Vizing 猜想成立 *

Jonathan Narboni[1,2]

[1]*CNRS*、*LaBRI*、波尔多大学，法国。[2]雅盖隆大学数学与计算机科学学院理论计算机科学系，克拉科夫，波兰

arXiv:2302.12914v1 [math.CO] 24 Feb 2023

摘要

1964年，Vizing 证明，从图 G 的任意 k-边着色出发，只使用 Kempe 交换，就可以得到 G 的一个 $(\Delta+1)$-边着色，其中 Δ 是 G 的最大度。一年后，他猜想，如果存在 G 的一个 Δ-边着色，也可以通过这种方式得到。Bonamy 等人 证明，该猜想对无三角形图成立。本文证明该猜想对所有图都成立。

1 引言

1964年，Vizing 证明了图的色指数G（即将G的边进行正常着色所需的最少颜色数）记为$\chi'(G)$，至多为$\Delta(G)+1$种颜色，其中$\Delta(G)$是G的最大度。

定理1。 任何简单图 G 都满足 $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$。

该证明高度依赖于***Kempe*** 变换的使用。Kempe 在试图证明四色定理时引入了 Kempe 变换，尽管这次尝试并未成功，但事实证明，这一概念后来成为图着色中最富有成果的工具之一。在本文中，我们只考虑正常边着色，因此只用“着色”来表示正常边着色。给定一个图 G 和一个着色 β，Kempe 链 C 是一个极大的双色连通分量（Kempe 链最初是在顶点着色的背景下提出的，但其原理对于边着色仍然相同）。对 C 应用***Kempe*** 交换 （或 Kempe 变换）就是交换该连通分量中的两种颜色。由于 C 是极大的，交换后得到的着色必然是正常着色；如果 C 不是包含这两种颜色的唯一极大双色连通分量，那么交换后得到的着色将不同于 β，因为边的划分发生了变化。

Kempe 交换在图 G 的着色集合上诱导出一个等价关系；如果存在一个 Kempe 交换序列，能将 β 转换为 β'，那么两个着色 β 和 β' 等价。1964年，Vizing 实际上证明了一个更强的结论：他证明了图 G（其中 $k > \Delta(G)$）的任意 k-着色，都等价于 G 的一个（$\Delta(G)+1$）-着色。

定理 2. 设 G 是一个图，β 是 G 的一个 k-着色（其中 $k > \Delta(G)$）。那么存在一个$(\Delta(G)+1)$-着色 β'，它与 β 等价。

*作者获得波兰国家科学中心资助，项目编号为 2019/34/E/ST6/00443。

请注意，有些图只需要 Δ 种颜色就能得到正确着色。一年后，Vizing 证明了这一结果可推广到多重图，并提出了以下问题：

问题3。对于任意（多重）图 G 以及其任意一个 k-着色 β，是否总存在一个与 β 等价的最优着色?

请注意，在定理1 和问题3 中，我们都无法选择目标着色。如果可以指定一个目标最优着色，那么这个问题就可以重新表述为一个重配置问题。

问题4。对于任意（多重）图 G 及其任意一个 k-着色 β，是否任意最优着色都与 β 等价?

若问题4 的答案为肯定，则可推出以下猜想，因为只需将最优目标着色作为两个非最优着色之间的中间着色即可。

猜想5。任意两个非最优着色都等价。

Mohar 证明了较弱的情形：只需增加一种颜色 [Moh06]。

定理6 （[Moh06]）。所有 $(\chi'(G)+2)$-颜色着色都是等价的。

在考虑更强的情形时，McDonald 等人证明了该猜想对最大度为 3 [MMS12]，的图成立；Asratian 和 Casselgren 证明了该猜想对最大度为 4 [AC16]，的图成立，Bonamy 等人则证明了该猜想对无三角形图成立。本文证明该猜想对所有图都成立。

定理 7。设 G 为一个图，其所有 $(\chi'(G)+1)$-边着色都是*Kempe*等价的。

定理 7 是以下引理的直接推论，而该引理是本文的主要结果。

引理8。设 G 为一个图，G 的任意 $(\chi'(G)+1)$-颜色着色都与 G的任意 $\chi'(G)$-颜色着色等价。

2 证明的一般设定

证明沿用了 [BDK+21]的技术设定；本节将介绍这一设定，并概述主要结果的证明。

2.1 化归为 $\chi'(G)$-正则图

证明的一般设定沿袭自 [BDK+21]，而后者又沿袭自 [MMS12]和 [AC16]。我们首先证明，可以将问题化归到正则图这一类。事实上，给定一个图 G 和一个着色 β，我们可以构造一个图 G'，使得：

- G' 是 $\chi'(G)$-正则的，
- 着色 β 可以扩展为 G'的一个着色 β'，并且
- 如果一个着色 γ' 等价于 G'中的 β'，那么将 γ' 限制到 G 等价于 β.

为了构造 G'，我们逐步构建一个序列 $G_1,\cdots,G_t=G'$，在每一步中，$\delta(G_{i+1})=\delta(G_i)+1$（其中 $\delta(G_i)$ 是 G_i 的最小度）。对于任意 G_i，图 G_{i+1} 按如下方式构造：

- 取两份 G_i，并且
- 添加 当该顶点在.....中的度为最小度时，该顶点与其副本之间的一组匹配 G_i.

显然， G' 是 $\chi'(G)$-正则的。要将 G_i 的一个着色扩展为 G_{i+1}的一个着色，只需将该着色复制到 G_i的每个副本上。由于匹配中的边连接的是度为最小度的两个顶点，这些边总能有可用的颜色。此外， G_i 中的一次 Kempe 交换在 G_{i+1}中有自然的推广：如果 G_i 中的一次交换对应于 G_{i+1}中的多次交换，只需在 G_{i+1}中所有对应的连通分量上执行交换即可。从现在起，我们只考虑 χ'-正则图。

请注意，正则图中的着色更容易处理，因为以下两个性质均成立：

- 对于 $\chi'(G)$-正则图 G的任意一个$(\Delta(G))$-着色，每个顶点 v 都恰好关联一条每种颜色的边，并且每个颜色类都是完美匹配；以及
- 对于 $\chi'(G)$-正则图 G的任意 $(\Delta(G)+1)$-着色 α，每个顶点 v 都关联着除一种颜色外的所有颜色。我们称这种颜色为顶点 v处的缺失颜色，并记作 $m_\alpha(v)$（当着色的含义明确时，我们通常省略 α）。

从现在起，在本文余下部分中，我们只考虑 χ'-正则图。

2.2 好边、坏边与丑边

定理 7 的一般证明思路是对色指数进行归纳。给定图 G、一个 $\Delta(G)$-着色 α 以及一个 $(\Delta(G)+1)$-着色 β，我们的目标是找到一列 Kempe 交换，将 β 变换为 α。为此，我们考虑 α 中的一个颜色类，例如颜色为 1 的边。这些边在 G中构成一个完美匹配 M；因此，如果我们能找到一个与 β 等价的着色 β'，使得对于任意边 e, $\beta'(e) = 1 \Leftrightarrow \alpha(e) = 1$，那么我们就可以对 $G' = G \setminus M$应用归纳法。注意到 $\chi'(G') = \chi'(G) - 1$，且 α和 β'在 G'上的限制分别只使用 $\Delta(G) - 1$和 $\Delta(G)$种颜色。

