arXiv:2302.12865v1 [math.MG] 24 Feb 2023

Gromov–Hausdorff类中一般度量空间的稠密性。

Vikhrov Anton

摘要

本文证明，在赋予 Gromov–Hausdorff距离的全体度量空间构成的真类中，一般度量空间处处稠密。

1. 引言

满足对称性 $d\colon\ X\times X\to[0,\infty]$、在对角线上为零且满足三角不等式的映射称为广义伪度量。此外，如果函数仅在对角线上取零值，则称为广义度量；如果它不取无穷值，则称为度量。

格罗莫夫–豪斯多夫距离是一个反映两个度量空间之间差异程度的数值。Gromov 于 1981 [4] 引入了这一距离，并将其定义为给定空间的等距像之间的最小 Hausdorff距离。借助这一距离，Gromov 研究了多项式增长群的性质。后来，人们给出了这一距离的一个等价定义。

本文采用冯·诺依曼–伯奈斯–哥德尔公理系统，该系统引入了所谓的类和真类，以推广集合的概念。所有按等距关系考虑的度量空间构成一个真类，记为 $\mathcal{GH}$。

众所周知，格罗莫夫–豪斯多夫距离是 $\mathcal{GH}$ 上的广义伪度量。在 [5] 中引入了 $\mathcal{GH}$ 中处于一般位置的空间这一概念，并证明这类空间在 $\mathcal{M}$ （按等距关系考虑的紧的非空度量空间所构成的空间）中稠密，同时研究了 $\mathcal{GH}$ 中一般空间的小邻域结构。这些事实意味着空间 $\mathcal{M}$ 的等距群是平凡的。本文证明，一般空间在 $\mathcal{GH}$ 中构成处处稠密的子族。

作者谨向其导师 A.A.Tuzhilin 博士、理学教授，以及 A.O.Ivanov 博士、理学教授表示感谢，感谢他们提出问题并关注这项工作。

2. 主要定义与预备结果

首先介绍一些基本记号。我们用 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示非负实数的集合，用 $\mathbb{R}_{+}$表示正实数的集合。设 (X,ρ) 是任意度量空间，且 $x,y\in X$。点 x 与 y 之间的距离记作 $|xy|=\rho(x,y)=d_X(x,y)$。设 $U_\varepsilon(a)$ 是以 a 为中心、半径为 ε的开球，而$U_\varepsilon(A)=\bigcup U_\varepsilon(a)$ 是非空子集 A的 ε-邻域， $S_\varepsilon(a)$ 是以点 a为中心、半径为 ε 的球面。我们用 $\#X$ 表示 X的基数，并且对任意 $a\in\mathbb{R}_{\geq 0}$和度量空间 X，定义 $a\,X=(X,a\,d_X)$。

定义 1。 令 A， B 为度量空间 X的非空子集。*Hausdorff*距离 是值 e

$$\mathrm{d_H}(A,B)=\inf_{r\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\Big\{r\colon A\subseteq U_r(B)\,\&\,B\subseteq U_r(A)\Big\}.$$

~ ~ ~ ~**定义 2**。 令 A， B， X为度量空间。若 A与 A等距，且 B与 B等距，其中 A和 B是~ ~ X的子空间，则三元组（A， B， X）称为（A， B）这对空间的实现。

定义 3。 两个度量空间之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离 A、 B 是所有对（A,B）的实现中 Hausdorff 距离的下确界。换句话说，

$$\mathrm{d_{GH}}\ (AB).=\inf\big\{r:\text{ there is a realization }(\tilde{A},\tilde{B},X)\text{ of the pair }(A,B)\text{ such that }d_H(\tilde{A},\tilde{B})\leq r\big\}$$

定义 4。 两个集合之间的对应 A和 B是一个子集 $R \subseteq A \times B$，满足：对于任意 $a \in A$和 $b \in B$~ ~，都存在 $\tilde{a} \in A$和 $b \in B$，使得（a, b）、（$\tilde{a}, b$）属于 R。

此外， aRb意味着 a 和 b 之间存在对应 R，度量空间 A、 B 之间所有对应的集合记作 $\mathcal{R}(A,\ B)$。

定义 5. 设 R 是度量空间 A、 B之间的一个对应。其畸变定义为

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big|d_X(a,a') - d_Y(b,b')\big| : aRb \text{ and } a'Rb'\Big\}.$$

注 1. 如果 R 是一个函数对应，即存在一个映射 f： $X \to Y$，使得当且仅当 $y = f$时有 xRy （x），那么其畸变可以写成如下形式

$$\operatorname{dis} f = \sup\Big\{\big|d_X(a,a') - d_Y(f(a),f(a'))\big|,\ a,a' \in X\Big\}.$$

命题 2 （[1]）。 对于任意度量空间 A 和 B，下列等式成立：

$$2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B) = \inf_{R \in \mathcal{R}(A,B)} \operatorname{dis} R.$$

定义 6. *Gromov–Hausdorff*类 $\mathcal{GH}$ 是所有按等距关系考虑的度量空间构成的真类（就冯·诺伊曼–伯奈斯–哥德尔集合论而言）。

Prop命题 3 （[1]）。 *Gromov–Hausdorff*距离是 $\mathcal{G}$上的广义伪度量 $\mathcal{H}$.

