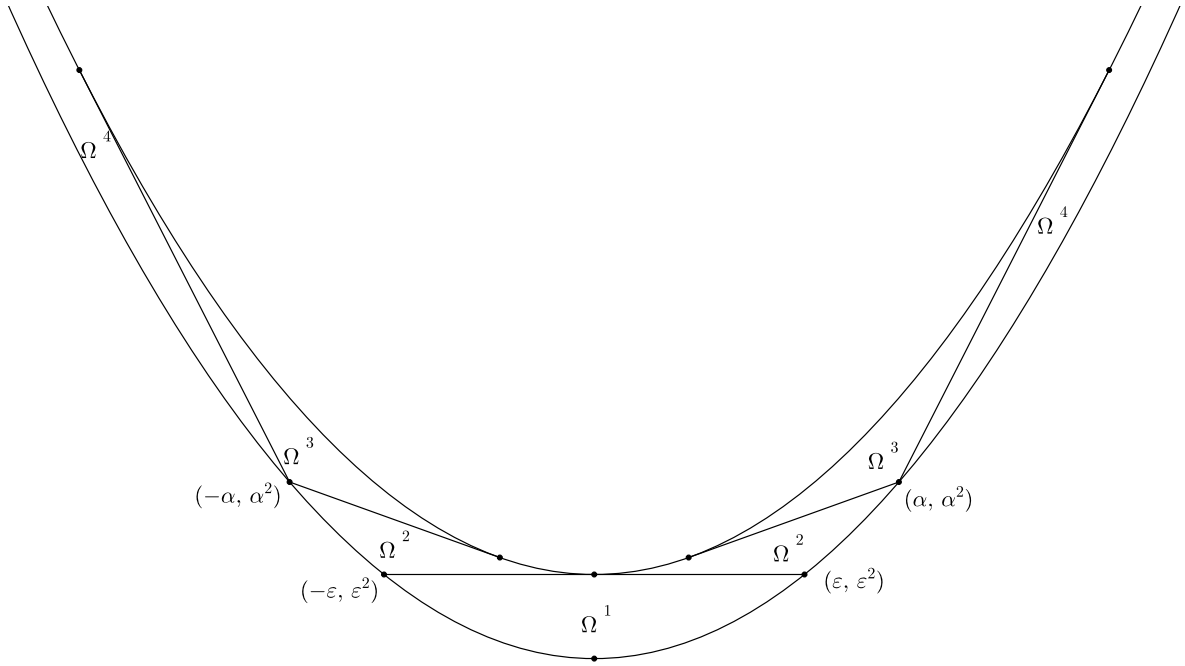

图 1：$\varepsilon \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right)$ 情形下的叶状结构。

$$\Omega_\varepsilon^2 = \left\{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \in \left[(1-\varepsilon)^2,\, 1+\varepsilon^2\right] \text{ and } |x_1| \leqslant \frac{1+x_2-\varepsilon^2}{2}\right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^3 = \left\{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \geqslant (1-\varepsilon)^2 \text{ and } |x_1| \geqslant \frac{1+x_2-\varepsilon^2}{2} \text{ when } x_2 < 1+\varepsilon^2\right\},$$

并通过以下公式定义候选 B_ε：

$$B_\varepsilon(x_1,\, x_2) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_2}}, & \text{for } (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^1, \\ \frac{1-\varepsilon^2+x_2}{2-2\varepsilon} e^{1-\varepsilon}, & \text{for } (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^2, \\ \frac{1-\beta}{1-\varepsilon} \exp\left(x_1+\beta-\varepsilon\right), & \text{for } (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^3. \end{cases} \tag{2.9}$$

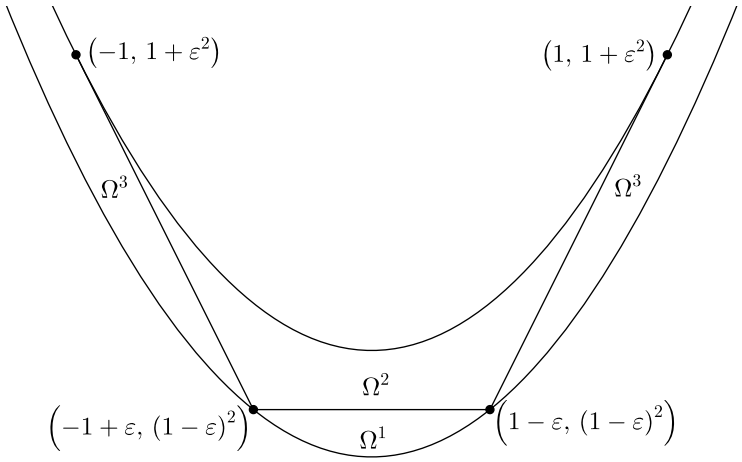

图 2：$\varepsilon \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right)$ 情形下的叶状结构。

最后，对于 $\varepsilon \geqslant 1$，我们设：

$$B_\varepsilon(x_1,\, x_2) = \begin{cases} e^{|x_1|}, & \text{for } x_2 = x_1^2, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.10}$$

