arXiv:2302.12768v1 [math.HO] 20 Feb 2023

非欧几里得平面新模型

PIOTR BŁASZCZYK，ANNA PETIURENKO

摘要。我们提出了一个非欧几里得平面的新模型，在该模型中，三角形内各角之和为 π。它是定义在超实数域上的笛卡尔平面的一个子空间 $\mathbb{R}^*$。该模型使人们能够表示平行公理各种等价表述的否定，例如三角形外接圆的存在性、沃利斯公理或勒让德公理，并展现非欧几里得平面与双曲平面之间的差异。

该模型具有独特的教育优势，因为阐释其核心思想只需要笛卡尔几何和非阿基米德域的基础知识。

关键词：平行公设，半欧几里得平面，双曲几何，超实数

目录

1. 引言 2 2. 欧几里得几何与双曲几何的希尔伯特公理 3 3. 半欧几里得平面 4 3.1. 超实数域上的笛卡尔平面 4 3.2. 三角形外接圆、沃利斯公理与勒让德公理 6 3.3. 三角学 8 4. 极限平行射线 9 参考文献 10

1. 引言

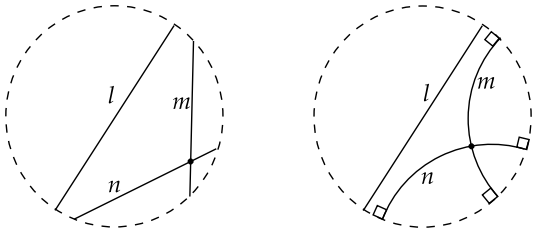


图 1. 克莱因圆盘（左）和庞加莱圆盘（右）中的直线。

克莱因圆盘和庞加莱圆盘是非欧几何的经典模型。二者都由欧几里得平面中的一个固定圆组成，例如 Γ，用来表示该平面。在克莱因圆盘中，Γ 的弦是直线；在庞加莱圆盘中，直线是 Γ 的直径，或是与 Γ 正交的圆弧（图 1）。

在庞加莱模型中，相交圆之间的角是指在它们的交点处作出的切线之间的欧几里得角（图 2）。在克莱因圆盘中，相交直线之间的角可按照图 3所示，从庞加莱模型中求得：对于直线 n，m，我们作出与 Γ 正交的圆，并确定它们之间的角。

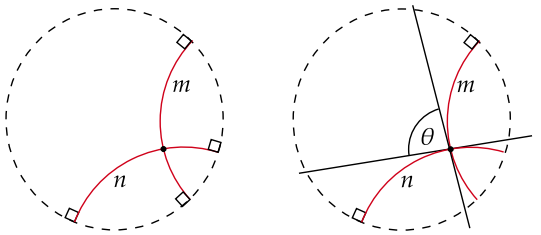


图 2. 庞加莱圆盘中的角。

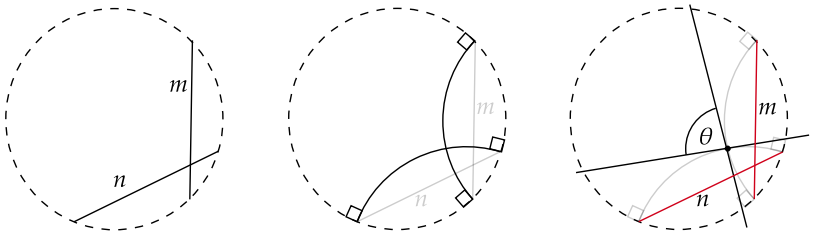


图 3. 克莱因圆盘中的角。

因此，非欧几里得平面的标准模型对直线（庞加莱模型）或角（克莱因模型）采用了非欧几里得表示。我们提出一种模型，其中直线和角都是欧几里得的，因为它将有序域上的笛卡尔平面中的直线和角概念直接引入其中。

