arXiv:2302.12870v1 [math.QA] 24 Feb 2023

Epim轨道量子子群与余代数余支配域

Alexandru Chirvasitu

摘要

我们证明了关于余代数范畴中的单态射、满态射、支配域和余支配域的一系列结果。例子包括：(a) 给出所有这些范畴中单态射的表示论刻画；当相关的霍普夫代数是交换的时，这些刻画会退化为熟知的、关于线性代数群子群是满态射嵌入的必要且充分条件（归功于Bien-Borel）；(b) 在（余交换）余代数、（余交换）双代数以及许多霍普夫代数范畴中，一个态射在任何包含它的上述范畴里都有相同的余支配域；(c) 霍普夫代数或双代数的（余）支配域构造在域扩张下保持不变，这同样仿效了众所周知的相应代数群结果；(d) 若余域是余半单的，则余代数、双代数或霍普夫代数的满射都是正则满态射（即余等化子）；(e) 特别地，紧量子群的嵌入是其范畴中的等化子，这推广了关于（普通）紧群的类似结果；(f) 关于标量扩张函子的余代数极限保持结果（例如，沿域扩张 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 扩张标量是 $\Bbbk$-余代数范畴上的右伴随）。

关键词：霍普夫代数；余代数；余模；满态；单态射；支配域；余支配域；拉回；局部可呈现；伴随函子；代数群；余交换；CQG代数

2020年数学主题分类：18A20；16T05；16T15；20G42；18A30；20G05；20G15；18C15；18C20；16D40

目录

1 预备知识 **4**2 满态量子子群与（余）支配域 **6**3 CQG代数与紧群 **20**4 关于标量扩张与余代数的极限的补述

21

参考文献 **24**

引言

以下讨论的一个可能出发点，是一个熟悉的问题：对于一个 具体范畴 （即由集合和函数构成的范畴 [1, 定义 5。1]），满态射是否恰好就是满射。回顾一下 [1, 定义 7.3。9] ，在范畴中的一个满态射 是态射 $\mathcal{C}$： f， $c \to c'$ 使得每个前复合映射

$$\mathcal{C}(c', c'') \xrightarrow{-\circ f} \mathcal{C}(c, c'')$$

都是单射。这是对满射概念的一种自然的范畴论推广；对于两种概念都有意义的具体范畴，后者显然蕴含前者。

这个问题在大量文献中以无穷无尽的变体反复出现，本引言不可能面面俱到。一个例子是 [54], ，它讨论了若干范畴中的这一问题（例如紧群和李代数——与下文讨论最相关的范畴——以及其他范畴，如 C^*-或冯·诺依曼代数）。其他例子还包括较早的 [48] （同样讨论紧群）、 [30] （C^*-代数）、 [6]（李代数、 p-李代数）、 [10, 11]（线性代数群）、[13] （一般的代数群），以及系列文献 [34, 31, 35, 36, 33], ，该系列系统研究了在各种范畴（半群、结合代数）中更广义的支配域 [1, 14J] 这一概念：假设所研究的范畴具有足够良好的性质，则态射$f : c \to c'$ 的支配域是两个结构映射的等化子。

$$c' \rightrightarrows c' \coprod_c c'$$

到 f的自推出中。 $f: \ c \to c'$ 当且仅当其支配域为 id 时，它才是满态射： $c' \to c'$。支配域以另一名称出现在 [10] 中，形式较为隐晦：对于闭线性代数子群 ι: $H \leqslant G$， 可观包络 [10, §3] 的 H 在 G 中恰好是 ι 在线性代数群范畴中的支配域（参见 注记 2.8之后的讨论）。

主要结果之一是，线性代数群范畴中关于 [10, 定´理`的满态射的许多熟悉刻画 1] 同样适用于霍普夫代数，但必须考虑到需要取对偶（域上的线性代数群范畴 $\Bbbk$与 霍普夫 $\Bbbk$-代数的范畴 [62, §1.4，定理]）反变等价。这正是下述定理 2.5 的内容：

定理 对于域 $\Bbbk$ 上余代数的态射 $\pi: \ H \to H'$ ，以下条件等价：

(a) π 是单态射；

(b) 由 π 诱导的余限制函子在（有限维）余模范畴之间是满函子。

(c) 对任意（有限维） H-余模 V，其上的每个幂等态射都属于 $\mathcal{M}^H$。

(d) 对任意（有限维） H-余模 V，每个作为 H'-余模的直和分解 $V \cong V_1 \oplus V_2$，也是 H-余模的直和分解。此外，若 π 是霍普夫代数态射，则以下条件也等价：

(e) 对任意（有限维）右 H-余模 V，其余模结构映射

$$V \ni v \mapsto v_0 \otimes v_1 \in V \otimes H$$

该空间

$$V^{H'} := \{v \in V \mid v_0 \otimes \pi(v_1) = v \otimes 1\}$$

H'-余不变量与相应的 H-余不变量空间重合。

(f) 我们有 $H^{H'} = \Bbbk$ （即 H 中唯一的 H'-余不变量是标量）。 ■

上述表述对于态射应在哪个范畴（余代数或 Hopf 代数）中为单态射这一点有些含糊。试图将该表述与代数群联系起来时，也会出现同样的问题：后者构成一个与 交换 Hopf代数范畴对偶的范畴，因此有理由考虑这样一个问题：一个同时包含于两个相关范畴中的态射，是否可能在其中一个范畴中是单态射，而在另一个范畴中不是。命题 2.1 表明这并不是问题，而定理 2.14 将这一结论扩展到了（余）支配域（给定任一相关范畴中的态射，在哪个范畴中计算其余支配域并不重要）：

定理 (1) 对于以下任何包含某个代数态射的范畴，该态射的支配域都相同：

- 交换代数；
- （交换）双代数；
- （交换或余交换）Hopf代数；
- 具有对合反 antipode 或双射反演的霍普夫代数。

特别地，某个态射在所有包含它的这些范畴中，要么同时是满态射，要么同时不是满态射。

(2) 代数态射的余支配域在以下任何包含它的范畴中都相同：

- 余交换余代数；
- （交换）双代数；
- （交换或余交换）Hopf代数；
- 反 antipode 为对合或双射的 Hopf代数。

特别地，一个态射在所有包含它的这些范畴中要么同时是单态射，要么同时不是单态射。■

文献中反复出现的另一个主题，是上述各种概念（支配域、满态射）与基域无关：[6, 命题 5。3] 便是一个例子（有限维李代数态射的支配域在域扩张下保持不变），[13, 定理 5（ii）] 也是如此（此处讨论的则是代数群范畴）。本着同样的精神，域扩张不仅保持余主域（命题 2.17），还保持配备“余代数结构”的对象范畴中的任意极限（定理 4.1 (2)）：

定理 设 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 是一个域扩张。

(1) 在以下任意一对范畴之间，函子 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ （其对象分别是关于 $\Bbbk$ 和 $\Bbbk'$的线性对象）都是右伴随，因而特别是连续的：

- （余交换）余代数；
- （交换或余交换）双代数；
- （交换或余交换Hopf代数）；
- 具有对合反 antipode 或双射反演的Hopf代数。

(2) 同一个标量扩张函子 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 在上述所有范畴中，以及在交换代数或普通代数的范畴中，都保持（余）支配域。■

有时，一个对象具有这样的性质：任何以它为定义域的单态射都会自动成为支配域（例如，绝对闭代数，见 [34, 推论 1 前的讨论。7]）。一些例子表明存在一种普遍现象，即“半单性蕴含绝对闭性”： [6, 补遗]提到了 Hochschild 的一则评论，其大意是：半单李代数的嵌入在有限维李代数范畴中是支配域；而线性约化代数群的类似结论则可由标准的 GIT理论推出（例如 [44, §1.2]）。

再次对偶化这一图景，映到 余半单 余代数上的态射是余主域。其若干版本见推论 2.22 和 2.24 以及 定理 2.26。为简单起见，我们只关注霍普夫代数（而非双代数等），以下列举其中一些结果：

Th理（1）态射 $\pi: H \to H'$ 霍普夫代数是余主域，当且仅当 r

- H 作为 H'上的左侧或右侧模是忠实余平坦的；
- 或者 π 在右或左 H'-余模范畴中有右逆。

（2）特别地，映到余半单霍普夫代数的满射在霍普夫代数范畴中是余主域。■

这些考量还给出了如下结果的非交换版本：紧群的嵌入是等化子 [19, 定理 2.1]。回顾（[23, 定义 2.2], 下文定义 3.1），CQG代数是紧群上代表函数 [14, §III.1，定义 1。1] 所成的（霍普夫）代数的非交换类比。有鉴于此，用对偶语言改述，定理 3.4 指出，“紧量子群”的嵌入是等化子：

定理：CQG代数范畴中的满射都是余等化子。 ■

致谢

本研究部分由NSF资助项目DMS-2001128提供支持。

感谢A. Agore、M. Brion、T. Brzezinski、G. Militaru和R. Wisbauer提供的各种意见和文献线索。

1 预备知识

代数（总是假设为结合且含幺）、余代数（余结合且含余单位）等通常都假设是域上的线性对象。关于余代数、双代数和Hopf代数的相关背景知识，可参阅若干优秀文献，例如[58, 42, 24, 53], ，本文会在需要时对这些文献作更具体的引用。

一些常用的记号：

- 按照惯例（例如， [42, 定义 1.5.1]）， Δ、 ε 和 S 通常分别表示霍普夫代数的余乘法、余单位和反 antipode（具体指哪个霍普夫代数通常可从上下文中看出）。
- 我们使用斯威德勒记号 [42, 记号 1.4.2] 表示余乘法和（左或右）余模结构：

$$\begin{aligned} C \ni c &\longmapsto c_1 \otimes c_2 \in C \otimes C \\ V \ni v &\longmapsto v_0 \otimes v_1 \in V \otimes C \\ V \ni v &\longmapsto v_{-1} \otimes v_0 \in C \otimes V. \end{aligned}$$

- Alg、 Coalg、 Bialg 和 HAlg 分别表示代数、余代数、双代数和霍普夫代数的范畴，它们都定义在 $\Bbbk$ 预先固定且通常省略不提的域上。

