脑电图和脑磁图正向建模的局部化减法方法

Malte B. H¨oltershinken[a,*], Pia Lange[a,b], Tim Erdbr¨ugger[a], Yvonne Buscherm¨ohle[a,c], Fabrice Wallois[d,e], Alena Buyx[f], Sampsa Pursiainen[g], Johannes Vorwerk[h], Christian Engwer[i], Carsten H. Wolters[a,c]

[a]*Institute for Biomagnetism and Biosignalanalysis, University of Münster, Münster, Germany*[b]*Institute of Medical Informatics, University of Münster, Münster, Germany*[c]*Otto Creutzfeldt Center for Cognitive and Behavioral Neuroscience, University of Münster, Münster, Germany*[d]*INSERM U1105, Research Group on Multimodal Analysis of Brain Function, Jules Verne University of Picardie, Amiens, France*
[e]*Pediatric functional exploration of the nervous system department, CHU Picardie, Amiens, France*[f]*Institute of History and Ethics in Medicine, Technical University of Munich, Munich, Germany*[g]*Computing Sciences Unit, Faculty of Information Technology and Communication Sciences, Tampere University, Tampere, Finland*[h]*Institute of Electrical and Biomedical Engineering, Private University for Health Sciences, Medical Informatics and Technology, Hall inTyrol, Austria*

[i]*Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Münster, Münster, Germany*

arXiv:2302.12785v2 [cs.CE] 3 Feb 2025

摘要

在基于有限元法的脑电图和脑磁图源分析中，已有研究提出减法方法，用于模拟神经活动产生的传感器测量值。尽管该方法具有严谨的理论基础，并能得到精确结果，但其主要缺点是在实际应用中计算成本极高。为此，我们开发了一种称为局部化减法方法的新方法。该方法旨在保留减法方法的数学基础，同时使有限元法公式中的右端项变得稀疏，从而提高计算效率。为此，我们在减法中引入截断，将其影响限制在源的紧邻区域内。本文将介绍并分析该方法，并将其与其他先进的有限元法右端项方法进行比较。此外，我们还将讨论如何实现高效且稳定的算法。我们在存在解析解的多层球模型中进行了验证，并证明局部化减法方法的效率远高于减法方法。此外，我们发现，对于脑电正问题，局部化减法方法对有限元网格全局结构的依赖较小；而减法方法对网格结构较为敏感，即使远离源也不例外。此外，我们还表明，就精度而言，局部化减法方法可与其他受研究的方法相媲美，且在许多情况下甚至更胜一筹。特别是对于采用毕奥-萨伐尔定律的脑磁图正向问题，我们证明局部化减法方法和减法方法都能对源附近的体电流进行高度精确的近似。因此，局部化减法方法降低了减法方法的计算成本，使其能够用于实际应用，同时不牺牲减法方法一贯具备的理论严谨性和精度。

关键词：脑电图、脑磁图、源分析、有限元法、源建模

1. 引言

在脑电图（EEG）和脑磁图（MEG）中，所谓的脑电图和脑磁图正问题，是指模拟给定神经活动所产生的传感器测量值 [1, 2]。神经活动通常建模为数学点偶极子的线性组合，参见例如 [1–3]。因此，正向建模问题就是计算单个点偶极子所产生的电势（脑电图）和磁通量（脑磁图）。由于头部几何结构复杂，要准确势和通量的近似依赖于真实的体积导体模型，随后在该模型中采用某种数值方法 [1, 2, 4]。计算这些近似有多种方法，例如边界元法（BEM）[5–8] 或有限差分法（FDM）[9–11]。有限元法（FEM）已被提出用于建模复杂的头部几何结构和组织各向异性 [2, 12, 13]，因此成为本工作的重点。然而，有限元法的一个核心困难在于嵌入高度奇异的点偶极子 [14, 15]。我们将这种嵌入策略称为有限元法势方法。势方法大致可分为所谓的直接方法和减法方法。在直接方法中，点偶极子被直接纳入有限元法右端项。最先进的直接方法，例如多极Venant方法 [16]和

*通讯作者地址：德国明斯特市 Malmedyweg 15 号，邮编 48149¨

Email address: m_hoel20@uni-muenster.de （Malte B. H¨oltershinken）

H(div) 方法 [17]，通过用正则化类偶极对象替代点偶极子来实现这一点。另一方面，减法方法通过将奇异性从问题表述中“减去”，以解析方式处理偶极子，从而得到一个正则问题，随后对所得有限元解进行后处理，以将奇异性加回。大量工作致力于减法方法的开发与评估[14, 15, 18–25]。这些研究表明，减法方法具有严格的数学基础，并能产生高精度结果。尽管如此，它们通常并未用于实际应用。

造成这种情况的主要原因是计算成本高。在源分析中，通常需要针对数万个源位置计算正向解；即使采用快速的传递矩阵方法 [26], [15], ，在逼真的头部模型中，为减法类方法组装所有有限元法右端项所需的时间也会高到无法进行计算。为解决减法方法的这一缺点，人们提出了不同的方法。投影减法方法 [23] 和投影梯度减法方法 [25] 用更简单的积分替代复杂积分，力求在精度与计算负担之间取得平衡。另一方面，解析减法方法[14] 推导出有限元法右端项的解析公式，从而免去了昂贵的数值计算。尽管这些方法都降低了完全减法方法的计算成本，详见 [15], ，但没有一种成功地使减法方法在实践中变得可行。

造成这种情况的根本原因是，所有先前的减法方法都会产生右端项稠密的有限元公式。组装这些右端项时，需要针对每个待考察的偶极子遍历整个网格，并对每个单元执行积分。尤其是对于通常包含数百万个单元的逼真头部模型（例如 [27]），这会导致前述高昂的计算成本。另一方面，最先进的直接方法会产生稀疏右端项，这与点偶极子的局部特性相符。随后便可快速组装这些稀疏右端项。

除了计算复杂度高之外，不同减法方法在脑磁图正向问题中还存在另一个问题。使用有限元方法计算磁通量时，通常先近似求出电势，然后应用毕奥-萨伐尔定律（见 [1]）。采用直接方法时，这并不会造成困难，因为数值解会直接给出电流，其形式适用于计算毕奥-萨伐尔定律。然而，减法方法会产生在偶极子位置处奇异的势；由于毕奥-萨伐尔定律要求在整个头部体积上积分，直接应用该定律会导致对奇异函数进行积分，这在数值计算上并不理想。

本文基于这些观察，提出一种新的势方法，称为局部化减法方法，以缓解上述问题。这种方法的构造基于这样一点：点偶极子仅在源位置处具有奇异性。因此，与以往在整个头部区域内进行减法的减法方法不同，我们可以在局部空间范围内从问题构造中减去奇异性。这种局部化减法是降低减法方法计算负担的关键步骤。

此外，我们还提出了一种方法，用于处理采用减法型势方法时脑磁图正向问题中出现的奇异积分。在经典 Geselowitz 公式的推导基础上 [28], ，将奇异部分从积分中提取出来，并改写为非奇异曲面积分。

在方法部分，我们将分别推导脑电图和脑磁图情形下的相应公式。特别是，我们可以看到，对于脑电正问题，局部化减法方法产生的右端项仅在偶极子附近的自由度上非零，从而形成稀疏右端项。这使得有限元法右端项能够被高效计算。在结果部分，我们将进一步展示，与之前的减法方法相比，局部化减法方法能够显著提高计算速度。此外，我们还将证明，局部化减法方法具有同样高的精度，并且在许多情况下甚至比其他先进的势方法更加准确，例如解析减法方法 [14] 和多极Venant方法 [16]。

2. 方法

2.1. 脑电正问题

2.1.1. 问题定义

设 Ω 为头部区域， $\partial\Omega$ 为其边界。在脑电正问题中，我们关注由给定神经活动产生的电势 $u : \Omega \to \mathbb{R}$，或至少关注其在某些预先确定的电极位置处的值。如引言所述，在当前实践中，这归结为计算数学点偶极子产生的势。设 $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times3}$ 为对称正定电导率张量。现在考虑位于 $x_0 \in \Omega$、矩为 $M \in \mathbb{R}^3$的点偶极子。采用麦克斯韦方程组的准静态近似 [1], ，点偶极子产生的电势 u可描述为

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = \operatorname{div}(M \cdot \delta_{x_0}) \qquad \text{on } \Omega, \tag{1}$$

$$\langle \sigma\nabla u, \eta\rangle = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{2}$$

其中， δ_{x_0} 是位于 x_0 处的狄拉克分布， η 是头部区域的单位外法向量。

2.1.2. 推导弱形式

使用有限元方法求解偏微分方程时，第一步是推导出适当的弱形式。在此过程中，我们必须处理由（1）产生的高度奇异项 $\mathrm{div}(M \cdot \delta_{x_0})$。减法方法的定义特征是，它们不会将该项或其近似直接纳入弱形式，而是利用（1）和（2）为函数 $u - \varphi$推导出弱形式，其中 φ 是某个适当的函数，用来从问题中"减去"奇异性。现在我们将讨论如何构造这样的 φ 。

我们假设电导率 σ 在 x_0 的邻域内为常数。令 $\sigma^\infty \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 为其在该邻域内的值。现在考虑方程

$$\mathrm{div}\left(\sigma^\infty \nabla u^\infty\right) = \mathrm{div}\left(M \cdot \delta_{x_0}\right) \qquad \text{on } \mathbb{R}^3, \tag{3}$$

该方程是在无界均匀导体中的方程（1）的等价形式。在此背景下，很容易为 u^∞ 推导出解析公式（例如 [15, 23]）。由于公式（3）中的右端项与公式（1）中的相同，因此我们的思路是利用这一点 u^∞ 来消除奇异性。

现在可以简单地令 $\varphi = u^\infty$。此前所有的减法方法都采用了这种方法，而这正是导致其计算需求较高的原因。原因在于， u^∞ 几乎处处非零。因此，由这种方法推导出的弱形式，以及进一步推导出的有限元离散，都包含与在头部区域 [15, 23] 的较大部分上非零的函数相乘的积分。在为有限元基函数计算这些积分时，其中大量积分将为非零，从而产生稠密的右端项。

相反，我们提出以另一种方式构造 φ 。由于 $\mathrm{div}\,(M \cdot \delta_{x_0})$ 仅在源位置 x_0 处存在奇异性，因此我们建议仅利用源位置附近 u^∞ 的局部分布，从问题中消除奇异性。下面将对此作更精确的说明。设 $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个函数，且在源位置 x_0 的某个邻域内满足 $\chi = 1$ 。其基本思路是选择 χ ，使其仅在 x_0 周围的一个小区域内非零。这样，$\chi \cdot u^\infty$ 也只会在 x_0 周围的一个小区域内非零，最终得到稀疏的右端项。此外，它在靠近源位置处与 u^∞ 具有相同的局部行为，因此也可用于从问题构造中消除奇异性。根据目标是采用（经典）连续伽辽金还是间断伽辽金 [29] 有限元离散化

性，因此必须对χ施加不同的正则性约束。我们着重讨论连续伽辽金情形，间断伽辽金情形请参阅[30] 。在连续伽辽金情形下，我们还要求 χ 连续，且属于索伯列夫空间 $H^1(\Omega)$。现在将该方法具体化，并将校正势 u^c定义为

$$u^c := u - \chi \cdot u^\infty. \tag{4}$$

现在，我们为这一校正势推导一个弱形式

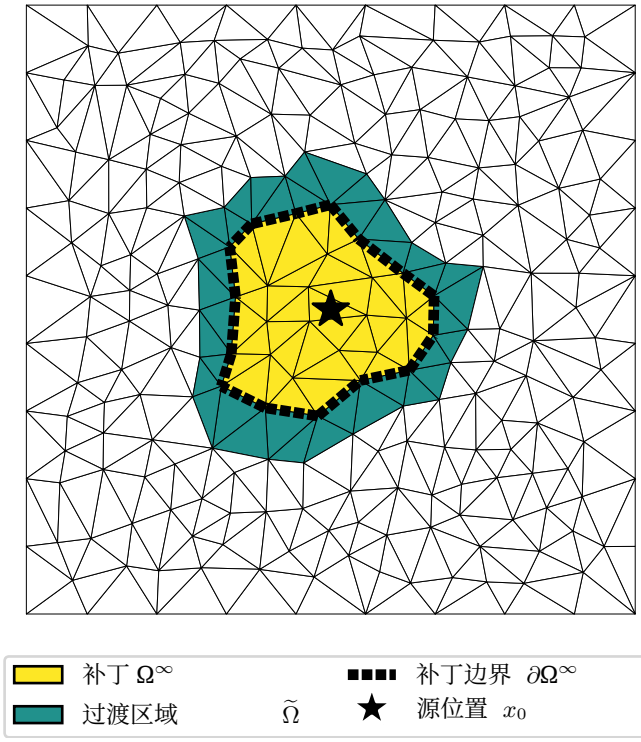


图1：引理 1 中所述构造的二维可视化实现。整个正方形为 Ω。在黄色区域中，我们有 $\chi = 1$；在白色区域中，我们有 $\chi = 0$。

。关键步骤是理解 u^∞ 与 χ 的乘积如何影响分布导数。以下引理回答了这一问题，其证明见附录 A。

引理 1. 设 $\Omega^\infty \subset \Omega$ 和 $\chi \in H^1(\Omega)$ 满足 χ 在$\widetilde{}$1 上恒等于 Ω^∞ 且 $x_0 \in \Omega^\infty$。设 $\Omega \subset \Omega \setminus \Omega^\infty$ 为一个$\widetilde{}$区域，满足 $\partial \quad \infty \qquad \partial \quad \cup \partial \qquad \chi = 0$ Ω是 Ω Ω的子集，且在 $\Omega^\infty \cup \Omega$ 之外（见图*1*）。那么，对于任意测试函数$\phi \in C_c^\infty(\Omega)$[1]，在分布意义下有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\sigma^\infty \nabla\left(\chi \cdot u^\infty\right)\right)(\phi) = \\ \mathrm{div}\left(M \cdot \delta_{x_0}\right)(\phi) - \int_{\widetilde{\Omega}} \left\langle \sigma^\infty \nabla\left(\chi \cdot u^\infty\right), \nabla\phi \right\rangle dV \\ - \int_{\partial\Omega^\infty} \left\langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \right\rangle \phi \, dS. \end{aligned} \tag{5}$$

这里 η 是 Ω∞的单位外法向量。特别要注意的是，右端项中有 $\mathrm{div}\,(M \cdot \delta_{x_0})$，因此可以利用 $\chi \cdot u^\infty$ 消去（1）中的奇异性。

$\widetilde{}$我们将 Ω^∞ 称为补丁。此外，我们将 Ω 称为过渡区域，因为 χ 在此处从 1 过渡到 0。我们想强调的是，我们对 Ω^∞ 的定义不同于 [15, 23]中给出的定义。具体而言，我们不假设电导率 σ 在整个补丁 Ω^∞上为常数。

[1]用 $C_c^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 中所有具有紧支集的无穷次可微函数所构成的空间。

相反，我们只假设 Ω^∞ 包含 x_0 的一个邻域，在该邻域内电导率为常数。

现在令 $\sigma^c := \sigma - \sigma^\infty$。将 (1) 乘以一个测试函数，结合边界条件 (2) 应用分部积分，并代入分解

$$\sigma\nabla u = \sigma\nabla u^c + \sigma^c\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right) + \sigma^\infty\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right) \tag{6}$$

再利用引理 1，可得如下结果。定义双线性形式 $a\colon H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ 为

$$a(w,v) = \int_\Omega \langle\sigma\nabla w, \nabla v\rangle\, dV \tag{7}$$

以及线性形式 $l : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} l(v) = &-\int_{\widetilde{\Omega}} \langle\sigma\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right), \nabla v\rangle\, dV \\ &-\int_{\partial\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty, \eta\rangle v\, dS - \int_{\Omega^\infty}\langle\sigma^c\nabla u^\infty, \nabla v\rangle\, dV, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 η 是 Ω^∞的单位外法向量。于是，连续 *Galerkin* 局部化减法方法 可表述为：求 $u^c\in H^1(\Omega)$，使得对于所有 $v\in H^1(\Omega)$，均有 $a(u^c, v) = l(v)$。关于更详细的推导，请参见附录 B。