将 $\triangle_n$ 称为一个 n点单纯形，也就是说，它是一个基数为 n的度量空间，其中任意两个不同点之间的距离均为 1。度量空间 X 的直径为

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,x' \in X} d_X(x,x').$$

命题 4 ([1])。 对于任意度量空间 X，公式 $2\mathrm{d_{GH}}(\triangle_1, X) = \operatorname{diam}(X)$ 成立 .

记号 7. 令 令 $X \in \mathcal{GH}$。用 $S(X)$ 表示从 X 到其自身的所有双射映射构成的集合。我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}(X) &= \inf\big\{|xx'| : x \neq x'; x,x' \in X\big\},\\
\mathrm{t}(X) &= \inf\big\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| : x \neq x' \neq x'' \neq x; x,x',x'' \in X\big\},\\
\mathrm{e}(X) &= \inf\big\{\operatorname{dis}(f), f \in S(X), f \neq \mathrm{id}\big\}.
\end{aligned}$$

定义 8. 度量 度量空间 X 称为一般空间，如果三个量 s(X)、e(X)、t(X) 均为正 e.

2.1. 规范投影

回顾如何从连通加权图构造伪度量空间。下文中的图均假设为简单、连通的加权图，且边权函数（定义在图的边上）为非负。图的顶点集合和边集合可以是无限的。图的顶点有时也称为其顶点。连接 x 和 y 的边记作 xy 或 $x \sim y$。

定义 9. 广义游走 L 在图 G 中连接点 x 和 y，是一个有限序列 $\big[x_i, i = 1 \ldots N\ |x_1 = x,\ x_N = y\big]$, $N \geq 2$，使得要么对所有 i， $x_i x_{i+1}$ 都是一条边，要么 $x_i = x_{i+1}$。[1] 广义游走的一条边 是

连接此游走中相邻不同点的一条边。游走长度 L 定义为 $|L| =$ $\sum_{i=1}^{N-1} \omega($ $x_i x_{i+1})$.

连接 和 的广义游走集合 记作 $\mathbb{L}(x, y)$。

在本文中，**广义游走简称为游走**

[1]我们使用方括号，以便让这段文字更易于阅读。

定义 10。我们称将每个连通加权图 $X=(V,\ E,\ \omega)$ 映射为度量空间 $(V,\ d_\omega)$ 的映射 π 为典范的，其中

$$d_\omega(y_1,y_2)=\begin{cases}\inf\{|L|, L\in\mathbb{L}(y_1,y_2)\} & \text{for } y_1\neq y_2,\\ 0 & \text{for } y_1=y_2.\end{cases}$$

我们称　当对任意 $xy\in E$，若 $\omega(xy)=d_\omega(x,\ y)$ 成立时，这种投影保持边权　　.

众所周知，$(Y,\ d_\omega)$ 是一个伪度量空间。

注 5. 设 $X=(V,E,\omega)$ 是一个图。若存在 $C>0$，使得对所有 $\mathrm{e}\in E$ 都有 $\omega(e)\geq C$，则 $\pi(X)$ 是一个度量空间。

定义 11. 设 X 是一个加权图，z_1z_2 是其一条边。那么，下底边的多边形不等式 z_1z_2 与游走 $L\in\mathbb{L}(z_1,\ z_2)$ 是不等式 $\omega(z_1z_2)\leq|L|$。

引理 6. 当且仅当对所有下底边 $xy\in E$ 以及任意 $L\in\mathbb{L}(x,y)$，所有多边形不等式都成立时，典范投影才保持边权。

证明。注意，$\inf\{|L|:\ L\in\mathbb{L}(x,\ y)\}\leq\omega(xy)$，因为 $xy\in\mathbb{L}(x,\ y)$。由于下底边为 xy 时满足多边形不等式，因此对于每个 $L\in\mathbb{L}(x,\ y)$，都有 $\omega(xy)\leq|L|$。

如果至少有一对点 $x,\ y$不满足多边形不等式，也就是说，存在一条游走 $L\in\mathbb{L}(x,\ y)$，使得 $\omega(xy)>|L|$，那么 $d_\omega(x,\ y)<\omega(xy)$。□

