arXiv:2302.12775v2 [math.CO] 9 Mar 2023

极大团与二分团覆盖数的边排序界

Bochuan Lyu[a], *, Illya V. Hicks[a]

[a]*Rice University, Department of Computational Applied Mathematics and Operations Research, United States of America*

摘要

图 G 的二分团覆盖数（bc）是覆盖该图所有边所需的完全二部图（二分团）子图的最小数量。本文证明，对于任意图 G，有 $\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil \geq \lceil \log_2(\chi(G)) \rceil$，其中 $\chi(G)$是 G 的色数，$\mathrm{mc}(G^c)$是补图 G^c的极大团数量，即 G的极大独立集数量。我们还证明，与现有的其他下界相比，$\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 可以成为二分团覆盖数一个严格更紧的下界。此外，我们还可以给出 $\mathrm{bc}(G)$ 关于 G的二分团划分数（bp）的界：$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G) + 1) \rceil$，或者 $\mathrm{bp}(G) \leq 2^{\mathrm{bc}(G)} - 1$，若 G 是余弦图。此外，我们证明 $\mathrm{bc}(G) \leq \chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$，其中 G 是一个余弦图，且每个顶点至多属于两个极大独立集；$\chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$是 G^c的团树的最优边排序数。

关键词：二分团覆盖、极大团、二分团划分，
树的边排序、余弦图

1. 引言

图 G 的二分团覆盖数（bc）是指覆盖图中所有边所需的完全二部子图（二分团）的最小数量。图 G 上的最小二分团（边）覆盖问题（MBCP）是指

*通讯作者*Email addresses:* bl46@rice.edu (Bochuan Lyu), ivhicks@rice.edu (Illya V. Hicks)

寻找这样一组二分团，即二部团覆盖，其基数等于 G的二分团覆盖数。Orlin [27]最早证明该问题是NP完全的。MBCP不仅在一般图上很复杂，在某些特殊图类上也同样棘手。M¨uller [24] 证明，MBCP在弦二部图上仍然是NP完全的。多项研究关注了MBCP的近似算法 [4, 11, 30], ，但结果表明，即使只是近似求解MBCP，也不存在高效算法。 [4]证明，除非P =NP，否则对于任意 $\epsilon > 0$, 都无法在多项式时间内将其近似到小于 $O(|V|^{1-\epsilon})$或 $O(|E|^{1/2-\epsilon})$的因子。

尽管在一般图上求解 MBCP 很困难，但一些结构良好的图的二部团覆盖数已为人所知，例如完全图、 $2n$ 个顶点的冠图 [5], 以及网格图 [13] ； 此外，对于某些特殊图类，例如无四圈图 [24], 和无骨牌图 [2]，存在可在多项式时间内精确求解该问题的算法。

与 MBCP 相关的一个问题是布尔（二进制）矩阵分解（k-BMF）。 k-BMF 的目标是在某种范数下，将大小为 $m \times n$ 的 0-1矩阵分解为两个大小分别为 $m \times k$ 和 $k \times n$ 的 0-1矩阵的布尔积。0-1矩阵的布尔秩是能够实现精确分解的最小二分团数（两个矩阵的布尔积恰好等于原矩阵）。Monson等人 [23] 证明，求 0-1矩阵的布尔秩等价于在由该矩阵表示的二部图上求解 MBCP。

本文还建立了余弦图上的 MBCP 与另一类组合优化问题——树的最优边排序之间的联系。Iyer 等人 [18] 提出了一种用于求解树的最优边排序的多项式时间近似算法，其最坏情况下的性能比为 2，并将该问题是否为 NP-hard 留作一个开放问题。后来，Torre 等人 [6]证明可以在多项式时间内找到最优解。Zhou 和 Nishizeki [32, 33] 为树的最优边排序提出了一种运行时间为 $O(n^2)$ 的算法，随后将时间复杂度改进至 $O(n\log\ n)$。在一项较新的研究中，Lam 和 Yue [20] 设计了一种线性时间算法，可最优地求解该问题。

在应用方面，G¨unl¨uk [12] 利用二分团覆盖数，为多商品流问题中的最小割最大流比提供了一个上界。Epasto 和 Upfal [8] 研究了两个计算生物学问题：人类白细胞抗原（HLA）血清学 [25], , 以及由 [26]提出的 Mod-Resc 简约推断问题。在计算机系统领域，Ene 等人 [7] 研究了二部图上 MBCP 的启发式算法，以解决基于角色的访问控制系统中的角色挖掘问题。 [1] 也研究了二部图上 MBCP 的另一种启发式算法，用于解决约束满足问题中出现的有限自动机最小化问题。 [16]还针对汇合绘图研究了二分团边覆盖图；汇合绘图是一个研究如何在平面上绘制非平面图的领域。Huchette 和 Vielma [17] 以及 Lyu 等人 [22] 求解 MBCP，以寻找析取约束的紧凑且强有力的混合整数规划（MIP）表述。

在第 2 节中，我们将介绍图论中的一些基本符号。在第 3 节中，我们将证明，图 G 的二分团覆盖数不小于 $\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$，其中 $\mathrm{mc}(G^c)$ 是补图 G^c 的极大团数。我们还将讨论这一新下界不劣于 [15] 中的界，并说明这一新下界可能优于其他已有的界 [9, 19]。在第 4 节中，我们还将证明，对于余弦图 G，$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G) + 1) \rceil$ 或 $\mathrm{bp}(G) \leq 2^{\mathrm{bc}(G)} - 1$，其中 $\mathrm{bp}(G)$ 是 G的二分团划分数。如果 G 是余弦图且 $\mathrm{bc}(G) > 1$，那么这是一个优于 $\mathrm{bp}(G) \leq \frac{1}{2}(3^{\mathrm{bc}(G)} - 1)$ [28] 的界。接着，我们将在第 4 节中重点介绍一种在余弦图上寻找二部团覆盖的启发式算法。通过界定算法 3 中该启发式算法返回的二部团覆盖的大小，余弦图 G 的二分团覆盖数至多为 $\mathrm{mc}(G^c) - 1$；如果 G 中的每个顶点至多属于 G的两个极大独立集，我们还可以利用 G^c的团树的最优边排序数，给出 G 的一个更紧的上界。接着，我们将证明，如果 G 中的每个顶点至多属于 G 的两个极大独立集，并且 G^c 有一棵最优边排序数为 $\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$的团树，那么 $\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 。在第 5 节中，我们将总结本文的贡献并讨论未来可能的研究方向。

2. 预备知识

简单图是一个二元组 $G = (V, E)$，其中 V 是有限顶点集，边集为 $E \subseteq \{uv : u, v \in V, u \neq v\}$。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集。如果两个顶点之间有一条边，则称它们在 G 中相邻。图 G, $N_G(v)$中顶点 v 的邻域，是所有与 v相邻的顶点构成的集合。