欧几里得平面是满足平行公理和圆—圆相交公理的希尔伯特平面。在一个对开平方运算封闭的有序域（即欧几里得域）上构造的笛卡尔平面为欧几里得平面提供了一个模型 [7, 153]。我们的论文第3节介绍了一个由超实数组成的非阿基米德域$(\mathbb{R}^*,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ <)$。由于它是一个欧几里得域，笛卡尔平面$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$是欧几里得几何的一个模型。我们证明，其子空间 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$，其中$(\mathbb{L},\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$是有限超实数环，是一个半欧几里得平面；也就是说，它满足所谓绝对几何的希尔伯特公理，不满足平行公理和阿基米德公理，但任意三角形的角之和等于 π（即两个直角）。

2. 欧几里得几何与双曲几何的希尔伯特公理

希尔伯特的几何基础从 [8]到 [10] 共出版了十一个版本。 [7]包含了根据教育实践调整后的现代版本。其中介绍的希尔伯特公理与原始版本的区别仅在于采用了现代符号。[1]

希尔伯特根据原始概念——点、直线、平面，以及介于关系、线段全等和角——对公理进行了分组。本文将讨论其中三条。

阿基米德公理
给定线段 AB 和 CD，存在一个自然数 n，使得将 AB 复制 n 次并相加后，所得长度大于 CD。

平行公理
对于每个点 A 和每条直线 l，至多有一条经过 A 且平行于 l的直线。

双曲平行公理
如果 l 是任意一条直线， A 是直线外一点，那么经过 A 存在两条射线$AX^{\rightarrow}$和 $AY^{\rightarrow}$，它们不在同一条直线上，且都不与直线 l相交；而从 A 出发、位于 $AX^{\rightarrow}$和 $AY^{\rightarrow}$ 所成角内的每条射线都与 l相交。[2]

绝对（中性）几何由关联公理、介于关系公理、线段和角的全等公理组成。也可以将其视为命题《几何原本》 I.1–28的集合。

一般来说，平行线不会相交。在中性几何中，借助角的搬运，可以作出一条经过 A 且不与 l相交的直线。因此，希尔伯特平行公理可表述为：恰有一条直线经过 A 并平行于 l。[3] 接下来，在双曲几何中

[1] [6, 597–602] 简明介绍了希尔伯特公理；另见 [3]。[2] 参见 [9, 136], [6, 259], [7, 374]。
[3] [3, 75–77] 讨论了希尔伯特平行公理与欧几里得平行公理之间的关系。

除了不相交的直线外，还要考虑极限射线。因此，欧几里得平行公理要求经过 A 且不与 l相交的直线恰有一条；其否定则要求经过A 且不与 l相交的直线至少有两条；双曲平行公理要求从 A出发且不与 l相交的极限射线恰有两条。接下来，我们将介绍一个并非双曲几何的非欧几里得平面。

3. 半欧几里得平面

本节将介绍一个半欧几里得平面的模型，即一个其中三角形内角之和等于 π 但平行公设不成立的平面。 [7, 311],提出了这一术语，但这一思想本身源自 [4, §9]。Dehn 借助 [8, §12] 中引入的一个非阿基米德毕达哥拉斯域构造了这样的模型；然而，它是一个非欧几里得域。[4] 我们采用超实数的欧几里得域。具体而言，让我们先介绍这些数。

3.1. 超实数域上的笛卡尔平面。有序域（$\mathbb{F}$、 $+$、 $\cdot$、0、1、 $<$）是一个交换域，并带有与加法和乘法相容的全序。在这样的域中，可以定义 $\mathbb{F}$ 的以下子集：

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{F} : (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n)\},$$
$$\Psi = \{x \in \mathbb{F} : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| > n)\}, \quad \Omega$$
$$= \{x \in \mathbb{F} : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| < \tfrac{1}{n})\}。 -$$

它们分别称为有限数、无限数和无穷小数。以下是一些有助于展开论证的关系。

$$(\forall x, \ y \in \Omega)(x + y \in \Omega \ xy \in \Omega), \ ($$
$$\forall x, \ y \in \mathbb{L})(x + y \in \mathbb{L}, \ xy \in \mathbb{L}), \ ($$
$$\forall x \in \Omega)(\forall y \in \mathbb{L})(xy \in \Omega), \ (\forall x \neq 0)($$
$$x \in \Omega \ \Leftrightarrow \ x^{-1} \in \Psi)。$$