容易看出，l 在常函数上为零。根据标准有限元理论（例如 [23],中所述），可知该问题的解集具有如下形式

$$u_0^c + \mathbb{R}\cdot 1, \tag{9}$$

这反映了参考电极选择的任意性。由此，我们推导出了一个弱形式，并发现它会产生预期形式的解。另外请注意，方程 (1) 和 (2) 对应的解族为

$$u_0^c + \chi\cdot u^\infty + \mathbb{R}\cdot 1 \tag{10}$$

~不依赖于对 χ,Ω^∞ 和 Ω 的选择，这正如预期的那样。这些结论的证明可见附录 C。此外，我们想强调，选择 $\chi = 1$、$\Omega^\infty = \Omega$ 和 $\Omega = \emptyset$ 会得到 [14, 15, 18–25]中所述的经典减法方法。因此，经典减法方法可视为局部化减法方法的一种特例。

2.1.3. 有限元离散

为了在计算算法中使用 (8)，我们需要一种构造 χ, Ω^∞ 和 Ω 的方法。我们希望提出一种相应的策略。由于我们想采用有限元法方法，因此可以假设已知头部区域的网格。~随后，我们使用所谓的顶点扩展来构造 Ω^∞ 和 Ω。若给定网格单元的某个子集 $\mathcal{T}$，我们将其顶点扩展 $\mathcal{T}'$ 定义为所有与 $\mathcal{T}$ 中某个单元至少共享一个顶点的网格单元所构成的集合。注意，$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$。现在设 Ω 中给定一个源位置 $x_0\in$。接着，我们取包含该位置的网格单元并进行一定次数的顶点扩展。我们将所得结果作为补丁 Ω^∞。随后对补丁 ~ 再进行一次顶点扩展，并将 Ω 定义为该补丁的顶点扩展中所有不属于补丁本身的单元的并集。接着，我们选择 χ，使其为有限元基函数的线性组合，并且在补丁的每个顶点处取值为 1，在其余顶点处取值为 0。注意，在常见情形下，对于四面体上的分片线性基函数和六面体上的分片多线性基函数，这已足以唯一确定 χ。图 1展示了这一构造的结果。请注意，在该图中，使用了两次顶点扩展来构造补丁 Ω^∞。

这种构造引出了一个问题：应进行多少次顶点扩展才能构造补丁。从计算角度来看，尽可能少地进行顶点扩展是有利的，因为较大的补丁会增加有限元法右端项组装过程中的积分开销。此外，补丁越大，近似的精度就越依赖于底层网格；例如，电导率跃变处的$u^c = u - \chi\cdot u^\infty$ 可能呈现复杂结构，需要较高的分辨率才能恰当解析。另一方面，选择较小的补丁也可能导致次优近似，因为此时 $\chi\cdot u^\infty$ 仅在源附近的一小片区域内非零，这会使偶极子附近势的奇异行为转移到校正势 u^c上。因此，使用有限元试函数近似 u^c 会更加困难，从而降低该方法的性能。在结果部分，我们将探讨如何对这些影响进行最佳权衡。

最后，我们想进一步说明有限元法右端项的计算。令 K 为一个网格单元，F 为一个网格单元的面。当像有限元法中的典型做法那样逐单元进行右端项组装，且 φ 为一个有限元法测试函数时，我们需要计算以下形式的积分

$$I_T = \int_K \langle\sigma\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right), \nabla\varphi\rangle\, dV \tag{11}$$

$$I_S = \int_F \langle\sigma^\infty\nabla u^\infty, \eta\rangle\varphi\, dS, \tag{12}$$

$$I_P = \int_K \langle\sigma^c\nabla u^\infty, \nabla\varphi\rangle\, dV, \tag{13}$$

我们称 I_T 为过渡积分，I_S 为曲面积分，而I_P 为补丁积分。

对于各向同性 σ^∞ 以及四面体网格上的分片仿射试函数，[14], 推导出了补丁积分和曲面积分的解析表达式，由此得出了解析减法方法。我们对相应公式稍作调整，以实现更稳定的计算。此外，在 [31, 32],的基础上，我们扩展了 [14] 中给出的推导，计算过渡积分的解析表达式，从而实现

对局部化减法脑电图右端项进行完全解析计算。有关这些公式的详细推导，请参阅附录 D。

如果网格不是四面体网格，或源邻域内的电导率不是各向同性的，或试探函数不是仿射函数，则我们会采用数值积分，并使用 DUNE 框架中实现的求积规则 [33], , DUNEuro 实现正是构建于该框架之上 [34]。关于如何选择合适的积分阶数，参见附录 E。

2.2. 脑磁图正问题

2.2.1. 问题的定义

在脑磁图中，人们通过磁强计测量磁通量。为了模拟磁通量，需要近似计算以下形式的量：

$$\int_F \langle B, \eta \rangle \, dS, \tag{14}$$

其中， B 是磁场，F 是拾取线圈所围成的某个表面， η 是该表面的法向量（例如参见 $[1, 2]$）。在有限元方法中，通常先对积分（14）使用某种求积规则，然后利用毕奥-萨伐尔定律计算求积点 [35]处的磁场 B 。该定律指出，对于体积导体 Ω 中的电流 j ，Ω 外某点 x 处的磁场由下式给出：

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega j(y) \times \frac{x - y}{\|x - y\|^3} \, dV(y), \tag{15}$$

其中， μ_0 是真空的磁导率 $[1, 2]$。在生物电磁学中，电流通常分为由神经活动产生的所谓初级电流 j^P ，以及由电场产生的被动体电流，因此可表示为 $-\sigma \nabla u$，其中 u 是电势 $[1, 2]$。由于磁场与初级电流呈线性关系，我们同样可以将重点放在点偶极子 $j^P = M \cdot \delta_{x_0}$的情形上。将分解式 $j = j^P - \sigma \nabla u$ 代入式 (15)，可得分解式 $B = B^P + B^S$ ，其中包括所谓的初级磁场 B^P和次级磁场 B^S。初级磁场可以利用解析表达式高效计算，因此并不构成问题。因此，脑磁图正向问题的难点在于计算积分

$$\int_\Omega \sigma(y) \nabla u(y) \times \frac{x - y}{\|x - y\|^3} \, dV(y). \tag{16}$$

2.2.2. 边界减法方法

为了计算公式 (16) 中的积分，我们需要电势 u 的梯度，例如可以使用有限元法进行近似。随着与源之间距离的增加，体电流的幅值会减小。因此， $\sigma \nabla u$ 靠近源位置时的行为对积分 (16) 的贡献相对较大，有必要确保有限元近似

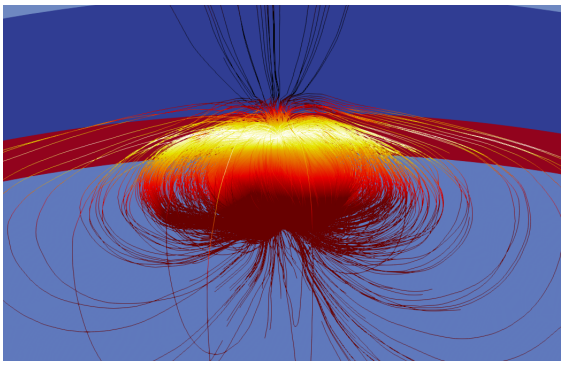


图 2：局部化减法方法计算得到的体电流可视化结果。线条的颜色表示电流大小，背景颜色表示体积导体的电导率。数值模拟采用多层球模型 $mesh\ init$ 进行，模型如图3 (a) 所示，其中径向偶极子距电导率跃变处 1 mm。有关该网格的详细信息，请参见结果部分。通过在偶极子位置周围半径为 2.5 mm 的球体内生成 5000 个点，并使用 ParaView 软件 [36] 中实现的流线追踪滤波器应用龙格-库塔方法，对电流进行了可视化。

在偶极子附近足够精确。数值解的局部行为取决于如何根据偶极子推导有限元法右端项，这意味着它取决于势方法。由于当前最先进的直接方法（例如 Venant 方法）基于用更易处理的对象替代偶极子，因此按照构造，它们在源位置周围的局部行为会偏离真实偶极子的行为。相比之下，减法方法将数学点偶极子纳入问题公式中，因此有望在偶极子附近对真实电流密度产生高度精确的近似。图 2 对此进行了说明，其中可以看到，使用局部减法方法计算出的电流，即使在源位置的近邻区域内，也呈现出预期的偶极子模式。因此，在采用偶极子源模型描述神经活动时，减法方法是计算电流及其所产生磁场的自然选择。

这再次在问题中引入了奇异性，因为减法方法会产生形式为 $u_h = u_h^c + \chi \cdot u^\infty$ 的近似，其中 u_h^c 是有限元离散的结果。因此，我们需要计算

$$\int_\Omega \sigma(y) \nabla \left(u_h^c + \chi u^\infty \right)(y) \times \frac{x - y}{\|x - y\|^3} \, dV(y). \tag{17}$$

由于 u_h^c 是有限元法基函数的线性组合，因此积分不存在问题，使用传递矩阵方法 $[15, 23,26]$即可高效完成积分。另一方面，函数 $\nabla(\chi \cdot u^\infty)$在源位置处包含奇异性，因此不宜进行数值积分。一种处理方法是将 u^∞ 或其梯度投影到易于积分的函数空间中，这与 [23] 或

[25]中所采用的方法类似。由于函数 u^∞，尤其是在奇异性附近，与其投影存在很大差异，因此可能引入显著误差，正如在脑电图背景下的 [25] 中所观察到的那样。在假设 σ^∞ 各向同性的情况下，我们可以从式（17）中彻底消除奇异性。对于集合 A，令 1_A 表示其示性函数，即在 A 上为~1，在其他地方均为 0。于是，如果 Ω^∞ 和 Ω 分别为补丁和过渡区域，则根据构造可得分解

$$\begin{aligned}&\sigma\nabla\left(\chi u^\infty\right)=\\&\sigma\nabla\left(\chi u^\infty\right)\cdot 1_{\widetilde{\Omega}}+\sigma^c\nabla u^\infty\cdot 1_{\Omega^\infty}+\sigma^\infty\nabla u^\infty\cdot 1_{\Omega^\infty}.\end{aligned}\quad(18)$$

注意，$\sigma\nabla\left(\chi u^\infty\right)\cdot 1_{\widetilde{\Omega}}$和 $\sigma^c\nabla u^\infty\cdot 1_{\Omega^\infty}$不含奇异性，因为 $1_{\widetilde{\Omega}}$ 和 σ^c 在奇异点附近均为零。因此，可以将式（17）中的被积函数的奇异性分离出来，归入$\sigma^\infty\nabla u^\infty\cdot 1_{\Omega^\infty}$。不过，可以仿照从 [28]推导经典 Geselowitz公式的过程来处理这个表达式。 [37], 首次提出了这一思路，并将其用于完全减法方法下的脑磁图正向模拟 [15]。具体而言，有如下结果。

引理2. 设 η 为Ω^∞的单位外法向量。则有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\infty}\sigma^\infty\nabla u^\infty(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dV(y)=\\\int_{\partial\Omega^\infty}\sigma^\infty u^\infty(y)\cdot\eta(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dS(y).\end{aligned}\quad(19)$$

该引理的证明见 [38], ，作者特别注意了如何妥善处理源位置处的奇异性。

综上，我们得到以下计算次级磁场的方法。

$$\begin{aligned}-\frac{4\pi}{\mu_0}B^S(x)=&\int_\Omega\sigma(y)\nabla u^c(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dV(y)\\&+\int_{\Omega^\infty}\sigma^c(y)\nabla u^\infty(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dV(y)\\&+\int_{\partial\Omega^\infty}\sigma^\infty u^\infty(y)\cdot\eta(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dS(y)\\&+\int_{\widetilde{\Omega}}\sigma(y)\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right)(y)\times\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dV(y).\end{aligned}\quad(20)$$

特别要注意的是，公式（20）的右端项不含奇异性。我们将其称为<style id='1'>边界减法方法，用于脑磁图正问题，因为其中的关键步骤是将奇异体积分改写为边界积分。

式（20）中的第一项可以使用标准的脑磁图传递矩阵方法进行组装。与脑电图的情况类似，我们将第二项称为补丁通量，第三项称为表面通量，第四项称为过渡通量。这些项可以通过数值积分逐单元组装，

表 1：多层球体参数

区室	电导率	半径
脑	0.33 S/m	0 -78 mm
CSF	1.79 S/m	78 - 80 mm
颅骨	0.01 S/m	80 - 86 毫米
Skin	0.43 S/m	86 - 92 毫米

这就引出了如何选择合适积分阶数的问题。附录 E 中对此有相应讨论。

2.3. 实现

方法部分推导出的所有公式均已实现并集成到 DUNEuro 工具箱中 [34][2], 。该工具箱是一个面向神经科学应用的开源 C++ 工具箱，基于 DUNE 框架构建 [33, 39]。

2.4. 实验设置

本文的数值模拟采用了四层球模型，各层分别代表脑、脑脊液（CSF）、颅骨和皮肤。模型参数如表 1 所示。对于多层球模型，可以推导出脑电图 [40] 和脑磁图 [41] 正问题的解析解，并将其与我们的数值解进行比较。

要采用有限元方法，就需要构建网格。众所周知，网格构建本身就可能造成偏差，使某些电位方法 [42, 43]处于有利地位。更具体地说，[42] 中发现，将节点集中在电导率突变附近的网格有利于减法方法，而节点均匀分布的网格则有利于直接方法，例如多极 Venant 方法。

这可以解释为：减法方法求解的并非势本身，而是头部电位与无限均匀介质中的势之差。为了获得精确结果，有限元法需要在待近似函数表现复杂的区域采用高分辨率。特别是在电导率跃变附近，我们预计头部电位会偏离均匀介质中的势。因此，我们预计二者之差在电导率跃变处会呈现相当复杂的变化，需要较高的网格分辨率才能准确捕捉。另一方面，在脑区室内，我们预计均匀介质中的势与头部电位相当接近。因此，只要偶极子离电导率跃变不太近，脑区采用相对较低的分辨率，也足以使减法方法达到良好的数值精度。

[2] https://gitlab.dune-project.org/duneuro/duneuro/-/tree/feature/localized-assembler

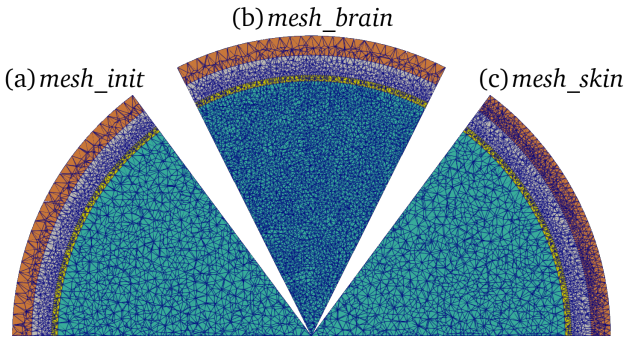


图3：数值测试中使用的网格圆形截面。(a) 显示了初始网格，其中脑脊液和颅骨区室中的节点高度集中。(b) 显示了对脑区室进行细化后的网格，即网格 (a) 的细化结果。(c) 显示了对皮肤区进行细化后的网格，即网格 (a) 的细化结果。网格 (a) 约由 80 万个节点组成，网格 (b) 约由 180 万个节点组成，网格 (c) 约由 130 万个节点组成。

另一方面，Venant方法依赖于适合放置单极负荷的节点位置，因此可以使用在脑区室内部网格更精细的网格。

对于局部化减法方法，适用于减法方法的类似考虑同样适用。但与求解整个差值 $u-u^{\infty}$ 的减法方法不同，局部化减法方法求解的是 $u-\chi\cdot u^{\infty}$，后者仅在源附近与 u 存在差异。对于距离电导率跃变较远的偶极子，所有电位方法通常都能产生高度准确的结果，因此网格结构主要与靠近电导率跃变的源有关。因此，只要网格在靠近源位置的电导率跃变处具有较高分辨率，我们就预计局部化减法方法能够产生准确的结果。