图 G 的子图 $G' = (V', E')$ 是一个图，其中 $V' \subseteq V$ 和 $E' \subseteq \{uv \in E : u, v \in V'\}$。给定 $A \subseteq V$，由 A 诱导的 G 的子图记作 $G(A) = (A, E_A)$，其中 $E_A = \{uv \in E : u, v \in A\}$。团是图 G 的一个顶点子集，其中任意两个不同顶点在 G 中都相邻。G 的极大团是 G 的一个团，且它不是 G 的任何团的真子集。注意，仅含一个顶点 K_1 的顶点集也构成一个团。我们将 G 的极大团数量记为 $\mathrm{mc}(G)$，并用 $\mathcal{K}_G$ 或 $\mathcal{K}$ 表示 G 的所有极大团构成的集合。G 的最大团是 G 中顶点数最多的团，我们将该顶点数记为 G 的团数，记作 $\omega(G)$。图 G 的独立集是一个顶点集，其中的顶点在 G 中两两不相邻。类似地，极大独立集是一个不包含于任何其他独立集中的独立集，而最大独立集是顶点数最多的独立集。注意，独立集可以为空，也可以只含一个顶点。

图 G, $\chi(G)$的色数是为图 G 的顶点着色且确保任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。在 G 中，匹配是一个不含公共顶点的边集，而 G 的最大匹配是指规模最大的匹配，记作 $M(G)$。给定图 G， G_E 是一个以 G的边集为顶点集的图；当两个顶点对应的边具有不同的端点，且不包含在 G中长度为 4 的环内时，这两个顶点相邻。

给定两个顶点集 U和 V，我们将 $U \times V$记为边集 $\{uv : u \in U, v \in V\}$。二部图 $G = (L \cup R, E)$ 是指图中 L和 R是互不相交的顶点集，边集为 $E \subseteq L \times R$。双团图是

完全二分图 $G = (L \cup R, E)$，其中 $E = L \times R$，简记为 $\{L, R\}$。图 G 的二部团覆盖是由 G 的二分团子图构成的集合，其中 G 的每条边都至少属于该集合中的一个二分团。图 G 上的最小双团覆盖问题（MBCP）是要寻找包含二分团数量最少的二部团覆盖，我们将该数量记为 bc(G)。图 G 的二部团划分是指 G 的二部团覆盖，且每条边恰好被覆盖一次； G的二分团划分数 bp(G) 是 G的最小二部团划分的大小。

若顶点和边满足： $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$和 $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$，则图 $C_n = (V, E)$是一个环。若一个图连通且不含任何作为环的子图，则该图是一棵树。我们记作 $[\![n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$，其中 n 是正整数。若一个顶点的邻域是一个团，则该顶点是单纯的。若排序 v_1, $v_2, \ldots, v_n$ 是 V的完美消去序，则对所有$i \in [\![n]\!]$， v_i 在诱导子图 $G(\{v_j : j \in \{i, i+1, \ldots, n\}\})$中都是单纯的。定义排序函数 $\sigma : [\![n]\!] \to V$ 来描述顶点V的排序。弦图 G 的团树 $\mathcal{T}_\mathcal{K}$ 是一棵树，其中每个顶点表示 G 的一个极大团，并满足团交性质：给定树中任意两个不同的极大团 K^1 和 K^2，连接 K^1 与 K^2 的路径上的每个团都包含 $K^1 \cap K^2$。我们还将边 $e \in \mathcal{T}_\mathcal{K}$的中间集mid($e$)定义为其两端团的顶点集的交集。

如果一个图可以通过取 m 个完全图 K_n，并让它们共享一个全局顶点而得到，那么它就是风车图 $D_n^{(m)}$。我们用 co- 表示补图，例如，如果一个图的补图是风车图，那么该图就是补风车图。

如果一个图不存在长度大于 3 的诱导环子图，则称其为弦图。当且仅当一个图具有团树 [3] 时，它才是弦图。此外，当且仅当一个图具有完美消去序 [10] 时，它才是弦图。弦图的完美消去序可以通过字典序广度优先搜索（ LexBFS ）[29] 得到。请注意，字典序广度优先搜索算法可以通过划分细化 [14] 在线性时间内实现： $O(|V| + |E|)$。另一种方法是

生成弦图完美消去序的方法是 Tarjan 在未发表的讲义中提出的最大基数搜索（MCS）。在每一步中，算法选择一个尚未标记且与最多已标记顶点相邻的顶点，将其作为下一个顶点（如果有多个顶点符合条件，则任意选择一个并标记）。Tarjan 和 Yannakaki [31] 给出了一种详细的 MCS 算法，可在 $O(|V|+|E|)$ 时间内运行。此外，Blair 和 Peyton [3] 扩展了 MCS 算法，使其能够在多项式时间内计算弦图的团树 G 。

3. 二分团覆盖数的新下界

本节将利用补图的极大团数量推导二分团覆盖数的新下界。随后，我们还将把这一新界与文献中已有的界进行比较。首先，我们将证明， G^c 的极大团集合的任意划分都可以用来构造 G的二分团子图。

引理 1. 给定任意图 G 以及其补图 G^c 的极大团集合 $\mathcal{K}_{G^c}=\{K^i\}_{i=1}^d$ ，我们可以将集合 $[\![d]\!]$ 划分为两个任意的非空集合 I 和 J，使得 $I\cup J=[\![d]\!]$。如果 $\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j\neq\emptyset$和 $\bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i\neq\emptyset$，则 $\left\{\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j,\ \bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i\right\}$ 是 G的二分团子图。

证明。假设 $L=\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j$和 $R=\bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i$。

给定任意的 $u\in L$ 和 $v\in R$， u 不属于 $\{K^i\}_{i\in I}$中的任何极大团，且 v 不属于 $\{K^j\}_{j\in J}$中的任何极大团。因此，对于任意$K\in\mathcal{K}_{G^c}$，都有 $\{u,v\}\not\subseteq K$。由于 G^c 的边由其极大团覆盖，即 $E(G^c)=\bigcup_{K\in\mathcal{K}_{G^c}}E(K)$，因此 $\{L,R\}$ 是 G的一个二分团子图。 □

接下来，我们将证明：对于图 G的任意二分团子图 $\{L,R\}$ ，存在 G^c 的极大团集合的一个划分，使得 $\{L,R\}$ 也是如引理 1 中由该划分构造的二分团的一个二分团子图。

命题 1. 给定图 G 的任意二分团 $\{L,R\}$ ，存在对 G^c 的所有极大团的划分 $\mathcal{K}_{G^c}=\{K^i\}_{i=1}^d$： $\{K^i\}_{i\in I}$ ，并且

$\{K^j\}_{j\in J}$ 使得 $\{L,R\}$ 是另一个二分团子图的子集
$\left\{\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j,\bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i\right\}$ *of* G.