因此，给定 G 的一个（$\Delta(G)+1$）-着色 β，我们可以将 G 的边划分为三个集合，一条边 e 被称为：

- 好边，如果 $e \in M$和 $\beta(e) = 1$,
- 坏边，如果 $e \in M$和 $\beta(e) \neq 1$，以及
- 丑边，如果 $e \notin M$和 $\beta(e) = 1$。

缺少颜色 1 的顶点称为自由顶点。为导出矛盾，我们假设 β不等价于 α，并考虑一个（$\Delta(G)+1$）-着色 β'，它等价于 β，并且在所有等价于 β 且坏边数量最少的着色中，使丑边数量最少；我们称这样的着色为极小着色。因此，如果我们能找到一个等价于 β' 的着色 β''，使坏边数量严格少于 β' 中的数量，或者在坏边数量相同的情况下丑边更少，就会得到矛盾。

2.3 扇形工具

在其对 64 的证明中，Vizing 引入了一种技术工具，以非常受控的方式在边着色上应用 Kempe 交换：*Vizing* 扇。要定义它们，我们首先需要定义一个辅助有向图。给定一个图 G、一个 $(\Delta(G)+1)$-着色 β of G 以及一个顶点 v，有向图D_v 定义如下：

- D_v 的顶点集是与 v关联的边的集合，并且
- 如果边 vv_2 在 v_1处被赋予缺失颜色，我们就在两个顶点 vv_1 和 vv_2 之间添加一条弧。

从边 e开始、围绕 v 的扇，记作 $X_v(e)$，是从边 e可达的 D_v 的极大顶点序列。有时，讨论扇的起始边的颜色会更方便：若 c 是一种颜色，则 $X_v(c)$ 表示围绕 v 、从与 v关联且颜色为 c 的边开始的扇。注意，由于图 G 是 $\chi'(G)$-正则的，每个顶点恰好缺少一种颜色，因此在有向图 D_v 中，每个顶点的出度至多为 1。因此，扇 $\mathcal{X}$定义良好，而扇 $\mathcal{X}$ 只有以下三种可能：

- $\mathcal{X}$是一条路径，
- $\mathcal{X}$是一个圈，或者
- $\mathcal{X}$是一颗彗星（即一条路径，并且在路径的汇点与某个内部顶点之间另有一条弧）。

如果 $X=(vv_1,\cdots,vv_k)$ 是一个扇，则称 v 为该扇的中心顶点，并分别称 vv_1 和 vv_k 为该扇的第一条边和最后一条边（类似地， v_1 和 v_k 分别是 X 的第一个顶点和最后一个顶点）。

给定 G 的一个 $(\Delta(G)+1)$-着色 β，以及一个绕顶点 v 的圈 $\mathcal{X}=(vv_1,\cdots,vv_k)$，其中每个顶点 v_i 都缺少颜色 i（因此每条边 vv_i 都着色为 $(i-1)$），我们可以如下定义着色 $\beta'=X^{-1}(\beta)$:

- 对于任何不在 $\mathcal{X}$ 中的边 vv_i， $\beta'(vv_i)=\beta(vv_i)$，并且
- for any edge vv_i in $\mathcal{X}$, $\beta'(vv_i)=i$ and $m(v_i)=i-1$

着色 $\mathcal{X}^{-1}(\beta)$ 称为 $\mathcal{X}$ 的反演，如果 $\mathcal{X}$ 和$\mathcal{X}^{-1}(\beta)$ 等价，我们就称 X 是可逆的。本文证明，在任何着色中，任意圈都是可逆的。

引理 9. 在任意一个 $\chi'(G)$-正则图 G 的 $(\chi'(G)+1)$-着色中，任意一个圈都是可逆的。

我们在第 9 节 2.4 证明引理，并在此证明定理 7。定理 7 的证明源自 [BDK+21] 中定理 1.6 的证明。我们首先需要 [BDK+21] 和 [AC16] 中的以下结果，并在此重新表述（略作不同）。

观察 10 ([BDK+21])。 在极小着色中，每条坏边都与一条丑边相邻。

引理 11 ([BDK+21])。 在极小着色中，任意一条丑边 uv 都满足，扇 $X_v(uv)$和 $X_u(uv)$都是圈。

引理 12 ([AC16])。 在极小着色中，一条丑边的两个端点都与一个自由顶点相邻。

我们首先证明，在极小着色中，总存在一条与丑边相邻且与自由顶点关联的坏边。

引理 13。 在极小着色中，存在一条与丑边相邻且与自由顶点关联的坏边。

证明。设 β 是一个极小着色，若 β 中不存在坏边，则 M 的所有边在 β 中都被着成颜色 1，正如所需。因此存在一条坏边 e 位于 β 中，并且根据观察 10，e 与一条丑边相邻。根据引理 12，存在一个自由顶点 u 与 e' 的一个端点相邻。由于 u 是一个自由顶点，u 与一条坏边关联；我们将 v 记为 u 的邻点，使得边 uv 是坏边。若 v 是一个自由顶点，则我们交换单边 uv，从而得到一个坏边更少的着色，因此 v 不是自由的，于是 uv 与一条丑边相邻；证毕。 □

现在我们已经准备好证明定理 7，但首先需要介绍一些术语和记号。给定一个着色 α，对于任意一对颜色 a、b，我们用 $K(a,b)$ 表示 G 中由颜色为 a 和 b 的边导出的图。涉及这两种颜色且包含元素 $x \in V(G) \cup E(G)$ 的 Kempe 链记作 $K_x^\alpha(a,b)$（当上下文中的着色明确时，我们通常省略 α）。需要注意的是，如果 a、b、c 和 d 是 4 种不同的颜色，那么在交换 $K(a,b)$ 的一个连通分量之前或之后交换 $K(c,d)$ 的一个连通分量，在两次交换后得到的着色相同。

还要注意，在边着色中，任意 Kempe 链 $K(a,b)$ 都是最大度为 2 的连通二分子图，因此它要么是一条路径，要么是一个偶圈。为了区分可以是路径或圈的扇的概念，当 Kempe 分量 C of $K(a,b)$ 是一条路径（分别为一个偶圈）时，我们称 C 是一条 (a,b)-双色路径（分别为一条 (a,b)-双色圈）。如果 u 是一个缺少颜色 a 的顶点，那么 $K_u(a,b)$ 是一条 (a,b)-双色路径，其端点为 u 和另一个缺少 a 或 b 的顶点。

定理 7 的证明。令 β 为一个极小着色。根据引理 13，存在一条坏边 uv，使得 u 是空闲的，且 v 与一条丑边 vw关联。根据引理 11，扇 $X_v(vw)$ 和 $X_w(vw)$ 都是圈。顶点 v 不属于 $X_v(vw)$，否则，根据引理 9，我们对 $X_v(vw)$进行反演，从而得到一个坏边更少的着色。因此，顶点 w 缺少一种不同于 $c = \beta(uv)$的颜色 c'（否则，$X_v(vw)$就是一个包含u、大小为 2 的圈）。现在考虑连通分量 $C = K_w(c,c')$。注意到，由于 w 缺少颜色 c'，该连通分量是一条 (c,c') 双色路径。如果连通分量 C 不包含顶点v，那么我们交换它，得到一种着色，其中 w 缺少边 uv 的颜色，结论便得证。因此，C 包含 v，我们必须区分 v 在 C 中位于 u 和 w 之间，还是 u位于 w 和 v之间。