  有时，为了强调所涉及的域，我们会将域作为下标附加在符号上（例如 $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$）。

- Va其他各种下标则用于修饰这些范畴，以表示额外的性质 :

  – “c”表示“交换”（例如 Alg_c）；– “cc”表示“余交换” [42, 定义 1.1。3] （例如 $\mathrm{Bialg}_{\Bbbk, cc}$）；– 对于霍普夫代数，左侧下标可能表示反 antipode 的双射性或对合性： ${}_{bi}\mathrm{HAlg}$ 表示具有双射反演的霍普夫代数范畴，而 ${}_2\mathrm{HAlg}$ 表示其反 antipode 的平方为恒等映射的霍普夫代数范畴。– 有时我们需要批量引用这些下标；在这种情况下，我们会使用非字母数字符号，例如“□”或“•”。 $\mathrm{Alg}_\bullet$例如表示同时具有 Alg 和Alg_c，而 ${}_\square\mathrm{HAlg}_\bullet$ 则统称 ${}_{bi}\mathrm{HAlg}$、 HAlg_c、 $\mathrm{HAlg}_{c, cc}$等。– 作为一种变体，有时我们可能需要限制某个下标所允许的取值范围，此时会用“/”符号分隔各个选项：$\mathrm{HAlg}_{c/}$ 表示交换或任意霍普夫代数的范畴（但不包括余交换霍普夫代数的范畴）。

- 模范畴表示为带有下标“$\mathcal{M}$”的形式，下标标明基代数；下标的位置方向表示它们是右模还是左模：例如， $\mathcal{M}_A$表示右 A-模。这同样适用于双侧结构：例如， ${}^C\mathcal{M}^D$是余代数 C 和 D上的 (C、 D)-双余模范畴。

  一个例外 将是 $\mathrm{Vec} = \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ （而不是 $\mathcal{M}_{\Bbbk}$），即 $\Bbbk$上的向量空间范畴 .

- 类似地，余模 [42, 定义 1.6。2] 范畴（在余代数、双代数等上）将基余代数表示为上标，同样区分左侧或右侧： $\mathcal{M}^C$ 是 C-余模范畴。

- 额外的“f”下标表示有限维性： $\mathcal{M}_f^H$将是有限维 H-余模范畴。

我们将广泛使用一些范畴论术语；请读者参阅，例如，[5, 1, 40], ，并将在需要时再次给出更具体的引文。一般而言，对于范畴$\mathcal{C}$中的对象 c、 $c' \in \mathcal{C}$ ，我们将它们的态射空间记为 $\mathcal{C}(c$、 $c')$ 。

现在有一点值得指出，因为它或多或少贯穿了整个讨论：除了施加了大小条件的范畴（即有限维（余）模范畴）之外，上文提到的每一个范畴（Alg、 Coalg、 HAlg及其（余）交换版本，等等）都具有非常良好的性质。具体而言，它们全都是 [2,定义 1.17]意义下的局部可呈现范畴：

- 模范畴和余模范畴是格罗滕迪克范畴 [49, §2.8，推论 8 后的注 313]（余模范畴见 [24, 推论 2.2.8] ），因此是局部可呈现的 [38, 推论 5.2]。

- 对于其他“代数结构”范畴（即配备各种元数运算并满足各种方程的集合；例如代数和交换代数），这一点众所周知，并且可统一地由例如 [2, 定理 3.28] 推出。

- 对于“余代数”或“混合”结构的范畴（余代数、双代数、Hopf 代数），Porst 的多篇论文已对此进行了详尽研究；例如参见 [52, 引理 1 和 2、定理 6 以及命题 22]。

特别地，根据 [2, 备注 1.56]，所有这些范畴

- 都是（余）完备的（它们具有任意的（余）极限 [1,定义 12.2]）；
- 是小子对象的（给定对象的子对象的同构类 [1, 定义 7.77] 构成一个集合 [1,定义 7.82]）；
- 并且也是余良幂的（给定对象的商对象的同构类 [1, 定义 7.84] 构成一个集合 [1, 定义 7.87]）；
- 因此满足许多便利的伴随函子定理 [1, §18]:
  - 定义在这些范畴中任意一个上的余连续（即保持余极限）函子都是左伴随 [40, §5.8，第 130] 页的推论。– 而以这些范畴为定义域的连续（即保持极限）函子，只要它们还保持 κ-定向余极限 [2, 定义 1.13 (1)]（对于某个正则基数 κ [2, 定理 1.66]），就是右伴随。

2 满态量子子群与（余）支配域

由于我们将讨论双代数、Hopf代数等中的单态射和满态射，值得指出，这些概念在若干便于处理的修改下保持不变。这些都是非常简单的说明，但明确写出会有所帮助。

命题 2.1 (1) 态射 $f : H \to H'$ 在 $\mathrm{ALG}_{\Bbbk}$ 中属于满态射，当且仅当它在包含它的下列任一范畴中属于满态射：

$$\mathrm{ALG}_{\bullet}, \quad \mathrm{BIALG}_{\bullet}, \quad {}_{\square}\mathrm{HALG}_{\bullet}.$$

(2) 态射 $f : H \to H'$ 在 $\mathrm{COALG}_{\Bbbk}$ 中属于单态射，当且仅当它在包含它的下列任一范畴中属于单态射：

$$\mathrm{COALG}_{\bullet}, \quad \mathrm{BIALG}_{\bullet}, \quad {}_{\square}\mathrm{HALG}_{\bullet}.$$

证明 我们以（2）为例；另一半完全类似（且在范畴论意义上对偶）。这些函子

$$\mathrm{HALG}_{c} \xrightarrow{\text{inclusion}} {}_{2}\mathrm{HALG} \xrightarrow{\text{inclusion}} {}_{bi}\mathrm{HALG} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{HALG} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{BIALG} \xrightarrow{\text{forget}} \mathrm{COALG}$$

是右伴随：包含函子见 [52, 图（9）]，最后一个箭头见 [51, §2。2] 因此它们保持单态射 [1, 命题 18。6]，由于它们是忠实函子，也会反映单态射。完全相同的推理也适用于

- 从交换双代数（霍普夫代数）到普通双代数（分别地，Hopf代数）的包含函子；根据 [52,图（9）]，它们也是忠实右伴随；
- 以及函子链

$$\mathrm{HALG}_{c,cc} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{HALG}_{cc} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{BIALG}_{cc} \xrightarrow{\text{forget}} \mathrm{COALG}_{cc}.$$

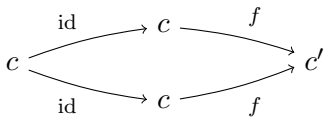
那么，唯一尚待验证的断言是：余交换余代数的一个态射 $f\colon H \to H'$ 在 Coalg_{cc} 中为单态射，当且仅当它在 Coalg中也是单态射。

f 是单态射，当且仅当余乘法 Δ_H 诱导出一个同构

$$H \xrightarrow[\cong]{\Delta_H} H \,\square_{H'}\, H$$

[45, 定理 3.5]不过请注意，余张量积不过是 f 在 Coalg_{cc} 中的自拉回（这与如下评论非常相似：Coalg_{cc} 中的乘积就是张量积，见定理 6.4.5]），因此上述条件也等价于 f 在 Coalg_{cc}中是单态射：根据定义，对于任意范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon c \to c'$，以下条件等价：

- f 是单态射；
- 该图表



  是一个拉回；
- 自拉回 $c \times_{c'} c$ 存在，并且两个态射 $c \times_{c'} c \to c$ 中的任意一个是同构；
- 自拉回 $c \times_{c'} c$ 存在，且两个态射 $c \times_{c'} c \to c$ 相等；
- 自拉回 $c \times_{c'} c$ 存在，且对角映射 $c \to c \times_{c'} c$ 是一个同构。 ■

回顾命题 2.1证明的最后一部分， [45, 定理 3。6] 指出，Coalg_{cc} 单态射恰好就是单射。更进一步：

引理 2.2 余交换余域上的 A Coalg-单态射是一个嵌入 .

证明 与 [45, 定理 3.6], 的证明相同，该结论可归结为考虑所有涉及的余代数均为有限维的情形。但此时可以对命题取对偶，以处理有限维代数之间的（满）态射，结论便由 [36, §2.11] 得出：若一个代数存在有限维的满态射扩张，则其中包含上三角矩阵 2×2 的副本，因此不可能是交换代数。
■

引理 2.2 确实蕴含 [45, 定理 3。6], 因为根据 命题 2.1 (2)，在Coalg_{cc} 中的态射是单态射，当且仅当它在该范畴中是单态射 Coalg。

注2.3 与这里关注的、有趣的代数满态射和余代数单态射相比，代数单态射和余代数满态射恰好分别是相关范畴中的内射（相应地，满射）态射。这是因为遗忘函子

$$\mathrm{Alg} \to \mathrm{Vec} \quad \text{and} \quad \mathrm{Coalg} \to \mathrm{Vec}$$

是忠实的右伴随（分别为左伴随） [50, §§2.6, 2.7], 因此它们保持并反映单态射（分别为满态射） [1, 命题 18。6]。 ♦

此外，偶尔扩张标量也很方便，因此值得注意的是，所关注的性质在此类扩张（或收缩）下保持不变。

引理 2.4 设 $\Bbbk \subset \Bbbk'$ 为一个域扩张。代数、余代数、双代数或霍普夫代数在 $\Bbbk$ 上的态射 f 为单态射或满态射，当且仅当其标量扩张 $f \otimes_{\Bbbk} \Bbbk'$具有相应的性质。

证明 根据 命题 2.1，关于双代数或霍普夫代数的结论可归结为（余）代数，因此我们将重点讨论它们。

对于代数，单态射等价于内射：一个满射态射 $A \to B$ 是以下两个映射的余等化子 $A \times_B A \to A$；对偶地，对于余代数，满态射等价于满射性 [45, 定理 3。1]。因此，我们只需考虑

