伊本·西那与 al-Baghdādī 和卡西关于亲和数对求取的论述

Mahmoud Annaby[1]

[1] 开罗大学理学院数学系，埃及吉萨 12613
mhannaby@@sci.cu.edu.eg

摘要。 本文简要分析伊本·西那（约980—1037年）、al-Baghdādī（约[illegible]9年）关[illegible]，并从[illegible]者名[illegible]只不过以不同方式表述了[illegible]萨比特·伊本·库拉（卒于901年）规则的各种变体——我们指出，他们的论述各[illegible]明[illegible]对（2024，2296）。伊本·西那和[illegible]进行检验；我们表明，目前尚无反例。

关键词： 亲和数对、梅森素数、费马素数。

1 引言

设 $\sigma(n)$ 表示真因数和（真因数）函数

$$\sigma(n) := \sum_{p|n, p<n} p, \qquad n \in \mathbb{N} = \{1,2,\cdots\}. \tag{1}$$

若两个正整数 $m, n \in \mathrm{N}$ 满足 $\sigma(m) = n, \sigma(n) = m.$，则称它们为亲和数。亲和数对的一个例子是迄今已知最小的亲和数对 $(220, 284)$.。据 Heath [6, p. 75], 记载，扬布利柯将这对数归于毕达哥拉斯（公元前500年）。已知最早的亲和数对求取规则是萨比特·伊本·库拉提出的规则，[3, 10] and [12, p. 278]。本文中，我们对 $n \in \mathrm{N}$ 使用以下记号：

$$\left.\begin{aligned} &a_n := 3 \times 2^{n-1} - 1, \quad b_n := 3 \times 2^n - 1, \quad c_n := 9 \times 2^{2n-1} - 1, \\ &r_n := 2^n \times a_n \times b_n, \qquad s_n := 2^n \times c_n, \qquad m_n := 2^n - 1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

萨比特·伊本·库拉在证明九个预备引理后，证明了以下定理。

定理 1。设 $n > 1$。如果 a_n、b_n、c_n 是素数，那么 r_n、s_n 是亲和数。

该规则不仅为提取亲和数对确立了充分条件，还以闭式给出了这些数对。已知的第一对毕达哥拉斯数对（220, 284）对应于 $n = 2$。第二对对应于 $n = 4$，即（17296,18416），归于费马；第三对对应于 $n = 7$，即（9363584,9437056），归于笛卡尔。他们二人都在 1636—1638 年间重新发现了萨比特·伊本·库拉规则。然而，Rashed 在 [11] 中指出，（17296,18416）这一数对是由 al-Fārisī 计算出的，远早于费马，即早于 1319, [12, 第284页—285], ，甚至早至 1307, [12, 第 313], 页或 1300 [3, 16, 第 viii 页]。还有一些著作将法里西—费马数对归于萨比特·伊本·库拉本人，但这一论断需要更多证据，[4, 7] 以及 [13, 第 337] 页。与第二对的情况不同，al-Yazdī（卒于 1637 年）在其《算术论》中声称发现了第三对，[12, 286] 因此，第三对（9363584,9437056）被认为是在 1600, [16, 第 viii 页]附近发现的。根据库拉规则，没有发现其他数对。下方的表1列出了依据萨比特·伊本·库拉规则推导出的三个已知亲和数对的相关计算，另见[3,16]。下方的引理 1 证明：如果 a_n、b_n 是素数，那么 r_n、s_n 是亲和数，当且仅当 c_n 是素数。

萨比特·伊本·库拉的法则在阿拉伯数学文献的数论中发挥着核心作用，参见 [11, 第 209-278] 页。在许多阿拉伯文献中，作者认为可以通过两种方式放宽充分条件。第一种是减少素数的数量。第二种方法是用其他计算成本较低的素数条件，替代要求 c_n 为素数这一条件；在 a_n、b_n 为素数的前提下，该条件对于 r_n、s_n 成为亲和数既是必要条件也是充分条件。例如，可以假设 m_{n+1} 为素数，即梅森素数。我们重点研究三位阿拉伯作者的著作：伊本·西那（约 980—1037 年）[15], 、al-Baghdādī（约