情形 13.1（u 位于 w 和 v 之间的 C中）。
在此情形下，根据引理9，我们可以反演 $X_v(vw)$，从而得到一种着色，其中连通分量$K_w(c, c')$现在是一个 (c, c')-双色圈，我们对其进行交换。在交换后得到的着色中，$X_v(uv)$是一个圈，因此根据引理9 我们可以对其进行反演，从而得到一种坏边严格更少的着色；这就产生了矛盾。

情形 13.2（v 位于 w 和 u 之间的 C中）。
在这种情况下，我们考虑圈 $X_w(vw)$。如果它不包含顶点 u，则根据引理 9 对其进行反演，从而得到一种着色，其中 u 和 v 是空闲的，因此只需交换边 uv，即可得到坏边严格更少的着色。因此，顶点 u 属于 $X_w(vw)$。对这个圈进行反演后，我们得到一种极小着色，其中 uv 仍是坏的，v 是空闲的，而 uw 是丑边（在这种着色中，边 vw 不再是丑边）。根据引理 11，扇 $X_u(uw)$ 是一个圈。现在的情况与前一种情形相似：我们对圈 $X_u(uw)$ 进行反演，得到一种着色，其中连通分量 $K_w(c,c')$ 是一个 (c,c')-双色圈。交换这个圈后，我们得到一种极小着色，其中 $X_u(uv)$ 是一个圈。对这个圈进行反演后，我们得到一种坏边少一条的着色；这就产生了矛盾。

□

2.4 总体概述与记号

证明采用关于圈大小的归纳法。为导出矛盾，假设存在不可逆环。一个最小圈 $\mathcal{V}$ 是大小最小的不可逆环（即在任何着色中，任何更小的圈都是可逆的）。

大小为 2 的圈显然是可逆的，因为它仅由一条恰好包含两条边的 Kempe 链组成：要反演该圈，只需在这个连通分量上进行一次 Kempe 交换；因此，最小圈的大小至少为 3。

现在我们还需要引入一些记号。对于任意扇 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$，$V(\mathcal{V})$ 表示顶点 $\{v_1, \cdots v_k\}$ 的集合，而 $E(\mathcal{V})$ 表示边 $\{vv_1, \cdots vv_k\}$ 的集合。我们用 $\beta(\mathcal{V})$ 表示 $\mathcal{V}$ 中涉及的颜色集合（即 $\beta(\mathcal{V}) = \beta(E(\mathcal{V})) \cup m(V(\mathcal{V})) \cup m(v)$）；如果 $\mathcal{V}$ 涉及颜色 c，则 $M(X, c)$ 表示 $V(\mathcal{V})$ 中缺少颜色 c 的顶点。扇在其顶点（分别在其边）上自然诱导出一个顺序；若 $i < j$，我们就说顶点 v_i（分别是边 vv_i）在顶点 v_j（分别是边 vv_j）之前。对于 $\mathcal{V}$ 中的两个顶点 v_i 和 v_j，我们将子扇 $\mathcal{V}_{[v_1, v_j]}$ 定义为子序列 $(vv_i, vv_{i+1}, \cdots vv_j)$。我们常用 $\mathcal{V}_{\geqslant v_i}$、$\mathcal{V}_{>v_i}$、$\mathcal{V}_{\leqslant v_i}$ 和 $\mathcal{V}_{<v_i}$ 分别表示子扇 $(v_i, \cdots v_k)$、$(v_{i+1}, \cdots v_k)$、$(v_1, \cdots, v_i)$ 和 $(v_1, \cdots v_{i-1})$。

如果扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β 中是一个圈，那么反演 $X^{-1}(\beta)$ 意味着通过应用一系列 Kempe 交换得到着色 $X^{-1}(\beta)$。如果 $\mathcal{V}$ 是一条路径扇，那么反演 $\mathcal{V}$ 意味着在 $\mathcal{V}$ 的边上应用一系列单边 Kempe 交换，使得 $\mathcal{V}$ 的第一条边两端缺失相同的颜色 $\beta(vv_1)$。注意，我们通常只部分反演路径，即 在路径的边上应用一系列单边 Kempe 交换，直到得到中心顶点处缺失特定颜色的着色。

圈 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 称为 饱和的，如果对于任意 i，$v_i \in K_v(m(v)\ m(v_i))$。BDK 的引理 2.3 [BDK+21]（在此重述）保证，若一个圈不可逆，则它是饱和的。

引理 14 ([BDK+21])。设 $\mathcal{V}$ 是一个圈，若 $\mathcal{V}$ 不饱和，则 $\mathcal{V}$ 可逆。

这直接推出任意最小圈也有相同的结论。

引理 15. 任意最小圈都是饱和的。

令 $X \subseteq E(G) \cup V(G)$，$\beta$ 为一种着色，而 β' 为通过交换 β 的一个连通分量 C得到的着色。若该连通分量满足以下条件，则称其为 X-稳定的：

- for any $v \in X, m^{\beta}(v) = m^{\beta'}(v)$, and
- for any $e \in X, \beta(e) = \beta'(e)$.

在这种情况下，着色 β' 称为与 β X-相同。

若 $S = (C_1, \cdots, C_k)$ 是一个交换序列，将着色 β变换为着色 β'，其中每个 C_j 都是 Kempe 分量，则序列 S^{-1} 定义为交换序列 $(C_k, \cdots, C_1)$。若每个 C_j 都是 X-稳定的，则称该序列为 X-稳定的。

观察 16. 令 $X \subseteq V(G) \cup E(G)$，且 S 为一个 X-稳定的交换序列。那么序列 S^{-1} 也为 X-稳定的。

如果序列 S 是 X-稳定的，则对 β 应用 S 后得到的着色称为与 β X-等价。注意，X-等价的概念强于 X-恒等的概念。因为两个着色 β 和 β' 可能是 X-恒等的，但并不 X-等价：如果在 β 和 β' 之间的序列中存在一个着色 β''，使其不与 β X-恒等。我们首先给出以下观察，本文将经常使用这一观察。

观察17。 设 $\mathcal{X}$ 是着色 β_0中的一个子扇， v 是一个不在 $V(\mathcal{X})$中的顶点，且$S=(C_1, \cdots, C_k)$ 是与 v关联的边的一系列平凡交换，$\beta_1(\cdots, \beta_k, S)$ 是对 S的每次交换后得到的着色。如果对于任意 $i \in \{0, \cdots, k\}$、 $m^{\beta_i}(v) \notin \beta_0(\mathcal{X})$，则序列 S 是$(\mathcal{X})$-稳定的。

证明。 否则，假设 $\mathcal{S}$ 不是 $\mathcal{X}$-稳定的。由于顶点 v 不在 $V(\mathcal{X})$中，因此在交换序列中，$\mathcal{X}$的任何边都没有改变。因此， $\mathcal{X}$ 中某个顶点的缺失颜色在交换序列中发生了变化，我们将第一个发生这种变化的顶点记为 x 。令 s_i 为改变边 vx颜色的交换，这意味着在着色 β_{i-1} 中，顶点 v 和 x 缺失相同的颜色，因此 $m^{\beta_{i-1}} \in \beta_0(\mathcal{X})$；矛盾。 □

以下观察给出了着色之间的 X-等价与 $(G\setminus)$-恒等的关系。

观察 18。 设 β 为一个着色， $X \subseteq V(G) \cup E(G)$， β_1 为一个与 β X-等价的着色，且 β_2 为一个与 β_1 $(G \setminus X)$-恒等的着色。那么，存在一个与 β_2 等价的着色 β_3 ，它与 β_2 X-恒等，且与 β $(G \setminus X)$-恒等。