2.2. 度量空间的细分。

我们来推广图的细分这一概念。

构造 7. 考虑任意度量空间 X，将其视为完全加权图 G'，其权函数 ω等于点之间的距离。对于每一对点 $\{u,\ v\}$，向图G'中添加点 $\alpha^{u,\ v}_{i}$，$i\in\mathcal{I}(u,v)$。将每个 $\alpha^{u,\ v}_{i}$ 与每个 $\alpha^{u,\ v}_{j}$ 相连，并将点 $u,\ v$与所有 $\alpha^{u,\ v}_{i}$ 相连。对新增的边任意赋予权重，使由 $\{u,v,\alpha_i^{u,v},i\in I(u,v)\}$生成的所有子图 $G_{u,\ v}$ 都满足三角不等式。将所得图记为 G。

我们令 $Z=\pi(G)$，由 X 得到的点也用与 X 中相同的方式表示。下面列出空间 Z 的一些性质。

引理 8。

(1) 投影 π 保持所有边的权重。

(2) 分别位于 $G_{u,v}$ 和 $G_{u',v'}$ 中的点 x、y 之间的距离，其中 $uv\neq u'v'$ 和 x、$y\notin X$，等于以下游走的最小长度:

(1) $L_1=[x,u,u',y]$,
(2) $L_2=[x,u,v',y]$,
(3) $L_3=[x,v,u',y]$,
(4) $L_4=[x,v,v',y]$。

(3) G_u 的顶点 x 到 $u'\in X$ 的距离，其中 v，且 $v\neq x\neq u$，其中 $v\neq u'\neq u$，等于以下游走的最小长度:

(1) $L_1=[x,u,u']$,
(2) $L_2=[x,v,u']$。

证明。我们来验证 (1)。为此，我们需要检查所有多边形不等式，并应用引理 6。

考虑一对点 $u,\ v$，它们由空间 X 得到。任何连接它们的游走都可以分成若干线段 $L_{i,\ j}$，这些线段完全位于某个 $G_{x_i,\ x_j}$ 中，而相邻的游走必须在 X 中的点处相交。每条这样的线段的长度都不小于 $[x_i,x_j]$ 的长度，这意味着下确界可以通过仅经过 X 中的点的游走来计算，并且每条这样的游走都不短于 $[u,v]$。

考虑一条边 xy，它位于 $G_{u,\,v}$ 中，且不同于 uv。任何连接 x、y 且完全位于 $G_{u,\,v}$ 中的游走，其长度都不小于 $\omega(xy)$，这是由多边形不等式得出的。如果游走经过点 u 并离开 $G_{u,\,v}$，那么它必定经过点 v，因为游走不会两次经过同一个点 u，而图 $G\backslash\{u,v\}$（由 G 的所有顶点除 u，v 外所张成的子图 G）是不连通的（而该游走连接了位于不同连通分支中的点）。任何连接 u，v 的游走都不短于 $[u,v]$（见第一项的证明）。因此，不完全位于 $G_{u,\,v}$ 中的游走，不会短于某条完全位于 $G_{u,\,v}$ 中的游走；此情形已在证明开头讨论过。

现在来证明第 (2) 项。考虑连接 L 和 x，y 的任意游走，并设它在 X 中的第一顶点为 a_1，最后一个顶点为 a_2（该游走必定经过 X 中的点，因为 $G\backslash X$ 不是连通图，而点 x、y 位于不同的连通分支中）。连接 a_1 和 a_2 的任意游走都不短于 $[a_1,a_2]$。连接 x，a_1 的任意游走都不短于 $[x,a_1]$；同理，根据多边形不等式，连接 y 和 a_2 的任意游走也不短于相应距离。也就是说，距离至少由游走 s $[x,a_1,a_2,y]$ 计算得出。点 a_1 必须与 x 位于同一个连通分支中，而 a_2 则与 y 位于同一个连通分支中。该项得证。

最后，我们证明第 (3) 项。连接 x 和 u' 的任意游走都必须经过某个 $a\in\{u,v\}$，因为 x 和 u' 位于 $G\backslash\{u,v\}$ 的不同连通分支中。连接 x，a 的任意游走都不短于 $[x,a]$，而 a 和 u' 也不短于 $[a,u']$。引理得证。 □

我们将这种构造称为度量空间 X 的细分。在本文中，这种构造采用其最简单的形式：$\#I=1$。

2.3. 度量凸函数。

定义12。满足以下条件的非恒定函数 $f\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 对于 $f(0)=0$ 以及任意 $a\leq b+c$, a，b，$c\geq 0$，不等式 $f(a)\leq f(b)+f(c)$ 成立，我们称其为度量凸函数。