我 们还可以用诸如 $\Omega + \Omega \subset \Omega$ 或 $\Omega\Omega \subset \Omega$ 等项来表示这些规则。为澄清我们的论述，我们注意到，以下等式 $\Omega = \{0\}$ 是著名阿基米德公理的一种表述。

由于实数构成最大的阿基米德域，$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ 的每个域扩张都包含正无穷小。扩张实数的标准方法采用形式幂级数；下面我们将概述另一种方法。

设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。超实数集合定义为约化积 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$。加法、乘法和序关系均按点态方式定义。超实数域 $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, 0, 1, <)$ 是实数的扩张，因此包含无穷小量和无限数 [1], [2]。图 4以示意图的方式表示 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^*$之间，以及 $\mathbb{L}$、 Ψ与 Ω之间的关系。

为了获得代数洞见，我们注意到有限数构成一个有序环，而无穷小量是其极大理想。根据所谓的标准部分

[4]另见 [7, §18]。例 18.4.3 详细阐述了 Dehn 模型。

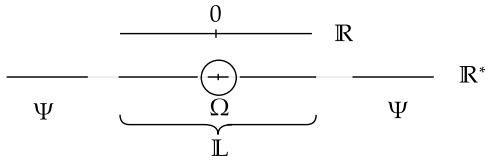


图 4. 实数直线及其向超实数的扩张。

定理，可以证明该商环与实数域同构。因此，集合 $\mathbb{L}$ 具有以下表示形式

$$\mathbb{L} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} r + \Omega.$$

尽管下图聚焦于坐标系的原点，但考虑任意一点（r，s），其中 r，$s \in \mathbb{R}$，以及它的无穷小邻域，即（r，s）$+\Omega \times \Omega$，简写为（r，s）$+\Omega^2$，我们也可以重述上述论证。

在下文第 § 3.3 节中，我们将说明如何引入三角函数以及实映射的其他对应物，例如平方根。因此，超实数域是一个欧几里得域。

根据命题 [7, 16.2], ，超实数域上的笛卡尔平面是欧几里得平面的一个模型，其中直线和圆由方程$ax + by + c = 0$、$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$给出，其中 a、b、c、$r \in \mathbb{R}^*$；并且根据直线方程，参数 a、b 必须满足条件 $a^2 + b^2 \neq 0$；直线之间的角与实数域上的笛卡尔平面中的定义相同。具体来说，在平面 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$中，三角形的内角和为 π。平行线的形式为 $y = mx + b$ 和 $y = mx + c$，而直线 $y = mx + b$ 的垂线由公式 $y = -\frac{1}{m}x + d$给出。

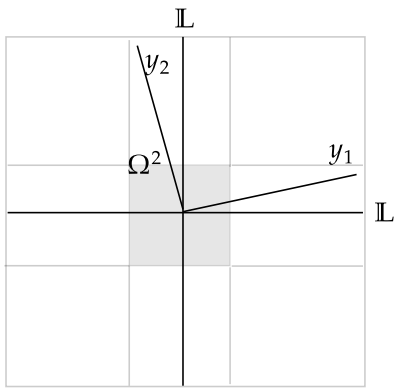


图 5. 斜率为无穷小量和无限大的垂线。

现在，取平面 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$的一个子空间 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$。在该平面中，圆由类似的公式定义，即 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$，其中 $a,\ b,\ c,\ r \in \mathbb{L}$；而 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 中的每条直线都具有形式 $l \cap \mathbb{L} \times \mathbb{L}$，其中 l 是 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$中的一条直线。由于我们希望平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 包含诸如 $y_1 = \varepsilon x$这样的直线，其中 $\varepsilon \in \Omega$，因此它也必须包含垂线 $y_2 = \varepsilon^{-1} x$，但是 $\varepsilon^{-1} \notin \mathbb{L}$。公式 $l \cap \mathbb{L} \times \mathbb{L}$，其中$l = ax + by + c$且 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^*$保证了直线 y_2 在$\mathbb{L} \times \mathbb{L}$中存在。最后，角的解释与模型 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$中的相同。

