arXiv:2302.12795v1 [math.CA] 24 Feb 2023

带偏移自变量的参数依赖热流问题的非平凡解

ALESSANDRO CALAMAI 和 GENNARO INFANTE

Abstract. 借助一个近期提出的仿射锥中的 Birkhoff–Kellogg 型定理，我们讨论带偏移自变量的参数依赖恒温器问题的可解性，并通过一个具体例子说明我们理论中出现的常数。

1. Introduction

本文研究二阶参数依赖微分方程非平凡解的存在性,

$$u''(t) + \lambda f(t, u(t), u(\sigma(t))) = 0,\ t \in [0,1], \tag{1.1}$$

其初始条件为

$$u(t) = \omega(t),\ t \in [-r, 0], \tag{1.2}$$

以及函数边界条件（BC）

$$\beta u'(1) + u(\eta) = \lambda B[u], \tag{1.3}$$

其中 $\beta > 0, \eta \in (0,1)$, $0 < \beta + \eta < 1$, λ 是一个参数, σ, ω, f 是适当的连续函数, B 是一个适当的泛函。

研究这个问题的动机在于，它源于热流问题。为简单说明这一点，我们来考虑下面这个自变量反射问题的特殊情形:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda f(t, u(t), u(-t)) = 0, & t \in [0,1], \\ u(t) = \omega(t), & t \in [-1, 0], \\ \beta u'(1) + u(\frac{1}{4}) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

边值问题 (1.4) 描述了长度为 2 的受热杆的温度稳态 u 。杆的一半保持在规定温度 ω ，而放置在杆右端的控制器会对位于点 $t = \frac{1}{4}$ 的传感器作出响应。含有取决于自变量反射的项，体现了左侧对右侧的影响

2020年数学主题分类：主要分类 34B08，次要分类 34B10、34K10、47H10。关键词与短语：非平凡解、锥、Birkhoff–Kellogg 型结果、偏移自变量、函数边界条件。

对杆右侧的影响；这类物理问题会出现在灯泡的情形中，详细描述见 [1] 。为简便起见，这里我们在边界条件中取了 $B \equiv 0$；也可以使用非零项 B 来模拟复杂的控制器，其响应可能是非线性的。关于类似热流问题的文献十分丰富；限于篇幅，我们提及在线性控制器情形下的论文 [2, 5, 7, 9, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26] ，以及关于非线性控制器的论文 [12, 17, 18, 19, 21, 22] 。注意，对函数 σ 的不同选择会导致不同的情形；例如，空间时滞可以通过 $\sigma(t) = t - \tau$ 建模，其中 $\tau \leq r$；例如，在 [2] 的时滞方程背景下就采用了这种方法。热流问题中出现的更一般的偏移自变量已在 [1, 8] 中得到研究。

为了讨论边值问题（1.1）-（1.2）-（1.3）的可解性，我们采用一种拓扑方法，该方法基于著名的 Birkhoff–Kellogg 定理在仿射锥中的一个近期变体 [3] 。我们给出一个示例，说明本理论中出现的常数。

近年来， [2, 3, 4, 6] 中已采用仿射锥上的拓扑方法。在处理具有时滞效应的方程时，仿射锥的框架似乎很有帮助。本文通过一个相关的扰动哈默斯坦积分方程，证明边值问题（1.1）-（1.2）-（1.3）存在非平凡解（u， λ）；该积分方程定义在函数锥的一个适当平移上，其中的函数允许改变符号。我们提及，Krasnosel'skiĭ 和 Ladyženskiĭ 提出的 Birkhoff–Kellogg 定理的另一种变体 [20], ，已在[10]中用于顶点位于原点的变号函数锥，所考虑的边界条件组不同，且不含偏移自变量。

我们的结果是新的，并补充了以往的研究成果。特别地，相较于 [1, 2], 中直接使用不动点指数的方法，我们采用了一种不同的拓扑工具。此外，本文研究的边值问题由于存在偏移自变量以及边界条件中的非线性，与 [2], 中的问题不同；同时，由于存在数据 ω，它也不同于 [1], 中的问题。