定理 2.2。对于 $\varepsilon \geqslant 0$，我们有 $\mathbb{B}_\varepsilon = B_\varepsilon$。此外，对于所有 $\varepsilon \geqslant 0$ 和 $(x_1,\ x_2) \in \Omega_\varepsilon$，存在一个函数 $\varphi \in$ 有界平均振荡$_\varepsilon$，使得 $\langle\varphi\rangle_I = x_1$、$\left\langle\varphi^2\right\rangle_I = x_2$，以及 $\langle\exp|\varphi|\rangle_I = \mathbb{B}_\varepsilon\ (x_1,\ x_2)$。

为证明定理 2.2，我们只需构造具有相应均值的函数 $\varphi \in$ 有界平均振荡$_\varepsilon$ ：$(\langle\varphi\rangle_I,\ \langle\varphi^2\rangle_I) = (x_1,\ x_2)$，使得 $B_\varepsilon(x_1,\ x_2) = \left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_I$，并检验 B_ε 的局部凹性。构造这样的函数 φ 可得不等式

$$B_\varepsilon(x_1,\ x_2) = \left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_I \leqslant \sup\left\{\langle\exp\{|\psi|\}\rangle_I \middle|\ \psi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon \text{ and } (\langle\psi\rangle_I,\ \langle\psi^2\rangle_I) = (x_1,\ x_2)\right\} = \mathbb{B}_\varepsilon(x_1,\ x_2).$$

若我们检验 B_ε 的局部凹性，那么由 $B_\varepsilon(x_1,\ x_1^2) = e^{|x_1|}$ 可得

$$\mathbb{B}_\varepsilon(x_1,\ x_2) = \mathcal{B}_\varepsilon(x_1,\ x_2) = \inf\left\{B(x_1,\ x_2) \middle|\ B \in \Lambda_\varepsilon\right\} \leqslant B_\varepsilon(x_1,\ x_2).$$

由此，我们将得到 $B_\varepsilon = \mathbb{B}_\varepsilon$。我们在第 6 节构造所需的极值函数 φ，并在第 5 节检验其局部凹性。在第 3 节和第 4 节中，我们分别验证 $B_\varepsilon \in C(\Omega_\varepsilon)$ 和 $B_\varepsilon \in C^1(\Omega_\varepsilon \setminus \{(0,0)\})$；这些事实将在第 5 节和第 6 节中用到。

基于定理 *2.2* 的定理 *2.1* 证明。下面的等式成立：

$$\sup\left\{\exp\{|\varphi - \langle\varphi\rangle_I|\} \middle|\ \varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon\right\} = \sup\left\{\exp\{|\varphi|\} \middle|\ \varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon \text{ and } \langle\varphi\rangle_I = 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{\mathbb{B}_\varepsilon(0,\ x_2) \middle|\ x_2 \in \left[0,\ \varepsilon^2\right]\right\} = \mathbb{B}_\varepsilon\left(0,\ \varepsilon^2\right) = \begin{cases} e^\varepsilon, & \text{for } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{e^{1-\varepsilon}}{2-2\varepsilon}, & \text{for } \frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1, \\ +\infty, & \text{for } \varepsilon \geqslant 1. \end{cases}$$

可达到性源于函数 $\varphi \in$ 有界平均振荡$_\varepsilon$ 的存在，使得 $\langle\varphi\rangle_I = 0$，$\left\langle\varphi^2\right\rangle_I = \varepsilon^2$ 且$\langle\exp\{|\varphi|\}\rangle_I = \mathbb{B}_\varepsilon\left(0,\ \varepsilon^2\right)$。

□

再令 B_ε^{asym}为非对称积分型约翰–尼伦伯格不等式的贝尔曼函数 ：

$$B_\varepsilon^{asym}(x_1,\ x_2) = \sup\left\{\langle e^\varphi\rangle_I \middle|\ \varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon(I),\ \langle\varphi\rangle_I = x_1,\ \left\langle\varphi^2\right\rangle_I = x_2\right\}, \qquad x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.11}$$

函数 B_ε^{asym}已在 [9], 中求得，其形式为

$$B_\varepsilon^{asym}(x_1,\ x_2) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}}{1-\varepsilon} \exp\left(x_1 + \sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2} - \varepsilon\right), \quad \varepsilon \in [0,\ 1), \tag{2.12}$$

$$B_\varepsilon^{asym}(x_1,\ x_2) = \begin{cases} e^{x_1}, & \text{for } x_2 = x_1^2, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \varepsilon \in [1,\ +\infty). \tag{2.13}$$

3 B_ε的连续性。

本节将验证，只要 $\varepsilon \in$ (0,1)，B_ε 就是连续的。由 (2.8) 和 (2.9) 可知，B_ε是一个分段连续函数。我们只需检查 Ω_ε^j 与 Ω_ε^{j+1}交界处的连续性。根据对称性，不妨设 $x_1 \geqslant 0$。

3.1 $\varepsilon \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$的情形。–

引入函数 g_1，g_2，g_3，g_4:

$$g_1(x_1,\ x_2) = e^{\sqrt{x_2}}, \quad x = (x_1,\ x_2) \in \Omega_\varepsilon^1, \tag{3.1}$$

$$g_2(x_1,\ x_2) = \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{\varepsilon - \beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}, \quad x = (x_1,\ x_2) \in \Omega_\varepsilon^2, \tag{3.2}$$

$$g_3(x_1,\ x_2) = c(|x_1| - \alpha) + b\left(x_2 - \alpha^2\right) + e^\alpha, \quad x = (x_1,\ x_2) \in \Omega_\varepsilon^3, \tag{3.3}$$

$$g_4(x_1,\ x_2) = \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}, \quad x = (x_1,\ x_2) \in \Omega_\varepsilon^4, \tag{3.4}$$