这些考量表明，要为比较不同电位方法的准确性选择一种“公平”的网格并不容易。我们将使用三种不同的网格，其构建方式旨在为前文介绍的不同电位方法提供有利条件（见图3）。首先，使用 Gmsh [44] 构建了一个包含 787k 个节点的四面体网格（图3 (a)）。该网格在脑脊液和颅骨区室中具有较高的节点密度。随后，我们使用 UG软件[45] 从这一初始网格生成另外两个网格：一个通过细化脑区室构建（有利于 Venant 方法，图3 (b)），另一个通过细化皮肤区构建（有利于减法方法，图3 (c)）。下文中，我们将图3 (a)中的网格称为初始网格，将图3 (b)中的网格称为脑部网格，并将图3 (c)中的网格称为皮肤网格。

对于脑电正问题，我们在球面上使用了 200 个电极位置；对于脑磁图正向问题，我们在距球心 110 mm 处使用了 256 个线圈位置。电极位置和线圈位置分别选取为近似均匀分布在各自对应的球面上。我们始终考虑脑区室中的偶极子，并按偏心率对其分组；偏心率的计算方法是将偶极子到球心的距离除以脑区室的半径。根据生理学推理，[29] 认为，距离脑脊液区室 1–2 mm 的源对于神经电磁场的产生最为重要。因此，我们将特别关注此范围内的偏心率。此外，众所周知，当源靠近电导率跃变处时，势和通量的数值模拟会更加困难，例如[23]中就提到了这一点。此时可能会出现这种情况，例如由于分割不准确，源被放置在距电导率跃变处不到 1 mm 的位置。为了涵盖这些极端情况，我们测试了偏心率最高达 0.99 的源，这对应于距电导率跃变处约 0.8 mm 的距离。

3. 结果与讨论

3.1. 补丁构造

我们首先希望研究在构造局部化减法方法的补丁过程中应执行的顶点扩展次数（见第2.1.3节和图1）。我们在偏心率为0.99的情况下生成了1000个切向偶极子和1000个径向偶极子，每组偶极子均近似均匀地分布在相应的球面上。对于图3所示的三种网格，我们随后针对每个偶极子执行逐渐增加次数的顶点扩展，并计算相应的局部减法脑电有限元解。我们还计算了解析减法方法的有限元解，以便与 [14] 进行比较。完成数值结果计算后，计算了电极位置处相对于解析解的相对误差。切向偶极子和初始网格的结果如图 4 所示。

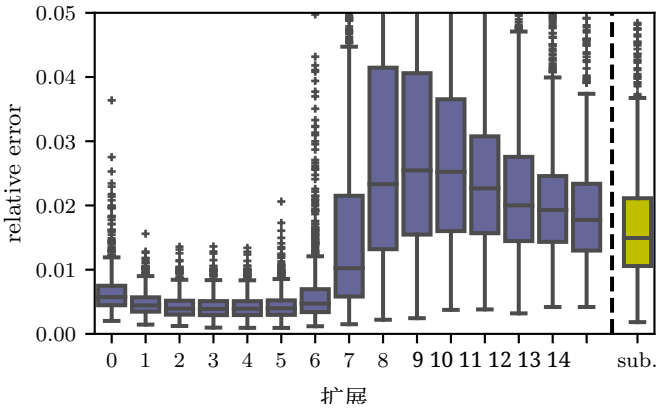


图4：在脑电图情形下，对于偏心率为 0.99 的 1000 个切向偶极子，在补丁构造过程中采用不同数量的顶点扩展时的相对误差，使用 *mesh init* 计算（见图3 (a)）。最右侧的黄色箱线图显示了采用 [14] 中的解析减法方法时的误差。

我们可以看到，当顶点扩展次数从0次（即补丁仅由包含偶极子的单元构成）增加到2次时，误差会减小。随后直到5次扩展，误差几乎保持不变。接着，误差在6次到8次扩展期间显著增加，然后逐渐接近解析减法方法的误差。需要注意的是，如果执行足够多次顶点扩展以覆盖整个体积导体，那么局部化减法方法与解析减法方法的误差将完全相同。此外，径向偶极子也表现出类似的行为。

初始的下降可以用校正势中的奇异行为来解释，这是因为需要在奇异性附近近似偶极子势。此外，对于初始网格，6–8 次扩展是偏心率为 0.99 的偶极子的补丁开始延伸到皮肤区室中的节点。如图3(a)所示，该网格的皮肤区室分辨率相对较低。这使得对 $u - \chi \cdot u^{\infty}$ 的近似变得困难，因为 $u - \chi \cdot u^{\infty}$ 在电导率跃变处可能表现出相当复杂的行为。事实上，当对皮肤网格进行相同实验时，我们发现，对于较大的补丁，误差显著减小，而对于较小的补丁，误差几乎没有变化（见图F.2）。相比之下，如果对脑部网格进行该实验并与图4进行比较，则较大补丁的误差几乎没有变化，而较小补丁的误差会减小（见图F.1）。这是因为较小的补丁可以利用脑区中更高的分辨率，而较大的补丁仍受皮肤分辨率较低的限制。

此外，将小补丁与大补丁得到的有限元解进行比较后，我们发现，靠近源且邻接颅骨的皮肤单元中的相对差异较大。这也解释了为什么在扩展次数达到 6–9 次、误差增加后，误差会持续下降：随着补丁增大，我们需要在靠近源且邻接颅骨的皮肤单元中近似 $u - u^{\infty}$，而不是更复杂的 $u - \chi \cdot u^{\infty}$。

总的来说，这些实验表明，补丁尺寸越大，该方法越依赖全局网格结构；而补丁尺寸较小时，则主要取决于源附近的局部网格结构。特别是，这是局部方法的主要优势之一——
与解析减法方法相比的减法方法。

重要的是，顶点扩展数量的增加总是伴随着计算成本的增加。因此，为了达到最佳速度和精度，我们建议在补丁构造中使用两个顶点扩展。

3.2. 与其他电位方法的比较

我们将局部化减法方法与解析减法方法进行比较 [14]。此外，我们还希望将局部化减法方法与多极Venant方法进行比较 [16], ，因为后者是一种广泛使用且

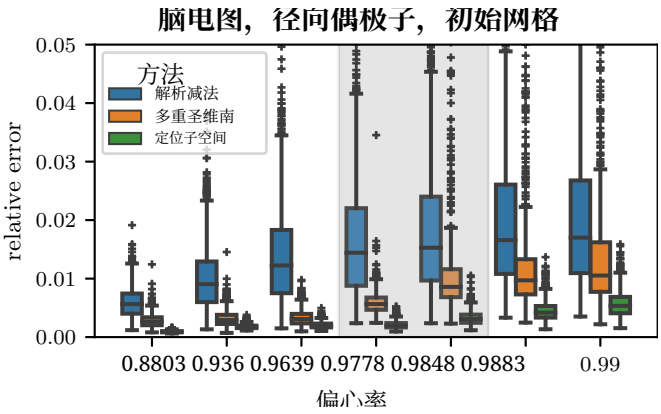


图5：使用解析减法、多极 Venant 和局部化减法势方法，对采用 $mesh\ init$ 的不同偏心率下径向偶极子的脑电正向模拟进行准确度比较（见图3（a））。 y轴显示相对误差。距离脑脊液 1–2 mm 的生理相关源已突出显示。

性能良好的直接方法。下文中，我们将局部化减法方法简称为“loc. sub.”，将解析减法方法简称为“ana. sub.”，将多极Venant方法简称为“mul. Venant”。

3.2.1. 准确度比较

我们首先希望比较不同电位方法的精度。为此，我们针对径向偶极子和切向偶极子，在不同的、按对数刻度分布的偏心率下计算了正向解，偏心率范围为 0.8803 至 0.9900。在每个偏心率下，我们使用了 1000 个近似均匀分布的偶极子，并计算了相对于解析解的相对误差。对于脑电正向模拟，我们将所有正向解平移为零均值。对于脑磁正向模拟，我们计算了完整的磁场矢量。此外，我们仅针对切向偶极子求解脑磁图正向问题，因为在球对称体积导体外部，径向偶极子不会产生磁场 [41]。初始网格 的结果（见图3（a））如图5和图6所示。

我们首先讨论脑电图的情况。对于径向源，从图5可以看出，在初始网格 上，局部减法方法在所有考察的偏心率下均优于解析减法方法和多极Venant方法；即使源位于偏心率为0.99处（也就是距离电导率跃变0.8 mm），其中位误差仍低于1%。请注意，我们使用 [14], 中的解析公式计算了解析减法方法的右端项，因此其较大的误差并非源于积分不准确，而是由于皮肤区域的分辨率相对较低，如第3.1节所述。切向偶极子的脑电图结果表现出类似趋势，但整体误差更小（见图G.1）。

在脑部网格中进行相同的比较表明，与图5中的结果相比，对脑部网格进行细化会使

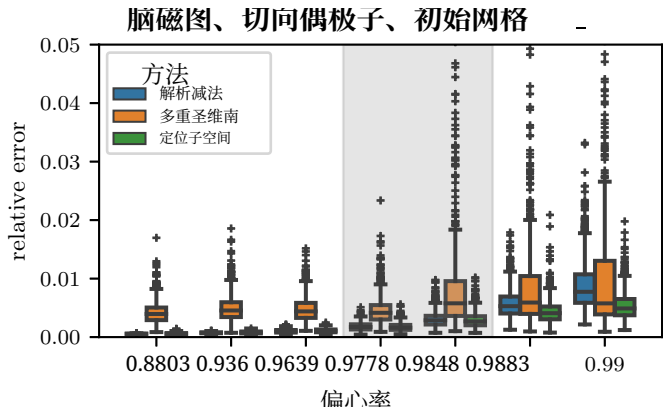


图6：使用解析减法、多极 Venant 和局部化减法势方法，对不同偏心率处的切向偶极子进行脑磁图正向模拟的精度比较，采用 $mesh\ init$（见图3(a)）。y 轴表示相对误差。距脑脊液 1–2 mm 的生理相关源已突出显示。

多极 Venant 方法的误差大幅降低，局部化减法方法的误差小幅降低，而解析减法方法的误差几乎没有明显变化（结果见图G.2和图G.3，网格见图3（b））。此外，在该网格中，局部化减法方法与多极 Venant 方法的精度大致相同。将图5与使用皮肤网格获得的相应结果进行比较，我们反而发现，多极 Venant 方法和局部化减法方法的误差几乎没有变化，而解析减法方法的误差则明显降低（结果见图G.5和图G.6，网格见图3（c））。特别是，在该网格中，就精度而言，解析减法方法在某些偏心率下甚至超过了多极 Venant 方法，但在任何偏心率下都未达到局部化减法方法的精度。

这些结果说明了不同势方法的局限性。细化脑部网格能够更有利地放置单极负荷，因此从 初始网格 转为脑部网格时，多极子 Venant 方法的误差会降低。由于脑部网格的分辨率是放置单极负荷的限制因素，这也解释了为什么细化皮肤网格时，多极子方法的误差几乎没有变化。另一方面，解析减法方法表现出相反的特性。在这种情况下，初始网格 中颅骨-皮肤界面的低分辨率是限制因素，因此细化皮肤后误差大幅降低，而细化脑部后误差仅略有降低。与解析减法方法类似，局部化减法方法也依赖于修正势表现复杂区域的高分辨率。但与解析减法方法不同的是，该区域仅限于源位置附近，因此初始网格 中脑脊液的高分辨率已足以对 $u^c = u - \chi \cdot u^\infty$ 进行良好近似。具体而言，这解释了为什么细化脑部或皮肤时，局部化减法方法的误差都只略有降低。

现在讨论脑磁图情形。图6显示了初始网格的精度比较。可以看到，在此网格中，解析减法和局部化减法方法都能产生非常精确的结果，尤其是在距电导率跃变 1–2 mm 的区域，比多极Venant方法更精确。值得特别注意的是，解析减法方法能够产生如此精确的结果，因为它在此网格的脑电正问题中产生了较大的误差。脑电正问题中的误差对脑磁图精度没有明显影响，原因在于解析减法方法的脑电正问题误差主要位于皮肤区。但由于皮肤区远离源，中间隔着低导电性的颅骨，皮肤中的体电流幅度较低，因此其对磁场的贡献相对较小。特别是，这些结果证明了源附近的体电流对磁场有显著影响。解析减法和局部减法脑磁正问题解的精度也显示了精确电流建模的影响，这一点已由图 2 提示。此外，与脑电图情形不同，解析减法方法在较高偏心率下出现的较大误差完全是由数值求积造成的。为两种方法选择足够大的积分阶数时，脑磁图解析减法方法[3] 与局部减法方法同样精确。图6中，解析减法方法选用积分阶数 5，以获得尚可的计算时间；局部减法方法的积分阶数则按附录 E 所述进行选择。

对皮肤网格进行相同的比较时，我们发现误差与图6中的基本相同（见图G.7）。此外，如果考察单电位方法，并比较初始网格和脑部网格中的误差，我们会发现，对于所研究的三种方法，脑部网格中的误差都更小。此外，在脑部网格 中，不同电位方法的精度相当（见图G.4）。

皮肤网格 和脑部网格 的结果再次凸显了源附近体电流的主导作用。细化皮肤网格并不能更好地表示源附近的体电流，

[3]请注意，$analytical$ 减法方法 $analytically$ 会计算脑电右端项。如果随后使用毕奥-萨伐尔定律计算磁场，仍然需要进行数值积分。

而细化脑部网格则可以。这解释了为什么从初始网格变为皮肤网格时误差没有变化，而从初始网格 变为脑部网格时误差会减小。

此外，这些结果与此前的研究一致。此前研究表明，脑磁图正向问题对偶极子位置附近的电导率不确定性最为敏感 [26], ，而对颅骨和皮肤的电导率不敏感 [2]。

3.2.2. 效率比较

最后，我们来比较不同电位方法的计算工作量。为此，我们测量了在偏心率为 0.99 的源条件下，求解 1000 个右端项的脑电图和脑磁图正问题所需的时间，并假设传递矩阵已预先计算完成。因此，我们测量的是组装右端项，再计算这些右端项与传递矩阵的乘积所需的时间。我们选择偏心率 0.99，是因为局部化减法右端项组装所需的工作量取决于源与电导率跃变之间的距离。如（11）—（13）和（20）所述，需要组装补丁积分、边界积分、过渡积分以及通量。表面积分和过渡积分的计算工作量不受偏心率影响，但源越接近电导率跃变，计算补丁积分所需的工作量就越大。具体而言，与源处于同一区室的每个单元上的补丁积分均为零，因为此处有 $\sigma^c = 0$；因此，随着偏心率增大，非零补丁积分的数量也会增多，因为补丁中落在脑区室之外的部分会变大。此外，对于偏心率很高的源，具有非零积分的补丁单元会靠近源，因此这些单元需要采用较高的积分阶数。[4] 通过测量偏心率为 0.99 的源所需的计算时间（该偏心率略高于生理相关范围），我们由此得到了局部化减法方法运行时间的最坏情况估计。实验使用 AMD Ryzen Threadripper 3960X 中央处理器运行。不同网格的结果（见图 3）列于表 2—4。可以看出，多极子方法和脑电图局部化减法方法所需的时间基本不受网格尺寸影响[5]。此外，脑磁图局部化减法方法在脑部网格上的计算时间最短。这可以解释为：脑区室中的分辨率越高，位于与源相同区室内的补丁单元比例就越大，从而无需对这些单元进行耗时的数值求积。而