我们概述这三位作者的著作，并指出他们的论述所隐含的猜想，以及推导亲和数对时可能存在的陷阱。人们普遍认为，这三位科学家都只是在重复萨比特·伊本·库拉著名的亲和数对判定法。例如，在近期出版的卡西《*Miftāḥ al-hisāb*》（《算术之钥》）译本中，[1], 译者翻译了卡西关于亲和数对的论述，

，卡西把伊本·库拉的充分条件从三个减少到了。在[11. 中也没有人指出，这一重大错误导致卡西声称(2024, 2296)是另一对亲和数，但事实并非如此，因为

$$\sigma(2024) = 2296, \sigma(2296) = 2744 \neq 2024. \tag{3}$$

然而，在计算亲和数对的真因数时，卡西假定c_n是素数。这一对数是亲和数，因为 [illegible] 。根据 al-Baghdādī[2, 第231], 页，对于m、$n \in$，若Nm，则 [illegible] N是n的关数，如果$\sigma(m) = n$。此外，[12, 282] 中提到，伊本·西那和al-Baghdādī的论述也只是蔓比特·伊本·库拉 [illegible] 数，这一条 [illegible] $_{n+1}$ 是素数”，并保留另外两个条件，即a_n和 b_n 均为素数；参见[12, 第312]页。这不会导致已知的错误，但会引出一个未解决猜想。尽管如此，伊本·西那和al-Baghdādī的论述在形式上有所不同， [illegible] ；

2 伊本·西那《《算术篇》》中的亲和数对

在 [15], 中，伊本·西那通过将“c_n 是素数”这一条件替换为“m_{n+1} 是素数”，推导出了自己的规则。换言之[1]：

> 如果将偶偶数相加再加一，所得之和为素数；并且若将末项加到这些数上，再减去它的前一项，所得的增量与减量均为素数，那么将增量对应的数与减量对应的数相乘，再将所得结果乘以末项，便得到一个数及其亲和数；其亲和数等于将该数与末项乘以上述盈数和亏数之和相加所得的数，而这两个数互为亲和数。

偶偶数之和再加一等于

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = m_{n+1}. \tag{4}$$

因为：

$$\left.\begin{aligned} m_{n+1} + 2^n = 2^{n+1} - 1 + 2^n = 32^n - 1 = b_n, \\ m_{n+1} - 2^n = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1} = 32^{n-1} - 1 = a_n, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

并且

[1] 伊本·西那，《治疗之书》，算术（《算术篇》），[15, 第 28] 页。将奇数与偶数相加，若所得之和满足这样一个条件：把比它小的数加到它的末尾，再将所得数乘以加到它上面的数，便得到第一个数；又将所得数乘以减去它的数，便得到第二个数。然后，把上述两个数——由增加和减少之和所得的数，以及减去的数——相加，再将其乘以末尾的数。如此便得到一对亲和数。先前已找到的亲和数对，也可用此法检验。

$$\left.\begin{aligned} 2^n \times a_n \times b_n = r_n, \\ 2^n(a_n + b_n) + r_n = s_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

那么，b. Sīnā 的猜想可以表述为：[12, p. 312]:

猜想 1。设 $n > 1$。若 a_n、 b_n、 m_{n+1} 为素数，则 r_n、 s_n 为亲和数。

在 $n = 7$ 的情形下，根据定理得到了亚兹迪-笛卡尔数对 (9363584, 9437056)，这表明，尽管 a_n、 b_n、 c_n 为素数，$m_{7+1} = 255$ 却不是素数。因此，b. Sīnā 的猜想并不由上述定理 1 推出。正

$2^7 - 1$ $c_6 = 9 \times 2^{11} - 1$
中看到，的素性并不蕴含的素性，因为是素数，而不是素数。

现在的问题是证明或反驳 b. Sīnā 的猜想。我们从下面的引理开始。

引理 1。设 a_n, b_n, m_n 是素数。如果 c_n 不是素数，那么 r_n, s_n 就不是亲和数。

证明。由于 c_n 是合数，直接计算可得

$$\sigma(s_n) = \sigma(2^n c_n) > \sum_{k=0}^{n-1} 2^k c_n + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n a_n b_n = r_n.$$

