arXiv:2302.12860v2 [math.CV] 2 May 2023

亚纯函数芽的代数性

´YOHANN GENZMER 和 ROGERIO MOL

Abstract. 本文证明，在 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 处的每个解析亚纯函数芽，都等价于某个代数亚纯函数芽；这里的等价是指经由一个双全纯映射芽作右复合。实解析亚纯函数也有类似结论。

1. Introduction

设 φ 是 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的一个全纯函数芽。J. Mather 和 S. Yau 的一个著名结果指出，若 φ 有孤立奇点，则它是多项式决定的，也就是说，它等价于一个多项式函数 [10, 11]；这里的等价是指经由 Diff$(\mathbb{C}^n, 0)$ 中的一个双全纯映射芽作右复合。不仅如此，φ 还是有限决定的，该多项式就是其泰勒级数的首项部分。借助奇异全纯叶状结构变形的技术，D. Cerveau 和 J.-F. Mattei 在 [7], 中探讨了多值函数芽 $\varphi = \varphi_1^{\mu_1} \cdots \varphi_k^{\mu_k}$ 的有限决定性问题，其中 φ_1、.....、φ_k 是 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 处的不可约全纯函数芽，且 μ_1、.....、$\mu_k \in \mathbb{C}^*$。他们证明，若下文定义的 φ 的临界集 $C'(\varphi)$ 至多退化为一个孤立点，则 φ 是有限决定的。

有限决定性的一个较为宽松的替代概念是代数化。我们称点 $(\mathbb{K}^n)$ 处的亚纯函数芽（其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$）是可代数化的，如果它经过 Diff$(\mathbb{K}^2, 0)$ 中某个元素的右复合后变为代数的；Diff$(\mathbb{K}^2, 0)$ 是在 $0 \in \mathbb{K}^2$ 处的实或复解析微分同胚芽群。变量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 中的亚纯函数 φ 是代数的，如果存在一个多项式 $P = P(x, t) \in \mathbb{K}[x][t]$，使得 $P(x, \varphi(x)) \equiv 0$。本文的核心结果表述如下：

定理 A。设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$。设 φ 是点 $(\mathbb{K}^2)$ 处的亚纯函数芽。则存在一个微分同胚芽 $\Psi \in$ Diff$(\mathbb{K}^2, 0)$，使得 $\varphi \circ \Psi$ 是代数的。

我们指出，这一结果在更高维情形下并不成立：在 [4], J. Bochnak 和 W. Kucharz 给出了一个三维空间中不可代数化的全纯函数的例子。
定理 A 的证明包含两个关键要素。首先是由 [3] M. Bilski、A.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32A20, 13B40, 14B12, 13J05, 13J15, 32S65, 34Cxx.
Key words and phrases. 亚纯函数，代数函数，全纯叶状结构，全纯向量场，Artin 逼近。第二作者部分受到高等教育人员发展协调机构——巴西（CAPES）的资助，资助代码 001。

Parunsinski 和 G. Rond 建立的 Artin-Ploski-Popescu 逼近定理的精妙推广。其次是 Cerveau-Mattei 基于全纯叶状结构平凡化的有限决定性技术。
下面概述这些部分如何共同构成我们的证明。Cerveau-Mattei 的方法 [7] 依赖于考察由上述多项式函数 φ的水平集定义的全纯叶状结构。严格临界集 C′(φ) 定义为全纯 1-形式的奇异集

$$\theta_\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_k \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\varphi_j},$$

但不包括超曲面 $\varphi_1 \cdots \varphi_k = 0$ 上具有正规交叉的那些点。一般而言，在二维情形下，临界集 C′(φ) 与 θ_φ的奇异轨迹重合。在全纯情形下——即 $\mu_i \in \mathbb{N}^*$ 对于 $i = 1$、.....、 k——集合 C′(φ) 至多是一个点，因此应用 Cerveau-Mattei 的结果， φ 具有有限决定性。另一方面，当 $\mu_i \in \mathbb{Z}^*$ 对于 $i = 1$、.....、 k并非全都同号时，我们处于纯亚纯情形，C′(φ) 可能是一维的，因此 [7] 的结果不再适用。

当 Sing(θ_φ) 具有一维分支时，这些分支必包含于 φ 的水平集中；我们可以将它们连同 φ 的零点与极点的不可约方程一起视为多项式方程的解。Artin-Płoski-Popescu 逼近定理（[3],见下文定理 3.1）继而为同一组多项式方程提供代数解，但这些解依赖于一些额外变量。这使我们能够将 Sing(θ_φ) 的不可约分支方程连同 φ 的零点集与极点集方程变形为代数方程，并使其尽可能与恒等映射相切。最后，定理 A 由 [7] 中关于全纯叶状结构变形的平凡性的一项结果推出。上述步骤将在第 3 节详述，并为复情形下的定理 A 提供证明。第4节将讨论实解析情形；利用逼近定理同样适用于实解析函数这一事实，我们将通过复化来证明该情形。

本文也可以从两个变量解析微分方程芽的代数化角度来理解。更经典且严格地说，如果存在局部坐标，使全纯叶状结构芽由具有多项式系数的向量场生成，那么它就是可代数化的；这使我们能够将其视为复射影平面 $\mathbb{P}^2$中某点处的芽化，其中的全局叶状结构定义于整个复射影平面上。所有全纯叶状结构芽是否都是可代数化的，这一问题可以追溯到全纯叶状结构理论的早期 [8] ，而文献 [9],给出了否定答案：作者证明存在可数多个不可代数化的鞍结方程——即对应于具有非幂零线性部分且有一个特征值等于零的向量场。在更为自然的表述中，位于 ($\mathbb{C}^2$, 0)处的全纯叶状结构芽 $\mathcal{F}$是可代数化的，如果存在一个代数曲面 S ，其上赋有奇异全纯叶状结构 $\mathcal{G}$ ，使得 $\mathcal{F}$ 在 ($\mathbb{C}^2$, 0)与 (S, p)之间某个芽的双全纯等同下，对于某个 $p \in S$，等同于 $\mathcal{G}$在 p处的芽。文献 [6] 和 [5] 研究了由亚纯函数的水平集给出的叶状结构的代数化，条件是它们在单次爆破后变为正则。正如定理 A的结论所给出的，亚纯函数的代数化在某种意义上就是其水平集所定义的叶状结构的代数化；我们将在下一节中对此进行描述。

