arXiv:2302.12880v1 [math.CO] 24 Feb 2023

运用 B¨ohme 引理证明彼得森族图都不存在平坦嵌入

Joel F oisy、Catherine Jacobs、Trinity Paquin、Morgan Schalizki、Henry Stringer

2023年1月

摘要

Sachs 和 Conway-Gordon 运用链接数和一种巧妙的计数论证，证明彼得森族中的每个图都是本质链接的（也就是说，在每个空间嵌入中，都有一对互不相交的圈构成不可分链环），因此该族的每个成员都不存在平坦空间嵌入（即每个圈都围成一个圆盘，且圆盘内部与图不相交的嵌入）。我们运用 B¨ohme 引理和 Jordan-Brouwer 分离定理，给出另一种证明，证明每个彼得森族图都不存在平坦嵌入。

1 引言

Sachs [5], [6] 和 Conway-Gordon [3] （关于 K_6）利用链接数和一个巧妙的计数论证证明，彼得森族中的每个图都是本质链接的（也就是说，在每一种空间嵌入中，都有一对互不相交的圈构成不可分链环）。由于本质链接，彼得森族中的每个图都没有平坦嵌入。平坦空间嵌入是指每个圈都围成一个圆盘，且圆盘内部与图不相交的嵌入。当这样的圆盘附着在一个圈上时，我们称该圈已被铺盘。

我们设计了一类新的证明，在不使用本征链接的情况下证明每个 Petersen 族图都没有平坦嵌入。下面概述我们的方法。给定一个具有平坦嵌入的 G ，考虑 G 中的一组圈，使得任意两个圈的交集要么是连通的，要么为空。我们将这样的一组圈称为 B¨*ohme* 系统。B¨ohme 引理 [2] 得出：对于 G的平坦嵌入中的一个 B¨ohme 圈系统，可以同时为该系统中的圈铺设面板——也就是说，每个圈都界定一个圆盘，其内部与图以及所有其他圆盘均不相交。随后，Jordan-Brouwer 分离定理使我们能够得出结论：由铺设 B¨ohme 系统得到的任何球面（我们将其称为 B¨*ohme* 球面）都会将空间分为内部（有界）和外部（无界）两个部分。由于我们在 PL 范畴中工作，根据 Alexander 的结果， [1],内部部分是一个拓扑球。

为导出矛盾，我们假设某个 Petersen 族图具有平坦嵌入，然后找出一个适当的 B¨ohme 系统。接着我们论证，某个由此得到的 B¨ohme 球面必定会与嵌入图的一条边相交，这与平坦性相矛盾。通过这种方式，我们证明每个 Petersen 族图都不可能具有平坦嵌入。下一节将详细说明 Petersen 族中每个图的情况。

我们以一些术语和背景知识结束本引言部分。全文均在 PL 范畴中进行。

假设图 G 有一个顶点为 a、b、c的三圈。要对 G中的三圈进行 Δ-Y 交换，需要添加一个额外顶点 y ，删除边 ab、bc和 ca ，并添加边 ay、by和 cy ，从而将 G 变换为G'。如果图 H 有一个 3 度顶点 y，要在y处对 H 进行 Y-Δ 交换，我们从 Y 形结构开始，其顶点为 a、b、c、y，边为 ay、by和 cy。我们移除 y 顶点及所有与 y 相 incident 的边，然后添加边 ab、bc和ca ，构成一个三角形，并将 H 变换为图 H'。

彼得森族由 K_6 和$K_{3,\ 3,\ 1}$ 以及通过 $\Delta - Y$交换从 K_6 和$K_{3,\ 3,\ 1}$ 得到的图组成（等价地，也可通过$\Delta - Y$和 $Y - \Delta$ 交换从 K_6 得到）。我们用 P_7、 P_8、 P_9、 P_{10} （即经典的彼得森图）和$K_{4,\ 4} - e$表示该族中的其余图，下标表示顶点数。Robertson、Seymour 和 Thomas 证明了 Sachs 猜想，即彼得森族构成了本质链接图的完整次小极小集合。他们还证明，一个图有平坦嵌入，当且仅当它有无链接嵌入 [4]。