■

引理 1 并不能证明猜想 1 是错误的。因此，猜想 1 is
如果我们能找到 n N, r , b_n, m_{n+1} 是素数，但 c_n 不是素数，那么猜想就是错误的；换言之，我们需要证明以下命题：

$$\exists n > 1\ (a_n \text{ is prime} \wedge b_n \text{ is prime} \wedge m_{n+1} \text{ is prime} \wedge c_n \text{ is not prime}). \tag{7}$$

因此，要反驳猜想 1，就需要一个反例。所以，我们首先寻找一个梅森素数 m_{n+1}，是否也 的充分条件是否得到满足。如果 a_n， b_n 也是素数，那么要完成反驳，就需要证明相应的 $c_n = a_n + b_n + a_n b_n$ 不是素数。由于目前已知的梅森素数只有 51 个[2], , 我们可以逐一检查它们，以寻找所需的反例。利用计算机代数系统 *Mathematica*，我们发现没有已知的反例能够反驳猜想 1，正如下面的表 3 所证明的那样。尽管a_n， b_n 以及 m_{n+1} 都是很大的数，但其素性可以通过简单的定理加以检验，例如 [9, 第 445], 页中所述的事实：如果 $n \equiv 1 \pmod 4$，，则 $3 \times 2^n - 1$ 不是素数，因为在这种情况

[2] https://www.mersenne.org/primes/

3 al-Baghdādī《*al-Takmila*》中的亲和数对

尽管下文将证明，al-Baghdādī 的论述引出了伊本·西那关于构造亲和数对的猜想，后者由一般规则。然而，他推导出第一对亲和数的方法颇为有趣。在他的论述中[3]：

> 收集亲和数的起始方法，是从偶偶数着手：我们从第一个偶偶数，也就是四开始，在它上面加一，得到五，这是一个素数；然后将这个五乘以二，再在结果上加一，得到十一。由于十一是素数，且从中减去四后，余数仍为素数，于是将它乘以五，再乘以四，也就是第一个偶偶数，得到二百二十，这是两个亲和数之一。若要得到第二个数，就将五与十一相加，得到十六，再乘以四，也就是第一个偶偶数，得到六十四；然后将它加到第一个数二百二十上，得到二百八十四，这就是第二个数。

上述描述仅由 al-Baghdādī 用于确立第一个亲和数对，因为 al-Baghdādī 在计

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2^n + 1, \\ \beta_n &= 2(2^n + 1) + 1 = 2^{n+1} + 3, \\ \gamma_n &= \beta_n - 2^n = 2^n + 3. \end{aligned}$$

那么以下数是亲和数

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 2^n \alpha_n \beta_n = 2^{3n+1} + 5\,2^{2n} + 3\,2^n, \\ \mu_n &= 2^n(\alpha_n + \beta_n) + 2^n \alpha_n \beta_n = 2^{3n+1} + 8\,2^{2n} + 7\,2^n. \end{aligned}$$

[3] al-Baghdādī, 《*al-Takmila*》, [2, 第 230] 页。若亲和数对由两个数构成，我们便从第一对开始：其为四，并在其上加一，得到五；然后将这个五乘以二，并在所得数上加一，得到十一；如果它是素数，即十一为素数，则将五乘以二十，得到二百，而二百是第一对亲和数中的四个数之一。若我们想求第二个数，就将四从二百中减去，再相加，所得为二百零四；然后将其加到第一个数上，得到二百六十四，即第一对亲和数中的第二个数。

如果 [illegible] 那么

$$\alpha_2 = 5, \quad \beta_2 = 11, \quad \gamma_2 = 7, \quad \lambda_2 = 220, \quad \mu_2 = 284.$$

al-Baghdādī 推导出第一个亲和数对时所隐含的第一个猜想如下。

猜想 2。设 $n > 1$。若 α_n、β_n、γ_n 是素数，则 λ_n、μ_n 是亲和数对。

猜想 2 与猜想 1 之间没有关联。例如请注意，λ_n、μ_n 与 r、s 不同，它们分别是：

$$\begin{aligned} r_n &= {}^{n}\ {}^{n}\ 9\,2^{3n-1} - 9\,2^{2n-1} + 2^n, \\ s_n &= 9\,2^{3n-1} - 2^n. \end{aligned}$$