致谢。第二作者感谢其访问图卢兹数学研究所/保罗·萨巴捷大学期间所受到的热情接待；本工作即是在2022/23年冬季开展的。两位作者感谢 Guillaume Rond 提请他们注意 Artin-Ploski-Popescu 逼近定理 [3]。

2. 代数函数, Algebraic functions, holomorphic foliations

考虑变量 $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$。记 $\mathbb{C}\{x\}$ 为在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的收敛幂级数环，其元素称为解析函数。

定义 2.1. 若元素 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ 满足存在一个多项式 $P \in \mathbb{C}[x][t]$，其中 $t \in \mathbb{C}$，使得 $P(f) = 0$，则称其为代数的。代数解析函数构成一个环，记作 $\mathbb{C}\langle x\rangle$。

按照上述定义，若亚纯函数芽 φ 在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 处满足：存在一个多项式 $P = P(x,t) \in \mathbb{C}[x][t]$，其中 $t \in \mathbb{C}$，使得 $P(\varphi) = 0$，则称其为代数的。这等价于要求 φ 是某个 $f, g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ 的商 f/g。换言之，代数亚纯函数域是环 $\mathbb{C}\langle x\rangle$ 的分式域。多项式 $P \in \mathbb{C}[x][t]$ 可以选为次数最低且系数互素；在这种情况下，称其为最小多项式。

我们的结果是在全纯叶状结构的局部理论框架下展开的。余维一奇异全纯叶状结构在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 处的芽 $n \geq 2$，是由一个全纯 1- 形式 ω 在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 处的芽定义的对象 $\mathcal{F}$，满足 $\omega \wedge d\omega = 0$ （可积性条件），且其奇异集 $\mathrm{Sing}(\omega)$ 的余维至少为二。我们将简称这一对象为叶状结构。这一定义意味着，在芽 ω 实现的 $0 \in \mathbb{C}^n$ 邻域内，它在 $\mathrm{Sing}(\omega)$ 之外定义了一个正则全纯叶状结构。本文考察的一种特殊情形是， $\mathcal{F}$ 由闭亚纯1-形式 λ 定义。相应的全纯 ω（即定义该叶状结构的形式）可通过将 λ 乘以一个适当的亚纯函数得到，该函数会消去其零点和极点。一个简单而标准的计算表明，由 λ 的极点和零点定义的余维一解析超曲面在 $\mathcal{F}$ 下是不变的。本文将讨论的一个基本例子是，如引言中所述，多值函数 $\varphi = \varphi_1^{\mu_1} \cdots \varphi_k^{\mu_k}$ 的水平集定义了叶状结构 $\mathcal{F}$，它由对数型闭亚纯1-形式 $\lambda_\varphi = \mathrm{d}\varphi/\varphi = \sum_{j=1}^k \mu_i \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\varphi_j}$ 给出。解析超曲面 $\varphi_j = 0$, $j = 1,\dots,k$ 是 λ_φ 极点集的不可约分支，它们在 $\mathcal{F}$ 下是不变的。消去极点后，我们得到一个全纯1-形式 $\theta_\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_k \lambda_\varphi$。$\mathrm{Sing}(\theta_\varphi)$ 的余维一分支也在 $\mathcal{F}$ 下不变，并且显然不是 $\varphi_1 \cdots \varphi_k$ 的零点。最后，通过消去 θ_φ 系数的公有不可约因子，我们得到定义 $\mathcal{F}$ 的全纯1-形式 ω_φ。这些基本事实为证明定理 A 迈出了第一步，其中 φ 在维数 $n = 2$ 的空间中是亚纯的。

正如我们在引言中指出的，亚纯函数的代数化在某种程度上与叶状结构的代数化这一概念有关。下面解释其含义。设 φ 是一个纯亚纯代数函数，其最小多项式为 $P \in \mathbb{C}[x][t]$，并用 $\mathcal{F}$ 表示由其水平集定义的局部全纯叶状结构。若 φ 是有理的，则 $\mathcal{F}$ 显然是 $\mathbb{P}^n$ 中某个全纯叶状结构的芽化。现在假设 φ 是非有理的，这等价于要求 $\deg(P) > 1$，其中

次数是关于变量 t 的。在 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ 中，考虑方程为 $P(x,t) = 0$ 的不可约代数超曲面 M。由于 φ 是纯亚纯的，对于每个 $c \in \mathbb{C}$，水平超曲面 $\varphi = c$ 都包含原点，因此 $P(0,c) = 0$，由此可得 $P(0,t) \equiv 0$，于是方程为 $x = 0$ 的直线 L 包含在 M 中。由于 M 是余维一的不可约超曲面， L 被点 $M \setminus L$ 所逼近。我们可以将 (x,t) 视为 $\mathbb{P}^n$ 的仿射坐标，并考虑 M 的相应紧化。L 的无穷远点将与 $c = \infty$ 等同。 M 配备了奇异叶层 $\mathcal{G}$，它由 M 上的有理函数 $R(x,t) = t$ 的水平集定义。另一方面，我们可以通过对应关系 $x \in U^* \mapsto (x, \varphi(x)) \in M$，将 $0 \in \mathbb{C}^2$ 的一个小穿孔邻域 U^* 嵌入 M 中 L 的一个邻域，并去掉 L 本身。该映射将 $\mathcal{F}$ 映入 $\mathcal{G}$，也就是说， φ 的水平集被映入 R 的水平集。换言之，在这一识别下， ϕ 就是有理函数 R。

3. Proof of Theorem A

本节将给出关于 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的定理 A 的证明。我们的结果涉及用代数函数逼近满足多项式方程组的解析函数。我们主要使用 Artin-Płoski-Popescu 逼近定理 [3,Th.2.1]:

定理 3.1。设变量 $y \in \mathbb{C}^m$ 中的一个多项式方程组，

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_\gamma) \in \mathbb{C}\langle x \rangle [y]^\gamma,$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\gamma \in \mathbb{N}$有一个解析函数向量 $\mathbf{y}(x) \in \mathbb{C}\{x\}^m$ 作为解，即