- 代数的满态射 $A \to B$ 等价于乘法映射 $B \to B \otimes_A B$ 为同构 [57,§X.1，命题 1.2];
- 以及余代数的单态射 $C \to D$，等价于余积映射 $C \to C \,\square_D\, C$为同构 [45, 定理 3.5], 回顾余张量积 [42, 定义 8.4.2]

$$V \,\square_D\, W := \{x \in V \otimes W \mid (\rho_V \otimes \mathrm{id}_W)x = (\mathrm{id}_V \otimes \rho_W)x \in V \otimes D \otimes W\}$$

右余模和左余模的

$$\rho_V : V \to V \otimes C \quad \text{and} \quad \rho_W : W \to C \otimes W.$$

作为忠实平坦的 [39, §4I] 扩张， $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 保留并反映所涉及的一切性质：(c)张量积、正合性、满射性、内射性等。■

在下文中，对于双代数 H上的右余模 V，我们记

$$V^H := \{v \in V \mid v_0 \otimes v_1 = v \otimes 1 \in V \otimes H\}$$

其 H-余不变量空间。

定理 2.5 对于态射 $\pi : H \to H'$ 在 Coalg 中，以下条件等价：

(a) π 是单态射；(b) 由 π 诱导的、介于（有限维）余模范畴之间的余限制函子是满函子。(c) 对任意（有限维） H-余模 V，其上的每个幂等态射都属于 $\mathcal{M}^H$。(d) 对任意（有限维） H-余模 V，作为H'-余模的每个直和分解 $V \cong V_1 \oplus V_2$ 也是作为 H-余模的直和分解。此外，若 π 是 $\square\mathrm{HAlg}$中的态射，则以下条件也等价：(e) 对任意（有限维）右 H-余模 $V \in \mathcal{M}^H$， H'-余不变量也是 H-余不变量。(f) H 中唯一的 H'-余不变量是标量。

证明（转至霍普夫代数）我们由命题 2.1（2）可知，霍普夫代数之间的态射是单态射，当且仅当它在余代数范畴中是单态射。

(a) $\iff$ **(b)** 对于任意余模，这是 [45, 定理 3。5] （或其在 [3,定理 2。1]中的展开）。由于（域上的余代数的）余模是有限维子余模的并 [43, 定理 5.1。1], 因此， $\mathcal{M}^H \to \mathcal{M}^{H'}$ 的满性等价于相应函子 $\mathcal{M}_f^H \to \mathcal{M}_f^{H'}$ 在有限维余模范畴之间的满性。

同样的论证通常也使我们能够得出关于任意余模的各种陈述与其有限维版本之间的相互等价；因此我们不再对此赘述。

(b) $\implies$ **(c)** 显然，只需将（b）应用于所讨论的幂等态射即可。

(c) $\iff$ **(d)** 直和分解 $V \cong V_1 \oplus V_2$ 无非是在相关范畴中对 V 选取一个幂等自同态（其像为 V_1，核为 V_2），因此二者显然只是对同一条件的不同表述。

(d) $\implies$ **(b)** 考虑 V， $W \in \mathcal{M}^H$，以及一个线性映射 $f\colon V \to W$， H'-余线性。图 h

$$\Gamma_f := \{(v, fv) \mid v \in V\} \leqslant V \oplus W$$

于是是一个 H'-子余模，其补直和项为 W。假设（d）进而保证Γ_f 也是一个 H-子余模，且属于 $V \oplus W$，由此可得 f 也是 H- 余线性的。
以下假设 π 是一个霍普夫代数态射。

(b) $\iff$ **(e)** 由于对于 H-余模 V，我们有一个函子性识别

$$V^H \cong \mathcal{M}^H(\Bbbk, V),$$

满性蕴含（e）。
为验证逆命题，注意到对于有限维余模 V 和 $W \in \mathcal{M}_f^H$，我们有

$$\mathcal{M}^H(V, W) \cong (W \otimes V^*)^H, \qquad \blacksquare$$

即 H-余不变量，即 W 与 V的对偶的张量积的余不变量。 H-余模态射因此可以改写为余不变量，所以（e）确实蕴含（b）。

（**e**） $\iff$ （**f**） 后者不过是将（e）应用于 H-余模 H，因而在形式上弱于该条件。反之，只需回顾 [24, 命题 2.4。3] 其中指出，每个 H-余模都可以嵌入 H的若干副本的直和中。 ■

推论 2.6 证实了对于代数群而言，在研究 李代数 的满态射时所作的一些推测性评论，见 [6, 第 13—14]页；另见 [10, 定`理`, 其适用于连通代数群，以及 1] 定理 [13, ，后者给出了通常的表述（当所涉及的 霍普夫代数 是交换代数时，定理 2.5 即为该表述的特例）。

推论 2.6 闭嵌入 $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ 是域上线性代数群范畴中的满态射，当且仅当 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 中的唯一 $\mathbb{H}$-不变量是标量。

证明 这是 定理 2.5的直接应用。注意，线性代数群的闭嵌入 $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ 当且仅当正则函数 Hopf 代数的对偶满射 $\mathcal{O}(\mathbb{G}) \to \mathcal{O}(\mathbb{H})$是单态射时，才是满态射。 ■

[20, 推论 2.2] 给出了如下形式的 Hopf 代数正则函数上的满射但非内射单态射的例子：

$$H \xrightarrow{\text{antipode}} H^{op,cop}$$

每当反 antipode 是满射但非内射时（例如如 [56, 定理 3.2] 中的情形），不过，要展示这类病态单态射，并不需要如此奇特的例子：

推论 2.7 设 $\mathbb{G}$ 为域上的连通线性代数群，$\mathbb{P} \leqslant \mathbb{G}$ 为一个抛物子群。

相应的正则函数代数满射 $\mathcal{O}(\mathbb{G}) \to \mathcal{O}(\mathbb{P})$ 在霍普夫代数范畴中是一个单态射。

证明 根据抛物子群的定义 [12, §11.2], 齐性空间 $\mathbb{G}/\mathbb{P}$ 是射影的。因此，根据 [29, 定理 I.3.4]，它不具有非常值的正则函数，也就是说，条件（f）得以满足，见 定理 2.5 。■

注记 2.8 注意，推论 2.7 在正特征下仍然成立；这与李代数的情形形成对比：根据 [6, 定理 2.2 和 2.3], 在正特征（p例如，）下，有限维李代数和有限维 p-李代数（即特征为 p 的 [37,§V.7，定义 4]）的满态射都是满射。♦

另一极端，或者说与满态射嵌入的（线性代数）闭子群 $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ 相对的是 [8, §4]中的可观子群：对于这些子群，$\mathbb{H}$在$\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 中的不变量能够区分齐性空间 $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ 的各点（而在满态射情形中，不变量则为常数）。

关于它与满态射的联系，[10, 命题 1], 对此进行了探讨，并在 [13,定理 5]中加以拓展：每个闭线性代数子群 $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ 都有一个最小的中间可观子群 $\mathbb{H} \leqslant \overline{\mathbb{H}} \leqslant \mathbb{G}$，即其可观包（或包络）；与此同时，它也是使 $\mathbb{H}$ 满态射嵌入其中的最大子群。

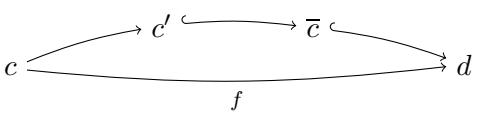
这一概念后来在多个方向上得到了进一步发展：[13, 定理 5] 实际上适用于可能非仿射的群概形，[47, 定理 1] 给出了可观性的几何刻画，[28, 定理 2.1] 和 [60, 定理 9] 则给出了许多其他与可观性等价的条件，等等。

不同的领域和语境对（可观性）采用了不同的术语，我们在此也将采用其中一种：例如，参见 [57, §XI. 1], , 或参见 [6], , 其中广泛使用了“支配域”一词；又或参见 [1, 14J]，这是我们在此回顾并加以调整的范畴论版本。

定义 2.9 设 $f : c \to d$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。

(1) 假设 $\mathcal{C}$ 是完备的且为小子对象。

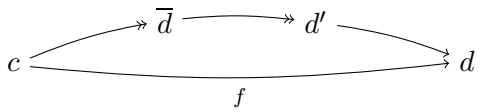
- f 的支配域是最小的正则子对象 $\overline{c} \hookrightarrow d$（即一对态射 $d \to \bullet$ [1, 的等化子，定义 7.56]），f 经由该子对象分解。
- f 若映射 $c \to \overline{c}$ 到该支配域是一个同构，则称其为支配域。
- f 支配子对象 $c' \hookrightarrow d$，如果我们有一个分解



对偶地：

(2) 假设 $\mathcal{C}$ 是余完备且余良幂的。

- 的余支配域 f 是最小的正则商对象 $c \twoheadrightarrow \overline{d}$ (即一对箭头的余等化子 $\bullet \rightarrow c$ [1, 定义 7。71])，使得 f 可经由它分解。
- f (或 d) 是一个余支配域，当且仅当映射 $\overline{d} \rightarrow d$ 是同构。
- f 支配（似乎比"余支配"更合适）商对象 $c \twoheadrightarrow d'$，如果我们有一个分解



在 $\mathcal{C}$ 的假设下，可以证明（[1, §14.J] 及其范畴对偶）这样的箭头确实存在，并且在显然的同构概念下唯一。♦

有了这一点，请注意，闭线性代数子群$\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ 的可观包络 [10, §3] 不过是 $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}$ 在相应范畴中的支配域（ [10], 中的线性代数群、 [13, 中的任意代数群、定理 5], 等）。

对于霍普夫代数 H，右余理想子代数 $A \leqslant H$ 的支配域（在范畴Alg中）与左模商余代数 $H \twoheadrightarrow C$ 的余支配域（在范畴 Coalg 中）之间存在令人满意的对应关系。我们回顾其中的一部分内容，这些内容已在 [16, §1.1] 中得到部分阐述（该讨论未出现在该预印本后续版本或已发表版本 [17] 中）。

在全文中，设 H 是某个域 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数。以下构造是 [59] 的核心内容，并在其中得到了广泛讨论：

记号 2.10 (1) 对于右 H-余理想子代数 $\iota:\ A \leqslant H$ （即既是子代数又是右余理想 [42, , 见例 1.6.6] 前的讨论），记作 $r(\iota)$，或略显滥用地记作 $r(A)$ （'r'表示'右'），其商为

$$r(\iota) := H/HA^+,\ A^+ = \ker \varepsilon|_A,\ \varepsilon \text{ being the counit of } H.$$