度量凸函数最简单的性质可由定义直接得到。由于不等式 $a\leq b+0$ 意味着 $f(a)\leq f(b)$，我们得到以下结果。

命题9。度量凸函数是非递减的。

应用两次定义，我们得到

命题10。度量凸函数的复合仍是度量凸函数。

命题11。度量凸函数除在零处外处处不为零。

证明。确实，若 $f(a)=0\text{for}\ a>0$，则 $f(x)=0\text{for}\ x\leq a$。令 $a_0=\sup\{x\colon\ f(x)=0\}$。于是对所有 $y>a_0$，我们得到 $f(y)>0$，但对于 $a_0<y=2a_0/3+2a_0/3$，有 $0<f(y)<f(2a_0/3)+f(2a_0/3)=0$，这就产生了矛盾。 □

推论12。对于任意 m 度量空间 (X,d_X) 以及度量凸函数 f，这一对 $(X,f\circ d_X)$ 构成一个度量。

B令 y $f(X)$ 表示度量空间 $(X,f\circ d_X)$。对于非空子集 $A\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$，我们令 t

$$||f(x)||_A=\sup\bigl\{|f(x)|:x\in A\bigr\}.$$

命题13. 非递减函数 f 在零点取值为零，当且仅当对任意的 b、$c>0$，不等式

$$f(b+c)\leq f(b)+f(c)$$

成立。

证明. 若 f 是度量凸的，则根据定义，不等式成立（只需令 $a=b+c$）。

反之，若 $0<a\leq b+c$，则 $f(a)\leq f(b+c)\leq f(b)+f(c)$。若数值 a,b,c 中至少有一个等于零，则由于函数非递减或非负，不等式成立。 □

引理14. 对于任意度量空间 X 和度量凸函数 f，不等式

$$2\,\mathrm{d_{GH}}\bigl(X,f(X)\bigr)\leq||x-f(x)||_A$$

成立，其中 $A=\bigl[\mathrm{s}(X)\text{,直径}(X)\bigr]$ 若直径$(X)<\infty$，否则 $A=\bigl[\mathrm{s}(X)\ \infty\bigr)$。

证明。只需考虑 $R=\bigl\{(u,\ u)\mid u\in X\bigr\}$，对于该对象，$\mathrm{dis}(R)\leq||x-f(x)||_A$，其中 A 是定理假设中的集合。因此，$2\,\mathrm{d_{GH}}(X,\ f(X))\leq\mathrm{dis}(R)\leq||x-f(x)||_A$。 □

3。 $\mathcal{GH}$中一般度量空间族的稠密性。

定义 13。 我们将以下函数称为 ε-阶梯

$$l_\varepsilon(x) = \begin{cases} k\varepsilon, & x \in \big((k-1)\varepsilon, k\varepsilon\big]; \; k = 1 \dots \infty, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

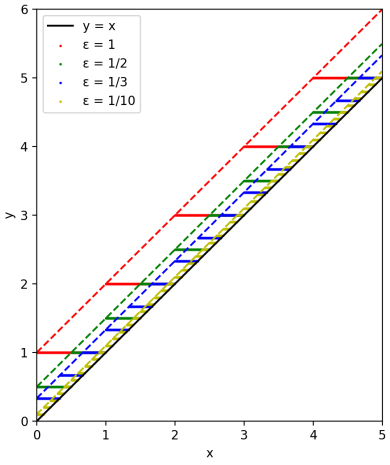

图 1。函数 $l_\varepsilon(x)$。

引理 15。 ε-阶梯是度量凸的。

证明。 不妨设 $\varepsilon = 1$，因为其他情形可通过与一个线性函数复合得到，而度量凸函数的复合仍是度量凸的。根据命题13，只需验证不等式$l_1(a+b) \le l_1(a) + l_1(b)$，其中 $a, b > 0$。将 a, b 表示为 $a = A - \alpha$, $b = B - \beta$，其中 A, $B \in \mathbb{N}$，且 α 和 β 均为非负且小于 1。根据定义， $l_1(a) = A$, $l_1(b) = B$，并且

$$l_1(a+b) = l_1(A + B - \alpha - \beta) \le l_1(A+B) = A + B = l_1(a) + l_1(b)$$

由于是非递减的。 □

记号 14。 设 X 是一个度量空间，且 $c > 0$。用 $X + c$ 表示将函数作用于 n

$$f(x) = \begin{cases} x + c, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

度量空间 X 的结果。

注 16. 这样的函数 f 确实是度量凸的，因为对于 x、 y、 $z > 0$、 $x \le y + z$，不等式$x + c \le y + c + z + c$成立；若 $y = 0$，则由于函数 f 的单调性，有 $f(x) \le f(y)$。

命题 17. 对于度量空间 X 和 $c > 0$,

(1) $\mathsf{s}(X + c) = \mathsf{s}(X) + c$,
(2) $\mathsf{t}(X + c) = \mathsf{t}(X) + c$,
(3) $\mathsf{e}(X + c) = \mathsf{e}(X)$.