证明。设 S 为将 β 变换为 β_1的交换序列。由于 β_1 与 β是 X-等价的，因此序列 S 是 X-稳定的，从而 $E(S) \cap E(X) = V(S) \cap V(X) = \emptyset$。由于 β_2 与 β_1是 $(G \setminus X)$-相同的，因此它们是 S-相同的。所以，对 β_2 应用 S^{-1} 是定义良好的，并会得到一个与 β β_3 S-相同的着色。我们先证明 β_3 与 β是 $(G \setminus X)$-相同的。根据 S的定义，着色 β_1与着色 β是 $(G \setminus S)$-相同的，而着色 β_2与 β_1是 $(G \setminus X)$-相同的，因此着色 β_2与 β是 $(G \setminus (X \cup S))$-相同的。再次根据 S^{-1}的定义，着色β_3 与 β_2是 $(G \setminus S)$-相同的，因此它与 β是 $(G \setminus (S \cup X))$-相同的。由于着色 β_3 也与 βS-相同，因此总而言之，它与 β是 $(G \setminus X)$-相同的。

现在证明 β_3 与 β_2是 X-等同的。由于 $E(S) \cap E(X) = V(S) \cap V(X) = \emptyset$，我们有 $E(X) \subseteq E(G) \setminus E(S)$，且 $V(X) \subseteq V(G) \setminus V(S)$。此外，根据 S的定义，着色 β_3 与 β_2是 $(G \setminus S)$-等同的，因此着色 β_3与 β_2是 X-等同的，证毕。 □

如果 $\mathcal{X}$是一个扇，当两个着色是 $(V(\mathcal{X}) \cup E(\mathcal{X}))$-等同的（分别是 $(V(\mathcal{X}) \cup E(\mathcal{X}))$-等价的）时，我们简称这两个着色是 $\mathcal{X}$-等同的（分别是 $\mathcal{X}$-等价的）。类似地，如果两个着色是 $((V(G) \cup E(G)) \setminus X)$-等同的（分别是 $((V(G) \cup E(G)) \setminus X)$-等价的），我们简称这两个着色是 $(G \setminus X)$-等同的（分别是 $(G \setminus X)$-等价的）。

注意，如果 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个圈，那么着色 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 与 β 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的。因此，根据前面的观察，我们得到如下推论。

推论 19. 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个圈。如果存在一个与 β 等价于 β' $\mathcal{V}$ 的着色，其中 $\mathcal{V}$ 可逆，那么 $\mathcal{V}$ 在 β 中可逆。

证明。设 $\beta'' = \mathcal{V}^{-1}(\beta')$。着色 β' 与 β 等价于 $\mathcal{V}$，且 β'' 与 β' 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的。因此，根据观察 18，存在一个着色 β_3，它与 β'' 是 $\mathcal{V}$-相同的，并与 β 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的。因此，着色 β_3 与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的。

此外，着色 β'' 与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 是 $\mathcal{V}$-相同的，因此着色 β_3 与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 也是 $\mathcal{V}$-相同的。因此，我们得到了所需的 $\beta_3 = \mathcal{V}^{-1}(\beta)$。 □

由前面的推论可得如下观察。

观察 20。 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈，且 β' 是与 β 等价的着色 $\mathcal{V}$。那么在着色 β'中，序列 $\mathcal{V}$ 也是一个最小圈，并且对于任意 $e \in E(\mathcal{V})$、$\beta(e) = \beta'(e)$，以及任意 $v \in V(\mathcal{V})$，$m^{\beta}(v) = m^{\beta'}(v)$。

我们通常简单地说，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中的同一个最小圈 .

如果对于每个 i $v_i \in K_{v_{i-1}}(m(v_i)$ $m(v_{i-1}))$ 都成立，则称圈 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是紧的。一个简单的观察是，任何最小圈 $\mathcal{V}$ 都是紧的。

观察 21。 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色 β 中的一个最小圈。那么该圈 $\mathcal{V}$ 是紧的。

证明。 假设 $\mathcal{V}$ 不是紧的，因此存在 i 使得 $v_i \notin K_{v_{i-1}}(m(v_i)$ $mv_{i-1})$。不失一般性，我们假设 $i = 2$，并且每个 v_j 都缺少颜色 j。注意，这意味着 $\beta(vv_2) = 1$、$\beta(vv_3) = 2$ 以及 $\beta(vv_1) = k$。

我们交换连通分量 $C_{1,\ 2} = K_{v_1}(1, 2)$，得到一个着色 β'，它与着色 β 在 $(\mathcal{V} \setminus \{v_1\})$ 意义下等价。因此，除了 v_1 之外，每个 v_j 都缺少颜色 j；而 v_1 现在缺少颜色 2。所以，扇 $\mathcal{V}' = X_v(k)$ 等于 $(vv_1, vv_3, \cdots, vv_k)$，因此它是一个严格小于 $\mathcal{V}$ 的圈。由于 $\mathcal{V}$ 是最小的，这个圈是可逆的，我们将反转该圈后得到的着色记为 β''。

着色 β'' 与着色 β' 是 $(G \setminus \mathcal{V}')$-相同的，因此特别地，它与着色 β' 是 $C_{1,2}$-相同的。此外，着色 β'' 与着色 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 是 $(\mathcal{V} \setminus \{vv_1, vv_2, v_2\})$- 相同的，并且我们有 $\beta''(vv_1) = 2, \beta''(vv_2) = 1$，以及 $m^{\beta''}(v_2) = 2$。

因此，现在在这个着色中，连通分量 $K_{v_1}(1, 2)$ 恰好是 $C_{1,2} \cup \{vv_1, vv_2\}$，我们将这个连通分量交换回去，得到着色 β'''。现在，着色 β''' 与 β 是 $C_{1,2}$-相同的，因此它与 β 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的。此外，它与 β'' 是 $(\mathcal{V} \setminus \{vv_1, vv_2, v_2\})$-相同的，因此它与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 是 $(\mathcal{V} \setminus \{vv_1, vv_2, v_2\})$-相同的。最后，我们有 $\beta'''(vv_1) = 1 = m^{\beta}(v_1)$，$\beta'''(vv_2) = 2 = m^{\beta}(v_2)$，以及 $m^{\beta'''}(v_2) = 1 = \beta(vv_2)$，所以着色 β''' 与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$ 是 $\mathcal{V}$-相同的。由于它也与 β 是 $(G \setminus \mathcal{V})$-相同的，因此我们得到所需的 $\beta''' = \mathcal{V}^{-1}(\beta)$。 □

引理 9的证明是以下两个引理的推论。

引理 22. 设 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈。对于任何不同于 $m(v)$ 的颜色 c，扇 $X_v(c)$ 是一个圈。

引理 23. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是围绕顶点 v的两个圈。对于(z, z') 中的任意一对顶点$(\mathcal{V} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^2$,，扇 $\mathcal{Z} = X_z(c_{z'})$ 是一个包含 z'的圈。

我们证明引理 22 见第 2.5节，引理 23 见第 5节，并在此证明引理9 .