不难看出， $r(\iota)$ 是 H [59, Proposition1] 的左 H-模商余代数。

（2）存在一种互逆构造：给定左 H-模商余代数 $\pi: H \rightarrow C$，记作 $l(\pi)$ 或 $l(C)$ （'l'表示'左'），则

$$l(\pi) := {}^C H := \{h \in H \mid \pi(h_1) \otimes h_2 = \pi(1) \otimes h\}.$$

同一命题 [59, 1] 表明， $l(\pi)$ 是一个右余理想子代数。
有时在应用算子 l 和 r 时，我们也会省略括号（例如用 rA 代替 $r(A)$）。♦

算子 l 和 r 给出了以下对象之间的双向映射

$$\begin{aligned} H_{\leqslant} &:= \{\text{right } H\text{-coideal subalgebras} \leqslant H\} \quad \text{and} \\ H_{\twoheadrightarrow} &:= \{\text{left } H\text{-module quotient coalgebras of } H\}. \end{aligned} \tag{2-1}$$

我们以显然的方式将它们视为偏序集，并按以下方式排序：

- 对子代数按包含关系排序；
- 以及商的反向核包含。

如 [16, §1.1], 所观察到的，

引理 2.11 设 H 是一个霍普夫代数，其关联偏序集为（*2-1*）。

(1) 映射 $l : H_{\twoheadrightarrow} \to H_{\leqslant}$ 和 $r : H_{\leqslant} \to H_{\twoheadrightarrow}$ 是反序的，并按照 *[40, §*IV.5，定理 *1]:*

$$rA \geqslant C \iff lC \geqslant A.$$

(2) 复合

$$lr : H_{\leqslant} \to H_{\leqslant} \quad and \quad rl : H_{\twoheadrightarrow} \to H_{\twoheadrightarrow}$$

是在各自偏序集上的闭包算子，定义参见 *[40, §*VI.*1]* 或 *[27,* 定义 0-3.*8]*：保序、幂等，且元素的像大于或等于该元素。

证明（ 1）由定义立即可得，而（2）则是（1的形式推论). ■

引理 2.11 与当前讨论的相关性在于它与（余）支配域的关系：它们同样为这两个偏序集提供闭包算子，而且两类闭包相同（见 [16,命题 1.1。6]）。

命题 2.12 设 H 是一个霍普夫代数，且 $H_{\leqslant}$、 $H_{\twoheadrightarrow}$ 是其偏序集（*2-1*）。

（1）对于每个右 H-余理想子代数 $A \in H_{\leqslant}$， lrA 恰为 $A \leqslant H$ 在代数范畴中的支配域。

（2）对于每个左 H-模商余代数 $C \in H_{\twoheadrightarrow}$， rlC 是 $H \twoheadrightarrow C$ 在余代数范畴中的余支配域。■

命题 [16, 1.1 的证明6] 依赖于这样一个事实：对于余模态射的支配域（以及支配），有若干种等价刻画可供使用，它们类似于 [57, §XI.1，第 1 个命题1]中的代数态射对应概念。这些刻画在 [16], 中未予陈述，因此为求完备，我们在此重新讨论这一问题。

定理 2.13 设 $f : C \to D$ 和 $\pi : C \twoheadrightarrow D'$ 是 $\mathrm{COALG}_{\Bbbk}$中的两个态射，其中 π 是满射。以下 *e foll*述条 *d*件等价 *lent:*

(a) f 支配 π，其含义如定义 2.9 *(2).*

(b) 对于任意一对 $f_i : C' \to C, i = 1, 2$ 个余代数态射，若 $ff_1 = ff_2$，则有 $\pi f_1 = \pi f_2$。

(c) 两个复合

$$C \times_D C \underset{\varepsilon \times \mathrm{id}_C}{\overset{\mathrm{id}_C \times \varepsilon}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{\ \pi\ } D' \tag{2-2}$$

相等，其中最左边的项是 $\Bbbk$-余代数范畴中的拉回，两个平行的左侧态射是典范态射。

(d) 两个复合

$$C \square_D C \underset{\varepsilon\otimes \mathrm{id}_C}{\overset{\mathrm{id}_C\otimes\varepsilon}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{\ \pi\ } D' \tag{2-3}$$

a相等，其中最左边的项是余张量积 *[42, 定义 8.4。2]*。

(e) 对任意 C-双余模 X 和元素 $x \in X$，有

$$x_0 \otimes f(x_1) = x_0 \otimes f(x_{-1}) \in X \otimes D \Longrightarrow x_0 \otimes \pi(x_1) = x_0 \otimes \pi(x_{-1}) \in X \otimes D'. \tag{2-4}$$

(f) 相同条件，但仅适用于有限维双余模 X。

(g) 给定线性映射 $\varphi : V \to W$，其定义在两个（例如右） C-余模之间。若 φ 通过沿 f 余限制是D-余模的态射，则它通过沿 π余限制是 D'-余模的态射：

$$(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \rho_W \circ \varphi = (\varphi \otimes f) \circ \rho_V \ \textit{implies}$$
$$(\mathrm{id}_W \otimes \pi) \circ \rho_W \circ \varphi = (\varphi \otimes \pi) \circ \rho_V,$$

w这里 ρ_V: $V \to V \otimes C$和 ρ_W: $W \to W \otimes C$是余模结构映射。

(h) 同上，但仅适用于有限维 C-余模 V和 W。

证明 **(e)** $\Longleftrightarrow$ **(f)** 和 **(g)** $\Longleftrightarrow$ **(h)**这直接由余模是有限维子余模之并这一事实得出 [43, 定理 5.1。1]。当然，这对双余模也成立：一个 C-双余模无非是一个关于 $C \otimes C^{cop}$的余模，其中 C^{cop}是具有“余反向”余乘法的余代数

$$C \ni c \longmapsto c_2 \otimes c_1 \in C \otimes C.$$

因此，我们只需考虑有限维（双）余模。

(a) $\Longleftrightarrow$ **(c)** 的余支配域 f 是 (2-2) 中两个平行左侧映射的余等化子[1, 14J (g)], 因此得到等价性。

(b) $\Longleftrightarrow$ **(c)**。一方面，前者在形式上更强，因为 (2-2) 中的两个平行箭头可以充当 f_i 在 (b) 中的作用。另一方面， f_i 如 (b) 中的对象，依据拉回的泛性质，必定能唯一地经由 (c) 分解。这便给出了反向蕴含 $(c) \Rightarrow (b)$，从而得到等价性。

(c) $\Longleftrightarrow$ **(d)** 对于任意一对态射 f_i: $C' \to C$, $i = 1, 2$，满足 $f f_1 = f f_2$时，我们有一个映射

$$C' \ni c \longmapsto f_1(c_1) \otimes f_2(c_2) \in C \square_D C \leqslant C \otimes C.$$

特别地，存在一个典范映射 $C \times_D C \to C \square_D C$，它与（2-3）一起分解（2-2）。接下来，作为一个简单的练习，请注意，（ VEC! ）中（2-3）的两个左侧平行箭头的余等化子本身就是一个余代数，它属于 C。

由此可知， f 的余支配域也可以作为 VEC 中（2-3）式左侧两个映射的余等化子来恢复，因此结论得证。

(f) $\Longrightarrow$ **(h)** 给定 V，$W \in \mathcal{M}_f^C$（因此是有限维的），将（f）应用于有限维C-双余模

$$X := \mathrm{Hom}(V, W) \cong W \otimes V^*$$

其右余模结构继承自 W，左结构继承自V^* 上的左结构（而后者又是对 V上的原始右余模结构进行对偶化得到的）。

（**g**） $\Longrightarrow$ （**b**）这与证明 [57, §XI.1，命题 1.1，蕴含关系 (d) $\Rightarrow$(a)]完全类似。

态射 $f_i:\ C' \to C$ 如（b）中所述，将诱导出右 C-余模结构，使得 C' 成为 f_1 -余模态射 D

- 来自 C'_{ff_2}，即 C' 配备了由 ff_2 诱导的 D-余模结构（根据假设，该结构等于 ff_1 ）；
- 到 C_f，即 C配备了由 f诱导的 D-余模结构。

根据假设，将 f替换为 π 时，结论同样成立：

$$\mathcal{M}^{D'} \ni C'_{\pi f_2} \xrightarrow{f_1} C_\pi \in \mathcal{M}^{D'}.$$

不过，这恰恰意味着 $\pi f_1 = \pi f_2$。

(b) $\Longrightarrow$ **(f)** 论证与 [57, §XI.1，命题 1.1，蕴含关系 (a) $\Rightarrow$(b)] 非常相似。

考虑一个有限维 C-双余模 X，其右余模结构和左余模结构照常记为

$$\begin{aligned} X \ni x &\longmapsto x_0 \otimes x_1 \in X \otimes C \quad \text{and} \\ X \ni x &\longmapsto x_{-1} \otimes x_0 \in C \otimes X \ \text{respectively.} \end{aligned}$$

这以唯一合理的方式赋予对偶向量空间 X^* 一个 C-双余模结构：将 X^* 的一般元素记为 x^*，我们有

$$x_0^*(x)x_1^* = x^*(x_0)x_{-1} \in C \quad \text{and} \quad x_0^*(x)x_{-1}^* = x^*(x_0)x_1 \in C$$

对所有 $x^* \in X$ 和 $x \in X$ 都成立。于是可以在空间 $C' := C \oplus X^*$ 上赋予余代数结构：保留我们已有的 C 上的余乘法和余单位，并令

$$X^* \ni x^* \xrightarrow{\Delta} x_0^* \otimes x_1^* + x_{-1}^* \otimes x_0^* \quad \in \quad X^* \otimes C \oplus C \otimes X^* \leqslant C' \otimes C'$$