其中 $\alpha,\ \beta,\ c,\ b$ 分别在（2.5）、（2.4）、（2.6）、（2.7）中定义。于是我们只需验证 $g_j = g_{j+1}$在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$ 上成立。

3.1.1 在 $\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2$ 上的连续性。

集合 $\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2$ 是线段$\left[\left(-\varepsilon,\, \varepsilon^2\right),\, \left(\varepsilon,\, \varepsilon^2\right)\right]$，见图 1。在这条线段上，我们有 $\beta = |x_1|$, $x_2 = \varepsilon^2$因此

$$g_1(x_1,\, x_2) = e^{\varepsilon} = g_2(x_1,\, x_2).$$

3.1.2 在 $\Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3$ 上的连续性。

集合 $\Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 是线段

$$\left[\left(\alpha-\varepsilon,\, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right),\, \left(\alpha,\, \alpha^2\right)\right]. \tag{3.5}$$

恒等式 $x_1 - \beta = u - \varepsilon$ 在这条线段 $\left[\left(u-\varepsilon, (u-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right),\, \left(u,\, u^2\right)\right]$ 上对任意 $u \geqslant \varepsilon$均成立。因此， g_2 在 (3.5) 上是线性的，而 g_3 在这条线段上也具有线性。我们只需验证 g_2 与 g_3 仅在端点处重合。端点 $(\alpha,\, \alpha^2)$（注意 $\beta = \varepsilon$ 在此点）：

$$g_2\left(\alpha,\, \alpha^2\right) = \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{\alpha-\varepsilon+\varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = e^{\alpha} = g_3\left(\alpha,\, \alpha^2\right).$$

第二个端点处的验证（$\beta = 0$ 在此点）如下:

$$g_2\left(\alpha-\varepsilon,\, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}\exp\{\alpha\} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\},$$

$$g_3\left(\alpha-\varepsilon,\, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right) = -c\varepsilon + b\left(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\alpha\right) + e^{\alpha} \overset{(2.6),(2.7)}{=}$$

$$= e^{\alpha}\left(1 - \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2-\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right)\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon-\alpha}{2(1+\varepsilon)}\right) = g_2\left(\alpha-\varepsilon,\, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right).$$

3.1.3 在 $\Omega_\varepsilon^3 \cap \Omega_\varepsilon^4$ 上的连续性。

集合 $\Omega_\varepsilon^3 \cap \Omega_\varepsilon^4 \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 是线段

$$\left[\left(\alpha,\, \alpha^2\right),\, \left(\alpha+\varepsilon,\, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right)\right]. \tag{3.6}$$

恒等式 $x_1 + \beta = u + \varepsilon$ 在对任意 $u \geqslant 0$ 的线段 $\left[\left(u,\, u^2\right),\, \left(u+\varepsilon, (u+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right)\right]$ 上成立。因此 g_4 在 (3.6) 上是线性的，且 g_3 在此线段上也是线性的。我们只需检查 g_3 和 g_4 是否仅在端点处重合。端点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ 的情况很简单:

$$g_4\left(\alpha,\, \alpha^2\right) = \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{\alpha+\varepsilon-\varepsilon\} = e^{\alpha} = g_3\left(\alpha,\, \alpha^2\right).$$

第二个端点的验证如下:

$$g_4\left(\alpha+\varepsilon,\, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right) = \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{\alpha+\varepsilon-\varepsilon\} = \frac{1}{1-\varepsilon}e^{\alpha},$$

$$g_3\left(\alpha+\varepsilon,\, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right) = c\varepsilon + b\left(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\alpha\right) + e^{\alpha} =$$

$$= e^{\alpha}\left(1 + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right)\left(-\frac{\varepsilon+\alpha}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon+\alpha}{2(1+\varepsilon)}\right) = g_4\left(\alpha+\varepsilon,\, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right).$$

3.2 $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right)$ 的情形。

我们引入函数 $g_1,\, g_2,\, g_3$:

$$g_1(x_1,\, x_2) = e^{\sqrt{x_2}}, \quad x = (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^1, \tag{3.7}$$

$$g_2(x_1,\, x_2) = \frac{1-\varepsilon^2+x_2}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon}, \quad x = (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^2, \tag{3.8}$$

$$g_3(x_1,\, x_2) = \frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}}{1-\varepsilon}\exp\left(x_1 + \sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2} - \varepsilon\right), \quad x = (x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon^3. \tag{3.9}$$

那么我们只需验证 $g_j = g_{j+1}$ 在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$上。

3.2.1 $\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2$上的连续性。

The 集合 $\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2$ 是线段 $\left[(-1+\varepsilon, (1-\varepsilon)^2),\ \ (1-\varepsilon,\ (1-\varepsilon)^2)\right]$。在线段上，我们有 e

$$g_1(x_1, x_2) = e^{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon^2+(1-\varepsilon)^2}{2-2\varepsilon} e^{1-\varepsilon} = g_2(x_1, x_2).$$

3.2.2 $\Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3$上的连续性。

集合 $\Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 是线段

$$\left[(1-\varepsilon, (1-\varepsilon)^2), (1, 1+\varepsilon^2)\right]. \tag{3.10}$$