[4]关于积分阶数的深入讨论，请参阅附录 E。[5]请注意，网格大小当然仍会影响计算传递矩阵所需的时间。

表 2： $mesh\ init$ 中偏心率为 0。99 时 1000 个源的正向模拟时间

方法	定位子空间	解析减法	多重圣维南
脑电图时间（秒）	0.93	655	0.02
脑磁图时间（秒）	13	18925	0.04

表 3：在 $mesh\ brain$ 中，偏心率为 0.99 时 1000 个源的正向模拟时间

方法	定位子空间	解析减法	多重圣维南
脑电图时间（s）	0.96	1396	0.02
脑磁图时间（s）	6.8	43175	0.04

最重要的是，我们发现，在所有网格中，局部化减法方法的速度都比解析减法方法快几个数量级。因此，局部化减法方法实现了其核心目标：通过减去奇异性，提供一种计算效率高的方法。此外，值得注意的是，计算传递矩阵所需的时间远长于随后进行局部化减法右端项组装所需的时间。对于当前先进的直接电位方法，例如多极Venant方法 [16], ，求解正问题的总时间同样主要耗费在计算传递矩阵上，因此，局部化减法方法在实际应用中是直接有限元电位方法的一种可行替代方案。

4. 结论

我们提出了一种新的势方法，该方法基于对著名的减法方法进行局部化。我们研究了这一新方法的理论，并对其进行了验证，并与已有方法进行了比较。在球形头部模型中，结果表明，与现有方法相比，这种新方法的精度不相上下，有时甚至更高，同时效率也远高于减法方法。我们认为，局部化减法是解析处理数学点偶极子奇异性的更优方法，也是实际应用中一种具有竞争力的替代方案。

数据/代码可用性声明

实现所述方法的代码可在 https://gitlab.dune-project.org/duneuro/duneuro/-/tree/feature/localized-assembler 获取。用于测试不同积分阶数的代码可在

表 4：在 $mesh\ skin$ 中对偏心率为 0.99 的 1000 个源进行正向模拟所需的时间

方法	定位子空间	解析减法	多重圣维南
脑电图时间（秒）	0.98	1142	0.02
脑磁图时间（秒）	12.8	30709	0.04

https://github.com/MalteHoel/local_integrati on_test 获取。实验所用数据可在 https://doi.org/10.5281/zenodo.7642826 获取。

利益冲突声明

利益声明：无。

作者贡献声明

Malte H¨oltershinken： 方法学、软件、形式分析、调查、撰写——初稿、撰写——审阅与编辑、可视化。**Pia Lange：** 方法学、软件、调查、撰写——审阅与编辑。**Tim Erdbr¨ugger：** 撰写——审阅与编辑。**Yvonne Buscherm¨ohle：** 撰写——审阅与编辑。**Fabrice Wallois：** 撰写——审阅与编辑、经费获取。**Alena Buyx：** 经费获取。**Sampsa Pursiainen：** 撰写——审阅与编辑、经费获取。**Johannes Vorwerk：** 调查、撰写——审阅与编辑、经费获取。**Christian Engwer：** 概念构思、方法学、软件、撰写——审阅与编辑、监督。**Carsten Wolters：** 概念构思、方法学、撰写——审阅与编辑、监督、经费获取。

致谢

本研究得到联邦卫生部（BMG）的资助，项目编号为 ZMI1-2521FSB006；并在 ERA PerMed 框架下获得项目 ERAPERMED2020-227 的资助（MBH、PL、TE、YB、FW、AB、CHW）；还获得德国研究联合会（DFG）项目 WO1425/10-1 的资助（MBH、TE、YB、CHW），以及德国研究联合会卓越集群“明斯特数学：动力学—几何—结构”（EXC 2044-390685587）的资助（CE）；同时获得芬兰科学院在 ERA PerMed 框架下提供的项目 ERAPERMED2020-227 资助（SP），以及芬兰科学院逆向建模与成像卓越中心 2018—2025 年项目的资助（决议编号 353089）（SP）；还获得奥地利科学基金（FWF）项目 P 35949 的资助（JV），以及德国学术交流中心（DAAD）项目 57663920 的资助（MBH、TE、SP、CHW）。我们感谢明斯特大学开放获取出版基金提供的支集。

附录 A. 引理 1 的证明

下文中，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是开集。此外，我们用 $C_c^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上所有无穷次可微且紧支撑函数构成的空间。注意，Ω 上的紧支撑函数在 Ω 的边界附近必定为零，这意味着边界积分涉及此类函数时为零。尤其是，分部积分过程中产生的边界积分也为零。

为了对该方法给出数学上严格的推导，我们将运用分布。分布（或广义函数）定义为一个线性泛函T： $C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$，它关于某种拓扑连续。每个局部可积函数 f 都通过下式定义一个分布 T_f：

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi \, dV.$$

下文中，我们将简写为 $T_f(\phi) = f(\phi)$。分布的一个核心性质是它们具有任意阶导数，而普通函数可能无法（弱）可微。因此，在分布框架下表述并研究偏微分方程是很自然的。尽管如此，我们想强调，以下关于局部化减法方法的推导并不要求读者熟悉这一理论。对于希望深入了解分布及其在微分方程中的应用的读者，请参阅 [46], 第 6–8 章。

作为参考，我们首先回顾引理 1。

引理。 设 $\Omega^\infty \subset \Omega$ 和 $\chi \in H^1(\Omega)$ 满足：χ 在Ω 上与 1 相同$^\infty$，且 $x_0 \in \Omega^\infty$。设 $\Omega \subset \Omega \setminus \Omega^\infty$ 为一个~区域，使得~$\partial^\infty \qquad \partial \cup \partial \qquad \chi = 0$ Ω是Ω Ω的子集，并且在$\Omega^\infty \cup \Omega$之外。则对于任意测试函数 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\sigma^\infty \nabla\left(\chi \cdot u^\infty\right)\right)(\phi) = \\ \operatorname{div}\left(M \cdot \delta_{x_0}\right)(\phi) - \int_{\widetilde{\Omega}} \left\langle \sigma^\infty \nabla\left(\chi \cdot u^\infty\right), \nabla\phi \right\rangle dV \\ - \int_{\partial\Omega^\infty} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle \phi \, dS. \quad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

这里，η 是Ω^∞的单位外法向量。

证明。 首先注意到，$\chi \cdot u^\infty$ 是局部可积的，因此定义了一个分布。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla(\chi \cdot u^\infty))(\phi) \overset{6}{=} \int_\Omega \chi \cdot u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla\phi) \, dV \\ = \int_\Omega u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla\phi) \, dV + \int_\Omega (\chi - 1) u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla\phi) \, dV \\ = \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla u^\infty)(\phi) + \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} (\chi - 1) u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla\phi) \, dV \\ = \operatorname{div}(M \cdot \delta_{x_0})(\phi) + \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} (\chi - 1) u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla\phi) \, dV.\end{aligned}$$

这里，对于第一项，我们利用了 u^∞ 在 $\mathbb{R}^3$ 上满足 $\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla u^\infty) = \operatorname{div}(M \cdot \delta_{x_0})$，且 ϕ 具有紧

[6] 如果我们在分布意义下解释左端项，那么该方程的右端项本质上就是左端项的定义-

支集于 Ω 中。对于第二项，我们利用了$\chi = 1$ 在 Ω^∞上。注意，$(\chi-1)u^\infty$ 在 Ω \Ω$^\infty$上弱可微，因此我们可以对第二项应用分部积分。令 η 表示相应的单位外法向量，得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}&(\chi-1)u^\infty \operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla\phi)\,dV\\ &=\int_{\partial(\Omega\setminus\Omega^\infty)}(\chi-1)u^\infty\langle\sigma^\infty\nabla\phi,\eta\rangle\,dS\\ &\qquad-\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla((\chi-1)u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV\end{aligned}$$

由于 $\partial(\Omega\setminus\Omega^\infty)\subset\partial\Omega\cup\partial\Omega^\infty$，并且我们有 $\nabla\phi=0$ on$\partial\Omega$ 和 $\chi-1=0$ on $\partial\Omega^\infty$，因此边界积分为零。对于体积分，再次应用分部积分可得

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla((\chi-1)u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV\\ &=-\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla(\chi\cdot u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV+\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\nabla\phi\rangle\,dV\\ &=-\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla(\chi\cdot u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV+\int_{\partial(\Omega\setminus\Omega^\infty)}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\eta\rangle\phi\,dS\\ &\qquad-\int_{\Omega\setminus\Omega^\infty}\operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla u^\infty)\phi\,dV.\end{aligned}$$

由于在 $\mathbb{R}^3\setminus\{x_0\}$ 上我们有 $\operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla u^\infty)=0$，最后一个积分为零。对于边界积分，由于 ϕ 在 Ω 中具有紧支集，积分中位于 Ω 边界上的部分为零。注意，Ω \Ω$^\infty$ 在 Ω 的边界上$^\infty$ 在 Ω 的内部的外法向量，与 Ω$^\infty$的外法向量方向相反，由此得到 (A.1)。我们想强调的是，这一推导也涵盖补丁与 Ω 的边界相接触的情形，因为在这种情况下，(A.1) 中相应部分的边界积分为零，这是由于 ϕ具有紧支集。证明完毕。

□

附录 B. 弱形式的推导

Let

$$a(w,v)=\int_\Omega\langle\sigma\nabla w,\nabla v\rangle\,dV \tag{B.1}$$

and

$$\begin{aligned}l(v)=&-\int_{\widetilde{\Omega}}\langle\sigma\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right),\nabla v\rangle\,dV\\ &-\int_{\partial\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\eta\rangle v\,dS-\int_{\Omega^\infty}\langle\sigma^c\nabla u^\infty,\nabla v\rangle\,dV\end{aligned}\tag{B.2}$$

按正文中的定义定义。则 a 定义了一个连续双线性形式，l 定义了 $H^1(\Omega)$ 上的一个连续线性形式。我们希望证明，对于 $u^c\in H^1(\Omega)$ 中满足 $a(u^c,\ v)=l(v)$（对所有 $v\in H^1(\Omega)$ 均成立）的解，函数$u^c+\chi\cdot u^\infty$ 以适当的意义满足原方程。反向阅读这一推导，可以作为弱形式的推导。

引理 B1. 设 $u^c\in H^1(\Omega)$ 是一个解，满足 $a(u^c,v)=l(v)$ 对所有 $v\in H^1(\Omega)$ 成立。则 $u=u^c+\chi\cdot u^\infty$ 满足

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\sigma\nabla u)&=\operatorname{div}(M\cdot\delta_{x_0}) &&on\ \Omega\\ \langle\sigma\nabla u,\eta\rangle&=0 &&on\ \partial\Omega.\end{aligned}$$

证明. 由于 $u^c\in H^1(\Omega)$，u^∞ 是局部可积的，而 χ 是有界的，因此 u 是局部可积的，从而定义了一个分布。于是，对于测试函数$\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\sigma\nabla u)(\phi)&=\operatorname{div}(\sigma\nabla u^c)(\phi)+\operatorname{div}(\sigma^c\nabla(\chi\cdot u^\infty))(\phi)\\ &\quad+\operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla(\chi\cdot u^\infty))(\phi)\\ &=-\int_\Omega\langle\sigma\nabla u^c,\nabla\phi\rangle\,dV-\int_\Omega\langle\sigma^c\nabla(\chi\cdot u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV\\ &\quad+\operatorname{div}(M\cdot\delta_{x_0})(\phi)-\int_{\widetilde{\Omega}}\langle\sigma^\infty\nabla(\chi\cdot u^\infty),\nabla\phi\rangle\,dV\\ &\quad-\int_{\partial\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\eta\rangle\phi\,dS\\ &=\operatorname{div}(M\cdot\delta_{x_0})(\phi)-a(u^c,\phi)-\int_{\widetilde{\Omega}}\langle\sigma\nabla\left(\chi\cdot u^\infty\right),\nabla\phi\rangle\,dV\\ &\quad-\int_{\partial\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\eta\rangle\phi\,dS-\int_{\Omega^\infty}\langle\sigma^c\nabla u^\infty,\nabla\phi\rangle\,dV\\ &=\operatorname{div}(M\cdot\delta_{x_0})(\phi),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 $a(u^c,\ \phi)=l(\phi)$ 以及 l的定义得出。因此，我们已经证明 u 满足

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u)=\operatorname{div}(M\cdot\delta_{x_0})\qquad\text{on }\Omega.$$

现在注意到，由于 $\operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla u^\infty)=0$ on $\mathbb{R}^3\setminus\{x_0\}$，对于一个满足 $\operatorname{supp}(\phi)\cap\{x_0\}=\emptyset$ 的光滑函数 $\phi\in\overline{C}^\infty(\Omega)$，我们有

$$\int_{\partial\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\eta\rangle\phi\,dS=\int_{\Omega^\infty}\langle\sigma^\infty\nabla u^\infty,\nabla\phi\rangle\,dV.$$

右端。以不太严谨的方式，可以将左端写成

$$\int_\Omega\operatorname{div}(\sigma^\infty\nabla(\chi\cdot u^\infty))\phi\,dV,$$

分部积分两次，并注意到边界积分为零，因为 $\phi=0$ 和 $\nabla\phi=0$ 位于 Ω 的边界上。请注意，这确实“不够严谨”，因为例如 $\nabla(\chi\cdot u^\infty)$不可积。这说明了在分布意义下解释导数的好处。

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
l(\phi) &= -\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^{\infty}\right), \nabla \phi \rangle \, dV \\
&\quad - \int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \phi \, dS - \int_{\Omega^{\infty}} \langle \sigma^{c} \nabla u^{\infty}, \nabla \phi \rangle \, dV \\
&= -\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^{\infty}\right), \nabla \phi \rangle \, dV - \int_{\Omega^{\infty}} \langle \sigma \nabla u^{\infty}, \nabla \phi \rangle \, dV \\
&= -\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^{\infty}\right), \nabla \phi \rangle \, dV - \int_{\Omega^{\infty}} \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^{\infty}\right), \nabla \phi \rangle \, dV \\
&= -\int_{\Omega} \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^{\infty}\right), \nabla \phi \rangle \, dV.
\end{aligned}
$$

将其代入 $a(u^c, \phi) - l(\phi) = 0$ 可得

$$
\int_{\Omega} \langle \sigma \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dV = 0.
$$

由于 $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$ 在 $\Omega \setminus \{x_0\}$ 上再次应用分部积分可得

$$
\int_{\partial \Omega} \langle \sigma \nabla u, \eta \rangle \phi \, dS = 0,
$$

从而得到 $\langle \sigma \nabla u, \eta \rangle = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。证明完毕。

□

附录 C。问题的适定性

在正文中，我们声称泛函 l在常函数上为零，并且关于总势 u 的解族不依赖于 $\widetilde{\chi}$，Ω^{∞} 和 Ω 的选择。下面给出这些断言的证明。

引理 C1。 (B.2) 中的泛函 l 在常函数上为零。

证明。 利用 $\nabla 1 = 0$ 我们得到

$$
l(1) = 0 \iff \int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS = 0.
$$

现在令 $R > 0$ 足够大，使得 Ω^{∞} 包含在以x_0为中心、半径为 R 的球面 $S_R(x_0)$ 的内部。令 $W \subset \mathbb{R}^3$ 表示由 Ω^{∞} 和$S_R(x_0)$ 围成的区域。由于在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ 上 $\operatorname{div}(\sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}) = 0$，散度定理随即推出

$$
0 = \int_{W} \operatorname{div} \left(\sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}\right) dV = \int_{\partial W} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS,
$$

其中，η 表示 W的外法向量。由于我们有$\partial W = S_R(x_0) \cup \partial\Omega^{\infty}$，且 W在 $\partial\Omega^{\infty}$上的外法向量是Ω^{∞}的外法向量的反向，因此可得

$$
\int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS = \int_{S_R(x_0)} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS,
$$

其中，η 再次表示相应的单位外法向量。现在，对于 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$，我们有

$$
u^{\infty}(x) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\det \sigma^{\infty}}} \cdot \frac{\langle M, \left(\sigma^{\infty}\right)^{-1} (x - x_0) \rangle}{\| \left(\sigma^{\infty}\right)^{-\frac{1}{2}} (x - x_0) \|^3},
$$

例如参见 [23]。记为 $R = \|x - x_0\|$，经直接计算可得 $\langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)$。这意味着

$$
\int_{S_R(x_0)} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right),
$$