以及 $\varepsilon|_{X^*} \equiv 0$。

现在固定一个 $x \in X$ 满足假设（e）（即（2-4）的左侧），并考虑两个余代数态射 $f_i:\ C' \to C$，$i = 1,2$，它们定义如下

- $f_1 :=\ C' = C \oplus X^*$ 到 C的显然投影；
- $f_2|_C :=$ 恒等态射$_C$；
- 和

$$X^* \ni x^* \xrightarrow{f_2} x^*(x_0)x_1 - x^*(x_0)x_{-1} = x_0^*(x)x_{-1}^* - x_0^*(x)x_1^* \in C.$$

我们有 $ff_1 = ff_2$ 因此也有 $\pi f_1 = \pi f_2$ 由假设可得，故（2-4）右端成立。证明完毕。

■

上述讨论聚焦于（余）代数态射的支配域，而我们稍后将关注前面提到的更丰富的结构（双代数、Hopf代数）。因此，值得注意的是，类似于命题 2.1 的结果同样成立：只要计算（余）支配域的方式有意义，那么在哪里进行计算并没有太大区别。

定理 2.14 (1) 代数态射 $f:\ H\to H'$ 的支配域，在任何

$$\mathrm{Alg}_{\bullet},\ \mathrm{Bialg}_{\bullet},\ \mathrm{HAlg}_{\bullet},\ {}_{bi}\mathrm{HAlg},\ {}_{2}\mathrm{HAlg}$$

恰好包含它的范畴中都是相同的。

(2) 余代数态射 $f:\ H\to H'$ 的余支配域，在任何

$$\mathrm{Coalg}_{\bullet},\ \mathrm{Bialg}_{\bullet},\ \mathrm{HAlg}_{\bullet},\ {}_{bi}\mathrm{HAlg},\ {}_{2}\mathrm{HAlg}$$

恰好包含它的范畴中都是相同的。

证明 这两个陈述再次互为对偶，其中一个证明很容易调整为另一个证明，因此我们着重讨论（2）。

部分讨论因余交换性而分为两种情况。对于所讨论的任一范畴，f 的余支配域是两个映射的余等化子

$$H\times_{H'}H\rightrightarrows H \tag{2-5}$$

由相应范畴中的拉回（依据 [1, 14J (g)], ，如等价证明（a） $\iff$ （c）中所示，见定理 2.13）。这些拉回只有两种可能：在Coalg_{cc} 中计算的拉回，以及在 Coalg中计算的拉回；这是因为到 $\mathrm{Coalg}_{\bullet}$的相关遗忘函子是右伴随，这一点同样可由[52, 图 (9)] 和 [51, §2.2]得出。因此，所要证明的就是：

对于 f：在（ $H\to H'$ 2）中的任意双代数或霍普夫代数范畴内，遗忘函子到 $\mathrm{Coalg}_{\bullet}$ 都保留形如（2-5）的一对态射的余等化子。

更具体地说， $\mathrm{Coalg}_{\bullet}\to\mathrm{Vec}$ 是左伴随，因此是余连续的 [50, §4.3], 我们声称，在任意范畴 $\mathrm{Bialg}_{\bullet}$ 或 ${}_{\square}\mathrm{HAlg}_{\bullet}$中，形如（ Vec2-5）的余等化子都可以在其中计算。

要看出这一点，只需注意，(2-5) 是自反的 [5, §3.3，在命题 4]之前：这两个箭头具有一个公共右逆 $H'\to H'\times_H H'$ ，其分量均为恒等态射$_{H'}$。结论于是由引理 2.15得出。■

引理 2.15 (1) 从 $\mathrm{Bialg}_{\bullet}$ 或 ${}_{\square}\mathrm{HAlg}_{\bullet}$ 到 Vec 的遗忘函子保持自反等化子，其中“•”表示“c”或“cc”的任意组合，而“□”可以为空、“bi”或“2”。

(2) 对偶地，从 $\mathrm{Bialg}_{\bullet}$ 或 ${}_{\square}\mathrm{HAlg}_{\bullet}$ 到 Vec 的遗忘函子保持自反余等化子。

证明 再次从彼此对偶的断言中选取一个，设为 (2)：

设 $f_i:\ X\to Y$、 $i=1$、2 是所涉及范畴中任意一个范畴内的一对自反平行态射，并具有公共右逆 $s:\ Y\to X$： $f_1s=f_2s=$ 恒等态射$_Y$。现在注意到，核

$$\{f_1(x)-f_2(x)\mid x\in X\}\leqslant Y \tag{2-6}$$

向量空间余等化子 $Y\to\overline{Y}$of (f_i) 既是余理想（这是自然的，因为 Coalg中的余极限与 Vec中的余极限一致），又根据反射性假设是理想：

$$(f_1(x)-f_2(x))y=f_1(xs(y))-f_2(xs(y)),\ \forall x\in X,\ y\in Y,$$

左乘的情况也类似。因此，向量空间余等化子实际上是一个商双代数，而（2-6）在（ HALG）中的反 antipode 或在（ ${}_{bi}$HALG）中的逆对极等作用下的不变性显而易见。■

注 2.16 定理 2.14 的证明 涉及各个遗忘函子的余核保持问题

$$\text{BIALG}_\bullet,\ {}_{\square}\text{HALG}_\bullet \longrightarrow \text{COALG}_\bullet.$$

由于这些函子实际上是 单子性的 (或 三元组化的 [5, §3.3])，根据 [52, 定理 10 和命题28] 以及 [50, §4.3]。这意味着它们保持 某些 自反余等化子（贝克定理： [5,§3.3，定理 10]），但通常并非保持所有这类余等化子。

事实上， 引理 2.15 本可以通过追溯 [50]中的单子性证明，以一种更迂回（且更具概念性）的方式得到；但在这个具体情形中，直接的方法似乎更可取。♦

对于（余）支配域，也有一个与 引理 2.4类似的结果：域扩张保持相关构造。

命题 2.17 沿域扩张的标量扩张函子 $\Bbbk'\otimes_\Bbbk -$ 在范畴 $\text{ALG}_\bullet$、 $\text{COALG}_\bullet$、 $\text{BIALG}_\bullet$ 和 ${}_{\square}\text{HALG}_\bullet$中均保持（余）支配域。

证明 定理 2.14 将问题归结为 ALG 和 COALG。此外，由于代数态射的 余主域 以及 余代数态射 的支配域并无实际意义（它们分别只是相应态射的像），因此我们将在 ALG 中讨论支配域，并在 COALG中讨论余主域。

在 定理 2.13 的证明过程中，我们看到， $C \to D$ 的余主域是（在 VEC中的）两个映射 $C \,\square_D\, C \to C$的余等化子。对偶地，代数态射$A \to B$ 的支配域是两个映射 $B \to B \otimes_A B$ [57, §XI.1，命题 1。1]的等化子。正如 引理 2.4的证明中所述，域的标量扩张保持所有这些构造。■

注 2.18 (1) 参见[6, 命题 5。3] 其中给出了 命题 2.17 针对有限维李代数的类似结果。

(2) 命题 2.17 的一个版本适用于代数群 [13, 定理 5（ii）]：后者在 线性 代数群上的特化恰好对应于 HALG_c-余支配域的情形，即命题 2.17。

定理 2.13 有助于将余主域与余平坦性这一概念联系起来。回顾 [15, §10。8] 左C-余模 M 是

- 余平坦的，如果函子 $\mathcal{M}^C \xrightarrow{\square_C M}$ VEC 是正合的；
- 忠实余平坦的，如果该函子还忠实。

我们将这个术语用于余代数态射 $C \to D$：若 $C \in \mathcal{M}^D$ 是余平坦的（忠实余平坦的），则它们是右余平坦的（忠实余平坦的）；左侧的情形也类似。

注 2.19 事实上，对于余代数，余平坦性与内射性之间的相互作用非常方便：

- 余平坦性等价于相关余模范畴中的内射性（[24, 定理 2.4。17] 或 [15,§10.12, (ii) (1)]）；

- 忠实余平坦性等价于 [15, §10.12, (ii) (2)] 所讨论的余模是一个内射余生成元（回顾 [40, §V.7] 范畴中的余生成元是这样一个对象： $\mathcal{C}$ 对于任意 d 只要 $\mathcal{C}$-态射 $f_i: c \to c', i = 1,2$ 不同，则 gf_i 对于某个 $g: c' \to d$）。♦

现在可以仿照模范畴中忠实平坦下降的通常讨论（[21, 定理], [46, 定理 3.8]），并将其对偶化；该讨论采用余环上的余模范畴这一表述方式 [15,§25.4]。

构造 2.20 对任意余代数 C

- 范畴 ${}^C\mathcal{M}^C$ 的 C-双余模构成一个幺半范畴（[40, §VII.1], [25, 定义 2.1.1]），其中$\square_C$ 为张量双函子， C 为幺半单位。
- 因此，讨论 ${}^C\mathcal{M}^C$ [25, 内部的代数（定义 7.8.1] ）以及它们上的模范畴（定义 7.8.5]）是有意义的。
- 同样，对于含幺内代数 $A \in {}^C\mathcal{M}^C$，我们用 $\mathcal{M}_A$ 表示由右A-模构成的范畴，其中对象是配备有一个态射的右 C-余模 $V \in \mathcal{M}^C$

$$V \square_C A \to V \quad \text{in} \quad \mathcal{M}^C,$$

在显然的意义下满足结合律且含幺。

与 [25, 定义 7.8.5] 的区别在于， V 仅为右 C-余模，而非C-双余模。

现在考虑一个余代数态射 $C \to D$。

- 余张量积 $C \square_D C$是 ${}^C\mathcal{M}^C$中的一个含幺代数，其乘法为

$$(C \square_D C) \square_C (C \square_D C) \cong C \square_D C \square_D C \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon_C\otimes\mathrm{id}} C \square_D C$$

且单位元为

$$C \xrightarrow{\Delta_C} C \square_D C.$$

- 对于任意（右） D-余模 W，余张量积 $W \square_D C$ 不仅是一个右 C-余模，而且还是一个右 $C \square_D C$-模，其乘法为

$$(W \square_D C) \square_C (C \square_D C) \cong W \square_D C \square_D C \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon_C\otimes\mathrm{id}} W \square_D C.$$