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = 0.$$

那么存在变量 $z = (z_1, ..., z_\sigma) \in \mathbb{C}^\sigma$、一个代数函数向量 $\widehat{\mathbf{y}}(x,z) \in \mathbb{C}\langle x, z \rangle^m$ 以及一个解析函数向量 $\mathbf{z}(x) \in \mathbb{C}\{x\}^\sigma$，满足 $\mathbf{z}(0) = 0$，使得

$$\mathbf{f}(x, \widehat{\mathbf{y}}(x,z)) = 0 \quad and \quad \mathbf{y}(x) = \widehat{\mathbf{y}}(x, \mathbf{z}(x)).$$

换言之，如果一个多项式方程组有解析解，那么在允许引入额外变量的情况下，它也有代数解；此外，原来的解析解可作为这个新代数解的一个解析截面恢复出来。我们应当指出，上述结果对于实数域也成立；在第4节中，我们将利用这一点来得到定理 A 的实解析版本。上述结果是 Artin逼近定理的一个版本。该定理的原始表述指出，只要一个多项式方程组有形式解，就有解析 [1] 或代数 [2] 解。为了更清楚地说明，这可以看作 Płoski逼近定理 [12], 的一个代数版本；后者是带参数的 Artin定理的推广。关于逼近定理的全面介绍见 [13]。

设 f、$g \in \mathbb{C}\{x\}$ 没有公因子，并考虑亚纯函数芽 $\varphi = f/g$。将它们分解为不可约因子，记为 $f = f_1^{n_1} \cdots f_\alpha^{n_\alpha}$和$g = g_1^{m_1} \cdots g_\beta^{m_\beta}$，其中 n_i、$m_i \in \mathbb{N}$在 $\mathbb{C}\{x\}$ 中相差单位的乘法。

我们首先将其对数导数与 φ 关联起来:

$$\lambda_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{\mathrm{d}f}{f} - \frac{\mathrm{d}g}{g} = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^{\beta} m_i \frac{\mathrm{d}g_i}{g_i}. \tag{1}$$

其极点集的约化方程为 $f^{\mathrm{red}}g^{\mathrm{red}} = 0$，其中 $f_{\mathrm{red}} = f_1 \cdots f_\alpha$ 以及 $g^{\mathrm{red}} = g_1 \cdots g_\beta$。接下来，我们通过以最经济的方式消去 λ_φ 的极点，关联一个全纯1-形式:

$$\theta_\varphi = f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}} \lambda_\varphi = g^{\mathrm{red}} \sum_{i=1}^{\alpha} n_i f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_\alpha \mathrm{d}f_i - f^{\mathrm{red}} \sum_{i=1}^{\beta} m_i g_1 \cdots \widehat{g_i} \cdots g_\beta \mathrm{d}g_i. \tag{2}$$

显然，θ_φ 定义了与由φ的水平集所给出的相同的全纯叶状结构芽。注意，我们有

$$\theta_\varphi = \frac{f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}}}{fg} (g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g). \tag{3}$$

θ_φ的奇异集记作 Sing(θ_φ)，其中可能包含余维一的分支。然而，由 (2) 可知，这些分支都不属于 φ 的零点集或极点集。事实上，否则我们就会发现某个 f_i 整除 $\mathrm{d}f_i$，或某个 g_i 整除 $\mathrm{d}g_i$，这是不可能的。若 $h \in \mathbb{C}\{x\}$ 是 Sing(θ_φ) 的某个余维一分支的不可约方程，则当 h^ℓ 整除 θ_φ、但 $h^{\ell+1}$ 不整除时，我们称其重数为 ℓ。此时，

$$\theta_\varphi = f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}} \lambda_\varphi = h^\ell \theta_\varphi^0,$$

其中 θ_φ^0 是一个全纯1-形式，且 $h = 0$ 不属于其奇异集。对该表达式求微分并进行整理，可得

$$\mathrm{d}(f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}}) \wedge h\theta_\varphi^0 = f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}} (\ell \mathrm{d}h \wedge \theta_\varphi^0 + h\mathrm{d}\theta_\varphi^0),$$

这意味着 $\mathrm{d}h \wedge \theta_\varphi^0 = 0$ 被 $h = 0$ 整除。这说明 Sing(θ_φ) 的分支 $h = 0$ 在由 θ_φ 诱导的叶状结构下是不变的。因此，它包含于 φ 的某个水平集中。基于这些观察，我们可以陈述以下结果:

命题 3.2. 在上述背景和记号下，$h \in \mathbb{C}\{x\}$ 是 Sing(θ_φ) 的一个重数为 ℓ 的不可约分支的方程，当且仅当存在 $c \in \mathbb{C}^*$，使得 h 作为 $f - cg$ 的因子时的重数为 $\ell + 1$。

证明. 与命题陈述中的记号相同，记 ℓ 为 h 作为 Sing(θ_φ) 的一个分支时的重数。设 k 为它作为 $f - cg$ 的因子的重数，其中 c 对应于包含 $h = 0$ 的 φ 的水平集。取 $\varphi = 0$ 上一个充分靠近 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的点 p，使得 $\varphi = 0$ 光滑，且由其水平集给出的叶状结构 $\mathcal{F}$ 正则。以 p 为中心取新的解析坐标 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，其中 $h = 0$ 对应于 $x_n = 0$。我们可以写成 $\theta_\varphi = x_n^\ell \tau \mathrm{d}x_n$，其中 $\tau \in \mathbb{C}\{x\}$ 不含以 x_n 为因子的项。另一方面，在 p 处，$f - cg = x_n^k \upsilon$，其中 x_n 不是 $\upsilon \in \mathbb{C}\{x\}$ 的因子。对 $f/g - c = x_n^k \nu/g$ 求导，得到

$$\theta_\varphi = \frac{f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}}}{fg} g^2 \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f^{\mathrm{red}} g^{\mathrm{red}}}{fg} g^2 \left(k x_n^{k-1} \frac{\nu}{g} \mathrm{d}x_k + x_n^k \mathrm{d}\left(\frac{\nu}{g}\right)\right).$$