明确的检验表明，上述模型满足绝对平面几何的希尔伯特公理，以及圆圆公理和直线圆公理；参见[7, §14–17]。

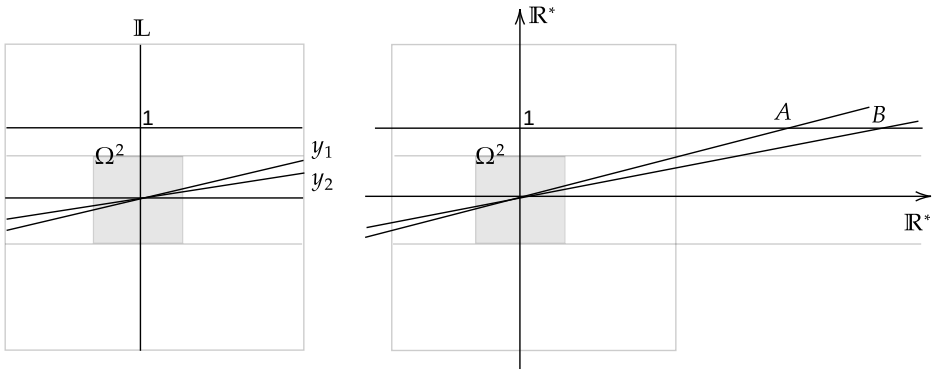


图6。非欧几里得平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 与欧几里得平面 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$。

关于平行线，我们考察水平线 $y \equiv 1$ 以及经过（0，0）的两条特定直线，即 $y_1 = \varepsilon x$、$y_2 = \delta x$，其中 ε、$\delta \in \Omega$；见图6。由于 $\Omega\mathbb{L} \subset \Omega$，以下包含关系成立：$y_1$、$y_2 \subset \mathbb{L} \times \Omega$。换言之，映射 $y_1(x)$ $y_2(x)$ 的值都是无穷小量，因为 $x \in \mathbb{L}$。对于任意形如 $y = \mu x$的直线也同样成立，其中 $\mu \in \Omega$。由于存在无穷多个无穷小量，因此存在无穷多条经过（0，0）且不与水平线相交的直线$y \equiv 1$。

由于 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 中的每个三角形都是 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$中的三角形，因此平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 上的三角形内角之和为 π（图 7）。

3.2. 三角形外接圆、沃利斯公理和勒让德公理。 在我们的模型中，可以很容易地找到各种版本的平行公理的反例。下面我们讨论其中三个。

在《几何原本》第四卷命题5中，欧几里得要求作一个经过给定三角形三个顶点的圆。为此，他假设三角形两边的垂直平分线相交。事实上，交点就是三角形外接圆的圆心。这样的外接圆存在，与平行公理等价。下面我们将说明，在平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 中这一结论不成立。

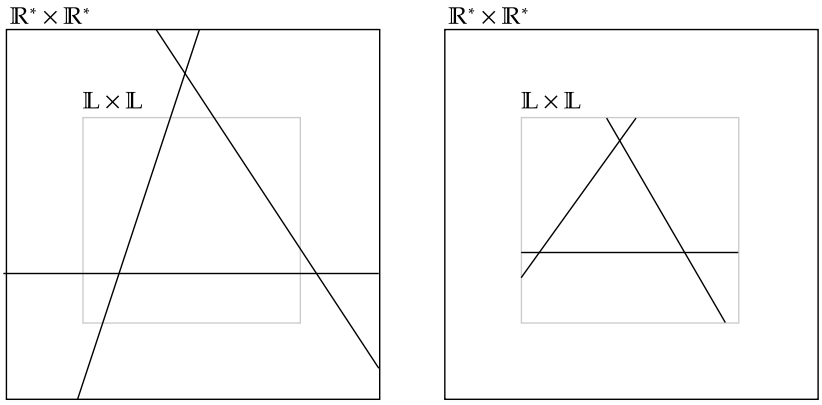


图7。欧几里得平面中的三角形 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ 及其子空间$\mathbb{L} \times \mathbb{L}$。