2 证明

本节将逐一详细介绍彼得森族中每个图的证明。

2.1 K_6

将 K_6 的顶点记为 $\{a, b, c, d, e, f\}$。反设 $G = K_6$ 有一个平坦嵌入。考虑以下圈的集合:

$$C_1 = \{(b, e, f), (b, c, e), (c, e, f), (b, c, f)\}$$
$$C_2 = \{(b, e, f), (a, b, e), (a, e, f), (a, b, f)\}$$
$$C_3 = \{(b, e, f), (b, d, e), (d, e, f), (b, d, f)\}$$

令 $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^{3} C_i$。注意，上述圈是诱导圈，其中 $C_1 \subset G[\{b, c, e, f\}]$, $C_2 \subset G[\{a, b, e, f\}]$和 $C_3 \subset G[\{b, d, e, f\}]$, 其中 $G[\{a, b, c, d\}]$是由顶点 a, b, c, d 诱导出的 K_6 的子图。注意，对于 $i = 1$, 2, 3, $(b,\ e,\ f) \in C_i$，见图 1。

取 K_6 的一个平坦嵌入。由于 $\mathcal{C}$ 的所有圈两两相交且交集连通，我们可以应用 B¨ohme 引理，得到构成 $\mathcal{C}$ 的十个 3-圈的同时铺片圆盘。当我们为每个 C_i 铺片时，就形成了一个球面T_i；于是，根据应用于比如 T_1 的 Jordan-Brouwer 定理，存在内部和

外部连通分支，分别为 B_1 和 B_2，其中 $B_1 \cup B_2 = \mathbb{R}^3 - T_1$，并且不妨设 B_1 是一个球（这是由 PL 范畴中的 Alexander 的结果 [1] 得出的）。由于边 ad 与 T_1 不相交，不失一般性地，我们可以假设 $ad \subset B_1$。由于 $ad \subset B_1$ 和 $a \in T_2$，$d \in T_3$ 于是 T_2，$T_3 \subset B_1 \cup T_1$。这意味着 T_2 和 T_3 位于 B_1 的闭包中（这就是我们稍后所说的 T_2 和 T_3 位于 T_1 内部的含义）。现在同样地观察可知，通过 Jordan-Brouwer 定理，对于 T_2 存在一个内部区域和外部区域。不失一般性地，假设 T_3 位于 T_2 的内部区域（球）的闭包中。由于 $d \notin T_2$ 和 $d \in T_3$，d 位于 T_2 的内部球中。由于 T_2 位于 T_1 和 $c \in T_1$ 的内部，c 位于 T_2 的外部。由于边 cd 存在，且 c 和 d 位于 T_2 的相对两侧，边cd 必须与 T_2 的一个圆盘相交。这就产生了矛盾。因此， K_6 没有平坦嵌入。

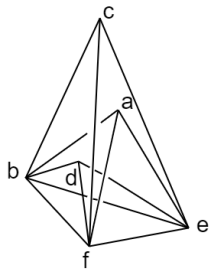

图 1：由 $\mathcal{C}$ 构成的 K_6 子图的一个空间嵌入。

其余情形

对于除 P_{10}、$K_{4,4}-e$ 之外的所有其余 Petersen 族图，与 K_6 的证明类似，我们考察一个平坦嵌入，以及一个顶点集为 $V(C)$、由 C 构成的圈，再加上三个与 $V(C)$ 不相交的顶点； v_1、 v_2 和 v_3，使得每个 $G[V(C) \cup \{v_i\}]$ 都构成一个 B¨ohme 系统。将 B¨ohme 系统面板化后，得到三个球面，它们仅沿着 C 以及面板化 C 的圆盘相交。在每种情形中，两个顶点位于由此得到的 B¨ohme 球面的两侧。在每种情形中，这两个顶点要么由一条边连接，要么通过一个与 $G[V(C) \cup \{v_i\}]$ 不相交的 Y 相连，其中对应于适当的 i；由此便与平坦性矛盾。以下将给出更多细节。