- 这给出了一个函子

$$\mathcal{M}^D \xrightarrow{-\square_D C} \mathcal{M}_{C\square_D C},$$

伴随的右半部分

$$\mathcal{M}_{C\square_D C} \underset{-\square_D C}{\overset{N\longmapsto N_{C\square_D C}}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}^D, \tag{2-7}$$

其中，空间 $N_{C\square_D C}$ 余不变量 (类比于群同调术语 [26, §1.1]) 对 $C \square_D C$-模 N 定义为（向量空间意义下的）余等化子

$$N \square_D C \underset{\mathrm{id}\otimes\varepsilon}{\overset{\text{action}}{\rightrightarrows}} N \longrightarrow N_{C\square_D C} \tag{2-8}$$

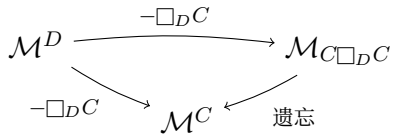
♦

完成上述所有准备后，定理 2.21 是对忠实平坦下降标准论证的直接对偶化 [21, Teorema]。为求完备起见，我们给出证明；不过，正如 [22,§4.2] 所指出的，如今这类结果很容易作为 Beck [5, §3.3 定理10]关于（余）单子函子的推论获得。

定理 2.21 设 $f\colon\ C \to D$ 是一个余代数态射。伴随 (2-7) 在以下任一条件下都是等价：

- f 是左忠实余平坦的；
- 或 f 在 ${}^{D}\mathcal{M}^{D}$中是分裂满态射（即存在右逆）。

证明 考虑下图（其中各方块交换）：



现在注意到

- 左侧箭头是标量余限制函子 $\mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D$ 的右伴随；
- 作用于 $\mathcal{M}^C$ 与该伴随相关的单子 [5, §3.1，定理 1] 不过就是 $-\square_D C\colon\ \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^C$；
- 水平箭头是比较函子 [5, §3.2，它由命题 2]所述的同一个伴随（及单子）导出。

水平箭头为等价的条件，现在等价于$-\square_D C\colon\ \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$的单子性；而这又在以下两个标记的情形下成立：

- 若 $C \in {}^{D}\mathcal{M}$ 是忠实余平坦的，则结论由贝克定理（[5, §3.3，定理 10]）得出：我们已经注意到它是右伴随，并且由于忠实余平坦性，它反映同构且保持所有余等化子（而不仅仅是适当的自反余等化子）。
- 另一方面，若 $f\colon\ C \to D$ 在 ${}^{D}\mathcal{M}^{D}$ 中有右逆，则余单位

$$-\square_D C \to \mathrm{id} \qquad \left(\text{natural transformation of functors} \quad \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^D\right)$$

$\mathcal{M}^D$ 与 $\mathcal{M}^C$ 之间的伴随的余单位有右逆，因此由（范畴对偶的）[41, 命题 3.16] 可得单子性结论。■

回到余主域：

推论 2.22 任意范畴中的态射 $C \to D$

$$\textsc{Coalg}_{\bullet},\quad \textsc{Bialg}_{\bullet}\quad \textit{or}\quad {}_{\square}\textsc{HAlg}_{\bullet} \tag{2-9}$$

that

- 是左忠实余平坦或右忠实余平坦；
- 或是 ${}^{D}\mathcal{M}^{D}$中的分裂满态射

是一个余支配域。

证明 根据 定理 2.14 (2)，只需处理 Coalg。不过，这一结论可由 $C \to D$ 的余支配域作为余等化子（2-3）的描述，以及定理2.21立即得出：对于

$$N = C \cong D \,\square_D\, C \in \mathcal{M}_{C\square_D C}$$

（2-8）中的两个平行左箭头恰好分别对应于（2-3）中的箭头。 ■

备注 2.23 在霍普夫代数的左模商余代数这一情形下，依照 命题 2.12 的框架，推论 2.22 可还原为 [59, 定理 2] 的一个特例。 ♦

回顾一下，余半单余代数（[42, 定义 2.4.1 和引理 2.4.3], [24, 定理 3.1.5]）是指其（左或右）余模均为内射（或等价地，射影）的余代数。

推论 2.24 在任一范畴（*2-9*）中，映到余半单对象上的满射都是余支配域。

证明 这由 推论 2.22 得出，只需注意到，对于余半单的 C （例如取右） C- 余模 M 满射到 C 时，它是忠实余平坦的。事实上， M 根据假设是余平坦的；并且， C 根据 $\mathcal{M}^C$ [24, 定理 3.1.5]， M 由于它在 中是射影的，也会包含它作为直和项。但 每个 余代数都是其自身右余模范畴中的内射余生成元 [15, §9。1], 因此 $M \in \mathcal{M}^C$ 也是如此（故它也是忠实余平坦的 [15,§10.12, (ii) (2)]）。 ■

注 2.25 将 推论 2.24 与 [6, 附录补遗] 中顺带提及的一条注释（并归于Hochschild）相比较：任意有限维李代数的每个半单李子代数，都是有限维李代数范畴中的支配域。

由于根据 [6, 定理 2.2 和 2.3] ，该问题只在零特征下有意义；在零特征下，半单李代数的有限维表示范畴是半单的 [32, §6.3，定理], ，此时与余半单性的联系开始变得明显。♦

事实上，推论 2.22 中的第二个要点并非最优：只需单侧分裂即可。

定理 2.26 只要推论 2.22 中的结论成立，即 $C \to D$ 作为左侧或右侧的 D-余模态射具有右逆。

证明 推论 2.22 的证明表明，并不完全需要伴随（2-7）是一个等价：只要其余单位是一个等价即可（换言之，依据 [40, §IV.3，定理 1]：右伴随 $-\,\square_D\, C$ 是全忠实的）。

换言之，对于一个余代数态射 $f : C \to D$ ，要使其成为余支配域，我们只需要

$$N \,\square_D\, C \,\square_D\, C \underset{\mathrm{id}_N \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_C}{\overset{\mathrm{id}_N \otimes \mathrm{id}_C \otimes \varepsilon}{\rightrightarrows}} N \,\square_D\, C \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes \varepsilon} N \tag{2-10}$$

在 Vec 中成为余等化子。若存在一个左 D-余模右逆 $s : D \to C$ 到 f，则映射

$$N \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes s} N \,\square_D\, C \quad \text{and} \quad N \,\square_D\, C \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes s} N \,\square_D\, C \,\square_D\, C$$

使 (2-10) 成为一个 裂分 (或 可缩) 余等化子 [5, §3.3，参照命题 1] 中的 Vec，因此特别是（顾名思义）一个 Vec-余等化子 [5, §3.3，命题 2]。 ■

注 2.27 定理 2.26 证明背后的注释 恰好与 [9, 命题 2.2], 中关于代数态射的讨论 $A \to B$ 分裂为右 A-模映射。 ♦

3 CQG代数与紧群

特别适合推广紧群表示论的一类霍普夫代数是 CQG代数 [23, 定义 2.2]。该定义的一个版本如下：

定义 3.1 CQG代数是

- 一个复霍普夫 $*$代数 H （[23, §1]：配备共轭线性乘法反转对合‘$*$’的复霍普夫代数，使得 Δ 和 ε 都是 $*$态射）；
- 其所有有限维余模

$$V \ni v \longmapsto x_0 \in v_1 \in V \otimes H$$

都可酉化：即存在一个内积 $\langle - \mid - \rangle$（例如，对第二个变量线性），并且该内积与余模结构相容，具体来说

$$\langle v \mid w_0 \rangle S w_1 = \langle v_0 \mid w \rangle v_1^*, \ \forall v, w \in V.$$

CQG 表示 CQG代数范畴，其箭头为 Hopf *-代数态射。 ♦

注 3.2 余半单性是以下内容的结果：定义 3.1：子余模的正交补仍然是子余模，因此范畴 $\mathcal{M}^H$ 具有半单性。♦

其动机源于这样一个事实： 交换 CQG代数恰好是紧群上的 代表函数 [14, §III.1，定义 1。1] 而通常的 Tannaka对偶性工具 [14, §III.7] 可以表述为以下两个范畴之间的逆变等价： CQG_c 交换CQG代数范畴与紧群范畴 [61, 定理 2.6 和 2。8]。因此，人们将范畴 CQG 视为与 紧量子群 的范畴对偶（后者的范畴可以有多种定义，这只是其中一种，并非唯一的一种：例如参见[61, 定义 2.3 及其后的讨论]）。

回想一下，在此背景下，紧群的嵌入是等化子 [19, 定理 2.1],因此

推论 3.3 紧群态射的支配域是其像在其陪域中的嵌入。

对偶地，在交换CQG代数范畴 CQG_c 中，态射的余主域是从其定义域到其像的满射。■

这也意味着紧群的满态射都是满射（[48, 定理], [54, 命题9]），或者等价地， CQG_c 中的单态射都是嵌入。这一结果也可推广到CQG：该范畴中的单态射恰好是内射态射 [18, 命题 6.1]。

鉴于以上所述，我们似乎可以合理地询问，能否沿同一方向加强 [18, 命题 6.1] ，证明余主域（而不仅仅是单态射）的表现“符合预期”：

定理 3.4 CQG 中的满射是该范畴中的余等化子。

证明 回忆一下 [18, 定理 3.1] 它 CQG 是局部可呈现的，因此第 1 节中的许多讨论都适用：该范畴是完备且余完备的，等等。特别是，我们可以自由地提及其中的拉回。

设 $f\colon H \to H'$ 是 CQG 代数之间的满射态射。如定理 c) $\iff$ (d) 的证明所示，在 定理 2.13中，两个映射的向量空间余等化子

$$H \square_{H'} H \rightrightarrows H$$

本身已经是一个 CQG 代数，因此也是来自 2-5 中拉回的两个映射 CQG 的余等化子。后者是 CQG [1, 14J (g)], 中的余支配域，因此余支配域也可以在 CoAlg (或 BiAlg，等等）中计算。但 H' 是余半单的，所以根据 $H \to H'$ 其自身就是余支配域，依据推论 2.24。■