有一些线索让我们相信，他在寻找第一个亲和数对时，心中想的是猜想 2。其中一些线索

• 与直接给出 (220, 284) 作为例子的伊本·西那不同，al-Baghdādī 以算法的形式描[illegible] 284) 时，需要检验 γ_2（即 7）的素性，尽管这[illegible]第一个亲和数对毫无作用，因为 7 既不是 220 的真因数，也不是 284 的真因数。• 另一个原因是，他要求一个费马数 α_2（即 5）为素数；然而，在他的通用算法中，费马素数并不起任何作用，而梅森素数则发挥作用，正如我们稍后将看到的 b. 西纳的猜想那样。由于已知的费马素数只有 $f_n = 2^n + 1$，即与 [14],相对应的那些数

$$n = 0, 1, 2, 4, 8, 16,$$

检查这些情形，并如表 4 所示，我们看到 α_n、β_n、γ_n 只有在 [illegible] 时才是素 [illegible]

[illegible] $(\lambda_n) = \mu_n$，会得到方程

$$2^{3n+1} + 9\,2^{2n} + 5\,2^n - 8 = 2^{3n+1} + 8\,2^{2n} + 7\,2^n,$$

这会导致 [illegible] o the equation

$$2^{2n} - 2^{n+1} - 8 = 0,$$

而后一种情况发生在一个 [illegible] d only when $n = 2$.

al-Baghdādī 在推导出第一个亲和数对时，很可能并未想到这个猜想；他 [illegible]

[illegible]第 [illegible] 亲和数对时！

还是说，他原本会采用上述所描述的一般算法——正如我们将看到的，该算法

现在让我们陈述 al-Baghdādī 的一般算法，并证明它实际上只是伊本·西那的猜想。他指

> 若要得到下一个亲和数，我们将十一乘以二，五也乘以二，并分别在所得结果上加一，然后检验：若它们各自都是素数，并且从前面所减之数之后的下一个偶偶数中减去我们先前减去的数，所得差为素数，则将这两个素数相乘，再将所得结果乘以第二个偶偶数，即八。若它们不是素数，则无法由此得到一对亲和数；此时须将它们各自乘以二，并在各自所得结果上加一，不断重复，直到它们成为素数，再将两者相乘，然后将所得结果乘以相应序位的偶偶数，所得结果便是两个亲和数之一。这就是它的计算方法。

用数学术语来说，al-Baghdādī 指出：若

$$\begin{aligned} A_n &= 5\,2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1, \\ B_n &= 11\,2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1, \\ M_n &= B_n - 2^{n+2} \end{aligned}$$

是素数，那么

$$R_n \coloneqq 2^n \times A_n \times B_n, \qquad S_n \coloneqq 2^n(A_n + B_n) + R_n$$

两数便是亲和数。简化后可得：

$$\begin{aligned} A_n &= 3\,2^{n+1} - 1 = a_{n+2}, \\ B_n &= 3\,2^{n+2} - 1 = b_{n+2}, \\ M_n &= 2^{n+3} = m_{n+3}. \end{aligned}$$

因此，$R_n = r_{n+2}$、 以及 al-Baghdādī 的说法，与伊本·西那的说法完全一致，

一个悬而未决的问题是，为什么他们二人都把 的素性替换成了 m_{n+1}的素性？ 共同来源？两位作者是否相互交流过？有一些论据表明，这些观点并未交流过。首先，两种说法并不相同，尽管它们导向同一个猜想。其-

[4] al-Baghdādī，*al-Takmila*，[2, 第 230-231] 页：如果我们想求出此后与之亲和的数，就把十一乘以五，二者都是二；再把所得乘积加一，然后观察。如果每个数都是素数，那么就将其一除以二，所得商的下一个偶数便是另一个数。若二者并非素数，则其中一个数不会是另一个数的因数；于是我们将二者相乘，再将所得乘积加一，便得到一个数。然后应将第二对中的两个数相乘，得八；接着如此继续，直到二者满足条件并成为亲和数。然后，我们将所得数乘以其所在次序中的偶数对的偶数，再将结果乘以另一个数，直到这两个数都是素数。这便是此法。亲和数中的一个数