2.2 P_7

将 K_6的六个顶点记为 $\{a, b, c, 1, 2, 3\}$，并假设 1,2, 和 3 之间发生了一次 $\Delta - Y$交换。为导出矛盾，假设P_7 具有平坦嵌入。考虑以下诱导子图：

$$G_1 = G[\{a, b, c, 1\}]$$
$$G_2 = G[\{a, b, c, 2\}]$$
$$G_3 = G[\{a, b, c, 3\}]$$

请注意，每个 G_i都包含圈（a，b，c）。可以验证，$G_1 \cup G_2 \cup G_3 = K_{3,1,1,1}$中的诱导圈构成一个 B¨ohme 系统。取一个平坦嵌入

P_7。对 B¨ohme 系统同时进行面板划分，会使每个 G_i 变成一个 B¨ohme 球面。由此，论证与针对 K_6的论证类似，只是顶点 $\{1,2,3\}$ 由一个 Y 相连，而不是由一个三角形相连。

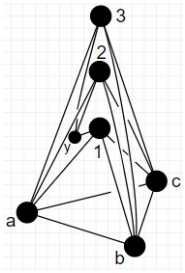

图 2： P_7的一个空间嵌入。

2.3 $K_{4,\ 4} - e$

将$K_{4,\ 4} - e$的顶点记为 $V_1 = \{a, b, c, d\}$和 $V_2\{1, 2, 3, 4\}$，其中从 V_1 到 V_2 的所有可能边均存在，但 $e = 4a$除外

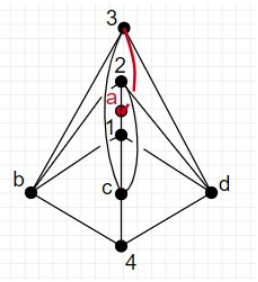

图 3：$K_{4,\ 4} - e$的一个空间嵌入。边 $a3$ 可能与一个面板相交。

反设$K_{4,\ 4} - e$ 具有一个平坦嵌入。考虑下方列出的圈集 A_i，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$。

$$A_1 = \{(1, b, 4, c), (1, c, 4, d), (1, b, 4, d)\} \subseteq G[1, 4, b, c, d]$$
$$A_2 = \{(2, b, 4, c), (2, c, 4, d), (2, b, 4, d)\} \subseteq G[2, 4, b, c, d]$$
$$A_3 = \{(3, b, 4, c), (3, c, 4, d), (3, b, 4, d)\} \subseteq G[3, 4, b, c, d]$$

注意， $A_1 \cup A_2 \cup A_3$满足 B¨ohme 引理的假设，其边构成$K_{4,3}$。根据 B¨ohme 引理，我们可以同时铺盘这些圈。注意，所有铺盘后的圈都经过顶点 4。将

将铺盘 A_i 后得到的球面记为 S_i，其中 $i \in \{1,2,3\}$。注意，每个A_i都包含顶点 $4, b, c, d$上的 Y，以及顶点 i。接下来，证明过程与用于 P_7 (K_6)的论证类似，只需将基圈（三角形） C 替换为 Y；对于 $i \neq j$， $S_i \cap S_j$ 恰好是 Y。

2.4 $K_{3,\ 3,\ 1}$

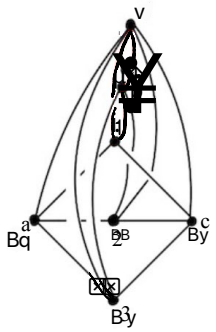

图4：$K_{3,\ 3,\ 1}$的一个空间嵌入。

按照图4给出的方式为 $K_{3,\ 3,\ 1}$ 的顶点标记。反设 $K_{3,\ 3,\ 1}$ 有一个平坦嵌入。考虑以下圈的集合：

$$\mathcal{S}_1 = \{(a,2,c,3),(a,1,c,2),(a,1,c,3)\} \subseteq G[a,2,c,3,1]$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(a,2,c,3),(3,b,2,c),(3,b,2,a)\} \subseteq G[a,2,c,3,b]$$
$$\mathcal{S}_3 = \{(a,2,c,3),(c,2,v),(c,v,3),(3,v,a),(a,v,2)\} \subseteq G[a,2,c,3,v]$$