非交换 对应于 推论 3.3 的非交换类比现在可由此得出（或者说，换一种说法）：

推论 3.5 CQG 代数范畴中态射的余支配域，就是其定义域到其像的满射。■

注 3.6 事实上，推论 3.3 可由 推论 3.5 推出（从而给出[19, 定理 2.1], 的另一种证明，我们不必依赖该定理）：包含函子 $\mathrm{CQG}_c \to \mathrm{CQG}$

- 是右伴随，因此一方面它保留拉回，进而保留形如（2-5）的图表；
- 并且也保留分裂余等化子，如引理 2.15 （2）的证明所示。

这尤其意味着该包含函子保留余支配域。 ♦

4 关于标量扩张与余代数的极限的补充说明

鉴于命题 2.17的证明，人们或许会想，能否用余代数余支配域的另一种描述来表述它：即作为左侧两个余代数态射（而非向量空间态射）的余等化子，见（2-2），其中符号 $\times_D$ 表示 CoAlg中的拉回。

代数类比中，$f\colon A \to B$ 的支配域是这两个态射的等化子

$$B \rightrightarrows B \coprod_A B$$

（ Alg中的推出）显然足够：

$$\mathrm{Alg}_{\Bbbk} \xrightarrow{\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -} \mathrm{Alg}_{\Bbbk'}$$

是一个左伴随，因此保留推出，就像保留（余）等化子一样。不过请注意 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 对于代数和余代数而言，其行为存在不对称性：在这两种情况下，函子 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 都是一个左伴随，因此通常的对偶化并不成立。事实上，正如 第 1 节中所述，只需论证该函子在两种情况下都是余连续的：

- 对于余代数 因为这是显然的， CoAlg 中的余极限正是 Vec中的余极限（注2.3 ）.
- 对于代数，可以直接论证余等化子和余积会被保留，例如利用余积作为张量积直和的便捷描述 [7, 推论 8。1] 。

然而，上文提及的命题 2.17 的证明变体确实可行，这一点可由定理 4.1得出：尽管它是左伴随而非右伴随，但它确实保留 Coalg的等化子

$$C \times_D C \rightrightarrows C$$

对于余代数态射 $C \to D$。

定理 4.1 设 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 是一个域扩张，并考虑连接任意一个范畴的两种版本（分别针对 $\Bbbk$-线性对象和 $\Bbbk'$-线性对象）的左伴随 $(-)_{\Bbbk'} := \Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$

$$\mathrm{Alg}_\bullet, \quad \mathrm{Coalg}_\bullet, \quad \mathrm{Bialg}_\bullet, \quad {}_{\square}\mathrm{HAlg}_\bullet .$$

(1) 对于 $\mathrm{Alg}_\bullet$, $(-)_{\Bbbk'}$ 保持无限乘积（因此也是右伴随）当且仅当 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 是有限扩张。

否则，该函子不保持任何非零代数的无限乘积（因此不是右伴随）。

(2) 对于所有其他范畴，$(-)_{\Bbbk'}$ 保持任意族的等化子和任意乘积，因此是右伴随。

证明 正如我们多次指出的（以各种表述形式；例如 [52, 图表 (9)] 和 [51, §2.2]），遗忘函子

$$\mathrm{Bialg}_\bullet, {}_{\square}\mathrm{HAlg}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Alg}_\bullet$$
$$\mathrm{Bialg}_\bullet, {}_{\square}\mathrm{HAlg}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Coalg}_\bullet$$

分别是右伴随和左伴随（理解“•”符号应相互对应：对于代数，若左侧出现“c”，右侧也会出现，余代数和“cc”同理）。因此，只需处理 $\mathrm{Alg}_\bullet$（交换或普通代数）和 $\mathrm{Coalg}_\bullet$（余交换或普通余代数）。

第 1 节 提到，在任何这些范畴上定义的函子，只要连续并保持某些滤过余极限，就是右伴随。因此，对于一个已知为 左 伴随的函子，连续性等价于它是右伴随。此外，连续性也等价于保持乘积和成对等化子 [1, 命题 13。4],由此得到关于右伴随性的结论。

现在我们来论证这两个断言。

(1) 在 $\mathrm{Alg}_\bullet$ 中，极限就是 Vec中的普通极限，因为遗忘函子 $\mathrm{Alg}_\bullet \to \mathrm{Vec}$是右伴随。因此，部分（1）立即由以下关于典范映射的说明得出：

$$\left(\prod_{i\in i} V_i\right)_{\Bbbk'} \longrightarrow \prod_{i\in I} V_{i,\Bbbk'} \tag{4-1}$$

is

- 当 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 是有限扩张时为同构；
- 若域扩张是无限的，且有无限多个 V_i 非零，则为真嵌入。

（2）我们将分别讨论各种类型的极限。

（a）（等化子）在 Coalg 和 Coalg_{cc} 中，它们的计算方式完全相同：给定一族态射 $f_i : C \to D$，其等化子是包含于向量空间等化子中的 C 的最大子余代数

$$\mathrm{Eq}_{\mathrm{VEC}}(f_i) := \{c \in C \mid f_i(c) \in D \text{ are all equal}\} \tag{4-2}$$

(例如参见 [4, 定理 1 的证明的第一段。1] 对于态射对；该论证通常也成立）。该 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 保留向量空间等化子（4-2）是显然的线性代数结论，因此由下文的引理 4.2 即可得出结论。

(b)（Coalg 中的积）设 $C_i, i \in I$ 是一族 $\Bbbk$-余代数，并考虑典范态射

$$\left(\prod C_i\right)_{\Bbbk'} \xrightarrow{\text{CAN}} \prod C_{i,\Bbbk'}, \tag{4-3}$$

其中的积分别取自 $\Bbbk$-余代数范畴和 $\Bbbk'$-余代数范畴。
考虑一个有限维 $\Bbbk$-向量空间 V。由引理 4.3，态射（4-3）在该态射两侧的 $V_{\Bbbk'}$ 上所诱导的余模结构之间给出一个双射。同一结果还表明，对于有限维 $\Bbbk$-空间 V 和 W，若它们配备了这样的余模结构，则有

$$\mathcal{M}^{C_{\Bbbk'}}(V_{\Bbbk'}, W_{\Bbbk'}) \cong \mathcal{M}^{C}(V, W)_{\Bbbk'}, \quad C := \prod C_i.$$

鉴于每个有限维 $\Bbbk'$-向量空间都可写成 $V_{\Bbbk'}$ 的形式，其中$V \in \mathrm{VEC}_{\Bbbk,\ f}$，根据它们各自的有限维余模 [55, ，利用定理 2.1.12 和引理 2.2 对余代数（4-3）进行的Tannaka 重构显然可知1]，现在可以清楚地看出（4-3）是一个同构。

(c) (Coalg 中的积$_{cc}$) 考虑任意一族余交换余代数 $C_i \in \mathrm{Coalg}_{cc}, i \in I$。对于其中任意一个有限 子族，其在 Coalg 中的积就是张量积 [58, 定理 6.4。5], 因此一般来说，我们有

$$\prod^{\mathrm{Coalg}_{cc}} C_i \cong \varprojlim_{F}^{\mathrm{Coalg}} \bigotimes_{i \in F} C_i, \tag{4-4}$$

其中

- F 遍历完整指标集 I的有限子集，并按包含关系排序 n
- 对于 $F \subseteq F'$，连接态射

$$\bigotimes_{i \in F'} C_i \longrightarrow \bigotimes_{i \in F} C_i$$

对 $i \in F$作用为恒等映射，对 $i \in F' \backslash F$作用为余单位。

正如我们从上文的（2a）和（2b）中已经知道，$(-)_{\Bbbk'}$ 保持 Coalg中的任意极限；又由于它当然保持张量积，因此也会保持形如（4-4）的极限。

证明至此结束。 ■

引理 4.2 对于线性子空间 $V \leqslant C$，记 $C_V \leqslant V$ 为包含在 V中的 C的最大子余代数。

对于任意域扩张 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 以及 $\Bbbk$-余代数的线性子空间 $V \leqslant C$，典范包含

$$\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} C_V \to (\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} C)_{\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} V}$$

是一个等式。

证明 用文字来说，沿域包含进行的标量扩张保持“包含于子空间中的最大子余代数”这一构造。

为此，注意到

$$C_V = \{c \in C \mid \Delta_n c \in V^{\otimes(n+1)} \leqslant C^{\otimes(n+1)}\},$$

其中

$$C \ni c \xmapsto{\Delta_n} c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \in C^{\otimes(n+1)}$$

是迭代余乘法（因此 $\Delta_1 = \Delta_C$ 和 $\Delta_0 = \mathrm{id}_C$）。由此可得

$$C_V = \bigcap_{n \geqslant 0} \Delta_n^{-1} V^{\otimes(n+1)},$$

并注意到 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$ 保任意子空间族的交（例如，可为 $\Bbbk'$ 在 $\Bbbk$上选取一组基，等等），从而得出结论。
■

引理 4.3 设 $\Bbbk \leqslant \Bbbk'$ 是一个域扩张， C 是一个 $\Bbbk$-余代数， V 是一个 $\Bbbk$-向量空间，并用 $(-)_{\Bbbk'}$ 表示函子 $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} -$。

$V_{\Bbbk'}$ 上的右 $C_{\Bbbk'}$-余模结构由 V上的唯一一个 C-余模结构经标量扩张得到。

证明 根据伴随关系

$$\mathrm{VEC}_{\Bbbk} \underset{\text{SCALAR RESTRICTION}}{\overset{(-)_{\Bbbk'}}{\rightleftarrows}} \mathrm{VEC}_{\Bbbk'},$$

一个 $\Bbbk'$-线性映射 $V_{\Bbbk'} \to V_{\Bbbk'} \otimes_{\Bbbk'} C_{\Bbbk'}$（本质上等同于）一个 $\Bbbk$-线性映射 $V \to V \otimes C \otimes \Bbbk'$（未标明的张量积均取在 $\Bbbk$ 上）。选取 $\Bbbk'/\Bbbk$ 的一组基 $e_i, i \in I$，满足 $1 = e_{i_0}$，则这样的映射又由其分量唯一确定

$$V \ni v \longmapsto v_0^{(i)} \otimes v_1^{(i)} \otimes e_i \in V \otimes C \otimes K.$$