2. Solutions of perturbed integral equations in affine cones

我们回顾一些有用的记号。设$(X, \|\cdot\|)$为一个实巴拿赫空间。 X 的锥 K 是一个闭集，满足对所有 $\mu \geq 0$ 和 $K \cap (-K) = \{0\}$都有 $K + K \subset K$, $\mu K \subset K$ 。对于 $y \in X$，锥 K 的平移定义为

$$K_y := y + K = \{y + x : x \in K\}.$$

给定 K_y 的一个有界且（在相对拓扑中）开放的子集 Ω，我们将 Ω 和$\partial\Omega$ 分别记作 $\overline{\Omega}$关于 K_y 的闭包和边界。给定 X 的一个开放有界子集 D ，我们记 $D_{K_y} = D \cap K_y$ 为 K_y 的一个开放子集。

现在可以陈述一个 Birkhoff–Kellogg 型结果，该结果给出了锥平移中参数依赖泛函方程非平凡解的存在性。

定理 2.1（[3], 推论 2.4）。设（$X, \|\ \|$）为实巴拿赫空间，$K \subset X$ 为一个锥，$D \subset X$ 为一个开有界集，且 $y \in D_{K_y}$ 和 $\overline{D}_{K_y} \neq K_y$。假设 $\mathcal{F}\colon\ \overline{D}_{K_y} \to K$ 是一个紧映射，并假设

$$\inf_{x \in \partial D_{K_y}} \|\mathcal{F}(x)\| > 0.$$

则存在 $x^* \in \partial D_{K_y}$ 和 $\lambda^* \in (0, +\infty)$，使得 $x^* = y + \lambda^* \mathcal{F}(x^*)$。

为了应用定理 2.1，我们对下面的扰动 Hammerstein 积分方程作出一些假设：

$$u(t) = \psi(t) + \lambda\Big(\int_0^1 k(t,s) g(s) f(s, u(s), u(\sigma(s))\, ds + \gamma(t) B[u]\Big) =: \psi(t) + \lambda \mathcal{F} u(t),\ t \in [-r, 1] \tag{2.1}$$

其中，B 是空间 $C([-r,1], \mathbb{R})$ 上的一个适当的（可能是非线性的）泛函，该空间赋有通常的上确界范数 $\|u\|_{[-r,1]}$。更一般地，给定一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}$，我们用 $C(I, \mathbb{R})$ 表示定义在 I 上的连续函数所构成的巴拿赫空间，并赋有通常的范数 $\|u\|_I$。我们作出如下条件：

(C_1) 函数 $\psi\colon [-r,1] \to \mathbb{R}$ 连续。(C_2) 核 $k\colon [-r,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 可测，满足 $k(t,s) = 0$ 对所有 $t \in [-r, 0]$以及几乎处处的 (a. e.) $s \in [0,1]$成立，并且对每个 $\bar{t} \in [0,1]$，有

$$\lim_{t \to \bar{t}} |k(t,s) - k(\bar{t}, s)| = 0 \ \text{ for a. e. } s \in [0,1].$$

(C_3) 存在一个子区间 $[a,b] \subseteq [0,1]$、一个满足 $\Phi \geq 0$ 几乎处处成立的可测函数 Φ，以及一个常数 $c_1 = c_1(a,b) \in (0,1]$，使得

$$|k(t,s)| \leq \Phi(s) \text{ for all } t \in [0,1] \text{ and a. e. } s \in [0,1],$$

$$k(t,s) \geq c_1\, \Phi(s) \text{ for all } t \in [a,b] \text{ and a. e. } s \in [0,1].$$

(C_4) 函数 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 可测，$g(t) \geq 0$ 几乎处处 $t \in [0,1]$，并满足$g\,\Phi \in L^1[0,1]$ 和 $\int_a^b \Phi(s) g(s)\ ds > 0$。

(C_5) $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ 满足某些 Carath´eodory 型条件；即，$f(\cdot, u, v)$ 对每个固定的 u 以及 $\mathbb{R}$ 中的 v 都是可测的，$f(t, \cdot, \cdot)$ 对几乎处处的 $t \in [0,1]$ 连续，并且对每个 $R > 0$，存在 $\phi_R \in L^\infty[0,1]$ 使得

$$f(t,u,v) \leq \phi_R(t) \ \text{ for all } \ (u,v) \in [-R,R] \times [-R,R], \ \text{ and a. e. } \ t \in [0,1].$$