注意， $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ 满足 B¨ohme 引理，并且在分别铺面后，$\mathcal{S}_i$ 形成一个 B¨ohme 球面。这些 B¨ohme 球面与相应的铺面圆盘恰好共享同一个基圈（a，2，c，3）。由此，论证与针对 K_6 的论证类似。

2.5 P_8

将 P_8 的顶点记为 $\{v,a,b,c,1,2,3,y\}$，其中 $\{v\}$、$\{a,b,c\}$ 和 $\{1,2,3\}$ 是 $K_{3,\ 3,\ 1}$ 中的划分，而三角形 (v，a，1) 被替换为一个 Y，从而在所得的 P_8 中产生新的 Y 顶点 y。

反证，假设 P_8 is 存在平坦嵌入。考虑以下诱导子图：

$$G_1 = G[a,y,1,b,2,v]$$
$$G_2 = G[a,y,1,b,2,c]$$
$$G_3 = G[a,y,1,b,2,3]$$

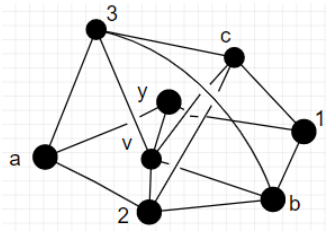

图 5： P_8的空间嵌入。

以及分别由其诱导圈铺成面板所形成的 B¨ohme 球面（根据 B¨ohme 引理，这是可能的）：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(a,y,1,b,2),(v,2,a,y),(v,y,1,b),(v,b,2)\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{(a,y,1,b,2),(a,y,1,c,2),(b,1,c,2)\}\\ \mathcal{B}_3 &= \{(a,y,1,b,2),(a,y,1,b,3),(a,2,b,3)\}\end{aligned}$$

注意，每个 $\mathcal{B}_i$ 都包含圈 (a， y， 1， b， 2)。接下来，论证过程与针对 K_6 的论证类似。

2.6 P_9

设 P_9 的标记如图 6 所示。

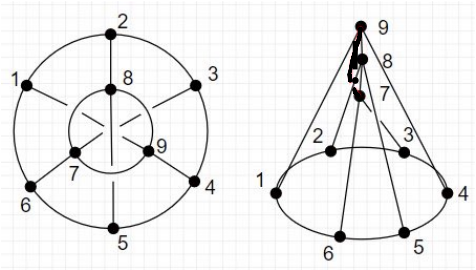

图 6： P_9的空间嵌入。

反设 P_9 有平坦嵌入。考虑一个平坦嵌入，并考虑以下圈的集合（S_i，其中 $i \in \{1,2,3\}$）：

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(1,2,3,4,5,6),(6,7,3,4,5),(6,7,3,2,1)\} \subset G[1,2,3,4,5,6,7]\\ S_2 &= \{(1,2,3,4,5,6),(2,8,5,4,3),(2,8,5,6,1)\} \subset G[1,2,3,4,5,6,8]\\ S_3 &= \{(1,2,3,4,5,6),(1,9,4,3,2),(1,9,4,5,6)\} \subset G[1,2,3,4,5,6,9]\end{aligned}$$

注意，每个 S_i 都包含圈 C =(1，2，3，4，5，6)，并注意到，根据 B¨ohme 引理，这些圈都可以同时铺面，使得每个 S_i都确定一个球面，对 $i = 1$，2，3 而言，其中 $i \neq j$ 对应的球面与 S_i 所确定的球面