取直线 $y \equiv -\varepsilon$ 及其上的点 $A = (-1, -\varepsilon)$、 $B = (1, -\varepsilon)$。经过点 $C = (0, 0)$ 和 A 的直线方程为 $y = \varepsilon x$。边 AB 和 AC 的垂直平分线方程分别为 $x = 0$ 和 $2x+2\varepsilon y+\varepsilon^2+1 = 0$。它们交于点 $\left(0, -\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)$。然而， $\left(0, -\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) \notin \mathbb{L} \times \mathbb{L}$。图 8 展示了三角形 ABC 各边的三条垂线。

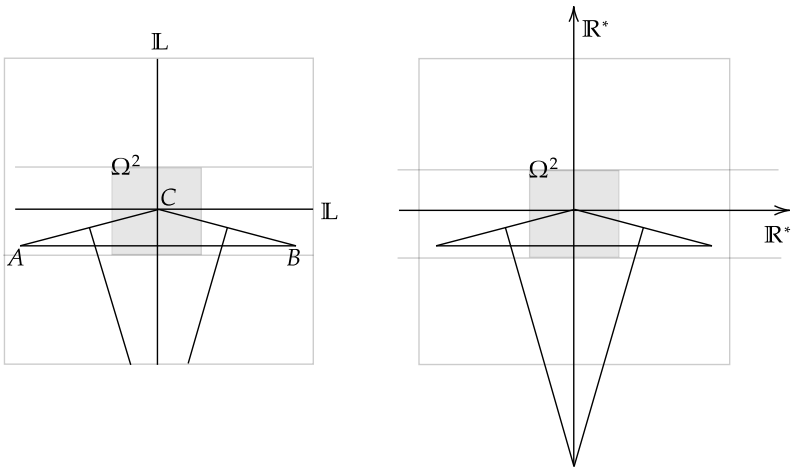
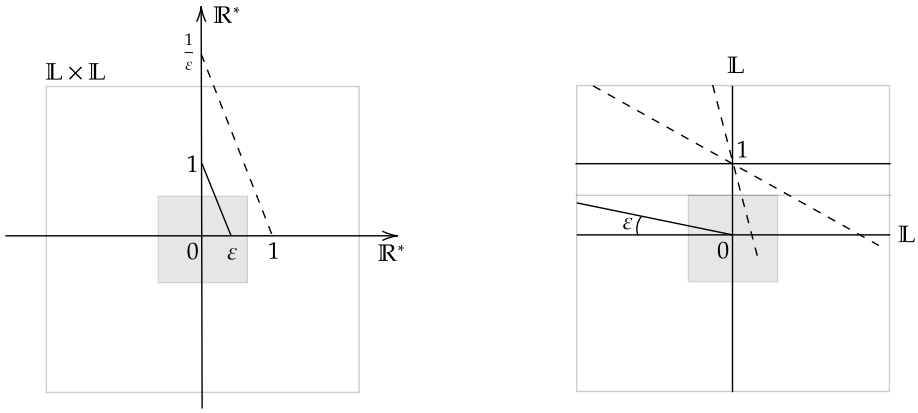


图8。在 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 中没有外接圆的三角形（左）及其在 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ 中的对应图形（右）。

所谓的 Wallis 公理表述如下：给定任意三角形 $\triangle ABC$ 并给定任意线段 DE，存在一个三角形 $\triangle DEF$，使 DE 成为其一条边，且 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ [6, 216]。