恒等式 $x_1 + \sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2} = u + \varepsilon$ 在任意 $u \geqslant 0$ 下均在线段 $\left[(u, u^2), (u+\varepsilon, (u+\varepsilon)^2+\varepsilon^2)\right]$ 上成立。因此，g_3 在 (3.10) 上是线性的，而 g_2 在线段上也是线性的。我们只需检查 g_2 和 g_3 是否仅在端点处重合。验证如下:

$$g_2\left(1-\varepsilon, (1-\varepsilon)^2\right) = e^{1-\varepsilon} = g_3\left(1-\varepsilon, (1-\varepsilon)^2\right),$$

$$g_2\left(1, 1+\varepsilon^2\right) = \frac{1}{1-\varepsilon} e^{1-\varepsilon} = g_3\left(1, 1+\varepsilon^2\right).$$

4 C^1 的光滑性： B_ε。

本节将验证：若 $\varepsilon \in (0, 1)$，则 $B_\varepsilon \in C^1(\Omega_\varepsilon \setminus \{(0, 0)\})$。由 (2.8) 和 (2.9) 可知，$B_\varepsilon$ 是分段连续可微函数（除点 (0, 0) 外）；结合第 3 节的结果，我们只需验证 B_ε 的偏导数在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$ 上连续。函数 $g_{j,\varepsilon} = B_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^j}$ 连续可微（除点 (0, 0) 外），且 $g_{j,\varepsilon} = g_{j+1,\varepsilon}$ 在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$ 上。此外，$\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$ 由互不相同的非竖直线段组成。由于 B_ε 在这些线段上是线性的，我们只需验证 $\frac{\partial g_{j,}}{\partial x_2}^{\varepsilon} = {}^{\partial g_{j+1,}}\!\partial x_2{}^{\varepsilon}$ 在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^{j+1}$ 上。

——　——

4.1 $\varepsilon \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 的情形。-

首先，我们计算

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = \frac{\partial \sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}}{\partial x_2} = \frac{-1}{2\sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}} = \frac{-1}{2\beta}.$$

现在，我们计算:

$$\frac{\partial g_{1,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{\sqrt{x_2}};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}\right) = \\ &= \exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\}\left(\frac{-1}{(1+\varepsilon)2\beta} + \frac{1+\beta}{(1+\varepsilon)2\beta}\right) + \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)2\beta} - \frac{\varepsilon-\beta}{\varepsilon(1+\varepsilon)2\beta}\right) = \\ &= \exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\}\frac{1}{2+2\varepsilon} + \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}; \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial g_{3,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(c(|x_1| - \alpha) + b(x_2 - \alpha^2) + e^\alpha\right) = b;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}\right) = \exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)2\beta} - \frac{1-\beta}{(1-\varepsilon)2\beta}\right) = \\ &= \exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}\frac{1}{2-2\varepsilon}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2} = \exp\{\varepsilon\}\frac{1}{2+2\varepsilon} + \exp\{\varepsilon\}\frac{1}{2\varepsilon(1+1\varepsilon)} = \frac{1}{2\varepsilon}e^\varepsilon = \frac{\partial g_{1,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2},$$

$$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3} = \exp\{\alpha\}\frac{1}{2+2\varepsilon} + \exp\left\{-\frac{\alpha-\varepsilon}{\varepsilon} + \varepsilon\right\}\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)},$$

$$\frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^3\cap\Omega_\varepsilon^4} = \exp\{\alpha\}\frac{1}{2-2\varepsilon}.$$

注意

$$\frac{\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3} + \frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^3\cap\Omega_\varepsilon^4}}{2} = \frac{\exp\{\alpha\}\frac{1}{2+2\varepsilon} + \exp\left\{-\frac{\alpha-\varepsilon}{\varepsilon}+\varepsilon\right\}\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} + \exp\{\alpha\}\frac{1}{2-2\varepsilon}}{2} =$$

$$= \exp\{\alpha\}\frac{1}{2-2\varepsilon^2} + \exp\left\{-\frac{\alpha-\varepsilon}{\varepsilon}+\varepsilon\right\}\frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)} = b = frac\partial g_{3,\varepsilon}\partial x_2.$$

因此，要检查 B_ε 的可微性，我们只需验证 $\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3} = \frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^3\cap\Omega_\varepsilon^4}$（$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3}$ 以及 $\frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^3\cap\Omega_\varepsilon^4}$ 均为常数，因此我们验证的是常数相等，而不是定义域不同的函数相等）。常数 α 由 (2.5) 定义，它可改写为

$$\exp\left\{(\alpha-\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2},$$

或者，等价地，

$$\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}e^\alpha.$$

因此，

$$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3} = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^\alpha + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \frac{1}{2(1-\varepsilon)}e^\alpha = \frac{\partial g_{4,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^3\cap\Omega_\varepsilon^4}.$$

4.2 $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 的情形。

首先，我们计算

$$\frac{\partial g_{1,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}e^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}};$$

$$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1-\varepsilon^2+x_2}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon}\right) = \frac{1}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon};$$

$$\frac{\partial g_{3,\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}}{1-\varepsilon}\exp\left(x_1+\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}-\varepsilon\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2-2\varepsilon}\exp\left\{|x_1|+\sqrt{\varepsilon+x_1^2-x_2}-\varepsilon\right\}.$$