引理 9的证明。 为证明该引理，我们证明图 G 仅由一个偶阶团构成，其中每个顶点缺少一种不同的颜色。这就产生了矛盾，因为在任何一个偶阶团的$(\Delta(G)+1)$着色中，对于任意颜色 c，缺少颜色 c 的顶点数总是偶数。根据引理 22，围绕 v 的所有扇都是圈，因此其每个邻点都缺少一种不同的颜色。此外，根据引理 23， v的每一对邻点之间都有一条边，因此 $G = N[v] = K_{\Delta(G)+1}$。根据构造， G 是 $\Delta(G)$-可着色的，因此 G 是一个偶阶团，且每个顶点都缺少一种不同的颜色，由此证明完毕。 □

2.5 仅围绕 v的圈：引理 22 的证明

本节中，我们证明引理 22。若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}'$ 是两个扇，则 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}'$ 称为纠缠的，当且仅当对任意 $c \in \beta(\mathcal{X}) \cap \beta(\mathcal{X}')$， $M(X,\ c) = M(X',\ c)$。为证明引理 22，我们需要以下两个引理。

引理 24. 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈， u 和 u' 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点。那么扇 $\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。

引理 25. 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β中的一个最小圈， u 和 u' 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点，并且$\mathcal{U} = X_u($ $m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$。那么对于任意 $j \leqslant l$，扇 $X_v(\beta(uu_j))$ 是一个圈。

注意到，根据引理 24，我们可以直接得出 $N[v]$ 是一个团。此外，我们还可以直接得到以下推论。

推论26. 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色 β中的一个最小圈。那么对于任意 $j \leqslant k$，扇 $X_u(m(v))$ 都是与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。

证明。设 $j \leqslant k$和 $\mathcal{U} = X_{v_j}(m(v_{j-1})) = X_{v_j}(\beta(vv_j))$。那么， $\mathcal{U}$的第一条边是 vv_j，且由于 v 缺少颜色 $m(v)$， $\mathcal{U}$ 的第二条边着色为 $m(v)$。根据引理 24， $\mathcal{U}$ 是与 $\mathcal{V}$纠缠的圈，因此，由于 $X_u(m(v)) = \mathcal{U}$，扇 $X_u(m(v))$是与$\mathcal{V}$ 纠缠的圈，证毕。 □

我们在第 3 节证明引理 24，在第 4 节证明引理 25，并在此证明引理2 2.

引理的证明 22。 假设存在一个扇 $\mathcal{W} = (vw_1, \cdots, vw_t)$，其围绕 v 且不诱导出一个圈，我们先证明 $\mathcal{W}$ 不是一条路径。

断言27。 扇 $\mathcal{W}$ 不能诱导出一条路径。

证明。不失一般性，假设顶点 v 缺少颜色 1。假设 $\mathcal{W}$ 诱导出一条路径，因此 $m(v) = m($ $w_t) = 1$。令 $v' \in \mathcal{V}$，根据推论26，我们有 $\mathcal{U} = X_{v'}(1)$ 是一个包含 v 且位于 β中的圈。如果在 vw_t上进行一次单边 Kempe 交换，就会得到一种着色，其中 $m(w_t) = m(v) = \beta($ $vw_t)$；我们将这种着色记为 β'，并且不失一般性，假设 $\beta(vw_t) = 2$。同样，根据推论26，在着色 β'中，我们也有 $\mathcal{U}' = X_{v'}(2)$ 是一个包含 v的圈，因此 $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$，令 $v'w''$为它们共有的第一条边，并令 $w = M(\mathcal{U}, \beta(v'w''))$ 和 $w' = M(\mathcal{U}', \beta(v'w''))$。现在我们必须区分 $v \in \{w, w'\}$ 是否成立。

情形 27.1 ($v \notin \{w, w'\}$)。

在此情形下， $m_\beta(w) = m_{\beta'}(w) = m_\beta(w') = m_{\beta'}(w')$；我们用 c 表示这种颜色。根据引理 25， $X_v(c)$ 是包含 w 于 β 中的一个圈，而 $X_v(c)$ 是包含 w' 于 β' 中的一个圈，因此 $w = w'$；这就产生了矛盾。

情形 27.2 ($v \in \{w, w'\}$)。

由于 $v = w$ 和 $v = w'$ 的情形对称，我们可以假设 $v = w$。在此情形下，在着色 β' 中， w' 缺少颜色 c_v，但根据引理 25 $X_v(1)$ 是包含 w 的一个圈，或者 $\mathcal{V}$ 可逆；然而，在着色 β' 中， $X_v(1)$ 导出一条仅含一条边的路径；这就产生了矛盾。

□

因此，扇 $\mathcal{W}$ 不是一条路径。现在假设 $\mathcal{W}$ 是一颗彗星，那么在 $\mathcal{W}$ 中存在 w 和 w'，它们缺少同一种颜色 c。它们中至少有一个不在 $K_v(1, c)$ 中；由于这两种情况是对称的，不失一般性，我们可以假设 w 不在 $K_v(1, c)$ 中。因此，如果交换连通分量 $K_w(1, c)$，我们就得到一种着色，其中扇 $X_v(\beta(vw_1))$ 是一条路径；这就产生了矛盾，所以 $\mathcal{W}$ 是一个圈。 □

周围的 3 个扇：引理 24 的证明

In t本节中，我们证明引理 24，该引理将在引理的证明中经常使用25 .

证明。 我们首先证明扇 $\mathcal{U}$ 不能诱导一条路径。

断言 28。 扇 $\mathcal{U}$ 不能诱导一条路径。

证明。 否则，假设扇 $\mathcal{U}$ 是一条路径。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{U}$ 的长度最小（若 $\mathcal{U}$ 不是最小的，则由于它是一条路径，它包含一条严格更短的路径）。因此， $\mathcal{U}$ 仅包含一条颜色属于 $\beta(\mathcal{V}) \setminus \{c_v\}$ 的边：其第一条边。现在我们需要区分 $j' = j - 1$ 是否成立（即 $u = v_j$ 和 $u' = v_{j'}$ 在 $\mathcal{V}$中是否相邻）。

情形 28.1 ($j' = j - 1$)。
在这种情形下， $\mathcal{U} = X_u(uv)$，且与 u 相接的、颜色为 c_v 的边恰好位于 $\mathcal{U}$中 uv 之后。由于$\mathcal{U}$是一条路径，我们可以将其反演，直到得到一个满足 $m(u) = m(v) = c_v$ 的着色。由于 $\mathcal{U}$是最小的，在反演过程中，与 $\mathcal{V}$ 中不同于 u 的顶点相接的任何边都没有被重新着色。在反演后得到的着色中，扇 $(vv_{j+1}, \cdots, vv_j = vu)$ 是一条路径，我们可以将其反演，直到得到一个满足 $m(v) = m(v_{j+1}) = j$ 的着色，记此着色为 β'。由于 $\mathcal{V}$ 在着色 β中是紧的，在着色 β' 中我们有 $C = K^{\beta'}_{v_{j-1}}(j, j-1) = K^{\beta}_{v_{j-1}}(j, j-1) \cup \{vv_{j-1}\} \setminus \{vv_{j+1}, vv_j = vu\}$，因此我们交换该连通分量，得到一个满足 $m(v) = m(u) = j - 1$ 的着色，然后交换边 uv，得到一个着色，其中 $(uu_{l-1}, \cdots, uu_0)$ 是一条我们将其反演的路径。在反演后得到的着色中，连通分量 $K_{v_{j-1}}(j, j-1)$ 恰好是 $C \cup \{vv_j\}$；若将该连通分量交换回来，我们恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$。