我们处于 $c \in \mathbb{C}^*$ φ的层次，因此括号外的因子在 p处全纯且非零。计算该等式两边 x_n 的重数，我们得到$k - 1 = \ell$，或等价地，$k = \ell + 1$，这就证明了该命题。□

我们继续使用以下对象：一个亚纯函数 $\varphi = f/g$，以及与之关联的全纯1-形式 θ_φ，它具有 $h = 0$，其中 $h \in \mathbb{C}\{x\}$是 Sing(θ_φ) 的一个重数为 ℓ的不可约分支。根据命题 3.2，存在 $c \in \mathbb{C}$ 和 $s \in \mathbb{C}\{x\}$，且 $s \in \mathbb{C}\{x\}$ 不能被 h 整除，使得 $f - cg = h^{\ell+1}s$。于是，解析函数向量

$$(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x), h(x), s(x)) = (f_1(x), \ldots, f_\alpha(x), g_1(x), \ldots, g_\beta(x), h(x), s(x))$$

是变量 $u = (u_1, \ldots, u_\alpha) \in \mathbb{C}^\alpha$、$v = (v_1, \ldots, v_\beta) \in \mathbb{C}^\beta$ 和 $y, w \in \mathbb{C}$ 所满足的多项式方程的一个解，该方程为

$$u_1^{n_1} \cdots u_\alpha^{n_\alpha} - cv_1^{m_1} \cdots v_\beta^{m_\beta} = y^{\ell+1}w.$$

现在取 h_1，...，h_γ 为 Sing(θ_φ) 的所有不可约分支的方程。对于 $i = 1$，...，γ，记 ℓ_i 为 $h_i = 0$ 在 Sing(θ_φ) 中的重数，并记 $c_i \in \mathbb{C}$ 为其在 φ 中对应的层级。因此，我们得到由下式给出的解析解向量 (f (x)，g(x)，h(x)，s(x))

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(x) &= (f_1(x), \ldots, f_\alpha(x)) \\
\mathbf{g}(x) &= (g_1(x), \ldots, g_\beta(x) \\
\mathbf{h}(x) &= (h_1(x), \cdots, h_\gamma(x)) \\
\mathbf{s}(x) &= (s_1(x), \cdots, s_\gamma(x))
\end{aligned}$$

对于由 γ 个多项式方程组成的系统

$$\begin{cases}
u_1^{n_1} \cdots u_\alpha^{n_\alpha} - c_1 v_1^{m_1} \cdots v_\beta^{m_\beta} = y_1^{\ell_1+1} w_1 \\
\qquad \cdots \\
u_1^{n_1} \cdots u_\alpha^{n_\alpha} - c_\gamma v_1^{m_1} \cdots v_\beta^{m_\beta} = y_\gamma^{\ell_\gamma+1} w_\gamma
\end{cases} \tag{4}$$

其变量为 (u, v, y, w)，其中 $y = (y_1, \ldots, y_\gamma)$ $w = (w_1, \ldots, w_\gamma) \in \mathbb{C}^\gamma$。
将定理 3.1 应用于方程组 (4)，可得变量 $z = (z_1, \ldots, z_\sigma) \in \mathbb{C}^\sigma$ 以及代数解向量 (f(x, z) ^g(x, z), h(x, z) ^s(x, z))，其中

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{f}}(x, z) &= (f_1(x, z), \ldots, f_\alpha(x, z)) \\
\widehat{\mathbf{g}}(x, z) &= (g_1(x, z), \ldots, g_\beta(x, z)) \\
\widehat{\mathbf{h}}(x, z) &= (h_1(x, z), \cdots, h_\gamma(x, z)) \\
\widehat{\mathbf{s}}(x, z) &= (s_1(x, z), \cdots, s_\gamma(x, z))
\end{aligned} \tag{5}$$

它们的所有分量均属于 $\mathbb{C}\langle x, z\rangle$，并且存在一个解析函数向量 z($x$) $= (z_1(x) \ldots, z_\sigma(x))$，使得 z(0) $= 0$ 并且

$$(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x), \mathbf{h}(x), \mathbf{s}(x)) = (\widehat{\mathbf{f}}(x, \mathbf{z}(x)), \widehat{\mathbf{g}}(x, \mathbf{z}(x)), \widehat{\mathbf{h}}(x, \mathbf{z}(x)), \widehat{\mathbf{s}}(x, \mathbf{z}(x))).$$

我们使用以下结果：

命题 3.3. 设 $\mathcal{I} = (\phi_1, \phi_2) \subset \mathbb{C}\{x\}$ 是一个理想，其零点簇 $V(\mathcal{I})$ 的余维为二。假设 ϕ_1 和 ϕ_2 关于变量 x_n 正则，次数分别为 n_1 和 n_2。那么存在 $\delta, \varepsilon > 0$，使得只要 ϕ_1'，$\phi_2' \in \mathbb{C}\{x\}$ 是关于 x_n正则的函数，次数分别为 n_1 和 n_2，并且在多圆盘 $\Delta(0, \delta) \subset \mathbb{C}^n$ 上满足 $|\phi_1' - \phi_1| < \varepsilon$ 和 $|\phi_2' - \phi_2| < \varepsilon$，则 $V(\mathcal{I}')$ 的余维为二，其中 $\mathcal{I}' = (\phi_1', \phi_2')$。

证明。首先假设 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\{x'\}[x_n]$ 是次数分别为 n_1 和n_2的魏尔斯特拉斯多项式，其中 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$。关于 $V(\mathcal{I})$ 的假设意味着 ϕ_1 和 ϕ_2 没有公共非平凡因子。因此，它们的结式 $R(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{C}\{x'\}$ 非零。另一方面， $R(\phi_1, \phi_2)$ 是 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\{x'\}[x_n]$ 的西尔维斯特矩阵的行列式，其元素为零和这些多项式的系数。因此，对这些系数进行小扰动将保持结式非零这一事实。由魏尔斯特拉斯预备定理即可得到该命题；注意，对于固定次数，$\phi \in \mathcal{O}_n$ 的魏尔斯特拉斯多项式的系数连续依赖于 ϕ 的值（例如参见 [14]）。□