引理 18 ([3])。 设 $(X, \prec)$ 是一个良序集，且 $\phi\colon X \to X$ 是某个保序双射。那么 ϕ 是恒等映射。

定理19. 对于任意非负的 δ 和 c，在度量空间 $X \in \mathcal{GH}$ 的一个（$\delta + c$）邻域内，存在一个一般度量空间 U，使得$\mathrm{s}(U) \geq \delta/3 + 2c$，$\mathrm{t}(U) \geq 2c$，且$\mathrm{e}(U) \geq \delta/3$。

证明. 我们来证明定理在 $X = \triangle_1$ 情形下成立。考虑一个三点度量空间 $U = \big(\{u_1, u_2, u_3\}, d_u\big)$，其中

(1) $d(u_1, u_2) = \delta/3 + 2c$,
(2) $d(u_2, u_3) = 2\delta/3 + 2c$,
(3) $d(u_1, u_3) = 3\delta/3 + 2c$.

对于这样的度量，我们有 $s(U) = 2c + \delta/3$, $t(U) = 2c$, $e(U) \geq \delta/3$，因为空间 U中的所有距离相差至少 $\delta/3$。接下来我们考虑 $\#X > 1$ 的情形。

首先，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们将最简单的 ε-阶梯应用于原空间。于是根据引理14，

$$2\,\mathrm{d_{GH}}\big(X, l_\varepsilon(X)\big) \leq \|l_\varepsilon(x) - x\|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \leq \varepsilon.$$

设 $Z' = l_\varepsilon(X)$。我们在集合 Z' 上固定一个全序（根据策梅洛定理，这样的序存在），并将其记为 $\prec$。我们按如下方式细分度量空间 Z'：对于来自 $Z' \times Z'$ 的每个有序点对 $(z_1,\ z_2)$，其中 $z_1 \prec z_2$，我们添加一个新点 z_3，将其通过边分别与 z_1 和 z_2 相连，并按如下方式定义这些边的权重：$\omega(z_3 z_2) = \varepsilon/4$，$\omega(z_1 z_3) = d_{Z'}(z_1,\ z_2) - \varepsilon/4$。子图 $G_{z_1,\ z_2}$ 满足三角不等式。

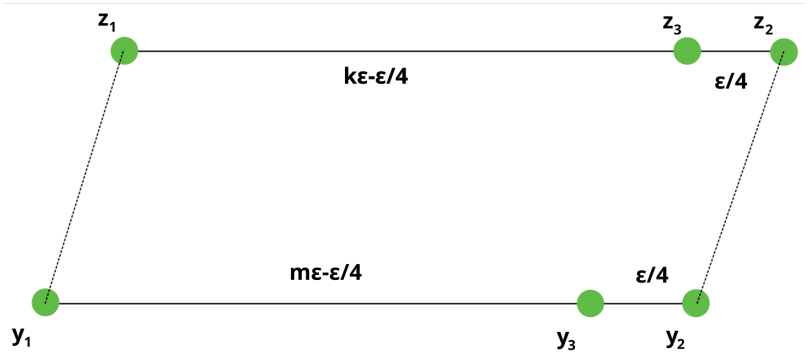

图2。为 $z_1 \prec z_2$ 对添加的部分图 G、z_3，以及为 $y_1 \prec y_2$ 添加的 y_3。

下面引入以下术语。

(1) 图 G 中属于 Z' 的点称为旧点。

(2) 图 G 中的其余点称为新点。

将 z_3 添加到对 $z_1 \prec z_2$中。

(3) 注意，点 z_1 和 z_2 是图 G 中仅有的与 z_3通过边相连的点，并且 $\omega(z_1 z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$，而 $\omega(z_3 z_2)$等于 $\varepsilon/4$。我们将点 z_2 称为右点（z_3），将 z_1 称为左点（z_3）。我们用最近点（z_3）表示一个可取右点（z_3）或左点（z_3）的变量。