(C_6) 函数 $\sigma\colon [0,1] \to [-r,1]$ 连续。

(C_7) 函数 $\gamma\colon [-r,1] \to \mathbb{R}$ 是连续的，$\gamma \not\equiv 0$ 并且满足 $\gamma(t) = 0$ 对所有 $t \in [-r, 0]$成立；此外，存在 $c_2 \in (0,1]$ 使得 $\gamma(t) \geq c_2 \|\gamma\|_{[0,1]}$ 对所有 $t \in [a,b]$成立。3

在巴拿赫空间 $C([-r,1],\mathbb{R})$ 中，我们定义锥

$$K_0 = \{u \in C([-r,1],\mathbb{R}) : u(t) = 0 \text{ for all } t \in [-r,0], \min_{t\in[a,b]} u(t) \geq c\|u\|_{[0,1]}\},$$

其中 $c = \min\{c_1, c_2\}$。注意到 $K_0 \neq \{0\}$，因为 $\gamma \in K_0$，此外，K_0中的函数在子集 $[a,b]$ 中非负，而在 $[0,1]$中可能变号。锥 K_0 本质上是对 [13]中引入的锥进行修改后，于 [2], 引入的。

我们考虑锥 K_0的如下平移,

$$K_\psi = \psi + K_0 = \{\psi + u : u \in K_0\},$$

其中子集为

$$K_{0,\rho} := \{u \in K_0 : \|u\|_{[0,1]} < \rho\}$$

以及相应的平移

$$K_{\psi,\rho} := \psi + K_{0,\rho}.$$

注意到 $\partial K_{\psi,\ \rho} = \psi + \partial K_{0,\ \rho}$，并且 $u \in K_\psi$ 意味着 $u = \psi + v$，其中 $v \in K_0$，因此我们有

$$\|u\|_{[-r,1]} = \max\{\|\psi\|_{[-r,0]}, \|\psi + v\|_{[0,1]}\}.$$

现在可以陈述我们的存在性结果。

定理 2.2. 设 $\rho \in (0,+\infty)$，并假设以下条件成立。

(a) 存在 $\underline{\delta}_\rho \in C([0,1],\mathbb{R}_+)$ 使得

$$f(t,u,v) \geq \underline{\delta}_\rho(t),\ \textit{for every } t \in [a,b]\ \textit{with}\ \max\{|u|,|v|\} \leq \rho + \|\psi\|_{[-r,1]}.$$

(b) $B : \overline{K}_{\psi,\rho} \to \mathbb{R}_+$ 是连续且有界的，特别地，设 $\underline{\eta}_\rho \in [0,+\infty)$ 使得

$$B[u] \geq \underline{\eta}_\rho, \text{ 对于每个 } u \in \partial K_{\psi,\rho}.$$

(c) 不等式

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\{\gamma(t)\underline{\eta}_\rho + \int_a^b k(t,s)\underline{\delta}_\rho(s)\,ds\right\} > 0 \tag{2.2}$$

成立。

那么存在 $\lambda_\rho \in (0,+\infty)$ 和 $u_\rho \in \partial K_{\psi,\ \rho}$，它们满足积分方程 (2.1)。

证明。我们首先证明算子 operator $\mathcal{F}$ 将 $\overline{K}_{\psi,\rho}$ 映射到 K_0 且是紧的。取 $u \in \overline{K}_{\psi,R}$；我们需要证明 $\mathcal{F}u \in K_0$。首先注意到，我们的假设4

表明 $\mathcal{F}u$ 在 $[-r,1]$ 上是连续的，并且对于 $t\in[-r,0]$, $\mathcal{F}u(t)=0$。现在，对于每个 $t\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}u(t)| &\le \int_0^1 |k(t,s)|g(s)f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds+|\gamma(t)|B[u]\\ &\le \int_0^1 \Phi(s)g(s)f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds+\|\gamma\|_{[0,1]}B[u],\end{aligned}$$

此外，对于 $t\in[a,b]$,

$$\mathcal{F}u(t)\ge c_1\int_0^1 \Phi(s)g(s)f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds+c_2\|\gamma\|_{[0,1]}B[u]\ge c\|\mathcal{F}u\|_{[0,1]}. \tag{2.3}$$