其次，al-Baghdādī 在 [2] 中明确指出，　　与　　之间不存在完全数；而伊本·

4　卡西《《算术之钥》》中的亲和数对

在《《算术之钥》》（《算术之钥》）一书中，卡西提出了自己求取亲和数对的规则[7]，

> 若要找出两个亲和数——即两个数，使得每个数的真因数之和等于另一个数——那么我们就从二的幂中寻找一个数：将它乘以一又二分之一，再乘以三；然后从这两个乘积中各减去一。若所得余数除了一以外没有其他公因数（如果存在这样的数），我们便称第一个余数为第一个奇数，第二个余数为第二个奇数。第二个奇数必定比第一个奇数的两倍大一。接着，将第一个奇数乘以第二个奇数，称所得结果为第三个奇数。然后，将这个二的幂中的数分别乘以第三个奇数，以及第一个奇数与第二个奇数之和。第一个乘积就是两个亲和数中的一个；再将第二个乘积加到它上面，所得之和便是另一个亲和数。

将上述译本与[4, 第121], 页相比较，我们采用了更为恰当的术语。例如，我们使用了幂一月（فيعاضت）一词来表示幂，正如

---

[5] al-Baghdādī,《al-Takmila》，[2, 第227]页。[6] 伊本·西那，《治疗之书》，《算术》（《算术篇》），[15, 第32]页。事实上，他的说法令人困惑，因为他说：“须知，完全数必定是偶数，因为它由一个奇数与一个偶数相乘而成。众所周知，在个位数中有一个完全数是六，在十位数中有一个是二十八，在百位数中有一个是四百九十六，在千位数中有一个是八千一百二十，此后每个数位类别中也都有一个完全数，其个位数字为六或八，尽管从经验来看，它们并不必然交替出现。”因此，既然他知道6和8不一定交替出现，他就应该知道第五个和第六个完全数，它们的个位数都是6，即33550336和8589869056。由此他也应该知道，　与　之间不存在完全数。[7] 在《算术之钥》第223页，卡西将他的规则表述如下：如果我们想找出两个数，使其中每一个数的各因数之和都等于另一个数，那么就取两个相邻奇数并将它们分别乘以2的倍数，一次乘以2，一[illegible]乘以2，如此等等，从每个乘积中减去1。如果所得的余数中有一个是1，就称它为第一个奇数；其余数都不为1的余数必须是偶数。把第一个奇数乘以第二个奇数，所得之积称为第三个奇数；再将第一个奇数乘以第二个奇数，然后将所得的数加到第一个奇数的两倍上。把这个数乘以2的倍数，一次乘以2，一次乘以3，如此等等；每次都将所得的乘积加到第二个奇数上。最终所得的数，就是这两个相邻数中的一个。

[8, 第209][8]页所示。现在让我们将卡西的规则译为数学语言。我们从一个数 开始，然后定义

$$\frac{3}{2}\times 2^n-1,\ \ 3\times 2^n-1,$$

它们分别仅为 a_n 和 b_n。并且，如果 a_n 和 b_n 是素数，那么

$$2^n\times(a_n\ b_n),\ 2^n\times(a_n+\ b_n)+2^n\times(a_n\ b_n),$$

二者是亲和数对。注意，和 卡西的猜想可以表述如下

being that these last two numbers are clearly r

猜想 3。 如果 a_n、 b_n 是素数，那么 r_n、 s_n 是亲和数对。

很容易看出这个猜想是错误的，因为从表1中可以看到，当$n=3$时， $a_3=11$、 $b_3=23$ 都是素数，但$r_3=2024$、 $s_3=2296$ 并非亲和数对，正如我们上文所指出的。卡西没有假设c_n具有素性，已经有[illegible]的猜想那样，假设相应的梅森素数具有素性。我们也可以认为他忘记了这两个假设，或者干脆忽略了它们，但事实并非如此，因为他在书中推导出了错误的亲和数对（2024，2296）。我们从上面的公式（8）已经看到， $\sigma(2024)=2296$，即2024是2296的父数。事实上，根据以下引理，只要a_n、 b_n 是素数，无论c_n 是否为素数，情况总是如此。

引理 2。设 a_n, b_n 是素数。那么 r_n 是s_n的父数，即 $\sigma(r_n)=s_n$。

证明。由于 a_n, b_n 是素数，因此

$$\begin{aligned}\sigma(2^n a_n b_n) &= \sum_{k=0}^{n}2^k+\sum_{k=0}^{n}2^k a_n+\sum_{k=0}^{n}2^k b_n+\sum_{k=0}^{n-1}2^k a_n\ b_n\\ &= \sum_{k=0}^{n}2^k\ (1+a_n+b_n)+\sum_{k=0}^{n-1}2^k a_n\ b_n.\end{aligned}\tag{9}$$