这是平行公理 [6, 216–217] 的又一个等价表述。



(a) Wallis 公理。 (b) 勒让德公理。

图9

设 ABC 是一个三角形，其顶点为 O、$(\varepsilon,0)$、$(1,0)$，并取 $DE=[0,1]$。那么，与三角形 ABC 等角的三角形 DEF 有一个顶点 $F=(0,\frac{1}{\varepsilon})$ 位于平面 $\mathbb{L}\times\mathbb{L}$ 之外。

最后，让我们来看看勒让德公理，其内容如下：对于任意一个角和任意一点A 位于该角内部的点，都存在一条经过 A 且不经过该角顶点的直线，该直线与角的两边均相交 [6, 223]。

在阿基米德公理 [7, 324]成立的前提下，勒让德公理等价于平行公理。

为说明它在我们的模型中不成立，取 $A=(0,1)$，并取一个角，其两边由从 O出发的射线 $y_1\equiv 0$ 和 $y_2=\tan(\pi-\varepsilon)x$ 构成。现在，任何与 y_1相交的直线都不与 y_2相交。此外，直线 $y_3\equiv 1$ 不与该角的任何一边相交。

3.3. **三角学**。 设 f 为一个实映射，即 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$。其扩张为定义在 $\mathbb{R}^*$， f^* 上的映射 $\mathbb{R}^*\mapsto\mathbb{R}^*$，定义为

$$f^*([(r_n)])=[(f(r_1),f(r_2),...)]. \tag{3.1}$$

如果 $r\in\mathbb{R}$，那么 $f^*(r)=[(f(r)\ f(r)\ .....)]$。由于我们将实数 r与超实数 $[(r,\ r,\ ...\ ...)]$,认同，等式 $f^*([(r,\ r,\ .....)])=f(r)$ 成立，这意味着 f^*扩张了f， $f^*_{|\mathbb{R}}=f$。

代入 $f=\sqrt{}$ 定义（3.1），得

$$\sqrt{[(r_n)]}^*=[(\sqrt{r_n})]=[(\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},...)],\quad \text{for}\quad [(r_j)]>0.$$

根据定义，相似性（3.1），我们有

$$\sin^*[(r_n)]=[(\sin r_1,\sin r_2,...)],\quad \cos^*[(r_n)]=[(\cos r_1,\cos r_2,...)].$$

由于对每个 n，恒等式 $\sin^2 r_n + \cos^2 r_n = 1$ 成立，因此我们有

$$(\sin^* x)^2 + (\cos^* x)^2 = 1.$$

同样，每个三角恒等式都会转化为一个涉及映射 $\sin^*$ 和 $\cos^*$、$\tan^*$ 和 $\cot^*$ 的恒等式。将角和旋转解释为 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$中的概念后，便可以应用这些 *映射。然而，在几何学者中，这种引入三角学的方式并不流行。

在毕达哥拉斯域上的笛卡尔平面中处理角时，也就是说，该域在运算 $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$下封闭，希尔伯特的解法如下 [8,§9]。设点 O、E、C的坐标分别为 (0, 0)、(1, 0)、(c_x, c_y)。那么，将角 $\angle EOC$ 绕点 O 旋转，会把点 (x, y)变为以下定义的点 (x', y')

$$x' = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} x - \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} y,$$

$$y' = \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} x + \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} y.$$

因此，术语$\frac{c_x}{\sqrt{c_x^2+c_y^2}}x$和 $\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2+c_y^2}}y$旨在模拟角$\angle COE$的余弦和正弦，不过，它们在任何毕达哥拉斯域中都有意义。

在笛卡尔平面中考察角和旋转时，Hartshorne 模仿实函数 tan。[5] Greenberg 排除了非阿基米德欧几里得域中的庞加莱长度。[6] 马克斯·德恩在非阿基米德毕达哥拉斯域上引入了半欧几里得平面。事实上，很长一段时间以来，人们都不知道存在非阿基米德欧几里得域，这或许是希尔伯特没有将圆圆公理引入其公理系统的原因。当时已知的非阿基米德域只有毕达哥拉斯域。