因此

$$
\int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS = \int_{S_R(x_0)} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.
$$

这只有在以下情况下才可能

$$
\int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS = 0.
$$

□

请注意，前述引理本质上是要证明

$$
\int_{\partial \Omega^{\infty}} \langle \sigma^{\infty} \nabla u^{\infty}, \eta \rangle \, dS = 0.
$$

相同的积分也出现在 [23], 中，作者在此运用对称性论证，推导出该积分等于 0。由于我们在引理 C1 中的论证采用了略有不同的方法，因此我们认为值得将其纳入。

引理 C2. 设 Ω_1^{∞}、Ω_1 χ_1 和 Ω_2^{∞}、Ω_2 χ_2 是两组补丁、过渡区域和截断函数的选择。设 u_1^c 和u_2^c 分别是对应弱形式的解。则有

$$
u_1^c + \chi_1 \cdot u^{\infty} + \mathbb{R} \cdot 1 = u_2^c + \chi_2 \cdot u^{\infty} + \mathbb{R} \cdot 1.
$$

因此，由局部化减法方法定义的势不依赖于补丁、过渡区域和截断函数的选择。

证明. 显然，只需证明任何一种局部化减法方法所得到的解族都与普通减法方法得到的解族相同。因此，不失一般性，可设 $\Omega_2^{\infty} = \Omega$、$\Omega_2 = \emptyset$ 且 $\chi_2 = 1$。

现在注意到

$$
u_1^c - u_2^c + (\chi_1 - 1) \cdot u^{\infty} \in H^1(\Omega),
$$

由于 $\chi_1 - 1$ 在 x_0的一个邻域内消失。因此，对于 $v \in H^1(\Omega)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&a(u_1^c - u_2^c + (\chi_1 - 1) \cdot u^{\infty}, v) \\
&\quad = a(u_1^c, v) - a(u_2^c, v) + \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla (\chi_1 - 1) u^{\infty}, \nabla v \rangle \, dV.
\end{aligned} \tag{C.1}
$$

由于 u_1^c 和 u_2^c 分别是各自弱问题的解，因此我们得到

$$\begin{aligned}
a(u_1^c, v) - a(u_2^c, v) &= -\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi_1 \cdot u^\infty\right), \nabla v \rangle \, dV \\
&\quad - \int_{\partial\Omega^\infty} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle v \, dS - \int_{\Omega^\infty} \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla v \rangle \, dV \\
&\quad + \int_{\Omega} \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla v \rangle \, dV + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle v \, dS \\
&= \left(\int_{\partial\Omega} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle v \, dS - \int_{\partial\Omega^\infty} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle v \, dS \right) \\
&\quad + \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla v \rangle \, dV - \int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi_1 \cdot u^\infty\right), \nabla v \rangle \, dV \\
&= \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \nabla v \rangle \, dV + \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla v \rangle \, dV \\
&\qquad - \int_{\widetilde{\Omega}} \langle \sigma \nabla \left(\chi_1 \cdot u^\infty\right), \nabla v \rangle \, dV \\
&\qquad = \int_{\Omega \setminus \Omega^\infty} \langle \sigma \nabla \left(1 - \chi_1\right) u^\infty \right), \nabla v \rangle \, dV.
\end{aligned}$$

将其代入 (C.1)，并注意到 $\chi_1 - 1 = 0$ 在 Ω^∞上，我们得到

$$a(u_1^c - u_2^c + (\chi_1 - 1) \cdot u^\infty, v) = 0.$$

这意味着，对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$，$(u_1^c + \chi_1 \cdot u^\infty) - (u_2^c + u^\infty) = c$，从而完成证明。 □

附录 D. EEGFEM 的解析表达式

在正文中，我们指出，对于四面体网格上的仿射试函数，我们使用解析表达式计算有限元法右端项。我们需要组装三类积分，即

$$I_P = \int_K \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla \varphi \rangle \, dV, \tag{D.1}$$

$$I_S = \int_F \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle \varphi \, dS, \tag{D.2}$$

$$I_T = \int_K \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^\infty\right), \nabla \varphi \rangle \, dV, \tag{D.3}$$

其中，K 是某个四面体，F 是某个三角形。我们将 I_P 称为补丁积分，将 I_S 称为曲面积分，将 I_T 称为过渡积分。在 [14]中可以找到补丁积分和曲面积分的解析表达式。我们对这些表达式进行了少许修改，并采用 [14, 31, 32] 中描述的技术推导出了过渡积分[7]的解析表达式。为了为以下内容做好铺垫

[7]如果读者主要关注如何实现过渡积分的解析计算公式，那么以下内容已提供所有必要信息。但由于本工作是对 [14, 31, 32], 的扩展，我们强烈建议先研究这些论文。

公式，我们首先需要介绍一些符号。在下文中，我们始终假设位置为x_0、矩为 M的偶极源，并假设 $x_0 \notin F$。

设 F 为某个三角形。设 p_1、p_2、p_3 为 F顶点的任意编号。然后令

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{p_3 - p_2}{\|p_3 - p_2\|}, \gamma_1 = \|p_3 - p_2\|, \\
s_2 &= \frac{p_1 - p_3}{\|p_1 - p_3\|}, \gamma_2 = \|p_1 - p_3\|, \\
s_3 &= \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|}, \gamma_3 = \|p_2 - p_1\|.
\end{aligned}$$

现在令 $u = s_3$,$w = \frac{s_1 \times s_2}{\|s_1 \times s_2\|}$和 $v = w \times u$，并令

$$m_i = s_i \times w$$

对于 $i \in \{1, 2, 3\}$。然后令

$$\begin{aligned}
u_3 &= \langle u, p_3 - p_1 \rangle, \\
v_3 &= \langle v, p_3 - p_1 \rangle, \\
u_0 &= \langle u, x_0 - p_1 \rangle, \\
v_0 &= \langle v, x_0 - p_1 \rangle, \\
w_0 &= -\langle w, x_0 - p_1 \rangle.
\end{aligned}$$

然后定义

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{v_0(u_3 - \gamma_3) + v_3(\gamma_3 - u_0)}{\gamma_1}, \\
t_2 &= \frac{u_0 v_3 - v_0 u_3}{\gamma_2}, \\
t_3 &= v_0.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\gamma_1^- &= -\frac{(\gamma_3 - u_0)(\gamma_3 - u_3) + v_0 v_3}{\gamma_1} \\
\gamma_1^+ &= \frac{(u_3 - u_0)(u_3 - \gamma_3) + v_3(v_3 - v_0)}{\gamma_1} \\
\gamma_2^- &= -\frac{u_3(u_3 - u_0) + v_3(v_3 - v_0)}{\gamma_2} \\
\gamma_2^+ &= \frac{u_0 u_3 + v_0 v_3}{\gamma_2} \\
\gamma_3^- &= -u_0 \\
\gamma_3^+ &= \gamma_3 - u_0.
\end{aligned}$$

关于这些值背后的几何直观，请参见 [14] （注意，[14], 中关于 γ_2^- 的公式有误，例如可与 [32]对照）。本质上，我们构造了一个三角形的映射，并计算了其顶点的坐标以及各边的参数化。我们

然后对 $1 \le i \le 3$ 设定

$$\begin{aligned} R_i =& \sqrt{t_i^2 + w_0^2} \\ R_i^{\pm} =& \sqrt{t_i^2 + w_0^2 + \left(\gamma_i^{\pm}\right)^2} \\ f_i =& \begin{cases} \ln\left(\frac{R_i^+ + \gamma_i^+}{R_i^- + \gamma_i^-}\right) & \text{if } \gamma_i^- \ge 0 \\ \ln\left(\frac{R_i^- - \gamma_i^-}{R_i^+ - \gamma_i^+}\right) & \text{if } \gamma_i^- < 0 \end{cases} \\ \beta_i =& \arctan\left(\frac{t_i \gamma_i^+}{R_i^2 + |w_0| R_i^+}\right) \\ & - \arctan\left(\frac{t_i \gamma_i^-}{R_i^2 + |w_0| R_i^-}\right) \\ \beta =& \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \end{aligned} \tag{D.4}$$

请特别注意，我们对 f_i 的定义（见方程（D.4））与 [14, 31, 32], 中给出的定义不同，后者没有区分情况，而总是采用第一种情况。仔细查看公式可知， R_i^- 是源位置 x_0 到点 p_{i+1} 的距离，而 R_i^+ 是点 p_{i+2} 到点 p_4 的距离（其中= p_1， $p_5 := p_2$）。此外， γ_i^- 是从源位置在由 p_{i+1} 和 p_{i+2}定义的仿射直线上的投影点，到点 p_{i+1}的有向距离，其中正方向由 $p_{i+2} - p_{i+1}$给出。现在假设源位置（近似）位于三角形某条边所定义的直线上，并且恰好位于由该边定义的射线上，且方向为正。在这种情况下，对于这条边，我们有 $R_i^+ \approx -\gamma_i^+$ 和 $R_i^- \approx -\gamma_i^-$ ，而使用第一种情况计算 f_i 会变得不稳定，甚至无法定义。仔细查看 [14, 31, 32], 中的公式推导可知， f_i源于积分的计算

$$\int_{\gamma_i^-}^{\gamma_i^+} \frac{1}{\sqrt{w_0^2 + t_i^2 + t^2}}\, dt.$$

直接计算可知，对于 $a > 0$ ，我们有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}-x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

它可用于计算上述积分。将对数的参数按 $\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}+x}$ 展开，可得到方程（D.4）中给出的 f_i 的第一个表达式；而按 $\frac{\sqrt{x^2+a}-x}{\sqrt{x^2+a}-x}$ 展开，则可得到第二个表达式。如果 $w_0 \neq 0$ 或 $t_i \neq 0$，计算 f_i 就没有问题。否则，假设 $x_0 \notin F$ 会导致 $\gamma_i^+, \gamma_i^- > 0$ 或 $\gamma_i^+, \gamma_i^- < 0$。在第一种情况下， f_i 的第一个表达式提供了一种稳定计算 f_i 的方法；在第二种情况下， f_i 的第二个表达式提供了一种稳定计算 f_i 的方法。因此，上文给出的 f_i 公式避免了源位置位于三角形某条边所在直线上时出现的问题。

现在令

$$a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma_3} \\ \frac{1}{\gamma_3} \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{\frac{u_3}{\gamma_3}-1}{v_3} \\ -\frac{u_3}{\gamma_3 v_3} \\ \frac{1}{v_3} \end{pmatrix}, \varphi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_0 a + v_0 b.$$

现在我们可以给出过渡积分的解析公式（见方程（D.3））。

引理 D1。 我们希望计算该积分

$$\int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^{\infty}), \nabla \varphi \rangle \, dV,$$

其中， K 是某个四面体， φ 是一个节点拉格朗日基函数，且 χ 在 K 上为仿射函数。设 F_1、F_2、F_3、F_4 为该四面体的面。设 $1 \le j \le 4$。令$p_1(F_j)$ $p_2(F_J)$ $p_3(F_j)$ 为 F_j 的顶点的一种编号。然后设定

$$c(F_j) = \begin{pmatrix} \chi(p_1(F_j)) \\ \chi(p_2(F_j)) \\ \chi(p_3(F_j)) \end{pmatrix}.$$

此外，令 $M(F_j) = (M_0, M_u, M_v) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$，其中

$$\begin{aligned} M_0 =& \operatorname{sign}(w_0)\beta w - \sum_{i=1}^{3} f_i m_i, \\ M_u =& \sum_{i=1}^{3} \langle u, s_i \rangle \left(f_i t_i s_i - (R_i^+ - R_i^-) m_i\right) \\ & - |w_0|\beta u - \left(\sum_{i=1}^{3} \langle u, m_i \rangle f_i\right) w_0 w, \\ M_v =& \sum_{i=1}^{3} \langle v, s_i \rangle \left(f_i t_i s_i - (R_i^+ - R_i^-) m_i\right) \\ & - |w_0|\beta v - \left(\sum_{i=1}^{3} \langle u, m_i \rangle f_i\right) w_0 w, \end{aligned}$$

其中，以上方程中的所有值均取决于面 F_j，并按照上述定义计算。然后令

$$I(F_j) = M(F_j) \cdot \begin{pmatrix} \langle \varphi(u_0, v_0), c(F_j) \rangle \\ \langle a, c(F_j) \rangle \\ \langle b, c(F_j) \rangle \end{pmatrix}.$$

现在令 $\mu_K : K \to K$ 为从参考四面体到 K 的仿射映射。令 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 为其（常数）雅可比矩阵。令 $\widehat{\varphi}_1$, $\widehat{\varphi}_2$, $\widehat{\varphi}_3$, $\widehat{\varphi}_4$ 为参考单元上的形函数，并令 $G = (\nabla\widehat{\varphi}_1, \nabla\widehat{\varphi}_2, \nabla\widehat{\varphi}_3, \nabla\widehat{\varphi}_4) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ 为包含其（常数）雅可比矩阵的矩阵。记 $\eta(F_j)$ 为面 F_j 的（常数）单位外法向量。

于是我们有

$$\begin{pmatrix} \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_1 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_2 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_3 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_4 \rangle \, dV \end{pmatrix} = \frac{\left(\sigma A^{-T} G\right)^T}{4\pi\sigma^\infty} \sum_{j=1}^{4} \langle I(F_j), M \rangle \eta(F_j).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_1 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_2 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_3 \rangle \, dV \\ \int_K \langle \sigma \nabla (\chi \cdot u^\infty), \nabla \varphi_4 \rangle \, dV \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1^T \\ \nabla \varphi_2^T \\ \nabla \varphi_3^T \\ \nabla \varphi_4^T \end{pmatrix} \cdot \sigma \cdot \int_K \nabla (\chi \cdot u^\infty) \, dV \\ &= \frac{\left(\sigma A^{-T} G\right)^T}{4\pi\sigma^\infty} \int_K \nabla \left(\chi \cdot \frac{\langle M, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|^3} \right) dV, \end{aligned}$$

其中，在最后一行中，我们使用了链式法则、 σ的对称性以及 u^∞的定义。现在，根据散度定理可得

$$\begin{aligned} &\int_K \nabla \left(\chi \cdot \frac{\langle M, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|^3} \right) dV \\ &= \sum_{j=1}^{4} \int_{F_j} \chi \cdot \frac{\langle M, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|^3} \cdot \eta(F_j) \, dS \\ &= \sum_{j=1}^{4} \eta(F_j) \langle M, \int_{F_j} \chi \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3} \, dS \rangle. \end{aligned}$$

因此，我们需要计算如下形式的积分

$$\int_F \chi \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3} \, dS.$$

对于三角形 F。设 p_1, p_2, p_3为该三角形的顶点，并设 φ_i 为唯一的仿射函数：它在 p_i 上的值为 1，在其余顶点上的值为 0。由于按构造 χ 在面 F 上是仿射的，因此我们有

$$\chi = \sum_{i=1}^{3} \chi(p_i) \cdot \varphi_i = \langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, c(F) \rangle.$$

现在令 $O = (u, v, w)$，并定义

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (z_1, z_2) \mapsto p_1 + O \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设 $F' := \mathrm{conv}\{(0, 0), (\gamma_3, 0), (u_3, v_3)\}$。上面定义这些值的方式使得 $\Phi|_{\widehat{F'}}$定义了一个映射三角形 F。为了让接下来的计算更简单，我们沿用 [14]的方法，并引入一个额外的平移

$$\tau_\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; z \mapsto z + \rho,$$

其中， $\rho = (u_0, v_0)$是源位置 x_0在由该三角形定义的平面上的投影坐标。现在令 $\widehat{F} = \tau_\rho^{-1}(\widehat{F'})$，并令 $\Phi_\rho = \Phi \circ \tau_\rho$。于是 $\Phi_\rho|_{\widehat{F}}$定义了一个从 F出发的映射。注意，该映射的格拉姆矩阵为 1，因此我们可以计算

$$\int_F \chi \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3} \, dS. = \int_{\widehat{F}} \chi(\Phi_\rho(z)) \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz.$$

很容易验证

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} (\Phi(z_1, z_2)) = (e_1, a, b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