在 (2.3) 中对 $t\in[a,b]$ 取最小值，得到 $\mathcal{F}u\in K_0$，正如所要求的。$\mathcal{F}$ 的紧性可仿照 [2], 中定理 3.2 的证明得到，因为 B 是连续且有界的。

现在，取 $u\in\partial K_{\psi,\ \rho}$。那么，对于 $t\in[a,b]$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u(t)&=\Big(\int_0^1 k(t,s)g(s)f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds+\gamma(t)B[u]\Big)\\ &\ge\Big(\int_a^b k(t,s)g(s)f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds+\gamma(t)B[u]\Big)\\ &\ge\gamma(t)\underline{\eta}_\rho+\int_a^b k(t,s)\underline{\delta}_\rho(s)\,ds.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\|\mathcal{F}u\|_{[-r,1]}\ge\|\mathcal{F}u\|_{[a,b]}\ge\sup_{t\in[a,b]}\Big\{\gamma(t)\underline{\eta}_\rho+\int_a^b k(t,s)\underline{\delta}_\rho(s)\,ds\Big\}. \tag{2.4}$$

注意，(2.4) 右端的值与所选的具体 u 无关。因此，

$$\inf_{u\in\partial K_{\psi,\rho}}\|\mathcal{F}u\|_{[-r,1]}\ge\sup_{t\in[a,b]}\Big\{\gamma(t)\underline{\eta}_\rho+\int_a^b k(t,s)\underline{\delta}_\rho(s)\,ds\Big\}>0,$$

由定理 2.1 得出所需结果。 □

3. Nontrivial solutions of the BVP

我们再来关注这个边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+\lambda f(t,u(t),u(\sigma(t))=0, & t\in[0,1],\\ u(t)=\omega(t), & t\in[-r,0],\\ \beta u'(1)+u(\eta)=\lambda B[u].\end{cases} \tag{3.1}$$

为了将前述理论应用于边值问题（3.1），我们按照 [2, 11, 14]的思路，采用 [4], 第3节中的叠加原理。

我们首先考虑边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(t) = 0,\ \beta u'(1) + u(\eta) = 0, \end{cases}$$

其具有唯一解

$$u(t) = \int_0^1 \hat{k}(t,s) y(s) ds,$$

其中，格林函数（例如参见 [14]）定义为

$$\hat{k}(t,s) = \frac{\beta t}{\beta+\eta} + \frac{t}{\beta+\eta}(\eta - s)H(\eta - s) - (t-s)H(t-s),$$

其中

$$H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

因此，我们取

$$k(t,s) = \hat{k}(t,s) H(t). \tag{3.2}$$

取 $[a,b] \subset (0, \beta+\eta) \subset (0,1)$ 时，假设 $(C_2) - (C_3)$ 得到满足（参见[2]），当

$$\Phi(s) = \begin{cases} s, & \text{for } \beta+\eta \geq \frac{1}{2}, \\ \left[\dfrac{1-(\beta+\eta)}{\beta+\eta}\right] s, & \text{for } \beta+\eta < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

and

$$c_1 = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{a\beta}{\beta+\eta}, \dfrac{\beta+\eta-b}{\beta+\eta}\right\}, & \text{for } \beta+\eta \geq \frac{1}{2}, \\ \min\left\{\dfrac{a\beta}{1-(\beta+\eta)}, \dfrac{\beta+\eta-b}{1-(\beta+\eta)}\right\}, & \text{for } \beta+\eta < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

注意，(C_4) 也成立，因为 $\int_a^b \Phi(s)\, ds > 0$。

现在注意到，函数 $\hat{\gamma}(t) = \dfrac{t}{\beta+\eta}$ 满足边值问题

$$\begin{cases} u''(t) = 0,\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0,\ \beta u'(1) + u(\eta) = 1. \end{cases}$$

因此我们可以取

$$\gamma(t) = \hat{\gamma}(t) H(t), \tag{3.4}$$

并注意到 (C_7) 在 $c_2 = a$ 下成立（见 [2]）。另注意到 $c_2 \geq c_1$，因此我们取 $c = c_1$。

最后注意到，$\hat{\varphi}(t) = (\beta+\eta)^{-t}$ 是该边值问题的解

$$\begin{cases} u''(t) = 0, \ t \in [0,1], \\ u(0) = 1, \ \beta u'(1) + u(\eta) = 0 \end{cases}$$