4. 极限平行射线

本节通过考察极限平行射线，证明平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 不是双曲平面。

取点 $A = (0, \varepsilon)$，其中 ε是某个正无穷小量。射线 $y_1 = \varepsilon^2 x + \varepsilon$和 $y_2 = -\varepsilon^2 x + \varepsilon$ 经过 A 且不相交于 $y_3 \equiv 0$。假设 $y = \delta x + \varepsilon$ 是极限射线，也就是说，任何位于边为 y 和 AO的角内的直线都与 y_3相交。斜率 δ必须满足条件 $\frac{-\varepsilon}{\delta} \in \Psi$。然而， $y_5 = \sqrt{\delta}x + \varepsilon$位于边为 y 和 $\overline{AO}$的角内，经过 A 且不与 y_3相交。因此，$\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 不是双曲平面。

通常，非欧几里得且非双曲平面是通过一些涉及域的代数性质的技巧来建模的。例如，它可以是定义在非欧几里得的毕达哥拉斯域上的庞加莱圆盘。我们的平面 $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ 并非双曲平面，因为它是半欧几里得的。不过，我们还可以观察到

[5]参见 [7, §16–17]。

[6]参见 [6, 320]。

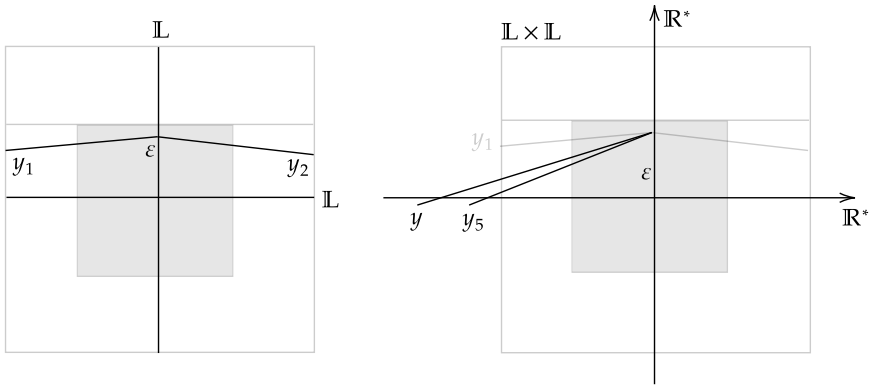


图10. 极限平行射线

欧几里得平行公理和双曲平行公理都不成立，因为该平面中的直线过于“短”。

参考文献

[1] Błaszczyk, P.：2016，《代数学基本定理的纯代数证明》。AUPC **8**, 6 22 3638 –；[2] 2021, https://didacticammath.up.krakow.pl/article/view/ Błaszczyk, P.：伽利略悖论与基数。《科学中的哲学问题》70，73–107。[3] Błaszczyk, P., Petiurenko, A.：2021，13，43 93，《几何原本》第一卷评注。AUPC –；https://didacticammath.up.krakow.pl/article/view/ 5386 [4] 1900, Dehn, M.：Legendre关于三角形内角和的定理。《数学年刊》53(3)，404–439。[5] Fitzpatrick, R.：2007，R. Fiztpatrick 译《欧几里得〈几何原本〉》；http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf [6] Greenberg, M.：2008，《欧氏几何与非欧几何》，Freeman出版社，纽约。[7] Hartshorne, R.：2000，《几何学：欧几里得及其后》，施普林格出版社，纽约。[8] Hilbert, D.：1899：《几何基础》。为庆祝哥廷根高斯-韦伯纪念碑揭幕而作的纪念文集。Teubner出版社，莱比锡，1899，1–92。载于：K. Volkert（编），David Hilbert，《几何基础》（1899年纪念文集），施普林格出版社，柏林，2015。[9] Hilbert, D.：1971：《几何基础》。L. Unger 译。Open Court出版社，伊利诺伊州拉萨尔。[10] Hilbert, D.：1972，《几何基础》。Teubner出版社，斯图加特。[11] Petiurenko, A.：2022，《中学及准教师几何基础》。博士论文。克拉科夫教育大学，克拉科夫。