Th原映射为 $C_{\Bbbk'}$-余模结构的条件，等价于

- 映射
$$V \ni v \longmapsto v_0^{(i_0)} \otimes v_1^{(i_0)} \in V \otimes C$$
是一个右 C-余模结构；
- 而
$$V \ni v \longmapsto v_0^{(i)} \otimes v_1^{(i)} \in V \otimes C,\ i \neq i_0 \tag{4-5}$$
是余结合的，并满足
$$v_0^{(i)} \varepsilon\left(v_1^{(i)}\right) = 0 \in V,\ \forall v \in V \tag{4-6}$$
（与通常的余单位条件不同，后者会使左侧等于 v）。

余结合性与（4-6）很容易看出会蕴含所有（4-5）的消失，从而证明该结论：在 $C_{\Bbbk'}$上的余模结构 $V_{\Bbbk'}$ 恰好是如下形式的

$$V_{\Bbbk'} \geqslant V \ni v \longmapsto v_0 \otimes v_1 \otimes 1 \in V \otimes C \otimes \Bbbk' \cong V_{\Bbbk'} \otimes_{\Bbbk'} C_{\Bbbk'}$$

一个 C-余模结构 $v \mapsto v_0 \otimes v_1$ 在 V上。 ■

参考文献

[1] Jiˇr´ı Ad´amek、Horst Herrlich 和 George E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴》。纯粹与应用数学（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1990。《猫的乐趣》，Wiley-Interscience 出版物。[2] Jiˇr´ı Ad´amek 和 Jiˇr´ı Rosick´y。《局部可表示范畴与可达范畴》，伦敦数学会讲义系列第189卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[3] A. L. Agore。《余代数的单态射》。Colloq. Math., 120(1):149–155, 2010。[4] A. L. Agore。《余代数、双代数与霍普夫代数的极限》。Proc. Amer. Math. Soc., 139(3):855–863, 2011。[5] Michael Barr 和 Charles Wells。《托扑、三元组与理论》，数学科学基础丛书第278卷（数学科学基本原理）。施普林格出版社，纽约，1985。[6]George M. Bergman。《李代数的满态射》，1973。可见 https://math.berkeley.edu/~gbergman/papers/unpub/LieEpi.pdf（访问日期：2023-02-07）。[7] George M. Bergman。《环论的菱形引理》。Adv. in Math., 29(2):178–218, 1978。[8] A. Bia lynicki-Birula、G. Hochschild 和 G. D. Mostow。《代数线性群表示的扩张》。Amer. J. Math., 85:131–144, 1963。[9] Julien Bichon。《带条件期望的霍普夫代数在余理想子代数上的忠实平坦性》，2023。http://arxiv.org/abs/2301.05480v1。[10] Fr´ed´eric Bien 和 Armand Borel。《线性代数群的满态子群 I》。C. R. Acad. Sci. Paris S ´er. I Math., 315(6):649–653, 1992。[11] Fr´ed´eric Bien 和 Armand Borel。《线性代数群的满态子群 II》。C. R. Acad. Sci. Paris S ´er. I Math., 315(13):1341–1346, 1992。[12]Armand Borel。《线性代数群》，数学研究生教材第126卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1991。[13] Michel Brion。《代数群的满态子群》。Math. Res. Lett., 24(6):1649–1665, 2017。[14] Theodor Br¨ocker 和 Tammo tom Dieck。《紧李群的表示》，数学研究生教材第98卷。施普林格出版社，纽约，1985。[15] Tomasz Brzezinski 和 Robert Wisbauer。《余环与余模》，伦敦数学会讲义系列第309卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003。[16] Alexandru Chirvasitu。《余半单霍普夫代数在霍普夫子代数上忠实平坦》，2011。http://arxiv.org/abs/1110.6701v1。[17] Alexandru Chirvasitu。《余半单霍普夫代数在霍普夫子代数上忠实平坦》。Algebra Number Theory, 8(5):1179–1199, 2014。

[18] Alexandru Chirvasitu. 紧量子群的范畴论方面。Appl. Categ. Struc- tures, 23(3):381–413, 2015.[19] Alexandru Chirvasitu. 紧群（多重）推出的非退化性结果，2023。http://arxiv.org/abs/2301.09847v2.[20] Alexandru Chirv˘asitu. 关于Hopf代数的满态射与单态射。J. Algebra, 323(5):1593–1606, 2010.[21] Michele Cipolla. 模的忠实平坦下降。Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 25(1- 2):43–46, 1976.[22] P. Deligne. Tannak范畴。载于《Grothendieck Festschrift》第II卷，数学进展丛书第87卷，第111–195页。Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，1990年。[23] Mathijs S. Dijkhuizen and Tom H. Koornwinder. CQG代数：紧量子群的直接代数方法。Lett. Math. Phys., 32(4):315–330, 1994.[24] Sorin D˘asc˘alescu, Constantin N˘ast˘asescu, and S¸erban Raianu. Hopf代数，纯粹与应用数学专著与教材第235卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，2001年。导论。[25] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. 张量范畴，数学调查与专著第205卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。[26] Leonard Evens. 群上同调。牛津数学专著。Clarendon出版社，牛津大学出版社，纽约，1991年。牛津科学出版物。[27] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, and D. S. Scott. 连续格与域，数学及其应用百科全书第93卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[28] Frank D. Grosshans. 代数齐性空间与不变理论，数学讲义第1673卷。施普林格出版社，柏林，1997年。[29] R. Hartshorne. 代数几何。施普林格出版社，纽约—海德堡，1977年。数学研究生教材第52卷。[30] K. H. Hofmann and K.-H. Neeb. C^*代数的满态射均为满射。Arch. Math. (Basel), 65(2):134–137, 1995.[31] J. M. Howie and J. R. Isbell. 满同态与支配域。II。J. Algebra, 6:7–21, 1967.[32] James E. Humphreys. 李代数与表示理论导论。数学研究生教材第9卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1972年。[33] J. R. Isbell. 满同态与支配域，V。Algebra Universalis, 3:318–320, 1973.[34] John R. Isbell. 满同态与支配域。载于《范畴代数会议论文集》（加利福尼亚州拉霍亚，1965年），第232–246页。施普林格，纽约，1966年。[35] John R. Isbell. 满同态与支配域。III。Amer. J. Math., 90:1025–1030, 1968。

[36] John R. Isbell. 满同态与支配域。IV。J. London Math. Soc. (2), 1:265–273, 1969.[37] Nathan Jacobson. 李代数。Dover Publications, Inc.，纽约，1979年。重印1962年原版。[38] Henning Krause. 推导Auslander公式。Doc. Math., 20:669–688, 2015.[39] T. Y. Lam. 模与环讲义，数学研究生教材第189卷。施普林格出版社，纽约，1999年。[40] Saunders Mac Lane. 工作数学家的范畴论，数学研究生教材第5卷。施普林格出版社，纽约，第2版，1998年。[41] Bachuki Mesablishvili. 有效下降型单子及余单子性。Theory Appl. Categ., 16:第1号，1–45, 2006年。[42] Susan Montgomery. Hopf代数及其在环上的作用，CBMS数学区域会议丛书第82卷。为数学科学会议委员会出版，华盛顿特区，1993年。[43] Susan Montgomery. Hopf代数及其在环上的作用，CBMS数学区域会议丛书第82卷。为数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；由美国数学学会出版，罗得岛州普罗维登斯，1993年。[44] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. 几何不变理论，数学及其边界领域成果（第2辑）第34卷 *[*数学及相关领域成果（第2辑）*]*。施普林格出版社，柏林，第3版，1994年。[45] C. N˘ast˘asescu and B. Torrecillas. 余代数的挠理论。J. Pure Appl. Algebra, 97(2):203–220, 1994.[46] Philippe Nuss. 非交换下降与非阿贝尔上同调。 K-理论，12(1):23–74，1997年。[47] A. V. Petukhov. 满同态子群的几何描述。Uspekhi Mat. Nauk, 65(5(395)):193–194, 2010.[48] Detlev Poguntke. 紧群的满态射均为满射。Proc. Amer. Math. Soc., 26:503–504, 1970.[49] N. Popescu. 阿贝尔范畴及其在环与模中的应用。Academic Press，伦敦—纽约，1973年。伦敦数学学会专著第3号。[50]Hans-E. Porst. 关于幺半群、余幺半群与双幺半群的范畴。Quaest. Math., 31(2):127–139, 2008.[51] Hans-E. Porst. 霍普夫代数的泛构造。J. Pure Appl. Algebra, 212(11):2547–2554, 2008.[52] Hans-E. Porst. 霍普夫代数形式理论第二部分：霍普夫代数的情形。Quaest. Math., 38(5):683–708, 2015.[53] David E. Radford. Hopf代数，结与万物丛书第49卷。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2012年。

[54] G. A. Reid. 满态射与满射性。Invent. Math., 9:295–307, 1969/70。[55] Peter Schauenburg. 任意霍普夫代数的田中对偶，代数报告第66卷/代数报告/。Verlag Reinhard Fischer，慕尼黑，1992。[56] Peter Schauenburg. 霍普夫子代数上的忠实平坦性：反例。载于《环论与代数表示的相互作用》（穆尔西亚），纯粹与应用数学讲义第210卷，331–344页。Dekker，纽约，2000。[57] Bo Stenstr¨om. 商环。施普林格出版社，纽约，1975。数学科学基础丛书第217卷，环论方法导论。[58] Moss E. Sweedler. 霍普夫代数。数学讲义丛书。W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1969。[59] Mitsuhiro Takeuchi. 相对霍普夫模——等价性与自由性判据。J. Algebra, 60(2):452–471, 1979。[60] Nguyˆe˜n Quˆo´c Thˇa´ng 和 Dao Phuong Bˇa´c. 可观测群的若干有理性性质及相关问题。Illinois J. Math., 49(2):431–444, 2005。[61] Shuzhou Wang. 紧量子群的自由积。Comm. Math. Phys., 167(3):671– 692, 1995。[62] William C. Waterhouse. 仿射群概形导论，数学研究生教材第66卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1979。

Department of Mathematics, University at BuffaloBuffalo, NY 14260-2900, USA*E-mail address*: achirvas@buffalo.edu