从此处开始，我们在两个变量 $x = (x_1, x_2)$ 中考虑这个问题。定义 1-形式

$$\omega_\varphi = \omega_\varphi(x) = \frac{\theta_\varphi(x)}{h_1(x)^{\ell_1} \cdots h_\gamma(x)^{\ell_\gamma}}. \tag{6}$$

它是一个在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处有孤立奇点的全纯1-形式。

暂时固定某个 $k_0 \in \mathbb{N}$，并写作 $\mathsf{z}(x) = \mathsf{z}^{k_0}(x) + \mathsf{r}^{k_0+1}(x)$，其中 z^{k_0}包含 z 的泰勒级数中次数不超过 k_0 的所有项，而 r^{k_0+1}是剩余项。对于圆盘 $\mathbb{D}_{1+\varepsilon} \subset \mathbb{C}$ 中的 t，其半径为 $1+\varepsilon$，取某个较小的 $\varepsilon > 0$，令 $\mathsf{z}(x,t) = \mathsf{z}^{k_0}(x) + (1-t)\mathsf{r}^{k_0+1}(x)$。这是变量 (x,t) 的一个解析函数，满足 $\mathsf{z}(x,0) = \mathsf{z}(x)$，且 $\mathsf{z}(x,1) = \mathsf{z}^{k_0}(x)$ 是多项式。注意，对所有 t，$\mathsf{z}(x,t)$ 与 $\mathsf{z}(x)$ 至少以 k_0 阶相切，而且这个阶数可以任意增大。

Set

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,t) &= (F_1(x,t), \ldots, F_\alpha(x,t)) := \widehat{\mathbf{f}}(x, \mathbf{z}(x,t)) \\ \mathbf{G}(x,t) &= (G_1(x,t), \ldots, G_\beta(x,t)) := \widehat{\mathbf{g}}(x, \mathbf{z}(x,t)) \\ \mathbf{H}(x,t) &= (H_1(x,t), \ldots, H_\gamma(x,t)) := \widehat{\mathbf{h}}(x, \mathbf{z}(x,t)) \end{aligned} \tag{7}$$

我们有 $\mathsf{F}(x,0) = \mathsf{f}(x)$、$\mathsf{G}(x,0) = \mathsf{g}(x)$ 和 $\mathsf{H}(x,0) = \mathsf{h}(x)$，而 $\mathsf{F}(x,1)$、$\mathsf{G}(x,1)$ 和 $\mathsf{H}(x,1)$ 都是代数的，因为它们各自的每个分量都是一个代数函数与一个多项式映射的复合。注意，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，对每个固定的 t， $F_i(x,t)$ 与 $f_i(x)$ 相切，且相切阶数随 k_0 增大。特别地，这说明 $F_i(x,t)$ 在 $\mathbb{C}\{x\}$ 中不是恒等于 1 的函数。函数 $G_i(x,t)$ 和 $H_i(x,t)$ 也同样如此。

定义

$$F(x,t) = F_1(x,t)^{n_1} \cdots F_\alpha(x,t)^{n_\alpha} \quad \text{and} \quad G(x,t) = G_1(x,t)^{m_1} \cdots G_\beta(x,t)^{m_\beta}.$$

令 $R(x,t) = F(x,t)/G(x,t)$。注意

$$R(x,0) = F(x,0)/G(x,0) = f(x)/g(x) = \varphi(x)$$

并且 $R(x,1) = F(x,1)/G(x,1) = \rho_{alg}(x)$ 是一个代数亚纯函数。我们计算其对数导数

$$\Lambda_R = \Lambda_R(x,t) = \frac{\mathrm{d}R(x,t)}{R(x,t)} = \frac{\mathrm{d}F(x,t)}{F(x,t)} - \frac{\mathrm{d}G(x,t)}{G(x,t)},$$

随后消去其极点

$$\Theta_R = \Theta_R(x,t) = F(x,t)^{\mathrm{red}} G(x,t)^{\mathrm{red}} \Lambda_R(x,t),$$

其中 $F_{\text{红色}} = F_1 \cdots F_\alpha$ 且 $G^{\text{red}} = G_1 \cdots G_\beta$。根据命题 3.2，1–形式 Θ_R可以被乘积 $H_1(x,t)^{\ell_1} \cdots H_\gamma(x,t)^{\ell_\gamma}$整除，因为 H 与 F 和 G 一起构成方程组 (4) 的一个解。因此，我们可以定义

$$\Omega_R = \Omega_R(x,t) = \frac{\Theta_R}{H_1(x,t)^{\ell_1} \cdots H_\gamma(x,t)^{\ell_\gamma}}, \tag{8}$$

它是一个可积全纯 1-形式。记 $\Omega_{R,\ t} = \Omega_{R,\ t}(x)$ 为 Ω_R在每个 t-常数平面上的限制。在水平集 $t = 0$ 上，$\Omega_{R,\ 0} = \omega_\varphi$ 在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处有一个孤立奇点，并定义了由 φ 的水平集给出的叶状结构。在水平集 $t = 1$ 上，$\Omega_{R,\ 1}$ 定义了一个对应于代数亚纯函数 $R(x,1) = \rho_{alg}(x)$ 的水平集的叶状结构。

注意，$t \mapsto \Omega_R(x,t)$ 可视为 $\Omega_R(x,0) = \omega_\varphi$ 的一个解析变形。到目前为止，我们已在 $\mathsf{z}(x,t) = \mathsf{z}^{k_0}(x) + (1-t)\mathsf{r}^{k_0+1}(x)$ 中固定了 k_0。令此 k_0 增大，我们就可以将这一变形平凡化。我们陈述这一事实：

命题 3.4. 对于充分大的 k_0，变形 $t \mapsto \Omega_R(x,t)$ 对任意 $t \in [0,1]$ 都是局部平凡的。

证明。我们先给出以下引理：

引理 3.5. 对每个充分大的 k_0 以及任意 $t \in [0,1]$，1-形式 $\Omega_{R,\ t}$ 在 $\left(\mathbb{C}^2, 0\right)$ 处有一个孤立奇点。