But

$$\begin{aligned}1+a_n+b_n &= 1+3\ 2^{n-1}-1+3\ 2^n-1\\ &= 9\ 2^{n-1}-1,\end{aligned}\tag{10}$$

and

$$\begin{aligned}a_n b_n &= (3\ 2^{n-1}-1)(\ 3\ 2^n-1)\\ &= 9\ 2^{2n-1}-9\ 2^{n-1}+1.\end{aligned}\tag{11}$$

合并方程 9) 得到ons (10) and (11) with Equation (

$$\sigma(2^n a_n b_n) = (2^{n+1}-1)\ (9\ 2^{n-1}-1)\tag{12}$$

[8] 同上，第 223 页。卡西在第九条规则中将一的幂和定义为可以反复减半直至得到 2 的数。另见 [4, 第 79]

$$\begin{aligned} & +(2^n-1)\,(9\,2^{2n-1}-9\,2^{n-1}+1) \\ = \quad & 9\,2^{2n}-9\,2^{n-1}-2^{n+1}+1 \\ & 9\,2^{3n-1}-9\,2^{2n-1}-9\,2^{2n-1}+9\,2^{n-1}+2^n-1. \end{aligned}$$

由于 $9\,2^{2n-1}+9\,2^{2n-1}=9\,2^{2n}$, and $2^{n+1}-2^n=2^n$, then (12) 直接将我们引向

$$\begin{aligned} \sigma(2^n a_n b_n) \quad & = \quad 9\,2^{3n-1}-2^n \\ & = \quad 2^n\,(9\,2^{2n-1}-1)=s_n. \end{aligned} \tag{13}$$

至此，证明完成。 □

在计算过程中，卡西得出了第一组亲和数对 (220, 284) 和错误的一组 (2024, 2296), [8, 第 224-225] 页和 [1, 第 121-125]页。此外，在 [8,第 223-225] 页和 [1, 第 123-125] 页中，他列出了这两组亲和数对的所有真因数，其中对于 $r_n =$ $(a_n\ b_n)$，这些真因数为:

$$1,2,\cdots,2^n,a_n,2a_n,\cdots,2^n a_n,b_n,2b_n,\cdots,2^n b_n,a_n b_n,2a_n b_n,\cdots,2^{n-1}a_n b_n,$$

而对于 $s_n =$ $(a_n+\ b_n+a_n\ b_n)$, c_n 这些真因数为

$$1,2,\cdots,2^n,1,2,\cdots,2^n,c_n,2c_n,\cdots,2^{n-1}c_n.$$

因此，可以认为他假定 c_n 是素数，但没有明确说明。此外，由于他没有注意到 $c_3=287$ 不是素数，因此推导出了错误的一组数，而且真因数表 [8, 第 225] 页和 [1, 第 125] 页也有误。无论是在 [1, 第 121-125] 页的评注中，还是在 [8, 第 223-225 页、第 322] 页中，都没有指出这一错误。

5 附录

本附录包含与上文讨论的定理和猜想相关的计算表。第一张表列出了根据萨比特·本·古拉规则计算出的前三个亲和数对。请注意，$n=3$ 这种情况不会产生亲和数对。但我们仍将其列出，因为后文会提到它。

表1。 使用萨比特·本·古拉规则得出的亲和数对及其发现者。

n	a_n	b_n	c_n	r_n	s_n	发现者
2	5	11	71	220	284	毕达哥拉斯（公元前500年）
3	11	23	287	2024	2296	不存在亲和数对
4	23	47	1151	17296	18416	费马（1636年） al-Fārisī（卒于1320）
7	191	383	73727	9363584	9437056	Descatres（1638） al-Yazdī（卒于1637）

下一张表，即表2，专门列出与伊本·西那—巴格达迪猜想相关的计算结果。正如我们所看

〔9363584,9437(

表2。 根据伊本·西那与 al-Baghdādī 的猜想得出的亲和数对。

n	a_n	b_n	c_n	m_{n+1}	r_n	s_n
2	5	11	71	7	220	284
3	11	23	287	15	2024	2296
4	23	47	1151	31	17296	18416
7	191	383	73727	255	9363584	9437056