因此，定义

$$\psi(t) = \begin{cases} \omega(t), & t \le 0, \\ \hat{\varphi}(t)\omega(0), & t > 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

并注意到，根据构造，ψ 在 $[-r,1]$上连续，因为假设 ω 在 $[-r,0]$上连续。注意，我们所采用的仿射锥的顶点 ψ由初始数据 ω构成，而对于该初始数据，我们不要求它在 0 处具有齐次性，这与 [4]中的情形不同。

综上，我们可以考虑积分方程

$$u(t) = \psi(t) + \lambda\Big(\int_0^1 k(t,s) f(s,u(s),u(\sigma(s))\,ds + \gamma(t)B[u]\Big), \quad t \in [-r,1] \tag{3.6}$$

其中，k 同 (3.2)，γ 同 (3.4)，ψ 同 (3.5)。

定义 3.1. 我们将边值问题 (3.1) 的解定义为积分方程 (3.6) 的解 $u \in C([-r,1],\mathbb{R})$。

基于上述要素，我们可以给出以下存在性结果。

定理 3.2. 设 $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ 和 $\sigma\colon [0,1] \to [-r,1]$ 连续。设 $[a,b] \subset (0, \beta+\eta) \subset (0,1)$，并令 $c = c_1$ 如 (3.3) 所示。设 $\rho \in (0,+\infty)$，并假设定理 2.2 中的条件 (a)、(b) 和 (c) 成立。则存在 $\lambda_\rho \in (0,+\infty)$ 和 $u_\rho \in \partial K_{\psi,\rho}$，使其满足边值问题 (3.1)。

在下面的说明性例子中，我们考虑一个类型为 (3.1) 的特定边值问题，取$r = 1$ 和 $\sigma(s) = -s$，即一个带有自变量反射的方程。

例 3.3. 我们考虑边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda t e^{u(t)+2u(-t)} = 0, & t \in [0,1], \\ u(t) = \sqrt{1+t}, & t \in [-1,0], \\ \frac{1}{4}u'(1) + u(\frac{1}{4}) = \lambda \int_{-1}^{1} t^2 (u(t))^2\,dt. \end{cases} \tag{3.7}$$

因此，函数 ψ 由下式给出

$$\psi(t) = \begin{cases} \sqrt{1+t}, & -1 \le t \le 0, \\ 1-2t, & 0 < t \le 1. \end{cases}$$

现在选取 $\rho \in (0, +\infty)$，并注意到 $\|\psi\|_{[-1,1]} = 1$。我们可以取

$$[a, b] = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right],\ \underline{\eta}_\rho(t) = 0,\ \underline{\delta}_\rho(t) = te^{-3(1+\rho)}.$$

因此，(2.2) 可写为

$$\sup_{t\in[\frac{1}{8},\frac{1}{4}]} \left\{e^{-3(1+\rho)} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} k(t, s)s\, ds\right\} \geq e^{-3(1+\rho)} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} s^2\, ds = \frac{7e^{-3(1+\rho)}}{24576} > 0,$$

这意味着对每个 $\rho \in (0, +\infty)$，(2.2) 都成立。

因此，我们可以应用定理 3.2，得到边值问题 (3.7) 的不可数多个解与参数对 (u_ρ, λ_ρ)。

Acknowledgements

作者的研究部分得到了国家数学分析、概率论及其应用小组（GNAMPA）和国家高等数学研究所（INdAM）的资助。G. Infante 是 UMI Group TAA“逼近理论与应用”的成员。本文部分内容是在 A. Calamai 访问卡拉布里亚大学数学与计算机科学系期间完成的。A. Calamai 感谢上述院系的师生给予的热情款待。