其中 $e_1 = (1, 0, 0)$ 是第一个单位向量，参见例如 [14]，因此

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} (\Phi_\rho(z_1, z_2)) = \varphi(u_0, v_0) + z_1 a + z_2 b,$$

其中 $\varphi(u_0, v_0)$ 是引理陈述之前定义的值。综合以上结果，可得

$$\begin{aligned} \int_F \chi \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3} \, dS &= \int_{\widehat{F}} \chi(\Phi_\rho(z)) \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \\ &= \int_{\widehat{F}} \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \cdot \langle \varphi(u_0, v_0), c(F) \rangle \\ &\quad + \int_{\widehat{F}} z_1 \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \cdot \langle a, c(F) \rangle \\ &\quad + \int_{\widehat{F}} z_2 \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \cdot \langle b, c(F) \rangle. \end{aligned}$$

因此，我们需要计算这些值

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{\widehat{F}} \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \\ M_u &= \int_{\widehat{F}} z_1 \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz \\ M_v &= \int_{\widehat{F}} z_2 \frac{\Phi_\rho(z) - x_0}{\|\Phi_\rho(z) - x_0\|^3} \, dz. \end{aligned}$$

引理陈述中报告的 M_0 值，直接由结合 [32]中的(25)、(26)和(30)得到（注意，我们遵循了[14], 的约定，这意味着我们的 w_0 定义与[32] 的定义相差一个 -1的因子）。同样， M_u和 M_v 的值可以通过结合 [32]中的(25)、(27)、(31)和(32)计算得到。至此，推导完成。

□

附录 E. 选择积分阶数

在主论文中已经说明，如果我们希望求解脑电正问题，并且已知一个四面体网格、分片仿射测试函数，以及包含源位置的单元中的各向同性电导率，那么就可以通过解析方式组装局部化减法有限元法右端项。如果脑电正问题不满足这些条件，例如使用六面体网格，或希望求解脑磁图正向问题，我们就需要采用数值积分。当然，这就引出了如何选择合适积分阶数的问题，这正是我们希望在本节中讨论的内容。

设 K 为一个网格单元， F 为网格单元的一个面。在脑电图的情况下，我们关注以下积分

$$I_P = \int_K \langle \sigma^c \nabla u^\infty, \nabla \varphi \rangle \, dV, \tag{E.1}$$

$$I_S = \int_F \langle \sigma^\infty \nabla u^\infty, \eta \rangle \varphi \, dS, \tag{E.2}$$

$$I_T = \int_K \langle \sigma \nabla \left(\chi \cdot u^\infty \right), \nabla \varphi \rangle \, dV, \tag{E.3}$$

其中 φ 是一个测试函数。我们将 I_P 称为补丁积分，I_S 称为曲面积分，将 I_T 称为过渡积分。在脑磁图的情况下，我们关注以下积分

$$F_P = \int_K \sigma^c(y) \nabla u^\infty(y) \times \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \, dV(y), \tag{E.4}$$

$$F_S = \int_F \sigma^\infty u^\infty(y) \cdot \eta(y) \times \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \, dS(y), \tag{E.5}$$

$$F_T = \int_K \sigma(y) \nabla \left(\chi \cdot u^\infty \right)(y) \times \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \, dV(y), , \tag{E.6}$$

其中我们称 F_P 为 补丁通量， F_S 为 表面通量 和 F_T 为过渡通量。

在 [14], 中，作者研究了数值求积对补丁积分和曲面积分引入的误差。具体而言，作者通过实验表明，评估数值求积精度的关键量是比值 d/a，其中 d 是源位置到所考察单元的距离， a 是该单元的边长。这里，较小的比值需要更高的积分阶数才能达到相同的精度。

这一观察确实是数学上的必然结果。进行数值求积时，通常会选择
s
将单元 K （分别为面 F）映射到参考单元，以将积分拉回参考单元，然后在参考单元上执行数值积分。直接计算可知，当使用标量 $\lambda \neq 0$ 缩放源位置和单元 K （分别为面 F）时，对于仿射和多线性测试函数，积分核（E.1）–（E.3）在拉回参考单元后至少会按因子 $1/\lambda$ 缩放。这意味着解析积分和数值积分也按 $1/\lambda$ 的倍数缩放。这进而意味着，数值积分引入的相对误差具有尺度不变性。如果线圈位置也按比例缩放，另一项直接计算表明，参考单元上的被积函数 (E.4)-(E.6) 按 $1/\lambda^2$ 的倍数缩放，这再次意味着数值积分引入的相对误差具有尺度不变性。

这一观察使我们能够制定不依赖于具体网格的积分阶数选择规则，因为相对误差的尺度不变性使我们能够在参考尺度下研究不同积分阶数的精度。

我们的测试表明，与偶极子距离或最大边长相比，单元形状和偶极子方向对积分相对误差的影响较小。在最大边长固定的单元中，等边单元往往会产生最大的误差，我们推测这是因为它们的求积点密度最低[8]。因此，我们将通过研究数值积分对单个边长为 $a = 1$ 的等边单元引入的相对误差，为距离为 $d = d/a$的不同偶极子推导求积规则。

更具体地说，我们使用了等边四面体单元和六面体单元，并计算了不同积分阶数及不同 $\frac{d}{a}$ 取值下数值积分引入的相对误差。具体而言，我们使用了顶点为

$$p_1 = \left(0, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{6}\right),$$
$$p_2 = \left(0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{6}\right),$$
$$p_3 = \left(0, \quad 0, \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right),$$
$$p_4 = \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{3}, \quad 0, \quad 0\right),$$

对于曲面积分，则取顶点为p_1、 p_2、 p_3的三角形。

[8]这里所依据的启发式方法是：求积点密度越高，数值积分就越准确。求积点密度等于求积点数量除以单元体积。将数值积分映射到参考单元上进行时，给定积分阶数所需的求积点数量与单元形状无关，因此，给定积分阶数下的求积点密度仅取决于单元体积的倒数。

此外，我们取顶点为

$$
\begin{aligned}
q_1 &= (-1, \quad -0.5, -0.5) \\
q_2 &= (0, \quad -0.5, \quad -0.5) \\
q_3 &= (-1, \quad 0.5, \quad -0.5) \\
q_4 &= (0, \quad 0.5, \quad -0.5) \\
q_5 &= (-1, \quad -0.5, \quad 0.5) \\
q_6 &= (0, \quad -0.5, \quad 0.5) \\
q_7 &= (-1, \quad 0.5, \quad 0.5) \\
q_8 &= (0, \quad 0.5, \quad 0.5)
\end{aligned}
$$

对于具有顶点 q_2、q_4、q_6、q_8 的正方形曲面积分。我们使用了源位置

$$x_0 = d \cdot (1, \quad 0.1, \quad 0.1)\,.$$

请注意，我们没有选择 (1、0、0)，因为对于这一位置，由于我们推测的对称性原因，某些积分阶数表现异常出色。此外，我们使用了点

$$(20, 0, 0)$$

作为计算磁场时的线圈位置。我们的实验表明，只要源到单元的距离显著小于线圈到单元的距离，具体的线圈位置对误差的影响就很小。此外，随着线圈到单元的距离增加，误差趋于减小。考虑到现代脑磁图设备的设置，在实验中使用距离单元 2cm 的单个线圈似乎是合理的。相对误差通过与使用积分阶数 50 获得的伪解析积分进行比较来计算。对于过渡积分和通量，我们定义 χ 为仿射函数或多线性函数：它在属于最接近偶极子的面的所有顶点上取值为 1，在其余顶点上取值为 0。本节计算所使用的代码以 DUNE 模块[9]的形式实现。

由于我们进行了两次顶点扩展，因此可以预期过渡积分和表面积分的距离与边长之比会集中在 2 左右。为了验证这一判断，我们采用了主论文结果部分中的初始网格，并选取了 1000 个偏心率为 0.99 的偶极子。对于每个偶极子，我们构建了相应的补丁，并计算了过渡区域内每个单元的比值 d/a。结果如图 E.1 所示。我们将a 计算为最长边的长度，将 d 计算为源位置到四面体各顶点和各面的中心的距离中的最小值。

可以看到，分布峰值约为 2，只有极少数单元-源对的比值小于 1，这正如我们所预期的。因此，如果我们选择一种积分

[9] https://github.com/MalteHoel/local_integration_test

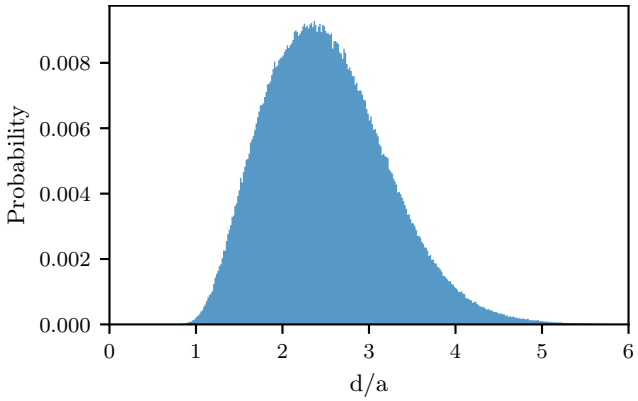


图 E.1：直方图展示了四面体网格中表面积分和过渡积分（(E.5) 和 (E.6)）计算过程中距离与边长之比的相对频率。为生成该图像中考虑了偏心率为 0.99 的 1000 个偶极子。

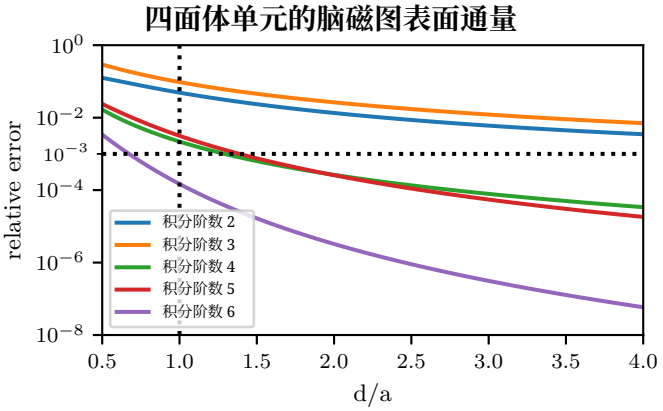


图 E.2：对于四面体单元，在不同积分阶数下，数值积分对脑磁图表面通量 (E.5) 引入的相对误差。在 x 轴上为距离与边长之比，在 y 轴上为相对误差。

阶数，使其在比值为 1（以及略低于 1）时具有足够的精度，那么表面积分和过渡积分的相对误差预计会很小。

我们首先希望推导四面体网格情况下脑磁图通量 (E.4)–(E.6) 的积分阶数。在图 E.2 和图 E.3 中，我们可以看到表面通量 (E.5) 和过渡通量 (E.6) 在不同积分阶数下的相对误差。基于此，我们建议表面积分采用积分阶数 6，过渡积分采用积分阶数 5。

对于块片通量，我们无法期望 d/a 的下界具有良好的界限。相反，我们建议为每个单元-源组合选择单独的积分阶数。更具体地说，在计算出 d/a 后，可以使用图 E.4 所示的结果来选择适当的积分阶数。这就得出了表 E.1 中已描述的规则。只要 $\frac{d}{a} \geq \frac{1}{6}$，该规则就能给出准确的积分阶数，这应足以满足实际应用中所使用的所有网格和源。

现在我们考虑六面体情形。在这种情况下，我们

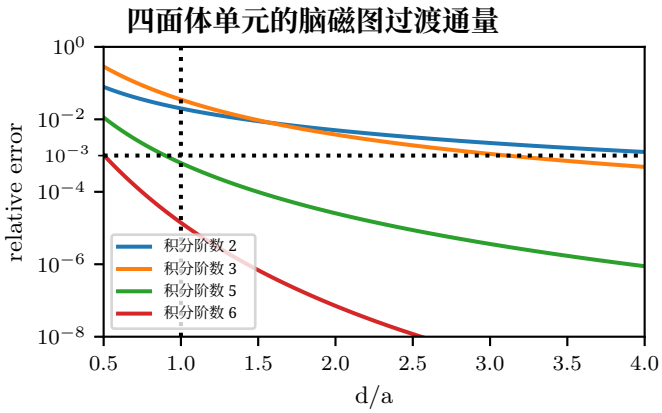


图 E.3：不同积分阶数下，四面体单元的 MEG 过渡通量 (E.6) 数值积分引入的相对误差。 x 轴表示距离与边长之比， y 轴表示相对误差

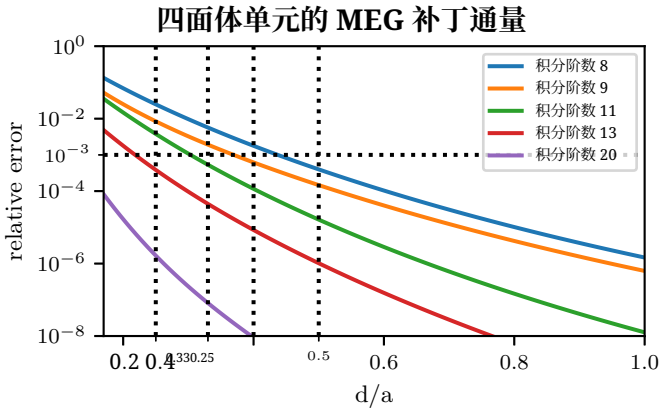


图 E.4：不同积分阶数下，四面体单元的 MEG 补丁通量 (E.4) 数值积分引入的相对误差。 x 轴表示距离与边长之比， y 轴表示相对误差

表 E.1：四面体 MEG 补丁通量积分阶数

距离边长 $\left(\frac{d}{a}\right)$	–	≥ 0.5	≥ 0.4	≥ 0.33	≥ 0.25	≥ 0.17
积分阶数		8	9	11	13	20

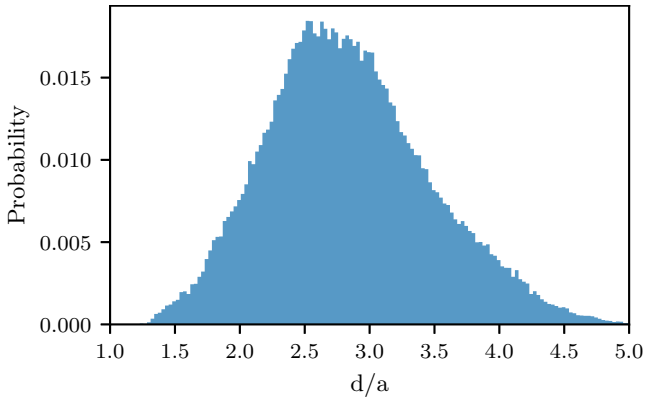


图 E.5：直方图展示了在几何自适应六面体网格中计算表面和过渡积分（(E.5) 和 (E.6)）期间，距离与边长比值的相对频率。为生成该图像，考虑了偏心率为 0.99 的 1000 个偶极子。

需要为脑电图和脑磁图情形指定积分阶数。我们再次进行两次顶点扩展以构建补丁。请注意，由于六面体网格通常由基于体素的分割生成，随后可能进行几何自适应，因此对于表面和过渡积分，我们预计 d/a-比值的下界会更大。为检验这一假设，我们按照 [47]中的描述，构建了一个节点偏移因子为 0.33 的几何自适应 1 毫米六面体网格。与四面体情形类似，随后我们选取了偏心率为 0.99 的 1000 个偶极子，并构建了相应的补丁和过渡区域。对于每个偶极子以及相应过渡区域内的每个单元，我们随后采用与四面体情形相同的方法计算了比值 d/a。结果如图 E.5 所示。可以看到，该分布在 2.5 处达到峰值，且绝大多数单元的比值高于 1.5。此外，没有任何一个单元的比值低于 1。因此，如果我们选择对于比值最高达 1 时仍准确的积分阶数，则可以预期数值积分对于表面和过渡积分 (E.2) 、 (E.3) 以及通量 (E.5) 、 (E.6) 仅产生较小的相对误差。