情形 28.2 ($j' \neq j - 1$)。
在此情形下，由于 $\mathcal{U}$ 是一条路径，我们可以对其进行反演，直到得到一个着色 β'，使得 $m(u) = c_{u'} = j'$。注意，与前一种情形类似，此次反演并未改变与 $\mathcal{V}$的顶点关联的边的颜色，但与 u关联的边除外。现在我们考虑连通分量 $K_v(j', c_v)$（在对 $\mathcal{U}$ 进行反演时，由于我们交换了一条着色为 j'的边，该连通分量可能发生了变化），并且需要区分顶点 u' 和 u 是否属于此连通分量；显然，这两个顶点不可能同时属于此连通分量。
子情形 28.2.1 ($u' \notin K_v(j', c_u)$)。
在此情形下，我们交换连通分量 $C = K_{u'}(j', c_v)$，得到一个着色，其中$(vv_{j+1}, \cdots, vv_{j'})$是一条路径；对其进行反演，直到得到一个着色，使得$m(v) = m(v_{j+1}) = c_u$，我们将此着色记为 β'。由于 $\mathcal{V}$ 在 β中是紧的，因此有$C_j = K^{\beta'}_{v_{j-1}}(j, j-1) = K^{\beta}_{v_{j-1}}(j, j-1) \setminus \{vv_{j+1}, vv_j = vu\}$，于是我们交换此连通分量，得到一个着色，其中$(vv_{j'+1}, \cdots, vv_{j-1})$是一条路径；对其进行反演，直到得到一个着色，使得 $m(v) = m(v_{j'+1}) = j'$。在反演后得到的着色中，连通分量$K_{u'}(j', c_v)$恰好是 $C \cup \{vu'\}$，因此我们将其换回。注意，由于 $|\{c_{u'}, c_v, j, j-1\}| = 4$，我们可以在 C_j之前将 C 换回。在换回该连通分量后得到的着色中，扇$(uu_{l-1}, \cdots, uu_0)$是一条路径，我们对其进行反演。在反演后得到的着色中，连通分量 $K_{v_{j-1}}(j, j-1)$恰好是 $C \cup \{vv_{j-1}, vv_j = vu\}$，因此我们将此连通分量换回，并恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$。

因此， u' 属于连通分量 $K_v(j', c_u)$。
子情形 28.2.2 ($u \notin K_v(c_{u'}, c_u)$)。
在这种情形下，我们交换连通分量 $C = K_u(j', c_v)$。注意，根据前一种情形， v 和 u' 都不属于这个连通分量。在交换后得到的着色中，扇 $(vv_{j+1}, \cdots, vv_j)$ 是一条路径，我们对其进行反演，直到得到一种着色，使得 $m(v) = m(v_{j+1}) =$

c_u；我们将这种着色记为 β'。由于 $\mathcal{V}$ 在 β 中是紧的，因此有 $C_j = K^{\beta'}_{v_{j-1}}(j, j-1) = K^{\beta}_{v_{j-1}}(j, j-1) \cup \{vv_{j-1}\} \setminus \{vv_{j+1}, vv_j = vu\}$，所以我们交换这个连通分量，得到一种着色，使得 $m(v) = m(u) = j-1$；接着交换边 uv，得到一种着色，其中 $K_u(c_{u'}, c_v)$ 恰好是 C。因此，我们换回这个连通分量；在交换后得到的着色中，扇 $(uu_{l-1}, \cdots, uu_0)$ 是一条路径，我们对其进行反演，直到得到一种着色，使得 $m(u) = j$。在这种着色中，连通分量 $K_{v_{j-1}}(j, j-1)$ 恰好是 $C_j \cup \{vv_{j-1}, vv_j = vu\}$，因此我们换回这个连通分量，从而恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$。

□

B在证明扇 $\mathcal{U}$ 不是彗星之前，我们证明 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是纠缠的。

断言 29. 扇 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是纠缠的。

证明。假设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 并未纠缠，那么存在与 w 不同的 $w = v_s \in \mathcal{V}$ 和 $w' = u_{s'} \in \mathcal{U}$，使得 $m(w) = m(w') = c$。如果 $m(w) = m(v) = c_v$，那么由于 $\mathcal{V}$ 是饱和的，$w \in K_v(c_v, c)$，因此我们交换 $K_{w'}(c_v, c)$，得到一种着色，其中 $\mathcal{V}$ 仍是大小相同的圈，但 $X_u(c_{u'})$ 是一条路径。根据前一个断言，这就产生了矛盾。

因此，$m(w) \neq m(v)$，于是我们依次交换连通分量 $K_{w'}(t, t+1)$ 和 $t \in (s, \cdots, j)$。注意，这一交换序列没有改变与 $\mathcal{V}$ 的顶点相 incident 的边的颜色；不过，它可能改变了 $\mathcal{U}$ 的边的颜色。然而，可以保证，在交换后得到的着色中，存在一种颜色 $c' \in \beta(\mathcal{V})$，使得 $X_u(c')$ 是一条路径；根据前一个断言，这就产生了矛盾。

□

现在我们证明 $\mathcal{U}$ 不是彗星。

断言 30. 扇 $\mathcal{U}$ 不是彗星。

证明。假设 $\mathcal{U}$ 是彗星，那么在 $\mathcal{U}$ 中存在 w 和 w'，使得 $m(w) = m(w') = c$，并且 w' 在序列中位于 w 之后。根据前一个断言，由于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 纠缠，我们有 $c \notin \beta(\mathcal{V})$。现在考虑连通分量 $C_v = K_v(c, c_v)$。如果 w' 不在 C_v中，那么我们交换 $C_{w'} = K_{w'}(c, c_v)$，得到一种着色，其中 w' 属于扇 $X_u(c_{u'})$，且 $m(w') = m(v)$；这与 $X_u(c_{u'})$ 和 $\mathcal{V}$ 纠缠这一事实矛盾。注意，如果 u 在C'中，且 $m(v) \in \beta(\mathcal{U})$，交换 C' 后，序列 $X_u(c_{u'})$ 现在从 β 中着色为 c 的边开始，但这不影响推理。因此，顶点 w' 属于 C，于是顶点 w 不属于 C_v，所以我们可以交换 $C_w = K_w(c, c_v)$，得到一种着色，其中序列 $X_u(m(u'))$包含 w，而它缺少颜色 $m(v)$，这就产生了矛盾。注意，如果 $u \in C_w$，那么交换 C_w后，我们得到一种着色，其中 w' 在扇 $X_u(m(u'))$ 中位于 w 之前。与前一种情形类似，这不影响推理。

□

根据前面的断言，扇 $\mathcal{U}$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，正如所要求的那样。 □

围绕 v 从 u开始的圈：引理 25 的证明

在本节中，我们证明引理25。为证明该引理，我们实际上要证明一个更强的陈述，但首先需要给出一些定义。

定义 31。 设 $i \geqslant 0$，我们将性质 $P_{weak}(i)$ 定义如下：对于颜色着色 β中的任意一个最小圈 $\mathcal{V}$，以及 $\mathcal{V}$中的任意一对顶点 u 和 u'，令 $\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$。若 $\beta(uu_{l-i}) \neq m(v)$，则 $X_v(\beta(uu_{l-i})$ 不是一条路径。

定义32。 设 $i \geqslant 0$，我们将性质 $P(i)$ 定义如下：

对于着色 β中的任意最小圈 $\mathcal{V}$，对于 $\mathcal{V}$的任意一对顶点 u 和 u'，令 $\mathcal{U}$ $=X_u$（m（u'）$=$（uu_1，$\cdots$，uu_l）。如果 β（uu_{l-i}）$\neq$ m（v），则扇 X_v（β（uu_{l-i}）是一个包含 u_{l-i-1}的饱和圈，