证明。如上所述，通过增大 k_0，我们可以使变形 $\mathsf{z}(x,t)$ 与 $\mathsf{z}(x) = \mathsf{z}(x,0)$ 尽可能相切。因此，$\Omega_{R,\ t}$ 中 dx_1 和 dx_2 的系数可以与 $\Omega_{R,\ 0} = \omega_\varphi$ 中对应的系数尽可能相切且接近。此外，我们可以假设，也许在对变量 $x = (x_1, x_2)$ 作线性坐标变换之后，对每个 t，这些系数关于 x_2 都是正则的，且阶数与 $\Omega_{R,\ 0} = \omega_\varphi$ 中对应系数的阶数相同。随后，我们可以对由 $\Omega_{R,\ 0} = \omega_\varphi$ 的系数生成的理想$\mathcal{I}$，以及由 $\Omega_{R,\ t}$ 的系数生成的 $\mathcal{I}'$ 应用命题 3.3，从而得到该引理。□

我们还需要以下关于叶状结构变形平凡性的结果 [7, 引理 2.1，第 149] 页：

引理 3.6. 设 ω 是在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 处的一个可积全纯 1-形式的芽，且在原点有孤立奇点。存在一个正整数 k，使得对于每个在 $(\mathbb{C}^{n+p}, 0)$ 处满足以下性质的可积 1-形式芽 Ω

(1) $\Omega_0 = \omega$，且 (2) Ω 与 ω 在 $(\mathbb{C}^{n+p}, 0)$ 处模理想 $(x)^k = (x_1, \ldots, x_n)^k$ 相同，

存在一个保持水平纤维的全纯微分同胚芽 $\Phi = \Phi(x,t) = (\phi(x,t)\ t)$，以及一个全纯函数芽 $\Gamma = \Gamma(x,t)$，满足 $\Gamma(0,0) \neq 0$；二者均在 $(\mathbb{C}^{n+p},0)$ 处，且

$$\Phi_* \Omega = \Gamma \omega_0.$$

对于任意 $t_0 \in [0,1]$，$\Omega_{R,\ t_0}$是 $\left(\mathbb{C}^2\right.$ 处的一个可积全纯 1–形式，且具有孤立奇点。进一步，根据构造，差

$$\Omega_{R,t_0} - \Omega_R$$

属于理想 $(x_1, x_2)^k$ ，其中 k 可以取得足够大。因此，命题 3.4 可由引理 3.6 得出。□

为了得到定理 A，只需沿实区间 $[0,1]$ 有限次应用命题 3.4，并得出由 $R(x,0) = \varphi(x)$ 以及由 $R(x,1) = \rho_{alg}(x)$ 在 $(\mathbb{C}^2,0)$ 处诱导的全纯叶状结构芽全纯等价。也就是说，存在一个双全纯映射芽 $\Psi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2,0)$，使得 $\varphi \circ \Psi$ 和 ρ_{alg} 在 $(\mathbb{C}^2,0)$ 处定义相同的全纯叶状结构芽。最后，通过证明 $\varphi \circ \Psi$ 是一个代数亚纯函数，我们完成定理 A 的证明。这是下面引理的一个推论。回忆一下，在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 处的一个全纯叶状结构芽 $\mathcal{F}$ 的亚纯第一积分域具有形式 $\mathbb{C}(\kappa)$，它由一个亚纯函数 κ 在单变量有理函数的左复合下生成 [7, Th.1.1, p.137]。这个亚纯第一积分 κ 被称为极小的。

引理 3.7. 设 $\mathcal{F}$ 是在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 处的余维一全纯叶状结构芽，且具有一个亚纯第一积分。若 $\mathcal{F}$ 的亚纯第一积分域包含一个代数亚纯函数，则 $\mathcal{F}$ 的所有第一积分都是代数的。

证明。设 ρ_{alg} 是一个代数第一积分，且 κ 是 $\mathcal{F}$ 的一个极小亚纯第一积分。则存在一个单变量有理函数 $\phi(z)$，使得 $\rho_{alg} = \phi \circ \kappa$。现在，由于 ρ_{alg} 是代数的，存在一个多项式 $P \in \mathbb{C}[x][t]$ ，使得 $P(\rho_{alg}) = 0$。因此 $P \circ \phi(\kappa) = 0$。但是 $P \circ \phi$ 是一个消去 κ 的有理函数。它的分子是一个具有相同性质的多项式。由此我们得出 κ 是代数的，这显然意味着 $\mathbb{C}(\kappa)$ 中的所有元素都是代数的。□

4. The real analytic case

本节将由定理 A 的复情形（已在第 3 节证明）推出其实情形。为统一术语，我们将 $\mathbb{R}\{x\}$ 的分式环中的元素称为实亚纯函数； $\mathbb{R}\{x\}$ 是由实值实解析函数构成的环，这些函数可等同于变量 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 中系数为实数的收敛幂级数。若一个实亚纯函数被 $\mathbb{R}[x][t]$ 中的某个多项式湮灭，其中 t 是变量，则称它是代数的。为区别于复情形，本节中实解析对象将用扬抑符号表示。

我们使用的主要工具是复化，下面将对此进行说明。为避免混淆，在不影响理解的前提下，略去符号上的区别：提到 $\mathbb{R}\{x\}$ 或 $\mathbb{C}\{x\}$时，同一符号 x 分别表示实变量或复变量。 $f \in \mathbb{R}\{x\}$ 的复化是幂级数 $f \in \mathbb{C}\{x\}$，其系数与 f相同。如果 $\hat{}\varphi = f/\hat{}g$是实亚纯函数，且 $\hat{}f$、$\hat{}g \in \mathbb{R}\{x\}$，那么它的复化是 $\varphi = f/g$，其中 f和 g分别是 $\hat{}\, f$ 和 $\hat{}g$的复化。在逆向执行这一过程时，我们将使用新造词“去复化”及其变体。对每个 $f \in \mathbb{C}\{x\}$，关联函数$f^* \in \mathbb{C}\{x\}$，定义为 $f^*(x) = \overline{f(\bar{x})}$；也就是说，若 $f(x) = \sum_\nu a_\nu x^\nu$用多重指标记法表示，那么 $f^*(x) = \sum_\nu \bar{a}_\nu x^\nu$。显然， $f \in \mathbb{C}\{x\}$ 是 $\mathbb{R}\{x\}$中某个元素的复化，当且仅当 $f = f^*$。此时，我们称 f 为实的。对于一个复亚纯函数