证明。根据极大团和二分团子图的定义，我们知道，对于任意的 $u\in L$ 和 $v\in R$，都不存在满足 $\{u,v\}\in K$ 的 $K\in\mathcal{K}_{G^c}$。

记 $\mathcal{K}_u=\{K\in\mathcal{K}_{G^c}:\ u\in K\}$。然后，令 $\mathcal{K}_L=\bigcup_{u\in L}\mathcal{K}_u$ 和 $\mathcal{K}_R=\mathcal{K}_{G^c}\setminus\mathcal{K}_L$。此外，令 I 和 J 为 $[\![d]\!]$ 的划分，使得 $\{K^i\}_{i\in I}=\mathcal{K}_L$ 和 $\{K^j\}_{j\in J}=\mathcal{K}_R$。

给定任意的 $u\in L$，$u\in\bigcup_{K\in\mathcal{K}_u}K\subseteq\bigcup_{K\in\mathcal{K}_L}K$。由于 $\mathcal{K}_R=\mathcal{K}_{G^c}\setminus\mathcal{K}_L\subseteq\mathcal{K}_{G^c}\setminus\mathcal{K}_u$ 和 $u\in\bigcup_{K\in\mathcal{K}_u}K$，因此 $u\notin\bigcup_{K\in\mathcal{K}_R}K$。所以，$L\subseteq\bigcup_{K\in\mathcal{K}_L}K\setminus\bigcup_{K\in\mathcal{K}_R}K$。

给定任意 $v\in R$，对于任意 $u\in L$，$v\notin\bigcup_{K\in\mathcal{K}_u}K$。因此，$v\notin\bigcup_{K\in\mathcal{K}_L}K$。由于 $v\in V(G)=\bigcup_{K\in\mathcal{K}_{G^c}}K$，所以 $v\in\bigcup_{K\in\mathcal{K}_R}K$，这意味着

$$R\subseteq\bigcup_{K\in\mathcal{K}_R}K\setminus\bigcup_{K\in\mathcal{K}_L}K.$$

由于 L 和 R 均非空，根据引理 1,

$$\left\{\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j,\bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i\right\}$$

是 G的二分团子图。 □

备注 1. 给定一个非空图 G 以及 G^c 的两个不同的任意极大团 K^1 和 K^2，$G(K^1\cup K^2)$ 至少有一条边。

证明。假设 $G(K^1\cup K^2)$ 是空图，则 $K^1\cup K^2$ 是 G^c 的一个团。此外，由于 $K^1\neq K^2$、K^1 和 K^2 不是 G^c 的极大团，这就产生了矛盾。

□

备注 2. 给定图 G 的任意二分团 $\{L,R\}$ 、G^c 的所有极大团集合、$[\![d]\!]$ 的一个划分：I 和 J，二分团 $\left\{\bigcup_{i\in I}K^i\setminus\bigcup_{j\in J}K^j\bigcup_{j\in J}K^j\setminus\bigcup_{i\in I}K^i\right\}$ 在 $G\left(\bigcup_{i\in I}K^i\right)$ 或 $G\left(\bigcup_{j\in J}K^j\right)$ 中没有任何边。

利用注释1和注释2，我们可以给出图 G 的二分团覆盖数的新下界：bc(G) $\geq \lceil \log_2(\text{mc}(G^c)) \rceil$。

定理 1. 给定一个图 G，bc(G) $\geq \lceil \log_2(\text{mc}(G^c)) \rceil$。

证明。令 $\{\{L^k, R^k\}\}_{k=1}^t$ 为 G的一个最小双团覆盖。此外，假设 $\mathcal{K}_{G^c} = \{K^i\}_{i=1}^d$ 是 G^c的所有极大团的集合。那么，对于每个 $k \in [\![t]\!]$，存在 $[\![d]\!]$、I^k 和 J^k的一个划分，使得根据命题 1，$\{L^k, R^k\}$ 是另一个二分团子图 $\left\{\bigcup_{i\in I^k} K^i \setminus \bigcup_{j\in J^k} K^j、\bigcup_{j\in J^k} K^j \setminus \bigcup_{i\in I^k} K^i\right\}$ 的子图，且该子图属于G 。我们构造一个顶点为 $[\![d]\!]$ 的完全图 $\mathcal{K}_d$ ，使得每个顶点 i 都表示 G^c的极大团集中的 K^i 。根据备注 1，我们知道，对于任意两个不同的 i'、$j' \in [\![d]\!]$，G($K^{i'} \cup K^{j'}$)非空。根据备注 2，若 $G(K^{i'} \cup K^{j'})$的边与$\left\{\bigcup_{i\in I^k} K^i \setminus \bigcup_{j\in J^k} K^j、\bigcup_{j\in J^k} K^j \setminus \bigcup_{i\in I^k} K^i\right\}$ 的边的交集非空，则 $i' \in I^k$ 和$j' \in J^k$，或 $i' \in J^k$ 和 $j' \in I^k$。

由于 $\{\{L^k, R^k\}\}_{k=1}^t$ 是 G的最小双团覆盖，因此 $\mathcal{K}_d$ 的任意边$i'j'$ 必定属于 $\mathcal{K}_d$ 的某个二分团子图 $\{I^k, J^k\}$ ，其中 $k \in [\![t]\!]$。由此可知，$\mathcal{K}_d$的二部团覆盖为 $\{\{I^k, J^k\}\}_{k=1}^t$ 。由于bc($\mathcal{K}_d$) $= \lceil \log_2(d) \rceil$，因此 $t \geq \lceil \log_2(d) \rceil$，其中 $t =$ bc(G) 且 $d =$mc(G^c)。

□

定理2。给定图 $G = (V, E)$，mc(G^c) $\geq \chi(G)$。

证明。令 $\mathcal{K}_{G^c} = \{K^i\}_{i=1}^d$ 为 G^c 中所有极大团的集合。接着，我们对 G 的顶点构造一个着色过程：若一个顶点属于 K^i ，且不属于任何 K^j （对于 $j \in [\![i-1]\!]$），则将颜色 i 赋予该顶点。不难看出，只用 d 种颜色就能为 V 中的所有顶点着色。接下来，我们要证明 G 中每对相邻顶点的颜色都不同。设 u、$v \in V$ 是两个颜色相同的顶点。根据我们的着色过程，不难看出，对于某个 $j \in [\![d]\!]$，有 u、$v \in K^j$ 。此外， K^j 是 G^c 中的一个团，因此 $uv \notin E$。于是， χ（G） $\leq d =$ mc（G^c）。