仅沿着 C 及其对应的铺面圆盘与 S_j 所确定的球面相交。由此，证明过程与 K_6 的证明类似。

2.7 P_{10}

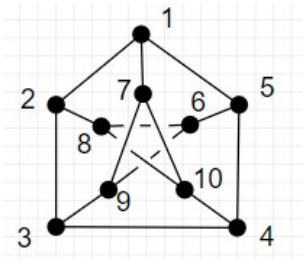

图7：彼得森图的空间嵌入。

反设 P_{10} 有一个平坦嵌入。考虑由下列各组顶点构成的诱导子图，其中标号取自图7。

$$G_1 = G[\{1,2,3,4,5,6,9\}]$$
$$G_2 = G[\{1,2,3,4,5,7,10\}]$$
$$G_3 = G[\{1,2,3,4,5,6,8\}]$$

考虑 P_{10}的一个平坦嵌入。根据 B¨ohme 引理， G_1、 G_2和 G_3 中的每个 5-环和 6-环都可以同时围成圆盘，从而形成三个球面，分别对应于每个 G_i。注意，圈 (1，2，3，4，5) 位于每个 G_i中。

根据 Jordan-Brouwer 定理，由于顶点 7 与顶点 10 之间有一条边相连，它们必定都在由 G_1形成的球面外部，或都在其内部。不失一般性，假设两个顶点都在外部。于是，由 G_2 形成的球面位于由 G_1形成的球面的外部区域的闭包中。由于顶点 8 与顶点 6 和 10 都有边相连，顶点 8 必定位于由 G_2 形成的球面与由 G_1形成的球面之间。因此，由 G_3 形成的球面夹在由 G_2 形成的球面和由 G_1 形成的球面之间（也就是说，它位于由 G_2 形成的外部区域的闭包中，并位于由 G_1形成的内部区域的闭包中）。然而，由于 7 与 9 之间有一条边相连，且 7 位于 G_2 中、9 位于 G_1中，由 G_3 形成的球面与连接 7 和 9 的边相交。因此，一张镶嵌圆盘必定被边 79 穿破，这与平坦性矛盾。在图7中， G_3 中的镶嵌环 (2，3，4，10，8) 会被穿破。因此， P_{10} 没有平坦嵌入。

我们注意到， P_{10} 的情形与前面的情形相似，只是还需要一个共享环 C 和另外 5 个顶点，并且除圈 C外， G_1 和 G_3 还共享顶点 6。它们形成的球面也共享基圈（以及圆盘）和边 5，6。这里连接额外顶点的不是三角形或 Y，而是边 8，10 和 7，9。由于 6 同时位于 G_1 和 G_3中，却不在 G_2中； G_1 和 G_3 必定处于 G_2的同一侧。即使交换

我们原证明中 G_1 和 G_3 的位置，边 8，10 仍会与由 G_1形成的 B¨ohme 球面相交。

我们本可以在三角形 (7、8、9) 上对 P_9 做一次 $\Delta - Y$交换，从而得到 P_{10}，采用与我们在 P_9 上相同的 B¨ohme 系统，证明细节则类似于 P_9 中所用的方法。

3 致谢

本研究作为美国国家安全局资助项目 H89230-22-1-0008「克拉克森大学：2022 年数学本科生暑期研究体验」的一部分完成。

参考文献

[1] Alexander, J.W.，《以多面体划分三维空间》。《美国国家科学院院刊》10，6–8，1924。[2] B¨ohme, T.，《图的空间表示》，载于《图论当代方法》（R. Bodendieck 编），151–167，Bibliographisches Inst.，曼海姆，1990。[3] Conway, J. 和 Gordon, C.，《空间图中的纽结与链环》。《图论杂志》7，第 4 期，445–453，1983。[4] Robertson、Seymour 和 Thomas，《图的无链接嵌入》。《美国数学会新辑通报》第 28 卷，第 1 期，84–89，1993 年 1 月。[5]H. Sachs，《库拉托夫斯基关于平面图的定理的空间类比——一个未决问题》，载于《图论》（*Łagów，1981*），230–241，数学讲义第 1018 卷，施普林格，柏林，1983。[6] Sachs, H.，《有限图的空间表示》，载于《有限集与无限集》第一、二卷（埃格尔，1981），649–662，Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai，第 37 卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1984。