因此

$$\frac{\partial g_{1,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^1\cap\Omega_\varepsilon^2} = \frac{1}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon} = \frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^1\cap\Omega_\varepsilon^2}$$

and

$$\frac{\partial g_{3,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3} = \frac{1}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon} = \frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{\Omega_\varepsilon^2\cap\Omega_\varepsilon^3}.$$

5 B_ε的局部凹性。

情形 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon \geqslant 1$ 显然。因此，我们可以假设 $\varepsilon \in (0, 1)$。由于我们已经证明了 $B_\varepsilon \in C(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\Omega_\varepsilon \setminus \{(0,0)\})$，只需验证每个 $g_{j,\varepsilon}$ 都是局部凹的；孔洞域上的函数的局部凹性将自动得到（见论文 [2]中的命题 3.1.2）。

5.1 情形 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$。

由于 $g_{1,\varepsilon}$ 只取决于 x_2，因此只需验证 $\frac{\partial^2 g_{1,\varepsilon}}{\partial x_2^2} \leqslant 0$。我们计算

$$\frac{\partial^2 g_{1,\varepsilon}}{\partial^2 x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}}\right) = \frac{1}{4x_2}e^{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{4x_2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{4x_2}e^{\sqrt{x_2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right).$$

因此 $\partial^2 g_{1,\varepsilon}/\partial x_2^2 \leqslant 0$ 当 $x_2 \leqslant 1$ 时，特别是在 Ω_ε^1 上。

要检验 $g_{j,\varepsilon}$ 的局部凹性，对于 $j \geqslant 2$，我们只需在 $\Omega_\varepsilon^j \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 中检验。函数 $g_{3,\varepsilon}\big|_{\Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}}$ 是线性的，因而也是局部凹的。我们有 $g_{4,\varepsilon}\big|_{\Omega_\varepsilon^4 \cap \{x_1 \geqslant 0\}} = B_\varepsilon^{asym}|_{\Omega_\varepsilon^4 \cap \{x_1 \geqslant 0\}}$，而 (2.12) 中定义的 B_ε^{asym} 的局部凹性已在 [9] 中检验过。

因此，我们只需验证 $g_{2,\varepsilon}\big|_{\Omega_\varepsilon^2 \cap \{x_1 \geqslant 0\}}$ 的局部凹性。函数 $g_{2,\varepsilon}$ 沿非竖直线段 $l_u = [(u-\varepsilon, (u-\varepsilon)^2+\varepsilon^2), (u, u^2)] = \{x_1 - \beta = u - \varepsilon\}$ 是线性的。此外，

$$\frac{\partial g_{2,\varepsilon}}{\partial x_2}\Big|_{l_u} = e^u \frac{1}{2+2\varepsilon} + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(u-\varepsilon)+\varepsilon\right)\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

这意味着 $dg_{2,\varepsilon}$ 沿着 l_u 为常数。我们只需检验 $\partial^2 g_{2,\varepsilon}/\partial^2 x_2 \leqslant 0$。计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\exp\{x_1-\beta+\varepsilon\} + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\}\right) = \\ &= \frac{1}{4\beta(1+\varepsilon)}\exp\{x_1-\beta+\varepsilon\} - \frac{1}{4\varepsilon^2\beta(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

因此，不等式 $\partial^2 g_{2,\varepsilon}/\partial^2 x_2 \leqslant 0$ 等价于

$$\frac{1}{4\beta(1+\varepsilon)}\exp\{x_1-\beta+\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2\beta(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\},$$

这可化简为

$$\exp\left\{(x_1-\beta)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

在定义域 $\Omega_\varepsilon^2 \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 上，我们有

$$\exp\left\{(x_1-\beta)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{(\alpha-\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

5.2 情形 $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$。

由于 $g_{1,\varepsilon}$ 仅取决于 x_2，要验证 $g_{1,\varepsilon}$ 的局部凹性，只需检验 $\partial^2 g_{1,\varepsilon}/\partial x_2^2 \leqslant 0$。计算得

$$\frac{\partial^2 g_{1,\varepsilon}}{\partial^2 x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}}\right) = \frac{1}{4x_2}e^{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{4x_2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{4x_2}e^{\sqrt{x_2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right).$$

因此 $\partial^2 g_{1,\varepsilon}/\partial x_2^2 \leqslant 0$ 当 $x_2 \leqslant 1$ 时，特别是在 Ω_ε^1 中。

函数 $g_{2,\varepsilon}$ 是线性的，特别地，它是局部凹的。

为检验 $g_{3,\varepsilon}$ 的局部凹性，我们只需在 $\Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 中进行检验。在那里，我们有 $g_{3,\varepsilon}\big|_{\Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}} = B_\varepsilon^{asym}|_{\Omega_\varepsilon^3 \cap \{x_1 \geqslant 0\}}$，而 B_ε^{asym} 的局部凹性已在文献 [9] 中得到验证。

6 极值函数。

如果 $\langle\varphi\rangle_I = x_1$ 且 $\langle\varphi^2\rangle_I = x_1^2$，那么在 I 上 $\varphi = x_1$ 几乎处处成立。因此 $\langle\exp\{|\varphi|\}\rangle_I = \mathbb{B}_\varepsilon(x_1, x_1^2) = e^{|x_1|}$。所以，我们只需为 $\varepsilon > 0$ 以及 $(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \setminus P$ 构造函数 φ。由对称性，我们只需为 $(x_1, x_2) \in (\Omega_\varepsilon \setminus P) \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ 构造极值函数。