□

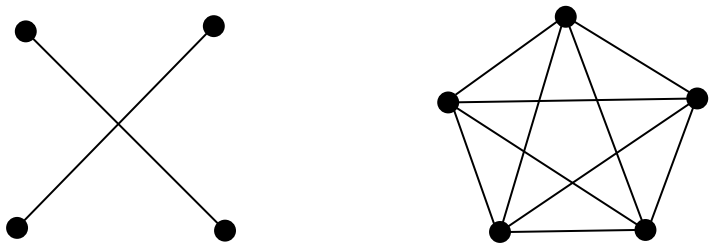


图1：两个不同的示例表明，新的下界优于一些已有的下界。

需要指出的是，我们在定理 1 中得到的二部团覆盖数新下界，可能严格优于文献中已有的一些下界：给定一个图 G，$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\chi(G)) \rceil$ [15]，$\mathrm{bc}(G) \geq \omega(G_E)$ [9]，，且 $\mathrm{bc}(G) \geq \frac{|M(G_E)|}{|G|}$ [19]，其中 $\chi(G)$ 是 G 的色数，$\omega(G)$ 是 G 的团数，$M(G)$ 是 G 中的一个最大匹配；G_E 是一个图，其顶点集为边集 G，且当两个顶点对应的边端点各不相同、并且不同时包含在 G 中长度为 4 的环内时，这两个顶点相邻。例如，如图1所示，$\chi(C_4^c) = 2$，且 $\mathrm{mc}(C_4) = 4$，其中 C_4^c 是一个长度为 4 的环的补图，C_4。另一个例子见图1：$\lceil \log_2(\mathrm{mc}(K_5^c)) \rceil = 3 > \max\left\{\omega(K_5, E), \frac{|M(K_5|^2)|}{|E K_5|}\right\}$。注意，$\omega(K_5, E) = 2$，且 $\frac{|M(K_5|^2)|}{|E K_5|} = \frac{2^2}{10} < 1$。尽管在一般图中列出所有极大团可能需要指数时间，但对于弦图等特殊图类，这一过程可以在多项式时间甚至线性时间~~内完成~~。下一节中，我们将聚焦于余弦图的二分团覆盖数启发式算法。

4. 余弦图的二分团覆盖数启发式算法

本节将设计一种启发式算法，用于寻找余弦图上的二分团覆盖。首先，我们将证明，如果 G 是余弦图，则 $\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G) + 1) \rceil$。接着，我们将证明，余弦图 G 的二分团覆盖数上界为 $\mathrm{mc}(G) - 1$。然而，$\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 与 $\mathrm{mc}(G^c) - 1$之间仍存在差距。我们希望进一步收紧上界

。我们希望指出，在组合析取约束的背景下， [22] 的算法2已尝试缩小这一差距。然而，Lyu 等人 [22] 仅提出了一个贪心二部团合并过程，并未在二分团覆盖数的上界方面取得超越 $\mathrm{mc}(G^c)-1$的理论改进。此外，我们将介绍树上的最优边排序，并利用它为余弦图的二分团覆盖数给出一个更好的上界，其中每个顶点至多属于两个独立集。

算法 1 给定团树，求余弦图 G 的二部团划分

属于 G^c。

输入：弦图 G^c的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 。

输出： G^c的补图 G 的二部团划分 bp。

函数 FindPartition($\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$)

    如果 $|V(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})| \leq 1$ 则

        返回 $\emptyset$。

    结束 if

    选择任意边 e 将 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 切分为两个连通分支 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_1}$和 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_2}$。

    $L \leftarrow \bigcup_{K \in V(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_1})} V(K) \setminus \mathrm{mid}(e)$; $R \leftarrow \bigcup_{K \in V(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_2})} V(K) \setminus$ 中间(e)

    返回 $\{\{L, R\}\} \cup$ FindPartition($\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_1}$) $\cup$ FindPartition($\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c_2}$)

结束函数

我们希望证明，如果 G 是余弦图，那么 $\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G)+1) \rceil$ 。此外，我们还想指出，$\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G)+1) \rceil$ ，如果 G 是余弦图的完全图 [1]。

定理 3。给定一个余弦图 G，$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G)+1) \rceil$。

证明。给定余弦图 G，由 [21] 的定理 1 和定理 2 可知 $\mathrm{bp}(G) \leq \mathrm{mc}(G^c)-1$ ；由定理 1 可知 $\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 。因此，$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G)+1) \rceil$。

□

[1]如果 G 是一个有 n 个顶点的完全图，则 $\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(n) \rceil$ ，且 $\mathrm{bp}(G) = n-1$。

注 3. 若 G 是完全图，则 $\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G) + 1) \rceil$。

我们还想指出，$\mathrm{bc}(G) \geq \log_2(\mathrm{bp}(G)+1)$ 意味着：若 G 是余弦图，则 $\mathrm{bp}(G) \leq 2^{\mathrm{bc}(G)}-1$。对于任意余弦图的 $\mathrm{bc}(G) > 1$，这是一个优于 $\mathrm{bp}(G) \leq \frac{1}{2}(3^{\mathrm{bc}(G)} - 1)$ [28] 的上界。

定理 4（定理 1 和 2 [21]）。给定一个余弦图 G 及其补图 G^c 的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，算法 FindPartition($\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$) 的输出是 G 的一个二部团划分，其大小为 $\mathrm{mc}(G^c) - 1$。

由于二部团划分也是二部团覆盖，我们可以立即得到推论 1。

推论 1。给定一个余弦图 G，$\mathrm{bc}(G) \leq \mathrm{mc}(G^c) - 1$。

我们希望改进 $\mathrm{mc}(G^c) - 1$ 的上界。下面给出一个示例作为动机。假设我们想要为图 2 所示的图寻找一个最小双团覆盖。可以通过算法 1 找到一个二部团覆盖。请注意，在算法 1 的第 7 行中，可以任意选择边。在我们的示例中，我们选择了能够使团树分割得最均衡的那条边。

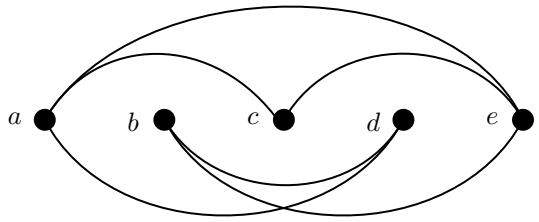


图 2：余弦图 G，其中 G^c 是路径图。

图 2 中图的二部团覆盖的构造过程如图 3 所示。该二部团覆盖为 $\{\{\{a,b\},\{c,d\}\},\{\{a\},\{c\}\},\{\{c\},\{e\}\}\}$，大小为 3。不过，不难看出，我们可以将二分团 $\{\{a\},\{c\}\}$ 与 $\{\{c\},\{e\}\}$ 合并，构成更大的二分团 $\{\{a,e\},\{c\}\}$，从而得到大小为 2 的新二部团覆盖。注意，根据

定理 1，该二部团覆盖是最小的。还要注意，在此例中，二部团覆盖的大小等于“层级”数减 1：我们将同一“层级”中的所有二分团合并为一个二分团，而最后一层不包含任何二分团。

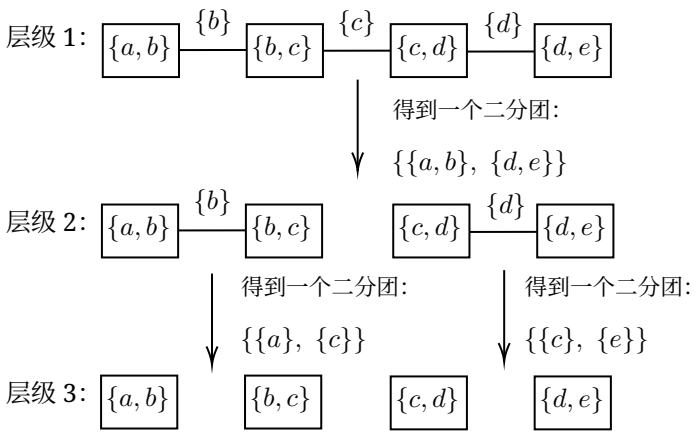


图 3：一种获得图 2 中图的二部团覆盖的过程。

因此，我们希望探究“层级”与余弦图的最小双团覆盖大小之间的关系。值得注意的是，在算法 1 第 7 行选择不同的边，会得到不同的总“层级”数。由于我们希望为二分团覆盖数构造一个上界，因此需要找到最小的“层级”数。为了正式描述最小“层级”的概念，我们为树图引入边排序的记号：树的边排序是对其边赋予正整数标签的一种标记方式，使得任意两条标签相同的边之间的唯一路径上，都存在一条标签更大的边。