表3旨在寻找反例，以推翻伊本·西那与 al-Baghdādī 的猜想。我们利用所有已知梅森素数，[illegible]。如我们所见，没有已知实例能够满足命题（7）。列出 $n=1$ 这一情形仅为补全表格。

表3。 对所有已知的51个梅森素数 m_n进行检验，以寻找能够推翻西纳- al-Baghdādī的猜想。

n	m_{n+1} is 素数	$a_n \wedge b_n$ are 素数	n	m_{n+1} is 素数	$a_n \wedge b_n$ are 素数	n	m_{n+1} is 素数	$a_n \wedge b_n$ are 素数
1	T	T	3216	T	F	1398268	T	F
2	T	T	4252	T	F	2976220	T	F
4	T	T	4422	T	F	3021376	T	F
6	T	F	9688	T	F	6972592	T	F
12	T	F	9940	T	F	13466916	T	F
16	T	F	11212	T	F	20996010	T	F
18	T	F	19936	T	F	24036582	T	F
30	T	F	21700	T	F	25964950	T	F
60	T	F	23208	T	F	30402456	T	F
88	T	F	44496	T	F	32582656	T	F
106	T	F	86242	T	F	37156666	T	F
126	T	F	110502	T	F	42643800	T	F
520	T	F	132048	T	F	43112608	T	F
606	T	F	216090	T	F	57885160	T	F
1278	T	F	756838	T	F	74207280	T	F
2202	T	F	859432	T	F	77232916	T	F
2280	T	F	1257786	T	F	82589932	T	F

表 4 检验了猜想 2 对已知费马素数是否成立；由此可见，不存在反例。然而，上文已证明这一猜想是错误的。尽管如此，al-Baghdādī 并未明确提出这一猜想，但基于上述原因，他在寻找亲和数对 (220, 284) 时，或许曾想到过这一猜

表 4. 素性计算 关于 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

n	α_n 是素数	$\beta_n \wedge \gamma_n$ 是素数
2	T	T
4	T	F
8	T	F
16	T	F

参考文献

1. Aydin, N., Hammoudi,L., Bakbouk, G..：卡西的《算术之钥》，第三卷：代数译本与评注。Birkhäuser，柏林（2022年）。2. al-Baghdādī, ʿA.：《算术补遗》，编者 A. S. Saidan。阿拉伯手稿研究所，科威特萨法特（1985年）。3. Borho, W., Hoffmann, H.：大量生成亲和数。《计算数学》46(137)，281-293（1986年）。4. Brentjes, S., Hog dijk, J.P.：关于萨比特·伊本·库拉及其亲和数法则的札记。《数学史》16(4)，373-378（1989年）。5. Dickson, L.E.：《数论史》，第 1 卷。Stechert，纽约（1934年）。6. Heat., T.：《希腊数学史》。第一卷：从泰勒斯到欧几里得。Dover，纽约（1981年）。7. Hogendijk, J.P.：萨比特·伊本·库拉与亲和数对 17296,18416。《数学史》12(3)，269-273（1985年）。8. al-Kāshī, J.：《算术之钥》，编者 A. S. al-Dimirdāsh 和 M. H. al-Hifnī。Dār al-kītāb al- Arābī，开罗（196ʼ年）。9. Lehmer, D.H.：，卡斯函数的扩展理论。《数学年刊》31(3)，419-448（1930年）。10. Rashed, R.：十三ème 与十四ème 世纪的相亲数、约数部分与形数。《精密科学史档案》28(2)，107–147（1983年）。11. Rashed, R.：《相亲数与组合分析史料》。《阿拉伯科学史杂志》6(1 之间 年）。13. Rashed, R.：《从花拉子米到笛卡尔的古典数学》。Routledg，纽约（2015年）。14. Robinson, R.M.：关于形如 $k \cdot 2^n + 1$ 的素数及费马数因子的报告。《美国数学会会刊》9(5)，673-681（1958年）。15. ibn Sīnā, al-H.：《治疗之书·算术（《算术篇》）》，编者 ʿA. Maẓhar。埃及国家图书总局，开罗（1975年）。16. Yan, S.Y.：《完全数、相亲数与亲和数：一种计算方法》。World Scientific，新加坡（1996年）。