函数 φ，我们有显然的定义 φ^* 以及类似的性质。若 $f \in \mathbb{C}\{x\}$，定义

$$\mathrm{Re}^*(f) = \frac{f + f^*}{2} = \sum_\nu \mathrm{Re}(a_\nu)x^\nu \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}^*(f) = \frac{f - f^*}{2i} = \sum_\nu \mathrm{Im}(a_\nu)x^\nu.$$

我们有 $f = \mathrm{Re}^*(f) + i\mathrm{Im}^*(f)$，其中 $\mathrm{Re}^*(f)$、$\mathrm{Im}^*(f) \in \mathbb{C}\{x\}$ 是实系数级数，因此可将其去复化为 $\mathbb{R}\{x\}$。复化和去复化过程，以及 $(*)$-算子，都可以扩展到解析1-形式和向量场，只需考虑它们的系数即可。

我们需要以下定义：

ˆ定义4.1. 设 θ 是芽于 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 的实解析 1-形式。 θ的代数奇点集 ˆ ˆ，记为 $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta)$，是其在 $\mathbb{R}\{x\}$ 中各系数的最大公因子，除相差一个单位外唯一确定。

ˆ $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta)$ 的一个不可约分支——简记为分支——是其某个不可约因子，在 $\mathbb{R}\{x\}$ 中差一个单位元确定。它具有显然定义良好的重数。当 $n = 2$ 时，我们称 ˆθ 在 $0 \in \mathbb{R}^2$ 处具有代数孤立奇点，如果 ˆ 它在该点有奇点，但 $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta)$ 是平凡的。这等价于要求其复化 θ 在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处具有孤立奇点。

ˆ 因此，让我们说明如何对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 获得定理 A。设 ˆ$\varphi = f/ˆg$ 是一个实的 ˆ 亚纯函数，其中 f，ˆ$g \in \mathbb{R}\{x\}$ 互素。记其相应的复化为 $\varphi = f/g$，其中 f、$g \in$ˆ$\mathbb{C}\{x\}$，并记按照导出（2）的步骤构造的实解析 1-形式为 $\theta_{\hat{\varphi}}$，其复化为 θ_φ。下面的结果是命题 3.2 的实版本，涉及代数奇异集的分支：

ˆ ˆ 命题 4.2. 不可约的 $h \in \mathbb{R}\{x\}$ 是 $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta_{\hat{\varphi}})$ 的一个重数为ℓ 的分支，当且仅当 ℓ 是满足下列条件之一的最大整数：

(1) 存在 $c \in \mathbb{R}$ 和 ˆ$s \in \mathbb{R}\{x\}$，使得

$$\hat{f} - c\hat{g} = \hat{h}^{\ell+1}\hat{s};$$

(2) 存在 $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 和 ˆρ_1、ˆρ_2、ˆς_1、ˆ$\varsigma_2 \in \mathbb{R}\{x\}$，使得 ˆ$h =$ ˆ$\rho_1^2 +$ ˆρ_2^2 并且

$$\hat{f}^2 + |c|^2\hat{g}^2 - 2\mathrm{Re}(c)\hat{f}\hat{g} = (\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_2^2)^{\ell+1}(\hat{\varsigma}_1^2 + \hat{\varsigma}_2^2).$$

ˆ ˆ 证明. 假设不可约的 $h \in \mathbb{R}\{x\}$ 定义了 $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta_{\hat{\varphi}})$ 的一个重数为 ℓ的分支。根据其复化 h 在 $\mathbb{C}\{x\}$中是不可约还是可约，它可分为两种类型。在不可约情形下， h 是 $\mathrm{Sing}(\theta_\varphi)$ 的一个重数为 ℓ 的分支的方程，并且如命题 3.2 所示，存在 $c \in \mathbb{R}$ 和 $s \in \mathbb{C}\{x\}$，使得

$$f - cg = h^{\ell+1}s,$$

其中 s 不能被 h 整除。左边在 $(*)$-算子作用下保持不变，因此右边也如此；将这个表达式去复化后，我们便得到命题中的 (1)。
在可约情形下，很容易看出 $h = \rho\rho^*$，其中 $\rho \in \mathbb{C}\{x\}$ 不可约。在这种情况下， ρ 和 ρ^* 都具有相同的重数 ℓ，它们是不可约

分支 Sing(θ_φ) 的方程，对应于水平集 $c \in \mathbb{C}$ 和 $\bar{c} \in \mathbb{C}$。它们满足以下方程，其中一个是另一个的 $(*)$，即

$$f - cg = \rho^{\ell+1}\varsigma \quad \text{and} \quad f - \bar{c}g = (\rho^*)^{\ell+1}\varsigma^*, \tag{9}$$

其中 $\varsigma \in \mathbb{C}\{x\}$ 不以 ρ 为因子。若 $c \in \mathbb{R}$，则在第一个方程中，ρ^* 是 ς 的一个因子，重数为 $\ell + 1$。于是我们有

$$f - cg = \rho^{\ell+1}(\rho^*)^{\ell+1}s = h^{\ell+1}s,$$

对于某个满足 $s = s^*$的 $s \in \mathbb{C}\{x\}$。这也将其化为实情形，并给出了命题陈述中的 (1)。

现在，当 $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$时，(9) 中各方程的乘积为

$$f^2 + c\bar{c}g^2 - (c + \bar{c})fg = (\rho\rho^*)^{\ell+1}\varsigma\varsigma^*. \tag{10}$$

将分解式 $\rho = \mathrm{Re}^*(\rho) + i\mathrm{Im}^*(\rho) = \rho_1 + i\rho_2$ 以及 $\varsigma = \mathrm{Re}^*(\varsigma) + i\mathrm{Im}^*(\varsigma) = \varsigma_1 + i\varsigma_2$写出，其中 ρ_1、ρ_2、ς_1、ς_2 分别是 $\hat{}\rho_1$、$\hat{}\rho_2$、$\hat{}\varsigma_1$、$\hat{}\varsigma_2 \in \mathbb{R}\{x\}$ 的复化，我们发现方程 (10) 去复化后正是陈述中的第 (2) 项。