(4) 非最近点（z_3）的旧点记为 far（z_3）。

在此处及下文中，z_3 和 y_3 表示新点，z_1 = 左点（z_3），y_1 = 左点（y_3），z_2 = 右点（z_3），y_2 =右点（y_3）。新的 $\sim$ 右点表示上述不同点类型构成的一个无序对，其中包含某个新 z_3 和一个右点（z_3）；新 $\sim$ 新表示由新点和新点构成的一个对；$z_3 \sim$ 远（z_3）表示由{新点和远（新）}构成的一个对，依此类推。

我们令 $Z = \pi(G)$，并继续将 Z' 的像称为 Z'。根据引理 8，投影 π 保持了距离。根据注 5，空间 Z 是度量空间。我们还将 Z 视为一个加权图，其中权

函数就是距离。由于满足多边形不等式，所有边权在空间 Z 中都得以保持（见引理 6）。下面来描述新空间中的其他距离。

π 投影保留旧点之间的边的权重，也保留新点与离它们最近的点之间的边的权重。因此，对某个自然数 k， $d(z_3, z_2) = \varepsilon/4$, $d(z_1, z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$, $d(z_1, z_3) = k\varepsilon$，且对任意 $u, v \in Z'$, $d(u, v) = m\varepsilon$，其中 $m \in \mathbb{N}$。如果点之间的距离等于 $k\varepsilon + \alpha$（对于 $k \in \mathbb{N} \cup 0$ 和 $0 \leq \alpha < \varepsilon$），则称点之间的距离具有 $k\varepsilon + \alpha$ 或 $k\varepsilon - (\varepsilon - \alpha)$ 的形式。下面说明 Z 中其余距离的结构。

引理 20。 从新点 z_3 到 $y =$远点（z_3）的距离等于游走长度

$$\big[\underline{\text{new}}\ z_3,\ \underline{\text{closest}}(z_3),\ \underline{\text{old}}\ y\big],$$

并且可以写成以下形式

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4$
或(2) $k\varepsilon + \varepsilon/4$

对于某个非负整数 k。

证明。 根据引理 8 的第 3 点，连接 z_3 和 y 的最短游走 L 形如

$$L = \big[\underline{\text{new}}\ z_3,\ \underline{\text{nearest}}(z_3),\ \underline{\text{old}}\ y\big],$$

and；由于图 G 的边权重结构，其长度等于 t o

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon$，对于某个 k, $m \in \mathbb{N}$，如果 L 经过 $z_1 =$ 左点（z_3）；
或者 (2) $\varepsilon/4 + m\varepsilon$，对于某个 $m \in \mathbb{N}$，如果 L 经过 $z_2 =$ 右点（z_3）。

□

引理 21。 从新 z_3 到新 y_3 的距离等于三边游走 L 的长度

$$\big[\underline{\text{new}}\ z_3,\ \underline{\text{nearest}}(z_3),\ \underline{\text{nearest}}(y_3),\ \underline{\text{new}}\ y_3\big],$$

并且可以写成以下形式

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/2$
或(2) $k\varepsilon + \varepsilon/2$
或(3) $k\varepsilon$

对于某个非负整数 k。
证明。 根据引理 8 的第 2 点，最短游走 L 是 [新点 z_3、 $u =$ 最近点(z_3)、 $v =$ 最近点(y_3)、新点 y_3]（游走中的第二个点和第三个点可能重合），其长度等于

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon + p\varepsilon - \varepsilon/4$ 如果 $u =$ 左点(z_3) 且 $v =$ 左点(y_3)；(2) $\varepsilon/4 + m\varepsilon + \varepsilon/4$ 如果 $u =$ 右点(z_3) 且 $v =$ 右点(y_3)；(3) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon + \varepsilon/4$ 或者 $\varepsilon/4 + m\varepsilon + p\varepsilon - \varepsilon/4$ 如果 u、v 中一个是右点，另一个是左点，

对于某些正整数 k, p 以及一个非负整数 m。 □

将所有点对分 成 7 类，分类依据是它们之间距离的类型。 :

(1) $\varepsilon/4$: (新点 ∼右点), (2) $k\varepsilon$,
$k \geq 1$: (旧 ∼ 旧), (3) $k\varepsilon - \varepsilon/4$,
$k \geq 1$: (新点 ∼左点(新)), (4)
$k\varepsilon + \varepsilon/4$, $k \geq 1$: (新点 ∼远点(新)
),

(5) $k\varepsilon - \varepsilon/4$, $k \geq 2$: (新点 ∼ 远点(新)), (6) $k\varepsilon$, $k \geq 1$: (新 ∼ 新), (7) $k\varepsilon - \varepsilon/2$, $k \geq 1$: (新 ∼ 新)。