定义 1. 给定一棵树 $T = (V, E)$，映射 $\varphi_T \colon E \to \{1, 2, \ldots, r\}$ 是 T 的边排序，当且仅当对于任意 $e_1, e_2 \in E$ 满足 $\varphi_T(e_1) = \varphi_T(e_2)$ 时，在 e_1 和 e_2 之间的路径上存在 $e_3 \in E$，使得 $\varphi_T(e_3) > \varphi_T(e_1) = \varphi_T(e_2)$。$\varphi_T$ 所使用的秩数为 r。T 的最优边排序数是 T 的任意边排序所用秩数的最小值，记为 $\chi'_r(T)$。

我们首先要指出，树的最优边排序所使用的等级数不少于其最大度数，即 $T(T)\ \chi'_r(T) \geq \Delta(T)$。因此，

星图的边排序所使用的最少等级数为 T $\Delta(T)$ $=V(T)$ -1。此外，对于任意非空树 T， $\chi_r'(T)$ $\geq \lceil \log_2(|V(T)|) \rceil$。

注 4. 给定任意一棵树 T, $\chi_r'(T)$ $\geq \Delta(T)$.

注 5（引理 2.1 [18]）。给定任意一棵非空树 T, $\chi_r'(T)$ $\geq \lceil \log_2(|V(T)|) \rceil$.

命题2. 给定一个含有 n 个顶点的路径图 P_n， $\chi_r'(P_n) = \lceil \log_2(n) \rceil$.

证明。我们用归纳法证明。在基础步骤中，$\chi_r'(P_1)$ $=$ 0 ，因为 P_1 没有任何边。在归纳步骤中，假设 $\chi_r'(P_i)$ $=$ $\lceil \log_2(i) \rceil$ ，并且对所有 $i = 1, 2, \ldots, n-1$, φ_{P_i} 是 P_i 的最优边排序。然后，我们可以利用 $\varphi_{P_{\lfloor n/2 \rfloor}}$ 和 $\varphi_{P_{\lceil n/2 \rceil}}$ 构造 P_n 的边排序，并使用一条标签为

$$\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil + 1 = \lceil \log_2(n/2) \rceil + 1 = \lceil \log_2(n) \rceil.$$

因此，$\chi_r'(P_n)$ $=$ $\lceil \log_2(n) \rceil$。注意，对于任意正整数 $n > 1$， $\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil = \lceil \log_2(n/2) \rceil$ 。 □

我们将在算法2中设计一个子程序，使算法 1 中的边选择依据边排序进行，并且二分团也依据边排序存储。

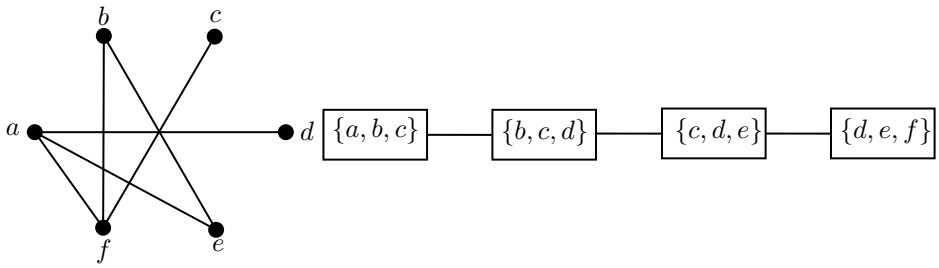


图4：余弦图 G（左）及其团树 G^c （右）。

我们的第一个猜想是：对于任意余弦图 G 及其团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$， $\mathrm{bc}(G)$ $\leq \chi_r'(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。然而，这个猜想并不成立。如图4（右）所示，该团树的最优边排序使用了2个等级，因为

该团树是一条含有4个顶点的路径。然而，图4（左）中的图 G 的二分团覆盖数为3。 G 的一个二部团覆盖包含3个二分团$\{\{a,b\},\{e,f\}\}$、 $\{\{a\},\{d\}\}$、$\{\{c\},\{f\}\}$。也容易验证， G 的二部团覆盖大小至少为3，因为任意一对边 ad、be、 cf 都不能出现在同一个二分团中。

算法2 子程序 FindBiclique($\mathcal{T}, \varphi, \sigma, r$, bc)

函数 FindBiclique($\mathcal{T}, \varphi, \sigma, r$, bc)
    如果 $|V(\mathcal{T})| \leq 1$ 则
        返回
    结束如果
    选择边 e，使得 $e = \arg\max\{\varphi(e') : e' \in \mathcal{T}\}$。
    $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 $\mathcal{T} \setminus e$的两个子树。
    层级 $\leftarrow r + 1 - \varphi(e)$
    如果bc[层级] 尚未初始化，则调用bc[层级] = ()。
    ord $\leftarrow \min\{\sigma(v) : v \in V(\mathcal{T})\}$ ▷ 为了对bc[层级]中的二分团进行排序。
    $L \leftarrow \bigcup_{K \in V(\mathcal{T}_1)} V(K) \setminus e$； $R \leftarrow \bigcup_{K \in V(\mathcal{T}_2)} V(K) \setminus e$
    将 ($\{L, R\}$, ord) 添加到 bc[层级]
    FindBiclique($\mathcal{T}_1, \varphi, \sigma, r$, 双团覆盖数)
    FindBiclique($\mathcal{T}_2, \varphi, \sigma, r$, 二分团覆盖数)
    返回
结束函数

因此，一般来说，给定余弦图 G 和其团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，我们不能断言 bc($G$) $\leq \chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。因此，如果 G 是余弦图，算法 3 中的 MergeBiclique(bc$_{\text{level}}[i], G$) 可能会返回一个包含多个二分团的集合。不过，我们可以证明，如果 G 是余弦图，且每个顶点至多属于两个极大独立集，那么算法 3 中的 MergeBiclique(bc$_{\text{level}}[i], G$) 总会返回一个仅含一个二分团的集合，由此得到 bc(G) $\leq \chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$，其中 G^c 的团树为 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$。

算法 3 为余弦图 G 寻找一个大小至多为

$\text{mc}(G^c) - 1$的二部团覆盖。

输入：余弦图 G。

输出：补图 G 的二部团覆盖 bc，其中补图为 G^c。

初始化字典 $\text{bc}_{\text{level}} \leftarrow \{\}$。

如图所示，通过算法 5 计算弦图 G^c 的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$

见附录 A。

使用算法 EDGE-RANKING 求出 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 的最优边排序 φ

在 [20] 中，并记录 φ、 r 的排序数量。

从任意叶节点出发，使用广度优先搜索遍历所有顶点，得到 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 的排序 σ

从任意叶节点出发。

FINDBICLIQUE（$\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$、 φ、 σ、 r， bc_{level}）。

$\text{bc} \leftarrow \{\}$

对 $i \in [\![r]\!]$ 执行

    $\text{bc} \leftarrow \text{bc} \cup$MERGEBICLIQUE($\text{bc}_{\text{level}}[i], G$).