References

[1] A. Cabada、G. Infante 和 F. A. F. Tojo，《具有偏移自变量的扰动哈默斯坦积分方程的非零解及其应用》，《拓扑方法与非线性分析》，47 (2016)，265–287。[2] A. Calamai 和 G. Infante，《二阶函数微分方程边值问题的非平凡解》，《纯粹与应用数学年刊》，195 (2016)，741–756。[3]A. Calamai 和 G. Infante，《锥中的仿射 Birkhoff–Kellogg 型结果及其在函数微分方程中的应用》，《应用科学中的数学方法》，即将刊出，https://doi.org/10.1002/mma.8665。[4]A. Calamai 和 G. Infante，《带有泛函边界条件的四阶滞后方程：一种统一方法》，《离散与连续动力系统：S辑》，即将刊出，https://doi.org/10.3934/dcdss.2023006。[5] F. Cianciaruso、G. Infante 和 P. Pietramala，《扰动哈默斯坦积分方程的解及其应用》，《非线性分析：现实世界应用》，33 (2017)，317–347。[6] S. Djebali 和 K. Mebarki，《锥的平移上的不动点指数及其应用》，《非线性研究》，21 (2014)，579–589。[7] H. Fan 和 R. Ma，《非线性二阶常微分方程中的正性丧失》，《非线性分析》，71 (2009)，437–444。[8] R. Figueroa 和 R. L. Pouso，《具有状态依赖的偏离自变量的二阶边值问题的最小解和最大解》，《伦敦数学会通报》，43 (2011)，164–174。[9] D. Franco、G. Infante 和 J. Per´an，《锥中多个解存在性的新判据》，《爱丁堡皇家学会会刊 A辑》，142 (2012)，1043–1050。

[10] G. Infante, 《某些非局部边值问题的特征值》，爱丁堡数学学会会刊，46 (2003)，75–86。[11] G. Infante, 《具有非线性边界条件的微分方程的正解》，《离散与连续动力系统》，2003年增刊卷，(2003)，432–438。[12] G. Infante, 《具有两个非线性边界条件的非局部边值问题》，通信与应用分析，12 (2008)，279–288。[13] G. Infante 和 J. R. L. Webb, 《解变号的三点边值问题》，积分方程与应用杂志，15 (2003)，37–57。[14] G. Infante 和 J. R. L. Webb, 《非线性非局部边值问题与扰动哈默斯坦积分方程》，爱丁堡数学学会会刊，49 (2006)，637–656。[15] G. Infante 和 J. R. L. Webb, 《非线性标量热方程中的正性丧失》，非线性微分方程及其应用，13 (2006)，249-261。[16] G. Infante 和 J. R. L. Webb, 《非线性非局部边值问题与扰动哈默斯坦积分方程》，爱丁堡数学学会会刊，49 (2006)，637–656。[17] G. Kalna 和 S. McKee, 《恒温器问题》，TEMA 应用数学趋势，3 (2002)，15–29。[18] G. Kalna 和 S. McKee, 《带有非局部非线性边界条件的恒温器问题》，IMA应用数学杂志，69 (2004)，437–462。[19] I. Karatsompanis 和 P. K. Palamides, 《非局部边值问题的多项式逼近》，计算数学及其应用，60 (2010)，3058–3071。[20] M. A. Krasnosel'skiĭ 和 L. A. Ladyˇzenskiĭ, 《正非齐次算子谱的结构》，莫斯科数学会会刊，3 (1954)，321–346。[21] J. J. Nieto 和 J. Pimentel, 《分数阶恒温器模型的正解》，边值问题，2013:5 (2013)，11页。[22] P. Palamides、G. Infante 和 P. Pietramala, 《通过斯佩纳引理求非线性热流问题的非平凡解》，应用数学快报，22 (2009)，1444–1450。[23] C. Shen、H. Zhou 和 L. Yang, 《恒温器模型非线性微分方程正解的存在性》，数学方法及其应用科学，41 (2018)，6145–6154。[24] J. R. L. Webb, 《某些非线性热流问题的多个正解》，《离散与连续动力系统》（增刊），(2005)，895–903。[25] J. R. L. Webb, 《非局部边值问题中的最优常数》，《非线性分析》，63 (2005)，672–685。[26] J. R. L. Webb, 《恒温器模型正解的存在性》，《非线性分析：现实世界应用》，13 (2012)，923–938。Alessandro Calamai, Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura, UniversitàPolitecnica delle Marche Via Brecce Bianche I-60131 Ancona, Italy电子邮箱: calamai@dipmat.univpm.itGennaro Infante, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria,87036 Arcavacata di Rende, Cosenza, Italy电子邮箱: gennaro.infante@unical.it