如果旧点 y 到新点 z_3 的距离属于类 (5) (且属于类 (4))，那么这样的点 y称为远左点(z_3) (远右点(z_3))。

考虑任意一个双射 $\phi\colon Z \to Z$，满足 dis(ϕ) $< \varepsilon/4$，那么 dis(ϕ^{-1}) $< \varepsilon/4$。我们来证明 $\phi = \mathrm{id}$。注意，对于任意 k, m, p, $l \in \mathbb{N}$，数值 $k\varepsilon$、$m\varepsilon - \varepsilon/4$、$p\varepsilon + \varepsilon/4$、$l\varepsilon - \varepsilon/2$ 两两至少相差 $\varepsilon/4$，因此 ϕ 是一个同构映。

引理 22。 如果点之间的距离等于 $\varepsilon/4$，也就是说，距离属于第一类，那么映射 ϕ 所得像点之间的距离只能属于第一类。同样，由于各类距离之间存在差异，距离属于类 (3) 或 (5) 的一对无序点，只能映射到一对距离属于类 (3) 或类 (5) 的点。

引理 23. 新点 z_3 到左点(z_3) 的距离，严格小于 z_3 到 y = 远左点(z_3)的距离，对每个 y都成立。

证明。 事实上，从 z_3 到任意远左点(z_3)的距离，是沿着一条经过z_1的两边路径计算的，因此会大于从 z_3 到 z_1的距离。□

因此，在所有与 z_3的距离为 $k\varepsilon - \varepsilon/4$ 的点中，左点(z_3)是离 z_3 最近的。

引理 24. 如果点 x 在距离 $\varepsilon/4$ 处有 n 个点(其中n 是一个基数)，那么 $\phi(x)$ 在距离 $\varepsilon/4$处也恰好有 n个点。

证明。 事实上，点的数量不可能更少，因为那些与 x距离为 $\varepsilon/4$ 的点的像，与 $\phi(x)$的距离为 $\varepsilon/4$ 。考虑逆映射后，即可得到等式。□

引理 25. 定理 其新点 z_3 映到某个新点 y_3，而右点(z_3) = z_2 映到右点(y_3) = y_2 .

证明。 根据引理 22，点 {新点、右点} 组成的无序对映入无序对 {新点、右点}。设$\phi(z_3) = y_2$ = 右点(y_3)，且 z_2 = 右点(z_3) 和 $\phi(z_2) = y_3$。

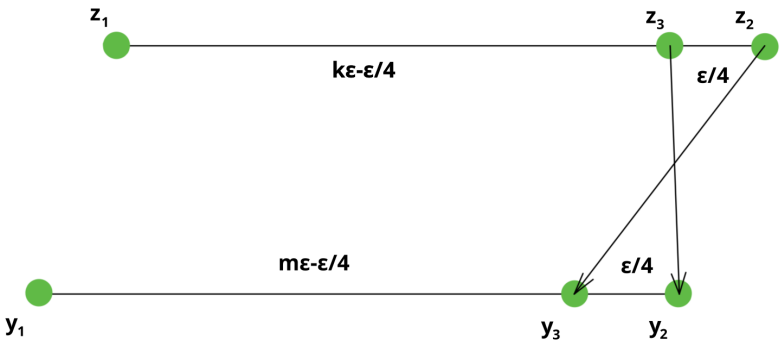

图 3. 新点 z_3 映入旧的 y_2 = 右点(y_3)，而 z_2 = 右点(z_3) 映入新点 y_3。

良序集 Z' 的最小元素 a_1 称为第一元素，而有序集 $Z'\backslash\{a_1\}$的最小元素称为第二个元素 a_2。

由于 a_1 是 Z 中唯一一个没有距离为 $\varepsilon/4$ 的点的点，根据引理 24，点 a_1 映射到自身。点 z_3 恰有一个距离为 $\varepsilon/4$ 的点，因此根据引理 24， $y_2 = \phi(z_3)$ 恰有一个距离为 $\varepsilon/4$ 的点，即恰有一个使 y_2 为右点的新点，因此恰有一个 $z \in Z'$ 满足 $z \prec y_2$，也就是说，y_2 是集合 Z' 的第二个元素，而 y_1 是第一个元素。考虑逆映射，可得 $y_1 = a_1 = z_1$，且 $z_2 = a_2 = y_2$。由于 $d(z_1,\ z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$，因为 $z_1 z_3$ 是一对左点—新点；并且根据上述，$d\big(\phi(z_1)\ \phi(z_3)\big) = d(y_1,\ y_2) = k\varepsilon$，这就产生了矛盾。

□

我们得到，任何新点都映射到新点，而与它们对应的右点映射到右点。现在证明左点映射到左点。

引理 26. 设 $\phi(z_3) = y_3$。那么 $\phi(z_1) = y_1$，其中 $y_1 =$ 左点(y_3) 和 $z_1 =$ 左点(z_3)。