结束循环

引理 2。给定弦图 G^c、 G^c 的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，以及 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 中满足 $\mathcal{K}' = V(\mathcal{T}')$ 的任意非空子树 $\mathcal{T}'$，则可以构造一个图$G' = (V', E')$，使得其顶点集 $V' = \bigcup_{K \in \mathcal{K}'} K$ 和边集 $E' = \{uv$ 满足： $\exists K \in \mathcal{K}'$，且$\{u, v\} \subseteq K, u \neq v\}$。于是， G' 是 G^c 的诱导子图。此外， G' 的团树为 $\mathcal{T}'$。

证明。设 $G'' = G^c[V']$ 是 G^c 的一个诱导子图， E'' 是 G''的边集。那么不难看出 $E' \subseteq E''$，因为 uv 是 G^c 和u中的一条边，且$v \in V'$对任意 $uv \in E'$均成立。

假设 $E'' \not\subseteq E'$。那么，对于任意 $K \in \mathcal{K}'$，必定存在 $uv \in E''$ 使得 $\{u, v\} \not\subseteq K$。接着，必定存在 G^c 的一个极大团 K^{uv}，使得$\{u, v\} \in K^u, v$。由于 $u, v \in V'$，因此必定存在 $K^u, K^v \in \mathcal{K}'$使得$u \in K^u$ 且 $v \in K^v$。由于 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 是团树，因此K^u 与 K^v 之间的唯一路径必定包含 K^{uv}。否则，团交性质将不成立。由于 K^{uv} 不属于 $\mathcal{K}'$，因此 $\mathcal{T}'$ 不是一个，这就产生了矛盾

树。因此， G' 是 G^c的诱导子图。不难看出， $\mathcal{K}'$是 G'的所有极大团构成的集合。因此， $\mathcal{T}'$ 是 G'的团树。 □

算法 4 子程序 MergeBiclique(bc′, G)

```
1: 函数 MergeBiclique(bc′, G)
2:     如果 bc′ =()，则
3:         返回 ∅
4:     结束如果
5:     按 ord 的升序对 bc′ 中的元素（{L, R}，ord）进行排序。
6:     bc ← ∅
7:     对于 bc′ 中的（{L, R}，ord）执行
8:         将 ← 标记为
           True
9:         对于 bc 中的 {L′, R′} ∈ 执行
10:            如果 {L ∪ L′, R ∪ R′} 是 G 的二部团覆盖，则
11:                L′ ← L ∪ L′； R′ ← R ∪ R′； 标志 ← False
12:            否则，如果 {R ∪ L′, L ∪ R′} 是 G 的二部团覆盖，则
13:                L′ ← R ∪ L′； R′ ← L ∪ R′； 标志 ← False
14:            结束 if
15:        结束 for
16:        若标志为真，则 bc ← bc ∪{{L, R}}。
17:    结束循环
18:    返回 bc
19: 结束函数
```

为简化记号，我们用 $G[\mathcal{T}]$ 表示 $G[\bigcup_{K\in V(\mathcal{T})} K]$ 的诱导子图，其中 $\mathcal{T}$是 G 的团树的一个子树，或是 G^c。此外，若 $\mathcal{T}$是一个团树，且 $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$ 是 $\mathcal{T}$的两个不相交子树（子树之间不共享任何顶点），我们将 $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ 记作 $\mathcal{T}$中同时包含 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$的最小子树。换言之， $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ 包含 $\mathcal{T}_1$、 $\mathcal{T}_2$以及 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$之间的路径。

命题 3. 假设我们有一个余弦图 G，其中每个顶点至多属于两个极大独立集；设 $\mathcal{K}^c$ 是 G^c 的所有极大团的集合，并设 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 是 G^c 的团树。给定 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$、$\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的两个不相交子树，则 $G[\mathcal{T}_1]$、$\{L^1, R^1\}$ 的任意二分团子图，以及 $G[\mathcal{T}_2]$、$\{L^2, R^2\}$ 的任意二分团子图，都可以合并为 $G[\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2]$ 的一个更大的二分团，即 $\{L^1 \cup L^2, R^1 \cup R^2\}$ 或 $\{L^1 \cup R^2, R^1 \cup L^2\}$ 是 $G[\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2]$ 的二分团子图。

证明。根据引理 2，我们知道 $\mathcal{T}_1$ 是 $G^c[\mathcal{T}_1]$ 的团树，而 $\mathcal{T}_2$ 是 $G^c[\mathcal{T}_2]$ 的团树。令 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 分别为 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的顶点集。根据团树的定义，$\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 也分别是 $G^c[\mathcal{T}_1]$ 和 $G^c[\mathcal{T}_2]$ 的所有极大团的集合。根据命题 1，存在 $\mathcal{K}_1$、$\mathcal{K}_1^L$ 和 $\mathcal{K}_1^R$ 的一个划分，使得 $\{L^1, R^1\}$ 是二分团 $\left\{\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K、\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K\right\}$ 的子图。类似地，$\mathcal{K}_2^L$ 和 $\mathcal{K}_2^R$ 是 $\mathcal{K}_2$ 的一个划分，使得 $\{L^2, R^2\}$ 是二分团的子图

$$\left\{ \bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^L} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^R} K,\ \bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^R} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^L} K \right\}.$$

令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 在 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 中的路径，令 $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{P}$的顶点集。注意，$\mathcal{K}_\mathcal{P}$ 可能为空。那么，不失一般性地，假设$\mathcal{K}_1^L$包含 $\mathcal{T}_1$ 中与 $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}_2$ 中的某个顶点相邻的顶点，其中 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$为团树。同样地，假设 $\mathcal{K}_2^L$包含 $\mathcal{T}_2$ 中与 $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}_1$中的某个顶点相邻的顶点。于是，令 $A = \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L\cup\mathcal{K}_2^L\cup\mathcal{K}_\mathcal{P}} K$和 $B = \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R\cup\mathcal{K}_2^R} K$。根据引理 1，我们知道 $\{A \setminus B, B \setminus A\}$是 $G[\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2]$的二分团子图。

由于每个顶点至多属于两个极大独立集，且 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 满足团树的团交性质，因此，如果 $u \in K$ 和 $u \in K'$对于 $K, K' \in \mathcal{K}^c$，那么 K 和 K' 必须在 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$ 中相邻。由于 $\mathcal{K}_1^L$ 非空，因此 $\mathcal{K}_1^R$中的任意顶点都不与 $\mathcal{K}_2^L \cup \mathcal{K}_\mathcal{P}$中的任何顶点相邻。因此，$\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K \cap \bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^L\cup\mathcal{K}_\mathcal{P}} K = \emptyset$。同理，$\mathcal{K}_2^R$中的任意顶点都不与 $\mathcal{K}_1^L \cup \mathcal{K}_\mathcal{P}$中的任何顶点相邻。因此，$\bigcup_{K\in\mathcal{K}_2^R} K \cap \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L\cup\mathcal{K}_\mathcal{P}} K = \emptyset$。