6.1 情形 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$。

6.1.1 Ω_ε^1 上的极值函数。

在 Ω_ε^1 上有 $x_2 \leqslant \varepsilon^2$，因此线段 $\left[\left(-\sqrt{x_2}, x_2\right), \left(\sqrt{x_2}, x_2\right)\right]$ 位于 Ω_ε 中。于是函数 $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \begin{cases}\sqrt{x_2}, & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}},\\ -\sqrt{x_2}, & \text{for } \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}} < t \leqslant 1,\end{cases} \tag{6.1}$$

属于有界平均振荡$_\varepsilon$。我们有 $\left(\langle\varphi\rangle_I,\ \left\langle\varphi^2\right\rangle_I\right)=(x_1,\ x_2)$，并且

$$B_\varepsilon(x_1,\,x_2)=e^{\sqrt{x_2}}=\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_I.$$

6.1.2 Ω^4_ε上的极值函数。

由于 $e^{|x_1|}\geqslant e^{x_1}$，且对于 $x_1\geqslant 0$，我们有 Ω^4_ε 上的 $B_\varepsilon=B^{asym}_\varepsilon$。因此，[9] 中构造的例子是合适的。对于 $\Omega_\varepsilon\setminus P$ 中的点 $(x_1,\ x_2)\in$，有 $\varphi\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varepsilon\log\left(\frac{h}{t}\right)+s, & \text{for } 0\leqslant t\leqslant h,\\ s, & \text{for } h\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{6.2}$$

其中 $h=1-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}$，且 $s=x_1-\varepsilon h$。

6.1.3 Ω^2_ε上的极值函数。

在这类情形下构造极值函数的方法见 [8], ，参见该文第 7.3 小节。考虑由 $[0,\,1]\to\mathbb{R}$ 给出的函数 φ:

$$\varphi(t)=\begin{cases}u_1-2\varepsilon, & \text{for } t\in\left[0,\,\frac{\mu\nu}{2}\right),\\ u_1, & \text{for } t\in\left[\frac{\mu\nu}{2},\,\mu\nu\right),\\ u+\varepsilon\log\left(\frac{t}{\mu}\right), & \text{for } t\in[\mu\nu,\,\nu),\\ u, & \text{for } t\in[\nu,\,1),\end{cases}\tag{6.3}$$

其中

$$u=x_1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-x_2+x_1^2}=x_1+\varepsilon-\beta,\quad \mu=\frac{u-x_1}{\varepsilon},\quad \nu=\exp\left(\frac{u_1-u}{\varepsilon}\right),\ \text{and } u\geqslant u_1.\tag{6.4}$$

根据 [8] 中的引理 7.5，$\left(\langle\varphi\rangle,\ \left\langle\varphi^2\right\rangle\right)=(x_1,\ x_2)$，$\varphi\in$有界平均振荡$_\varepsilon$
且

$$\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]}=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{u}{\varepsilon}}\left(\frac{f(u_1)-f(u_1-2\varepsilon)}{2}e^{\frac{u_1}{\varepsilon}}+\int_{u_1}^{u}f'(s)e^{\frac{s}{\varepsilon}}\,ds\right)(x_1-u)+f(u),\tag{6.5}$$

对于任意合理的函数 f。在我们的情形中，代入 $u_1=\varepsilon$ 和 $f(t)=e^{|t|}$。于是得到

$$\begin{aligned}\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_{[0,1]}&=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{u}{\varepsilon}}\left(\int_\varepsilon^u e^{s\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\,ds\right)(x_1-u)+e^u=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{u}{\varepsilon}}\left.\frac{e^{s\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}}{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right|_\varepsilon^u(x_1-u)+e^u=\\&=(x_1-u)e^{-\frac{u}{\varepsilon}}\left(\frac{e^{u\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}-\frac{e^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)+e^u=e^u\left(1+\frac{x_1-u}{1+\varepsilon}\right)-e^{1+\varepsilon-\frac{u}{\varepsilon}}\frac{x_1-u}{1+\varepsilon}=\\&=\exp(x_1+\varepsilon-\beta)\frac{1+\beta}{1+\varepsilon}-\exp\left(-\frac{x_1+\varepsilon-\beta}{\varepsilon}+1+\varepsilon\right)\frac{\beta-\varepsilon}{1+\varepsilon}=B_\varepsilon(x_1,\,x_2).\end{aligned}$$

6.1.4 $\Omega\Omega^3_\varepsilon$ 上的极值函数。

设 $x=(x_1,\ x_2)\in\Omega^3_\varepsilon$。设 l 是一条经过 x 且不与该集合相交的直线

$$\left\{(x_1,\,x_2)\in\mathbb{R}^2\middle|\,x_2>x_1^2+\varepsilon^2\right\}.$$

那么 l 与线段 $\left[\left(\alpha,\,\alpha^2\right),\left(\alpha-\varepsilon,(\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right)\right]$ 和 $\left[\left(\alpha,\,\alpha^2\right),\left(\alpha+\varepsilon,(\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right)\right]$ 相交。分别设这两个交点为 y 和 z。于是，对于某个 $\gamma\in[0,\,1]$，有 $x=\gamma y+(1-\gamma)z$。根据 6.1.2 小节，存在一个非增函数 $\varphi_y\in$有界平均振荡$_\varepsilon$，使得

$$\left(\langle\varphi_y\rangle_{[0,1]},\,\langle\varphi_y^2\rangle_{[0,1]}\right)=y,\quad B_\varepsilon(y)=\left\langle e^{|\varphi_y|}\right\rangle_{[0,1]},\ \text{and } \varphi_y(1)=\alpha.$$