此外，正文中讨论过，生理相关源与电导率跃变之间的距离至少为 1 毫米。假设实践中使用的六面体网格的边长至多为 2 毫米，那么对于补丁积分 (E.1) 和补丁通量 (E.4) 的精确计算，精确至比值 0.5 的积分阶数便已足够。[10]

与四面体情形类似，我们计算了不同 d/a值下，单个六面体单元上数值积分引入的相对误差。图 E.6、E.7 和 E.8 展示了脑电图情形的相应结果，而图 E.9、E.10 和 E.11 展示了脑磁图情形的结果。

[10]但请注意，我们强烈建议使用 1 毫米网格，而非 2 毫米网格。

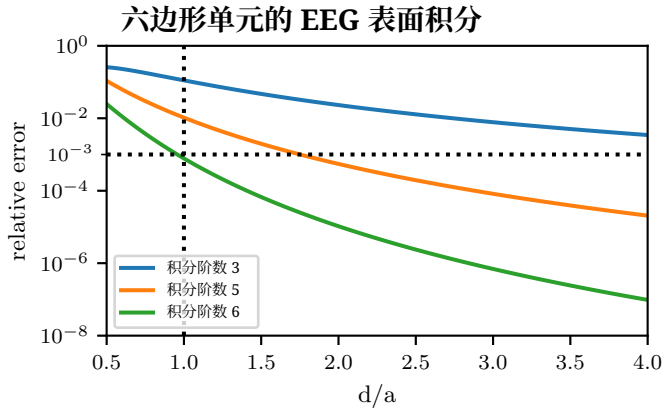


图 E.6：对不同积分阶数的六面体单元进行脑电图表面积分 (E.2) 的数值积分所引入的相对误差。 x 轴表示距离与边长之比， y 轴表示相对误差

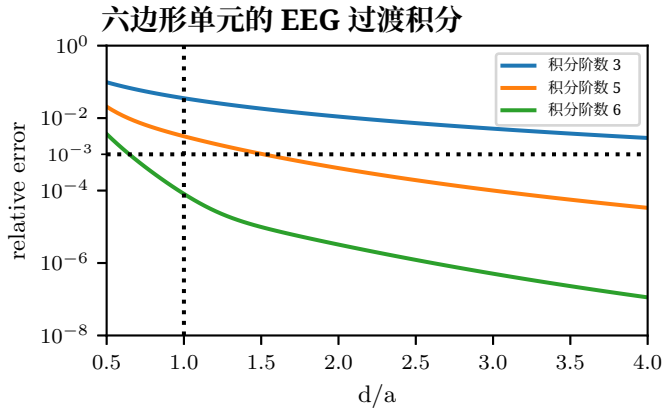


图 E.7：对不同积分阶数的六面体单元进行脑电图过渡积分 (E.3) 的数值积分所引入的相对误差。 x 轴表示距离与边长之比， y 轴表示相对误差

根据前几段的讨论以及这些图中的结果，我们建议按照表 E.2 选择积分阶数。请注意，选择阶数时可以采取较为保守的做法，因为采用局部化减法方法后，计算时间足够短，不再是需要重点顾虑的问题。

附录 F. 顶点扩展组件 比较

在正文中，我们探讨了顶点扩展的数量对局部减法方法精度的影响。具体而言，我们引用了

表 E.2：六面体积分阶数

	表面	过渡	补丁
EEG	6	6	8
MEG	6	6	8

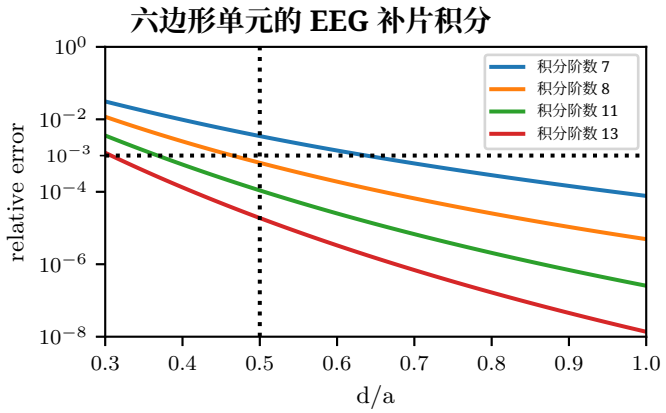


图 E.8：对六面体单元的 EEG 补片积分 (E.1) 进行数值积分时，不同积分阶数引入的相对误差。 x 轴表示距离与边长之比， y 轴表示相对误差

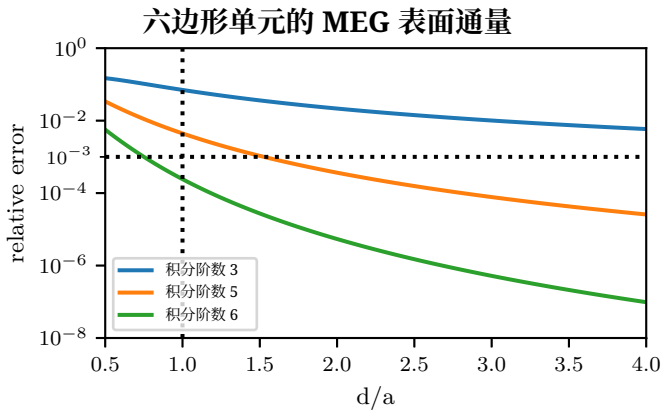


图 E.9：对不同积分阶数的六面体单元进行 MEG 表面通量 (E.5) 数值积分所引入的相对误差。在 x 轴上为距离与边长之比，在 y 轴上为相对误差

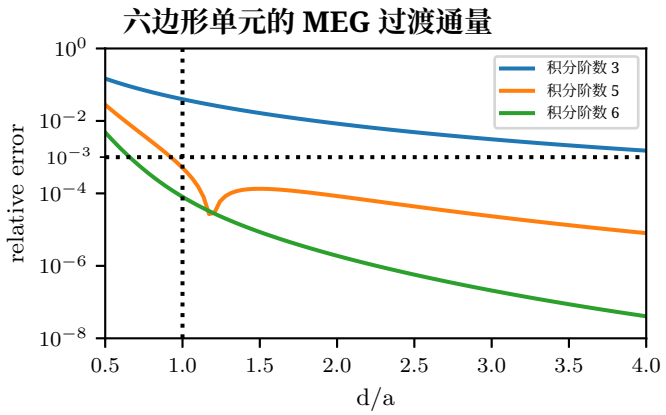


图 E.10：对不同积分阶数的六面体单元进行 MEG 过渡通量 (E.6) 数值积分所引入的相对误差。在 x 轴上为距离与边长之比，在 y 轴上为相对误差

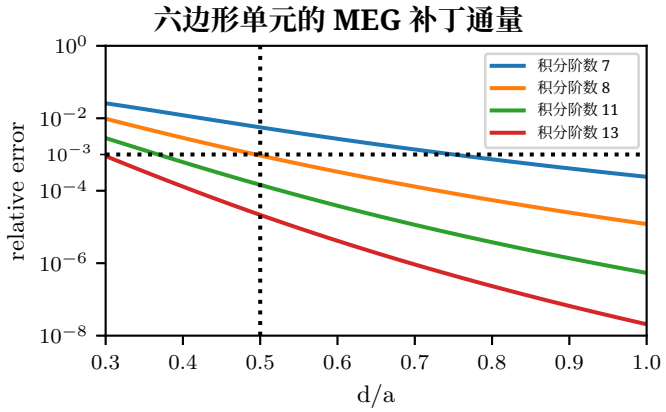
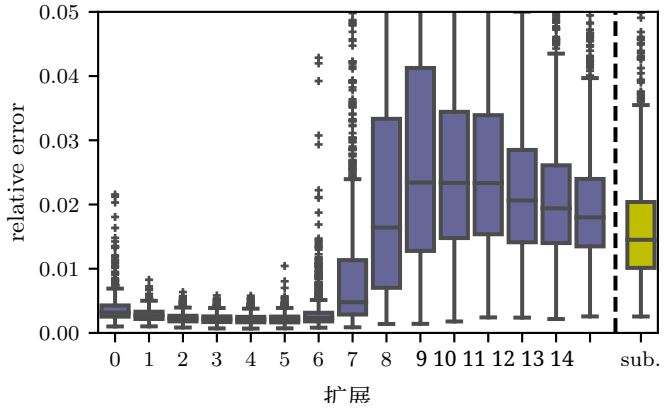


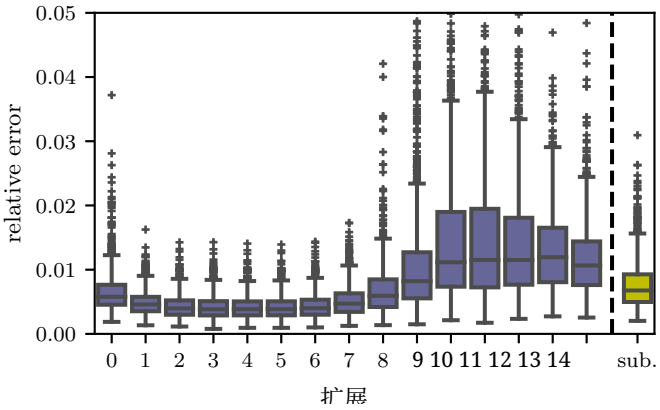
图 E.11：不同积分阶数下，六面体单元的 MEG 补丁通量 (E.4) 经数值积分引入的相对误差。 x轴表示距离与边长之比， y轴表示相对误差



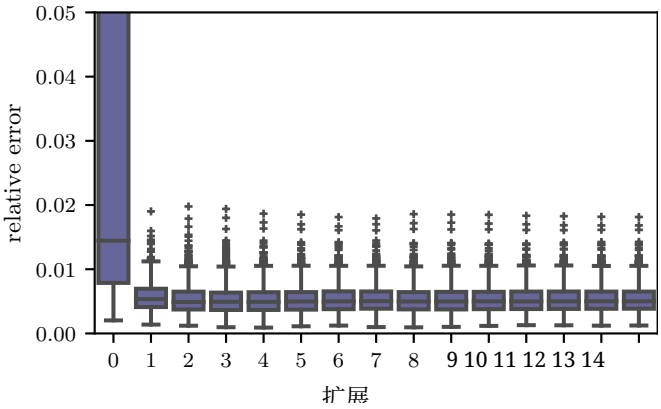
图F.1：在脑电图情况下，对于偏心率为0.99的1000个切向偶极子，采用补丁构造期间不同数量的顶点扩展，并使用$mesh\ brain$计算得到的相对误差（见图3 (b)）。最右侧的黄色箱线图显示了采用 [14]中的解析减法方法时的误差。

本附录中的图展示了脑部网格和皮肤网格对应的误差曲线。脑部网格的结果见图F.1，皮肤网格的结果见图F.2。

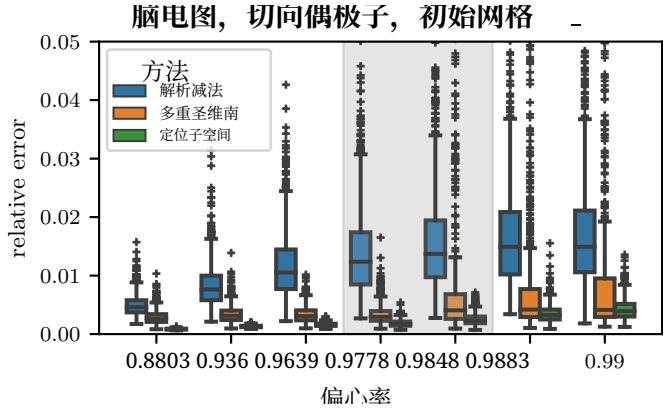
我们还针对脑磁图正向问题进行了顶点扩展比较。初始网格的相应结果见图 F.3。我们发现，从 0 个扩展增加到 2 个扩展时，精度有所提高。此后，误差几乎不再变化。与脑电图情况类似，初始误差的下降是由于较小的补丁迫使校正势呈现出更多的奇异行为。但与脑电图情况不同的是，随着补丁变大，脑磁图误差不会再次增大。这再次表明，由偶极源引起的次级磁场主要受源附近体电流的影响。对脑部网格和皮肤网格进行相应实验，得到了相同的定性结果。



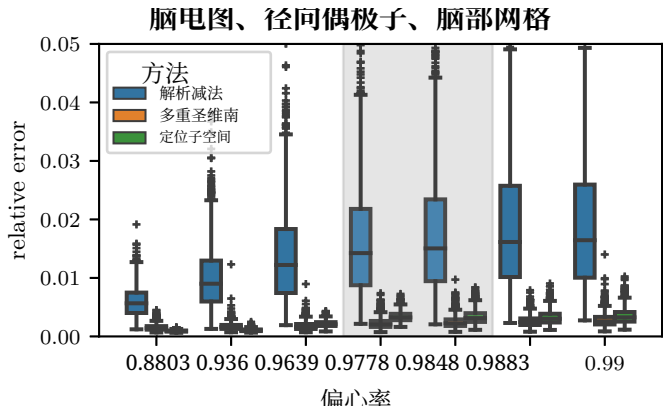
图F.2：在脑电图情况下，对于偏心率为0.99的1000个切向偶极子，采用补丁构造期间不同数量的顶点扩展，并使用 $mesh\ skin$ 计算得到的相对误差（见图3 (c)）。最右侧的黄色箱线图显示了采用 [14]中的解析减法方法时的误差。



图F.3：在脑磁图情况下，对于偏心率为0.99的1000个切向偶极子，采用补丁构造期间不同数量的顶点扩展，并使用 $mesh\ init$ 计算得到的相对误差（见图3(a)）。



图G.1：使用解析减法、多极 Venant 和定位子空间电位方法，对使用 *mesh init* 在不同偏心率下的切向偶极子进行脑电正向模拟的准确度比较（见图3（a））。 y 轴显示相对误差。距离脑脊液 1–2 mm 的生理相关源已突出显示。



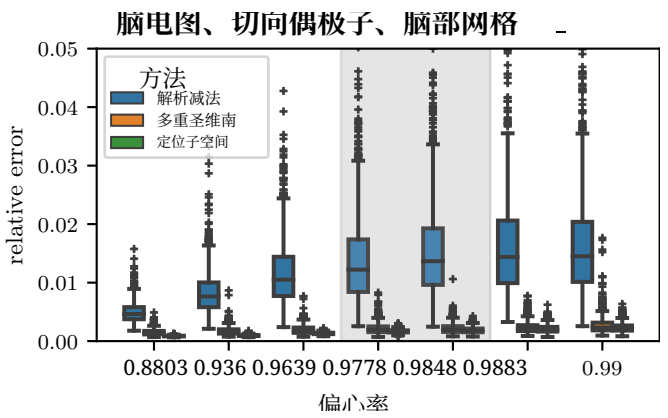
图G.2：使用 *mesh brain* 对不同偏心率下的径向偶极子进行脑电正向模拟时，解析减法、多极 Venant 和局部减法电位方法的准确度比较（见图3 (b)）。 y 轴表示相对误差。突出显示了距脑脊液 1–2 mm 的生理相关源。

附录 G. 不同电位方法的准确度比较

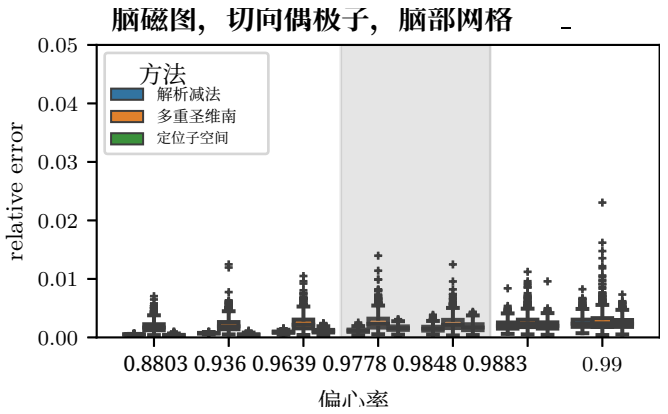
在正文中，我们展示了局部化减法方法与多极 Venant 方法和解析减法方法的准确度比较：对于初始网格中的径向源，比较的是脑电图情况；对于切向源，比较的是脑磁图情况。为使论述更加集中，我们将展示其余比较结果的图移至本附录中。初始网格中脑电图情况下切向源的比较见图 G.1。图 G.2、G.3 和 G.4 展示了脑部网格的结果。图 G.5、G.6 和 G.7 展示了皮肤网格的结果。