那么，

$$\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K = \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R\cup\mathcal{K}_2^R} K \subseteq A\setminus B,$$

$$\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K = \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L\cup\mathcal{K}_2^L\cup\mathcal{K}^{\mathcal{P}}} K \subseteq B\setminus A.$$

因此，$\{L^1, R^1\}$ 和 $\left\{\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K、\bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^R} K \setminus \bigcup_{K\in\mathcal{K}_1^L} K\right\}$都是 $\{A\setminus B, B\setminus A\}$的双团子图。同样，$\{L^2, R^2\}$ 是 $\{A\setminus B, B\setminus A\}$的二分团子图。因此，$\{L^1\cup L^2, R^1\cup R^2\}$ 是 $G[\mathcal{T}_1\oplus\mathcal{T}_2]$的二分团子图。

□

引理 3. 给定一棵 T 以及通过从任意叶节点开始使用广度优先搜索遍历 T 的所有顶点而得到的 σ，存在一系列两两不相交的子树 $\{T_i\}_{i=1}^n$，使得对于整数 $1 \le i < j \le n$，$\min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_i)\} < \min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_j)\}$。那么，对于任意整数 $2 \le i \le j \le n$，$T_1 \oplus \ldots \oplus T_{i-1}$ 和 T_j 也互不相交。

证明。只需证明对于 $3 \le j \le n$，$T_1 \oplus T_2$ 和 T_j 不相交。于是，可以构造一组新的两两不相交子树序列 $\{T_i'\}_{i=1}^{n-1}$，使得对于 $3 \le j \le n$，$T_1' = T_1 \oplus T_2$ 和 $T_{j-1}' = T_j$。由于 $\min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_1 \oplus T_2)\} < \min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_1)\}$，不难看出，对于整数 $1 \le i < j \le n-1$，$\min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_i')\} \le \min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_j')\}$ 也成立。

设 P 为 T_1 与 T_2 之间的路径。由于 σ 是通过广度优先搜索得到的，因此 $\max\{\sigma(v)\colon\ v \in V(P)\} < \min\{\sigma(v)\colon\ v \in V(T_2)\}$。因此，对于 $3 \le j \le n$，$V(P) \cap V(T_j) = \emptyset$，且 $V(T_1 \oplus T_2) \cap V(T_j) = \emptyset$。

□

定理 5. 给定一个余弦图 G，其中每个顶点至多属于两个极大独立集，并且有一个 G^c 的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，算法 3 将返回一个 G 的二部团覆盖，其大小至多为 $\chi_r'(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$，因此 $\mathrm{bc}(G) \le \chi_r'(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。

证明。根据定理 4，在算法 3 第 7 行调用 Find- Biclique 后，$\mathrm{bc}_{\mathrm{level}}$ 中的所有二分团构成了 G 的二部团划分，因此也是 G的二部团覆盖。

$\mathrm{bc}_{\mathrm{level}}$ 中的“层级”数量等于 $\chi_r'(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。根据引理 3 和命题 3，可以通过调用 MergeBiclique($\mathrm{bc}_{\mathrm{level}}[i], G$)，将 $\mathrm{bc}_{\mathrm{level}}[i]$ 中的所有二分团合并为 G 的一个二分团子图。

□

推论 2. 若 G 是余弦图，且每个顶点至多属于两个极大独立集，并且 G^c 有一个边排序数为 $\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 的团树，则 $\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$。

由于路径图是弦图，且其团树也是一条路径，因此定理 5 和定理 1 可以给出余路径图的二分团覆盖数。注意，余路径图是与第二类特殊有序集相关联的冲突图，而这些冲突图的二分团覆盖可用于构造混合整数规划公式 [17]。

推论 3. 给定一个有 n 个顶点的余路径图 P_n^c，$\mathrm{bc}(P_n^c) = \lceil \log_2(n-1) \rceil$。

我们还想指出，如果 G 是余风车图，算法 3 可以返回一个大小为 $\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 的二分团覆盖：风车图的团树可以是一条路径，G^c 中的所有极大团都共享同一个顶点，而 G^c 中的所有其他顶点都只属于一个极大团。

注 6. 给定一个补风车图 G，$\mathrm{bc}(G) = \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$。

5. 结论与未来工作

给定任意图 G，$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$。我们还证明了 $\mathrm{mc}(G^c) \geq \chi(G)$。因此，

$$\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil \geq \lceil \log_2(\chi(G)) \rceil.$$

我们讨论了在二分团覆盖数 $\mathrm{bc}(G)$ 的问题中，$\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$ 比 $\log_2(\chi(G))$，$\omega(G_E)$ 和 $|M_{(G)}|^2$ 提供严格更好的下界的情形。如果 G 是余弦图，则 $\mathrm{bc}(G) \geq \lceil \log_2(\mathrm{bp}(G) + 1) \rceil$ 或 $\mathrm{bp}(G) \leq 2^{\mathrm{bc}(G)} - 1$。如果 G 是余弦图且 $\mathrm{bc}(G) > 1$，那么这是比 $\mathrm{bp}(G) \leq \frac{1}{2}(3^{\mathrm{bc}(G)} - 1)$ [28] 更好的界。接着，受二分团划分启发式算法的启发，

我们基于 [22], 中的算法 1 和算法2，设计了一个用于余弦图二分团覆盖的多项式时间启发式算法，即算法 3。随后我们证明，如果图 G 是余弦图，且 G 的每个顶点至多属于两个独立集，那么对于 G^c的任意团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，$\mathrm{bc}(G) \leq \chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。此外，我们还证明，如果进一步假设 G^c 具有一个最优边排序数为 $\lceil \log_2(\mathrm{mc}(G^c)) \rceil$的团树，那么算法 3 中的启发式算法能够返回一个最小双团覆盖。

我们还想指出一些未来研究方向。我们已经证明，对于任意的图 G^c 的团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c}$，如果图 G 是余弦图，且 G 的每个顶点至多属于两个独立集，则 $\mathrm{bc}(G) \leq \chi'_r(\mathcal{T}_{\mathcal{K}^c})$。我们能否找出其他具有此类二分团覆盖数上界的余弦图子类? 我们能否设计一种多项式时间算法，找出边排序数最小的弦图团树?