利用命题 3.2 中所述的等价性，可以很容易地反向使用上述论证，从而证明条件 (1) 和 (2) 确定了 $\theta_{\hat{\varphi}}$ 的奇异集 Sing^{alg} 中重数为 $\ell\hat{}$ 的一个分支。□

命题 4.2 是命题 3.2 针对实情形的必要细化。事实上，逼近定理 3.1 的实解析版本将给出 $\hat{}\,\theta_{\hat{\varphi}}$ 的一个实变形，而该变形必须保持复化的 1-形式 θ_φ 的复奇点集的拓扑结构。

现在，我们将第 3 节中的同一套方法转用于实情形。考虑奇点集 $\mathrm{Sing}^{alg}(\theta_{\hat{\varphi}})$ 的不可约分支的方程 $\hat{}$，以及 $\mathbb{R}\{x\}$ 中 f 和 g $\hat{}$ 的不可约因子分解，我们构造一个类似于 (4) 的实多项式方程组，并将命题 4.2 中条目 (1) 和 (2) 的表达式考虑在内。然后，我们应用定理 3.1 的实解析版本，以得到如 (5) 所示、依赖于额外变量 $z = (z_1, \ldots, z_\sigma) \in \mathbb{R}^\sigma$ 的实代数解；由此，我们可以构造初始解的变形，并使其尽可能与恒等映射相切，如 (7) 所示。接着，我们得到一个实亚纯函数 $R(x,t)$，其中 $t \in [0,1]$，使得 $R(x,0) = \hat{}\varphi\hat{}$，并且 $R(x,1) = \hat{}\varphi_{alg}$ 是一个实代数亚纯函数。下一步是构造一个如 (6) 所示的实解析 1-形式 $\hat{}\,\omega_{\hat{\varphi}}$；根据构造，它的代数奇点集是平凡的，并可得到相应的实解析变形 $\Omega_{\hat{R}}$，如 (8) 所示。

$\hat{}$ 接下来，我们对 R 进行复化，得到 $R = R(x,t)$，其中 (x,t) 现在是复变量，然后按照 (8) 构造 $\Omega_R = \Omega_R(x,t)$；它恰好是 $\hat{}\Omega_{\hat{R}}$ 的复化。现在在维数 $n = 2$ 下工作，可知 $\Omega_{R,0} = \omega_\varphi$ 在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处有一个孤立奇点；并且，由于 Ω_R 可以与 ω_φ 尽可能相切，根据引理 3.5，我们可以假设 $\Omega_{R,t}$ 对每个 $t \in [0,1]$ 都在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处有一个孤立奇点。

最后一步是应用引理 3.6，以获得命题 3.4 中的局部平凡化。不过，我们必须确保这一过程能够通过实微分同胚芽来实现，也就是说，通过 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ 中一个分量在 $(*)$-算子作用下保持不变的元素来实现。这实际上可由 [7, p.149]，中引理的证明得出，该证明主要基于为 $k = 1, \ldots, p$ 找到形如 $v_k = \sum_{j=1}^n p_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t_k}$ 的向量场，其中

$p_{kj} \in \mathbb{C}\{x,t\}$，它们全都与 Ω 相切，即 $i_{v_k}\Omega = 0$。不过，若 Ω 是实的，也就是说 $\Omega^* = \Omega$，我们可以假设每个 v_k 都是实的，只需在必要时将其替换为 $\mathrm{Re}^*(v_k) = (v_k + v_k^*)/2$ 或 $\mathrm{Im}^*(v_k) = (v_k - v_k^*)/2i$。对这些向量场 v_k 进行积分，便可得到所需的实微分同胚。最后，我们将此结果应用于实 1-形式 $\Omega = \Omega_R$。

References

[1] M. Artin. 关于解析方程的解。 *Invent. Math.*, 5:277–291, 1968.[2] M. Artin. 完备局部环上结构的代数逼近。 *Inst. Hautes Études Sci.* , ( ): – *Publ. Math.* 36 23 58, 1969 .[3] M. Bilski, A. Parusi ´ *J.* nski 和 *Algebraic Geom.* 26 1 177 197, 2017 G. Rond. 解析函数芽的局部拓扑代数性。, ( ): – .[4] J. Bochnak 和 W. Kucharz. 解析集的局部代数性。 *J. Reine Angew. Math.*, 352 14, 1984 1: – .[5] G. Calsamiglia 和 P. Sad. 全纯叶状结构芽的延拓。 *Ann. Fac. Sci. Toulouse,* *Math. (6)* 24 3 543 561, 2015 , ( ): – .[6] G. Casale. 简单亚纯函数是代数的。 *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.),* 44 319, 2013 2 309( ): – .[7] D. Cerveau 和 J.-F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque*第 97 卷。法国数学会，巴黎，1982。[8] H. Dulac. 关于微分方程的奇点。, : – .[9] Y. Genzmer 和 L. Teyssier. 微分方程的非代数奇点的存在性。 *J. Dif-* , ( ): – . *ferential Equations* 248 5 1256 1267, 2010 [10] J. Mather 和 S. Yau. 孤立超曲面奇点双全纯等价的判据。*Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 78:5946–5947, 1981. [11] J. Mather 和 S. Yau. 通过模代数对孤立超曲面奇点进行分类。*Invent. Math.*, 69(2):243–251, 1982. [12] A. P l oski. 关于 M. Artin 定理的注记。 *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 22 1107 1109, 1974 : – .[13] G. Rond. Artin 逼近。 *J. Singul.*, 17:108–192, 2018. [14] B. Shabat. *Introduction to complex analysis. Part II,* 110 *Translations of Mathematical* 卷，。美 *Monographs* 1992 国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。

Institut de Mathématiques de Toulouse — Université Paul Sabatier
Current address: 法国图卢兹 Cedex 9，邮编 31400，纳博讷路 118 号*Email address*: yohann.genzmer@math.univ-toulouse.fr

Departamento de Matemática — Universidade Federal de Minas Gerais
Current address: 巴西贝洛奥里藏特，邮编 31270-901，安东尼奥·卡洛斯大道 6627 号。
Email address: rmol@ufmg.br