参考文献

[1] M. H¨am¨al¨ainen、R. Hari、R. J. Ilmoniemi、J. Knuutila 和 O. V. Lounasmaa，《脑磁图——理论、仪器——



图G.3：使用 *mesh brain* 对不同偏心率下的切向偶极子进行脑电正向模拟时，解析减法、多极 Venant 和局部减法电位方法的准确度比较（见图3(b)）。 y 轴表示相对误差。突出显示了距脑脊液 1–2 mm 的生理相关源。



图G.4：使用 *mesh brain* 对不同偏心率下的切向偶极子进行脑磁正向模拟时，解析减法、多极 Venant 和局部减法电位方法的准确度比较（见图3 (b)）。 y 轴表示相对误差。突出显示了距脑脊液 1–2 mm 的生理相关源。

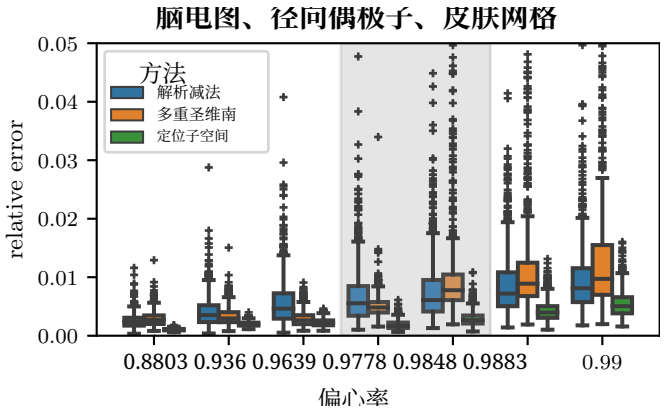
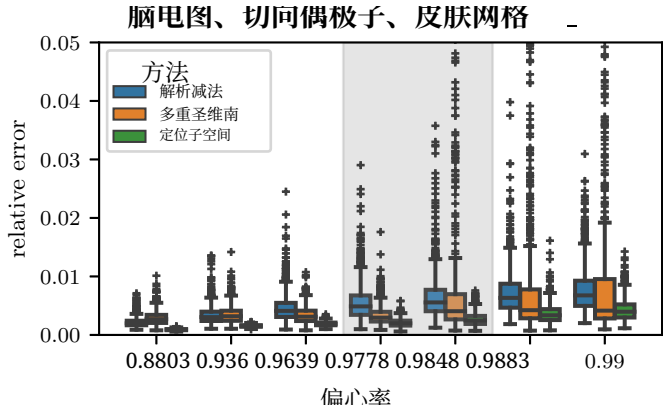
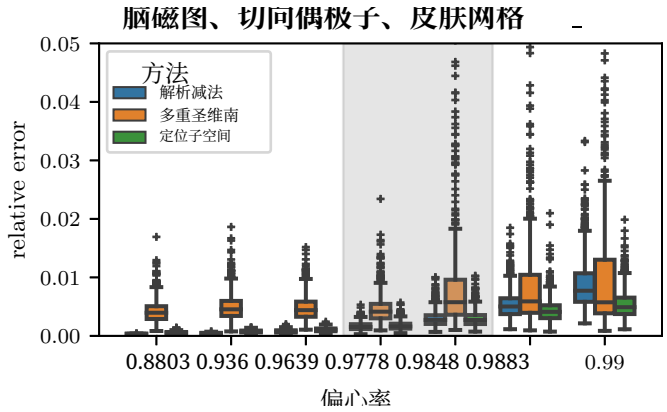


图 G.5：使用 *mesh skin* 比较不同偏心率下径向偶极子的脑电正向模拟精度，采用的方法包括解析减法、多极 Venant 和局部减法势方法（见图3 (c)）。 y 轴表示相对误差。突出显示了距脑脊液 1–2 mm 的生理相关源。



图G.6：使用解析减法、多极 Venant 和局部减法势方法，对不同偏心率下的切向偶极子进行脑电图正向模拟的准确度比较，使用 *mesh skin*（见图3 (c)）。$\bar{y}$ 轴显示相对误差。距离脑脊液 1–2 毫米的生理相关源已突出显示。



图G.7：使用解析减法、多极 Venant 和局部减法势方法，对不同偏心率下的切向偶极子进行脑磁图正向模拟的准确度比较，使用 *mesh skin*（见图3 (c)）。$\bar{y}$ 轴显示相对误差。距离脑脊液 1–2 毫米的生理相关源已突出显示。

设备及其在对工作中的人脑进行非侵入性研究中的应用》，*Rev. Mod. Phys.*，第 65 卷，第 413–497 页，1993年4月。[2] R. Brette 和 A. Destexhe，《神经活动测量手册》，剑桥大学出版社，2012年。[3] J. de Munck、B. van Dijk 和 H. Spekreijse，《数学偶极子足以描述真实的人类脑活动发生源》，*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，第 35 卷，第 11 期，第 960–966 页，1988年。[4] C. Ramon、P. Schi mpf 和 J. Haueisen，《头部模型对脑电模拟和逆源定位的影响》，*Biomedical engineering online*，第 5 卷，第 10 页，2006年2月。[5] M. Fuchs、R. Drenckhahn、H. Wischmann 和 M. Wagner，《一种用于真实体积传导建模的改进边界元法》，*IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 45, 8, 980 997, 1998，卷号、期号和页码缺失。[6] S. N. Makarov、M. H¨am¨al¨ainen、Y. Okada、G. M. Noetscher、J. Ahveninen 和 A. Nummenmaa，《用于改进神经生理记录建模的边界元快速多极子法》，*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，第 68 卷，第 1 期，第 308–318 页，2021年。[7] J. Kybic、M. Clerc、T. Abboud、O. Faugeras、R. Keriven 和 T. Papadopoulo，《脑电正问题积分公式的统一形式体系》，*IEEE Transactions on Medical Imaging* 24, 1, 12 28, 2005，卷号、期号和页码缺失。[8] Y. Ataseven、Z. Akalin Acar、C. Acar 和 N. Gencer，《加速边界元法在人脑电磁源成像中的并行实现》，*Medical and biological engineering and computing* 46, 671 9, 08 2008，卷号和页码缺失。[9] V. Montes-Restrepo、P. Van Mierlo、G. Strobbe、S. Staelens、S. Vandenberghe 和 H. Hallez，《颅骨建模方法对脑电源定位的影响》，*Brain topography*，第 27 卷，第 95–111 页，2014年1月。[10] S. Turovets、V. Volkov、A. Zherdetsky、A. Prakonina 和 A. D. Malony，《用于各向异性 EIT/脑电正问题的三维有限差分 BiCG 迭代求解器及傅里叶-雅可比预条件子》，*Computational and Mathematical Methods in Medicine*，第 2014 卷，2014年。[11] E. Cuartas、C. Acosta-Medina、G. Castellanos-Dominguez 和 D. Mantini，《非均匀各向异性介质中脑电正问题的有限差分解》，*Brain Topography* 32, 03 2019，卷号缺失。[12] H. Azizollahi、M. Darbas、M. M. Diallo、A. E. Badia 和 S. Lohrengel，《新生儿脑电：正向建模及对电导率变化的灵敏度分析》，*Mathematical Biosciences and Engineering*，第 15 卷，第 4 期，第 905–932 页，2018年。[13] M. Vermaas、M. Piastra、T. Oostendorp、N. Ramsey 和 P. Tiesinga，《FEMfuns：一种涵盖电阻性、电容性或色散性组织和电极的体积传导建模流程》，*Neuroinformatics*，第 18 卷，2020年10月。[14] L. Beltrachini，《用于求解脑电正问题的解析减法方法》，*Journal of Neural Engineering*，第 16 卷，第 056029 页，2019年9月。[15] F. Drechsler、C. Wolters、T. Dierkes、H. Si 和 L. Grasedyck，《一种基于约束德劳内四面体剖分、用于有限元法源分析的完全减法方法》，*NeuroImage*，第 46 卷，第 1055–65 页，2009年4月。[16] J. Vorwerk、A. Hanrath、C. H. Wolters 和 L. Grasedyck，《使用有限元法进行脑电正向建模的多极子方法》，*NeuroImage*，第 201 卷，第 116039 页，2019年。[17] T. Miinalainen、A. Rezaei、D. us、A. N¨ußing、C. Engwer、C. Wolters 和 S. Pursiainen，《用于脑电正问题的真实、精确且快速的源建模方法》，*NeuroImage* 184, 08 2018，卷号缺失。[18] M. Thevenet、O. Bertrand、F. Perrin、T. Dumont 和 J. Pernier，《用于真实头部模型中脑电活动的有限元法：初步结果》，*Clinical Physics and Physiological Measurement* 12, 89, ，页码，1991年1月。[19] M. P. SP van den Broek、H Zhou，《神经磁学计算——

使用有限元法和毕奥-萨伐尔定律计算磁场，”*Meg. Biol. Eng. Comput.*，第 34 卷，第 21–26 页，1996 年 1 月。[20] K. Awada、D. Jackson、J. Williams、D. Wilton、S. Baumann 和 A. Papanicolaou，“脑电源定位中有限元建模的计算方面，”*IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 44, 8, 736 752, 1997，卷号：，页码：–。[21] G. Marin、C. Guerin、S. Baillet、L. Garnero 和 G. Meunier，“颅骨各向异性对脑电正问题和逆问题的影响：使用真实头部模型上的有限元法进行的仿真研究，”*Human Brain Mapping* 6, 4, 250 269, ，卷号：，1998 页码：–。[22] P. Schimpf、C. Ramon 和 J. Haueisen，“脑电图和脑磁图的偶极子模型，”*ing* 49, 5, 409 418, 2002，卷号：，页码：–。[23] C. Wolters、H. K¨ostler、C. M¨oller、J. H¨ardtlein、L. Grasedyck 和 W. Hackbusch，“使用有限元头部模型进行脑电源重建时电流偶极子建模减法方法的数值数学，”*SIAM J. Sci-entific Computing* 30, 24 45, 01 2007，卷：，页码：–。[24] C. Engwer、J. Vorwerk、J. Ludewig 和 C. H. Wolters，“使用减法方法求解脑电正问题的间断伽辽金方法，”*SIAM Journal on Scientific Computing* 39, 1, 138 164, 2017，卷号：，页码：B–B。[25] L. Beltrachini，“投影减法方法对网格退化的敏感性及其对脑电正问题的影响，”*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，第 66 卷，第 1 期，第 273–282 页，2019年。[26] N. Gencer 和 C. Acar，“脑电图和脑磁图测量对组织电导率的敏感性，”*Physics in medicine and biology*，第 49 卷，第 701–17 页，2004 年 04 月。[27] M. C. Piastra、S. Schrader、A. N¨ußing、M. Antonakakis、T. Medani、A. Wollbrink、C. Engwer 和 C. H. Wolters，“用于脑电图/脑磁图源分析的 WWU DUNEuro 参考数据集”，2020 年 6 月。[28] D. Geselowitz，“非均匀体积导体内部电流源在外部产生的磁场，”*IEEE Transactions on Magnetics* 6, 2, 346 347, ，卷号：，1970 页码：–。[29] M. C. Piastra、A. N¨ußing、J. Vorwerk、H. Bornfleth、R. Oost-enveld、C. Engwer 和 C. H. Wolters，“用于求解脑磁图及脑磁图/脑电图联合正问题的间断伽辽金有限元法，”*Frontiers in Neuro-science*，第 12 卷，2018 年。[30] A. Nuessing，*Fitted and unfitted finite element methods for solv-ing the EEG forward problem*，学位论文，明斯特大学，2018 年。[31] D. Wilton、S. Rao、A. Glisson、D. Schaubert、O. Al-Bundak 和 C. Butler，“多边形区域和多面体区域上均匀及线性源分布的势积分，”*actions on Antennas and Propagation* 32, 3, 276 ，卷号：，页码：–281，1984 年。[32] R. Graglia，“平面三角形上线性形函数与三维格林函数或其梯度乘积的数值积分，”*IEEE Transactions on Antennas and Propaga-tion* 41, 10, 1448 1455, 1993，卷号：，页码：–。[33] P. Bastian、M. Blatt、A. Dedner、N.-A. Dreier、C. Engwer、R. Fritze、C. Gr¨aser、C. Gr¨uninger、D. Kempf、R. Kl¨ofkorn、M. Ohlberger 和 O. Sander，“DUNE 框架：基本概念与最新发展，”*Computers & Mathemat-ics with Applications* 81, 75 112, 2021，卷：，页码：–。采用数值偏微分方程问题的开源软件开发与应用。[34] S. Schrader、A. Westhoff、M. C. Piastra、T. Miinalainen、S. Pur-siainen、J. Vorwerk、H. Brinck、C. H. Wolters 和 C. Engwer，“DUNEuro——用于生物电磁学正向建模的软件工具箱，”*PLOS ONE*，第 16 卷，第 1–21 页，2021 年 06 月。[35] B. Roth 和 S. Sato，“对圆形线圈上的磁场进行平均的精确高效公式，”*Biomagnetism. Clinical aspects* 1992，1 月。[36] J. P. Ahrens、B. Geveci 和 C. C. Law，“ParaView：用于大规模数据可视化的终端用户工具，”载于 *The Visualization Handbook*，2005年。[37] M. C. Piastra，*New Finite Element Methods for Solving the MEG and the Combined MEG/EEG Forward Problem*。学位论文，明斯特大学，2019年。[38] G. Dassios 和 F. Kariotou，“关于生物磁学中的 Geselowitz公式”，*Quarterly of Applied Mathematics*，第 61 卷，第 2 期，第 387–400 页，2003年。[39] P. Bastian、M. Blatt、A. Dedner、C. Engwer、R. Kl¨ofkorn、R. Ko-rnhuber、M. Ohlberger 和 O. Sander，“用于并行与自适应科学计算的通用网格接口。第二部分：DUNE 中的实现与测试”，*Computing*，第 82 卷，第 121–138 页，2008年 1 月。[40] J. de Munck 和 M. Peters，“一种计算多球模型中势的快速方法（脑电图应用）”，*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，第 40 卷，第 11 期，第 1166–1174 页，1993年。[41] J. Sarvas，“生物磁逆问题的基本数学与电磁学概念”，*Physics in Medicine and Biology* 32, 11 22, 1987，第 卷，第 – 页，1月。[42] S. Lew、C. Wolters、T. Dierkes、C. R¨oer 和 R. MacLeod，“基于有限元法的脑电源分析中不同势方法与迭代求解器的精度和运行时间比较”，*Applied Numerical Mathematics*，第 59 卷，第 8 期，第 1970–1988 页，2009年。[43] J. C. de Munck、C. H. Wolters 和 M. Clerc，*EEG and MEG: forward modeling* 192 256，第 – 页。剑桥大学出版社，2012年。[44] C. Geuzaine 和 J.-F. Remacle，“Gmsh：一款内置前处理与后处理功能的三维有限元网格生成器”，*International Journal for Numerical Methods in Engineering*，第 79 卷，第 11 期，第 1309–1331 页，2009年。[45] P. Bastian、K. Birken、K. Johannsen、S. Lang、N. Neuss、H. Rentz-Reichert 和 C. Wieners，“用于求解偏微分方程的灵活软件工具箱 UG”，*Comp. Vis. Sci* 1, 27 40, 07 1997，第 卷，第 – 页。[46] W. Rudin，*Functional Analysis*。麦格劳-希尔，第 2 版，1991年。[47] C. Wolters、A. Anwander、G. Berti 和 U. Hartmann，“几何自适应六面体网格可提高基于有限元法的脑电源分析精度”，*IEEE transactions on bio-medical engineering* 54, 1446 ，第 卷，第 –53 页，2007年 8 月。