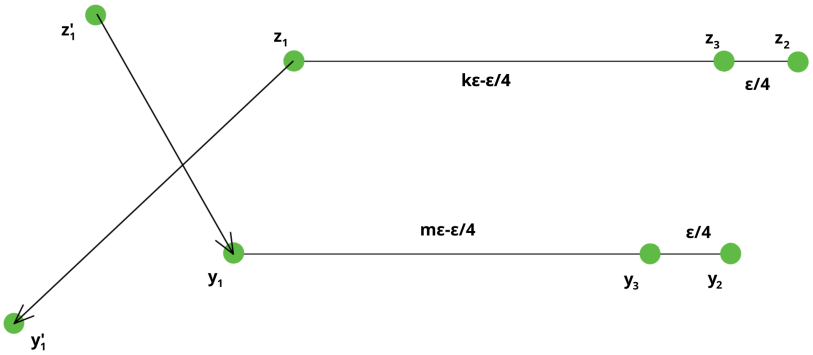

图 4. 左点 z_1 映到远左点 $(y_3) = y'_1$。

证明。事实上，设 $y_3 = \phi(z_3)$、 $y_1 =$ 左点(y_3) 和 $y_2 =$ 右点(y_3)。我们需要证明 $\phi(z_1) = y_1$。反设不成立。那么根据引理 22，$\phi(z_1) = y'_1 =$ 远左点(y_3)。设 $\phi^{-1}(y_1) = z'_1$。由于双射性，它不可能是左点，因此该点必为远左点(z_3)。令 $d(z_1, z_2) = k_z\varepsilon$，则 $d(z_1, z_3) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$。由于 ϕ 是距离保持的，$d(z_1, z_3) = d(\phi(z_1)\ \phi(z_3)) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$。令 $d(y_1, y_2) = k_y\varepsilon$。根据引理 23， $d(y_1, y_3) = k_y\varepsilon - \varepsilon/4 < d(y_3, y'_1) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$，所以 $k_y < k_z$。考虑逆映射，可得 $k_z < k_y$。矛盾。因此 $\phi(z_1) = y_1$。 □

若 $x \prec y(x,\ y \in Z')$，则找出 u，使其对于这对 x，y 是新点。于是 $\phi(u)$ 是某个新点，其中 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 分别是左点和右点，因此 $\phi(x) \prec \phi(y)$，也就是说，ϕ 保序。由引理 18，ϕ 在 Z' 上的限制是恒等映射。根据 Z的构造，映射 ϕ 在整个 Z上都是恒等映射。

因此 $\mathsf{e}(Z) \geq \varepsilon/4$，且 $\mathsf{s}(Z) \geq \varepsilon/4$。注意，$\mathsf{d_{GH}}(X,\ Z) \leq \mathsf{d_{GH}}(X,\ Z') + \mathsf{d_{GH}}(Z,\ Z') \leq \varepsilon/2 + \mathsf{d_H}(Z,\ Z') \leq 3\varepsilon/4$，因为 Z' 通过识别嵌入到 Z 中。

现在对任意 $c > 0$使用引理 17。于是 $\mathsf{e}(Z + 2c) \geq \varepsilon/4$，$\mathsf{s}(Z + 2c) \geq \varepsilon/4 + 2c$，$\mathsf{t}(Z + 2c) \geq 2c$。将 $\delta = 3\varepsilon/4$ 和 $U = Z + 2c$代入，得到 $\mathsf{d_{GH}}(X,\ U) \leq \delta + c$；由引理14， $e(U) \geq \delta/3$，$\mathsf{s}(U) \geq \delta/3 + 2c$，$\mathsf{t}(U) \geq 2c$。 □

因此，一般位置的空间在 $\mathcal{GH}$ 中处处稠密。

参考文献

[1] Burago D.Yu., Burago Yu.D., Ivanov S.V. 度量几何课程，莫斯科-伊热夫斯克，计算机研究所，2004年。

[2] Ivanov AO, Tuzhilin AA《Gromov–Hausdorff 空间的等距变换群》。2018年，arXiv 预印本，arXiv:1806.02100。

[3] S. Roman，《格与偏序集》，施普林格，纽约，纽约州，2008年。

[4] Gromov M.《多项式增长群与扩张映射》。《数学出版物》论文集，巴黎：高等科学研究所，第53卷，1981年。

[5] Ivanov AO、Tuzhilin AA，《有界度量空间到 Gromov–Hausdorff 类中的等距嵌入》。2022，arXiv 电子预印本，arXiv:2203.02904 [math.MG]。