致谢

参考文献

[1] J. Amilhastre、P. Janssen、M.-C. Vilarem，《一类有限语言的有限自动机最小化启发式算法》，载于：国际自动机实现研讨会，施普林格，1999年，第1–12页。

[2] J. Amilhastre、M.-C. Vilarem、P. Janssen，《无多米诺骨牌二分图的最小二部团覆盖与最小双团分解的复杂性》，《离散应用数学》86 (2-3)（1998）：125–144。

[3] J. R. Blair、B. Peyton，《弦图与团树导论》，载于《图论与稀疏矩阵计算》，施普林格，1993年，第1–29页。

[4] P. Chalermsook, S. Heydrich, E. Holm, A. Karrenbauer，最小双团覆盖与划分的近乎紧确近似性结果，载于：欧洲算法研讨会，施普林格，2014年，第235–246页。

[5] D. de Caen, D. A. Gregory, N. J. Pullman，零一矩阵的布尔秩，载于：第三届加勒比组合学与计算会议论文集，巴巴多斯，1981年，第169–173页。[6] P. de la Torre, R. Greenlaw, A. A. Sch¨affer，树的最优边排序可在多项式时间内完成，Algorithmica 13 (6) (1995年) 592–618。[7] A. Ene, W. Horne, N. Milosavljevic, P. Rao, R. Schreiber, R. E. Tar-jan，角色最小化问题的快速精确算法与启发式方法，载于：第13届ACM访问控制模型与技术研讨会论文集，2008年，第1–10页。[8] A. Epasto, E. Upfal，受限双团覆盖问题的高效近似算法，Algorithms 11 (6) (2018年) 84。[9] P. C. Fishburn, P. L. Hammer，图的二部维数与二部度，离散数学 160 (1-3) (1996年) 127–148。[10] D. Fulkerson, O. Gross，关联矩阵与区间图，Pacific Journal of Mathematics 15 (3) (1965年) 835–855。[11] H. Gruber, M. Holzer，假设 p≠ np，非确定性状态复杂度与转移复杂度的不可近似性，载于：国际语言理论发展会议，施普林格，2007年，第205–216页。[12] O. G¨unl¨uk，多商品流的新最小割最大流比，SIAM Journal on Discrete Mathematics 21 (1) (2007年) 1–15。[13] K. Guo, T. Huynh, M. Macchia，网格的双团覆盖数，The Electronic Journal of Combinatorics 26。doi:10.37236/8316。[14] M. Habib, R. McConnell, C. Paul, L. Viennot，字典序广度优先搜索与划分细化及其在传递定向、区间图识别和连续1测试中的应用，理论计算机科学 234 (1-2) (2000年) 59–84。

[15] F. Harary，D. Hsu，Z. Miller，图的二部性，《图论杂志》1 (2) (1977) 131–133。[16] M. Hirsch，H. Meijer，D. Rappaport，完全二部图边覆盖图与汇合绘图，载于：国际图绘制研讨会，施普林格，2006年，第405–416页。[17] J. Huchette，J. P. Vielma，针对析取约束的小型强表述的组合方法，《运筹学数学》44 (3) (2019) 793–820。[18] A. V. Iyer，H. D. Ratliff，G. Vijayan，关于树和图的边排序问题，《离散应用数学》30 (1) (1991) 43–52。[19] S. Jukna，A. S. Kulikov，关于用完全二部子图覆盖图，《离散数学》309 (10) (2009) 3399–3403。[20] T. W. Lam，F. L. Yue，在线性时间内求树的最优边排序，《Algorithmica》30 (1) (2001) 12–33。[21] B. Lyu，I. V. Hicks，余弦图的二分团划分，arXiv 预印本 arXiv:2203.02837doi:10.48550/ARXIV.2203.02837。[22]B. Lyu，I. V. Hicks，J. Huchette，通过连接树对组合析取约束建模，arXiv 预印本 arXiv:2205.06916doi:10.48550/ARXIV.2205.06916。[23] S. D. Monson，N. J. Pullman，R. Rees，(0, 1)矩阵的团覆盖、二分团覆盖及因子分解综述，《组合应用研究所通报》14 (1995) 17–86。[24] H. M¨uller，关于边完美性与二部图类，《离散数学》149 (1-3) (1996) 159–187。[25] D. S. Nau，G. Markowsky，M. A. Woodbury，D. B. Amos，人类白细胞抗原血清学的数学分析，《数学生物科学》40 (3-4) (1978) 243–270。

[26] I. Nor，D. Hermelin，S. Charlat，J. Engelstadter，M. Reuter，O. Duron，M.-F. Sagot，Mod/resc 简约性推断：理论与应用，《Infor mation and Computation》213 (2012) 23–32。[27] J. Orlin，图论中的满足性：用团覆盖图，载于：Indagationes Mathematicae（论文集），第80卷，Elsevier，1977年，第406–424页。[28] T. Pinto，二团覆盖与划分，《The Electronic Journal of Combinatorics》21 (2014)。[29]D. J. Rose，R. E. Tarjan，G. S. Lueker，图的顶点消去算法方面，《SIAM Journal on Computing》5 (2) (1976) 266–283。[30] H. U. Simon，组合优化问题的近似解，《SIAM Journal on Discrete Mathematics》3 (2) (1990) 294–310。[31] R. E. Tarjan，M. Yannakakis，用简单的线性时间算法检验图的弦性、超图的无环性，并有选择地约简无环超图，《SIAM Journal on Computing》13 (3) (1984) 566–579。[32] X. Zhou，T. Nishizeki，一种用于树边排序的高效算法，载于：Algorithms—ESA'94：第二届欧洲算法研讨会，乌得勒支，荷兰，1994年9月26日至28日，论文集2，施普林格，1994年，第118–129页。[33] X. Zhou，T. Nishizeki，求树的最优边排序，载于：SODA，1995年，第122–131页。

附录 A. 弦图的团树算法

Blair 和 Peyton [3] 扩展了 MCS 算法，以在多项式时间内计算弦图的团树 G，如算法 5 所示。

算法 5 计算弦图团树的算法 G [3]。

输入：弦图 G。

输出：团树 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$，以及所有极大团 $\mathcal{K}$ 的集合 G.

前驱基数 $\leftarrow 0$。 $\mathcal{L}_{n+1} \leftarrow \emptyset$。 $s \leftarrow 0$。 $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} \leftarrow \emptyset$。 $\mathcal{K} \leftarrow \emptyset$。

</style>对于 $i = n$ $, n-1, \ldots, 1$ **do**

    选择一个顶点 $v \in V - \mathcal{L}_{i+1}$，使得 $|N_G(v) \cap \mathcal{L}_{i+1}|$ 最大。

    $\alpha(v) \leftarrow i$

    新基数 $\leftarrow |N_G(v) \cap \mathcal{L}_{i+1}|$

    如果新基数 $\leq$ 前一个基数则

        $\mathcal{K} \leftarrow \mathcal{K} \cup \{K^s\}$

        $s \leftarrow s + 1$

        $K^s \leftarrow N_G(v) \cap \mathcal{L}_{i+1}$

        如果新基数为 $\neq 0$，则

            $u \leftarrow \arg\min_{u' \in K^s} \{j | \alpha(u') = j\}$。

            $p \leftarrow$团(u)

            $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} \leftarrow \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \cup \{K^s K^p\}$

        结束如果

    结束如果

    团$(v) \leftarrow s$

    $K^s \leftarrow K^s \cup \{v\}$

    $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}_{i+1} \cup \{v\}$

    前一个基数 $\leftarrow$ 新基数

循环结束

返回 $(\mathcal{K}, \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$，$\mathcal{K}$