根据第 6.1.3 小节，我们有一个非递减函数 $\varphi_z\in$有界平均振荡$_\varepsilon$，使得

$$\left(\langle\varphi_z\rangle_{[0,1]},\,\langle\varphi_z^2\rangle_{[0,1]}\right)=z,\quad B_\varepsilon(z)=\left\langle e^{|\varphi_z|}\right\rangle_{[0,1]},\ \text{and } \varphi_z(1)=\alpha.$$

令 φ: $[0,\,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下。

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_z\left(\dfrac{t}{1-\gamma}\right), & \text{for } t\in[0,\,1-\gamma],\\ \varphi_y\left(\dfrac{1-t}{\gamma}\right), & \text{for } t\in(1-\gamma,\,1].\end{cases}$$

于是 $\left(\langle\varphi\rangle_{[0,1]},\ \langle\varphi^2\rangle_{[0,1]}\right)=\gamma y+(1-\gamma)z=x$ 并且根据函数 $B_\varepsilon\big|_{\Omega_\varepsilon^3}$ 的线性性，我们有

$$\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_{[0,1]}=\gamma\left\langle e^{|\varphi_y|}\right\rangle_{[0,1]}+(1-\gamma)\left\langle e^{|\varphi_z|}\right\rangle_{[0,1]}=\gamma B_\varepsilon(y)+(1-\gamma)B_\varepsilon(z)=B_\varepsilon(x).$$

此外， φ 是非递减的。由于 $[y,\,z]\subseteq\Omega_\varepsilon$ ，由论文 [11] 中的推论 3。12 和 3。13 可知，$\varphi\in$ 有界平均振荡$_\varepsilon$。

6.2 情形 $\varepsilon\in\left[\frac{1}{2},\,1\right)$。

6.2.1 $\Omega\Omega_\varepsilon^1$上的极值函数。

在 Ω_ε^1 上，我们有 $x_2\leqslant(1-\varepsilon)^2\leqslant\varepsilon^2$，因此线段$\left[\left(-\sqrt{x_2},\,x_2\right),\,\left(\sqrt{x_2},\,x_2\right)\right]$ 包含于 Ω_ε。于是函数φ: $[0,\,1]\to\mathbb{R}$

$$\varphi(t)=\begin{cases}\sqrt{x_2}, & \text{for } 0\leqslant t\leqslant\frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}},\\ -\sqrt{x_2}, & \text{for } \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}<t\leqslant 1.\end{cases}\tag{6.6}$$

属于有界平均振荡$_\varepsilon$，并满足

$$\left(\langle\varphi\rangle_I,\,\langle\varphi^2\rangle_I\right)=(x_1,\,x_2),$$
$$B_\varepsilon\left(x_1,\,x_2\right)=e^{\sqrt{x_2}}=\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_I.$$

6.2.2 Ω_ε^3上的极值函数。

由于 $e^{|x|}\geqslant e^x$ ，且对于 $x_1\geqslant 0$ ，我们有 $B_\varepsilon=B_\varepsilon^{asym}$在 Ω_ε^3上，因此 [9] 中构造的例子是合适的。对于点 $(x_1,\ x_2)\in\Omega_\varepsilon\setminus P$，有 φ: $[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varepsilon\log\left(\frac{h}{t}\right)+s, & \text{for } 0\leqslant t\leqslant h,\\ s, & \text{for } h\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{6.7}$$

其中 $s=1-\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}$且 $h=x_1-\varepsilon s$。

6.2.3 Ω_ε^2上的极值函数。

设 $x=(x_1,\ x_2)\in\Omega_\varepsilon^2$。再设 l 为一条经过 x 且不与该集合相交的直线

$$\left\{(x_1,\,x_2)\in\mathbb{R}^2\middle|\,x_2>x_1^2+\varepsilon^2\right\}.$$

在这种情况下， $l\cap\Omega_\varepsilon^2$ 是一条线段，记作 $[y,\,z]$。那么，对于某个 $\gamma\in[0,\,1]$，有 $x=\gamma y+(1-\gamma)z$。根据第 6.2.1 和 6.2.2 小节的结果，我们有函数 φ_y，$\varphi_z\in$ 有界平均振荡$_\varepsilon$，使得

$$\left(\langle\varphi_y\rangle_{[0,1]},\,\langle\varphi_y^2\rangle_{[0,1]}\right)=y,\ \ B_\varepsilon(y)=\left\langle e^{|\varphi_y|}\right\rangle_{[0,1]},\ \ \left(\langle\varphi_z\rangle_{[0,1]},\,\langle\varphi_z^2\rangle_{[0,1]}\right)=z,\ \ B_\varepsilon(z)=\left\langle e^{|\varphi_z|}\right\rangle_{[0,1]}\text{ and }\varphi_z(1)=\alpha.$$

令 $\tilde{\varphi}$: $[0,\,1]\to\mathbb{R}$定义如下:

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi_z\left(\dfrac{t}{1-\gamma}\right), & \text{for } t\in[0,\,1-\gamma],\\ \varphi_y\left(\dfrac{1-t}{\gamma}\right), & \text{for } t\in(1-\gamma,\,1].\end{cases}$$

设 φ 是 $\tilde{\varphi}$ 的非递减重排（等测非递减函数）。那么 $\left(\langle\varphi\rangle_{[0,1]},\ \langle\varphi^2\rangle_{[0,1]}\right)=\gamma y+(1-\gamma)z=x$，根据函数 $B_\varepsilon\big|_{\Omega_\varepsilon^3}$ 的线性性，我们有:

$$\left\langle e^{|\varphi|}\right\rangle_{[0,1]}=\gamma\left\langle e^{|\varphi_y|}\right\rangle_{[0,1]}+(1-\gamma)\left\langle e^{|\varphi_z|}\right\rangle_{[0,1]}=\gamma B_\varepsilon(y)+(1-\gamma)B_\varepsilon(z)=B_\varepsilon(x).$$

由于 $[y,\, z] \subseteq \Omega_\varepsilon$，由 [11] 的推论 3。12 和 3。13 可知 $\varphi \in$ 有界平均振荡 $_\varepsilon$。例如，对于点 $\left(0,\ \varepsilon^2\right)$，我们得到以下函数：

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\varepsilon \log\left(\frac{2\varepsilon-1}{4\varepsilon t}\right) - 1 + \varepsilon, & \text{for } t \in \left[0,\ \frac{2\varepsilon-1}{4\varepsilon}\right], \\ -1+\varepsilon, & \text{for } t \in \left[\frac{2\varepsilon-1}{4\varepsilon},\ \frac{1}{2}\right], \\ 1-\varepsilon, & \text{for } t \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{2\varepsilon+1}{4\varepsilon}\right], \\ \varepsilon \log\left(\frac{2\varepsilon-1}{4\varepsilon(1-t)}\right) + 1 - \varepsilon, & \text{for } t \in \left[\frac{2\varepsilon+1}{4\varepsilon},\ 1\right]. \end{cases}$$

6.3 $\varepsilon \geqslant 1$的情形。

由于该情形下有 $e^{|x|} \geqslant e^x$ 和 $B_\varepsilon = B_\varepsilon^{asym}$，因此 [9] 中构造的例子适用。对于点（$x_1,\ x_2$）$\in \Omega_\varepsilon \setminus P$，有 φ: $[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varepsilon \log\left(\frac{a}{t}\right) + b, & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant a, \\ b, & \text{for } a \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{6.8}$$

其中 $a = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}$和 $b = x_1 - \varepsilon a$。

参考文献

[1] P. Ivanishvili、N. N. Osipov、D. M. Stolyarov、V. I. Vasyunin 和 P. B. Zatitskiy, 《有界平均振荡中极值问题的贝尔曼函数》, 《美国数学会会刊》368（2016）, 3415–3468。[2] P. Ivanishvili、D. M. Stolyarov、V. I. Vasyunin 和 P. B. Zatitskiy, 《有界平均振荡中极值问题的贝尔曼函数 II：演化》, 《美国数学会回忆录》255（2018）, 第 1220 号。[3] F. John、L. Nirenberg, 《有界平均振荡函数》, 《纯粹与应用数学通讯》, 第 14 卷（1961）, 415–426 页。[4] A. A. Korenovskii, 《平均振荡与函数的精确可积类之间的联系》, 《数学文集》181:12（1990）, 1721–1727；译载于《苏联数学文集》71:2（1992）, 561–567。[5] A. Lerner, 《具有尖锐常数的约翰–尼伦伯格不等式》, 《数学报告》351:11-12（2013）, 463–466。[6] A. Osekowski, 《尖锐鞅不等式与半鞅不等式》, 波兰科学院数学研究所数学专著 72, 施普林格巴塞尔, 2012。[7] L. Slavin, 《有界平均振荡的约翰–尼伦伯格常数》^{p}, $1 \le p \le 2$, https://arxiv.org/abs/1506.04969。[8] L. Slavin 和 V. Vasyunin, 《有界平均振荡上的尖锐 L^p 估计》, 《印第安纳大学数学杂志》61（2012）, 1051–1110。[9] L. Slavin、V. Vasyunin, 《积分形式的约翰–尼伦伯格不等式中的尖锐结果》, 《美国数学会会刊》363:8（2011）, 4135–4169。[10] L. Slavin、V. Vasyunin, 《有界平均振荡的约翰–尼伦伯格常数》^{p}, $p > 2$, 《代数与分析》28:2（2016）, 72–96（俄文）, 译载于《圣彼得堡数学杂志》28（2017）, 181–196。[11] D. M. Stolyarov 和 P. B. Zatitskiy, 《局部凹函数理论及其在积分泛函尖锐估计中的应用》, 《数学进展》291（2016）。[12] D. Stolyarov 和 P. Zatitskiy, 《有界平均振荡与 A_p的尖锐传递原理》, 《函数分析杂志》281（2021）, 第 6 号, 109085。[13] V. Vasyunin、A. Volberg, 《约翰–尼伦伯格不等式经典弱形式中的尖锐常数》, 《伦敦数学学会会刊》108:6（2014）, 1417–1434。[14] V. Vasyunin 和 A. Volberg, 《调和分析中的贝尔曼函数技巧》, 剑桥大学出版社, 2020。