引理25 是以下引理的直接推论。

引理33。对于所有 i，性质 P（i）均成立。

该引理的证明采用关于 i的归纳法。然而，在开始证明该引理之前，我们需要为圈 $\mathcal{V}$的顶点 u 引入（$\mathcal{V}$，u）-独立扇的概念。

4.1 （$\mathcal{V}$，u）-独立扇

设 $\mathcal{V}$ 是着色 β中的一个最小圈，u 是 $\mathcal{V}$的一个顶点。（$\mathcal{V}$，u）-独立子扇$\mathcal{X}$是围绕 v 的一个子扇，使得 β（$\mathcal{V}$）$\cap$ β（$\mathcal{X}$）$=$ $\{\beta$（u）$\}$。我们自然地将同时为路径（分别为圈）的（$\mathcal{V}$，u）-独立子扇定义为（$\mathcal{V}$，u）-独立路径（分别为（$\mathcal{V}$，u）-独立圈）。如果 v 是不在 $\mathcal{X}$中的一个顶点，缺少颜色 c，我们称$\mathcal{X}$避开 v，如果 $\mathcal{X}$的最后一个顶点也缺少颜色 c。

我们先证明以下结论。

引理 *34.* 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈，u 是 $\mathcal{V}$ 的一个顶点，$\mathcal{Y}=(uy_1,\cdots,uy_r)$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V},u)$-独立子扇，且 x 是 $K_{y_s}(m(u)\ m(v))$ 的一个端点，该端点不是 y_r。那么，扇 $X_v(\beta(uy_1))$ 是一条包含 x 的路径，而 x 缺少颜色 $m(v)$。

我们将证明分解为五个独立的引理。

引理 34 的证明. 不失一般性，假设顶点 v 和 u 分别缺少颜色 1 和 2，并且 $\beta(uy_1)$ $=4$。由于扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的最小圈，根据引理 15，它是饱和的，因此 $u \in K_v(1,2)$，从而 $y_r \notin K_v(1,2)$。现在交换连通分量 C_1，$_2 = K_{y_r}(1,2)$，得到一个与 β 等价的着色 $\mathcal{V}$，其中 $\mathcal{Y}$ 现在是一条 $(\mathcal{V},u)$-独立路径。根据引理 39，扇 $X_v(4)$ 是一颗彗星，包含 $K_{y_r}(1,2)$ 的另一个端点，即 x。在这个着色中，顶点 x 缺少颜色 2，因此在着色 β 中，扇 $X_v(4)$ 是一条包含 x 的路径，而 x 缺少颜色 1，正如所需。 □

引理 35. 设 $\mathcal{X}=(vv_1,\cdots,vv_k)$ 是着色 β, $u=v_i$ 中的一条长度至少为3 的路径，其中某些 $i\in[3,k]$, $u''=v_{i-1}$, $u'=v_1$，且 C 是一条连接 u''和 u'、不经过 v的$(\beta(vu)\ m(u))$-双色路径。那么，β 等价于一种着色 β'，满足：

- β' 与 β是$(G\setminus(C\cup\mathcal{X}))$-相同的，
- β' 与 β是$(\mathcal{X}_{\geqslant u})$-相同的，
- 对于任意边 $j\in[2,i-1]$, $m^{\beta'}(v_j)=\beta(vv_j)$，
- $m^{\beta'}(u')=\beta(vu)$,
- 对于任意边 $j\in[1,i-2]$, $\beta'(vv_j)=m^{\beta}(v_j)$，
- $\beta'(vu'')=\beta(vu')$,
- 对于任意边 $e\in C$：

– *if* $\beta(e) = \beta(vu)$, *then* $\beta'(e) = m^{\beta}(u)$, *and*
– *if* $\beta(e) = m^{\beta}(u)$, *then* $\beta'(e) = \beta(vu)$.

证明。不失一般性，假设顶点 v 缺少颜色 1，边 vu' 着色为 2，边 vu 着色为 3。注意，这意味着 $m(u'') = 3$。在着色 β中，扇 $\mathcal{X}$ 是一条路径，因此我们反演这条路径，并将反演后得到的着色记为 β_2。着色 β_2与着色 β在（$G \setminus \mathcal{X}$）意义下相同，因此 C仍然是连接 u' 和 u'' 且不包含 v的（2，3）双色路径。此外，对于任意边$j \in [1, i]$，β_2（vv_j）$= m^{\beta}$（v_j），并且 m^{β_2}（v_j）$= \beta$（vv_j）。因此，着色 β_2与 β'在（$\mathcal{X}_{[v_2,v_{i-2}]} \cup \{u'', vu'\}$）意义下相同。现在，顶点 u' 缺少颜色 2，而边 vu'' 的颜色变为 3。此外，顶点 v 现在缺少颜色 2，因此 K_v（2，3）$= C \cup \{vu''\}$。现在我们交换这个连通分量，并将交换后得到的着色记为 β_3。

着色 β_3与着色 β 是 $(G \setminus (C \cup \mathcal{X}))$-相同的，因此它与 β' 是 $(G \setminus (C \cup \mathcal{X}))$-相同的。此外，对于任意一条边 $e \in C$:

- if $\beta(e) = 2$, then $\beta_3(e) = 3$, and
- if $\beta(e) = 3$, then $\beta_3(e) = 2$.

因此，着色 β_3 也与 β' 是 C-相同的；于是它与 β' 是 $(G \setminus \mathcal{X})$-相同的。

着色 β_3 与 β_2 是 $(\mathcal{X}_{[v_2,v_{i-2}]} \cup \{u'', vu'\})$-相同的，因此它与 β' 是 $(\mathcal{X}_{[v_2,v_{i-2}]} \cup \{u'', vu'\})$-相同的。在着色 β_3 中，边 vu'' 现在被着为 2，而顶点 u' 现在缺少颜色 3。因此，着色 β_3 也与 β' 是 $(\{vu'', u'\})$-相同的，故它与 β' 是 $\mathcal{X}_{<u}$-相同的。总而言之，着色 β_3 与着色 β' 是 $(G \setminus \mathcal{X}_{\geqslant u})$-相同的。

最后，着色 β_3 与着色 β_2 在 $\mathcal{X}_{\geqslant u}$ 意义下相同，且顶点 v 和 u 都缺少颜色 3。因此，在着色 β_3 中，扇 $X_v(1)$ 现在是一条路径。我们反演这条路径，并将反演后得到的着色记为 β_4。着色 β_4 与着色 β 在 $\mathcal{X}_{\geqslant u}$ 意义下相同，因此它与着色 β' 在 $\mathcal{X}_{\geqslant u}$ 意义下相同。此外，着色 β_4 与着色 β_3 在 $(G \setminus \mathcal{X}_{\geqslant u})$ 意义下也相同，因此它与着色 β' 在 $(G \setminus \mathcal{X}_{\geqslant u})$ 意义下相同。总之，着色 β_4 与着色 β' 相同，正如所需。 □

引理 *36.* 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色 β 中长度至少为 *3* 的一个圈，$u = v_i$ 和 $u' = v_{i+1}$ 是 $u'' = v_{i-1}$ 的三个连续顶点，$\mathcal{V}, \mathcal{Y} = (uy_1, \cdots, uy_l)$ 是一条 $(\mathcal{V}, u)$-独立路径，$\beta_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}^{-1}(\beta)$，$C$ 是着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 中连接 u'' 与 u' 的一条 $(\beta(vu)\ m(u'))$-双色路径，该路径不包含 v 或 u，$X = E(C) \cup E(\mathcal{V}) \cup (V(\mathcal{V}) \cup \{v\} \setminus \{u\})$，且 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 是与 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 等价的着色 X。如果存在一个与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 等价的着色 β'，使得:

- β' 与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是$(G \setminus X)$-相同的，
- β' 与 $\mathcal{V}^{-1}(\beta)$是$(\mathcal{V} \setminus \{u', vu'', u, vu\})$-相同的，
- $\beta'(vu'') = \beta'_{\mathcal{Y}}(vu')$，
- $\beta'(vu) = m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(u'')$，且
- $m^{\beta'}(u') = \beta'_{\mathcal{Y}}(vu)$，
- 对任意边 $e \in C$：– 若 $\beta'_{\mathcal{Y}}(e) = \beta(vu)$，则 $\beta'(e) = m(u')$；且– 若 $\beta'_{\mathcal{Y}}(e) = m(u')$，则 $\beta'(e) = \beta(vu)$。

那么圈 $\mathcal{V}$ 是可逆的。

证明。设 $\gamma = \mathcal{V}^{-1}(\beta)$。不失一般性，我们假设顶点 v 和 u 在着色 β中分别缺少颜色 1 和 2，且 $\beta(vu) = 3$。这意味着$\beta'(vu'') = \beta'_{\mathcal{Y}}(vu') = \beta(vu') = m^{\beta}(u) = 2$，且 $m^{\beta'}(u') = \beta'_{\mathcal{Y}}(vu) = \beta(vu) = m^{\beta}(u'') = 3$。根据定义，着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$与 β是 $(G \setminus (\mathcal{Y} \cup \{u\}))$-相同的。由于 $\mathcal{Y}$是一条 $(\mathcal{V}, u)$-独立路径，因此有 $E(\mathcal{Y}) \cap E(\mathcal{V}) = \emptyset$，且 $V(\mathcal{Y}) \cap V(\mathcal{V}) = \emptyset$。因此，特别地，$\beta_{\mathcal{Y}}(vu) = \beta(vu) = 3$。着色 β' 与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是 $(\{vu\})$-相同的，因此 $\beta'(vu) = 3$。

由于着色 β' 与$(G \setminus X)$-相同于 $\beta'_{\mathcal{Y}}$，且 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 与 X-等价于 $\beta_{\mathcal{Y}}$，根据观察18，存在一个着色 β''，它与 X-相同于 β'，并且与$(G \setminus X)$-相同于$\beta_{\mathcal{Y}}$。

着色 β''与 $\beta_{\mathcal{Y}}$是（$G \setminus X$）-相同的，因此它与 β是（$G \setminus (X \cup \mathcal{Y} \cup \{u\})$）-相同的。这意味着 β'' 与 β是（$G \setminus (\mathcal{V} \cup \mathcal{Y} \cup C)$）-相同的，因而它与 γ是（$G \setminus (\mathcal{V} \cup \mathcal{Y} \cup C)$）-相同的。此外，$\beta''$与 β'是 X-相同的，且 β' 与 γ是（$\mathcal{V} \setminus (\{u', vu'', u, vu\})$-相同的，所以 β'' 与 γ是（$\mathcal{V} \setminus (\{u', vu'', u, vu\})$-相同的。总之，着色 β'' 与 γ是（$G \setminus (C \cup \mathcal{Y} \cup \{u', vu'', u, vu\})$）-相同的。

在着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 中，扇 $X_u(2)$ 现在是一条路径，并且我们有 $E(X_u(2)) = E(\mathcal{Y})$ 和$V(X_u(2)) = V(\mathcal{Y})$。因此，在任何与 $\beta_{\mathcal{Y}}$ $(\mathcal{Y} \cup \{u\})$-相同的着色中，扇 $X_u(2)$ 都是一条路径。β'' 与 $\beta_{\mathcal{Y}}$ $(G \setminus X)$-相同，$E(X) \cap E(\mathcal{Y}) = \emptyset$和 $V(X) \cap (V(\mathcal{Y}) \cup \{u\}) = \emptyset$，因此 β'' 与 $\beta_{\mathcal{Y}}$ $(\mathcal{Y} \cup \{u\})$-相同，于是 $X_u^{\beta''}(2)$ 是一条我们进行反演的路径。令 β_3 为反演后得到的着色。

根据 $\mathcal{Y}$ 的定义，着色 β_3 与着色 β $(\mathcal{Y} \cup \{u\})$-相同。因此，它与着色 γ $\mathcal{Y}$-相同，而 u 现在缺少颜色 2。着色 β_3 也与 β'' $(G \setminus (\mathcal{Y} \cup \{u\}))$-相同，因此它与 γ $(G \setminus (C \cup \{u', vu'', u, vu\}))$-相同，并且我们有$\beta_3(vu'') = \beta''(vu'') = 2$、$\beta_3(vu) = \beta''(vu) = 3$ 以及 $m^{\beta_3}(u') = m^{\beta''}(u') = 3$。注意，着色 β_3 也与着色 β'' C-相同。

路径 C是连接 u''和 u'的 (2, 3)-双色路径，且不包含 v或 u，因此，在着色 β_3中，我们有 $K_{u'}(2, 3) = C \cup \{vu'', vu\}$。现在我们交换这个连通分量，并用 β_f表示交换后得到的着色。着色 β_f与着色 β_3是 $(G \setminus (C \cup \{u', vu'', u, vu\}))$-相同的，因此它与 γ是 $(G \setminus (C \cup \{u', vu'', u, vu\}))$-相同的。此外，由于 β_3 与 β''是 C-相同的，对于任意边 $e \in C$:

- if $\beta''(e) = \beta_3(e) = 2$, then $\beta_f(e) = 3$, and
- if $\beta''(e) = \beta_3(e) = 3$, then $\beta_f(e) = 2$.

因此，着色 β_f与着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$是 C-相同的，所以它与着色 γ是 C-相同的。最后，我们有:

- $m^{\beta_f}(u) = 3 = \beta(vu) = m^{\gamma}(u)$,
- $\beta_f(vu) = 2 = m^{\beta}(u) = \gamma(vu)$,
- $m^{\beta_f}(u') = 2 = \beta(vu') = m^{\gamma}(u')$, and
- $\beta_f(vu'') = 3 = m^{\beta}(u'') = \gamma(vu'')$.

最后，我们有 β_f 与 γ 是 $(C \cup \{u', vu'', u, vu\})$-相同的，因此它与 γ 相同，并且 $\mathcal{V}$ 如所需是可逆的。 □

引理 37. 设 $\mathcal{V}=(vv_1,\cdots,vv_i)$ 是着色 β 中的一个最小圈，$u=v_i$, $u'=v_1$ 和 $u''=v_{i-1}$ 是 $\mathcal{V}$ 上三个连续顶点，且 $\mathcal{Y}=(uy_1,\cdots,uy_l)$ 是一条 $(\mathcal{V},u)$-独立路径，$C=K_{u''}(m(u)\ m(u''))\setminus\{vu,vu'\}$，并且 $X=C\cup E(\mathcal{V})\cup(V(\mathcal{V})\cup\{v\}\setminus\{u\})$。在任何与着色 $\beta_{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}^{-1}(\beta)$ X-等价的着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 中，扇 $X_v(m^{\beta}(u))$ 不是一条路径。

证明。不失一般性，我们假设顶点 v 和 u 分别缺少颜色 1 和 2，并且 $\beta(vu)=3$。这意味着 $\beta(vu')=m^{\beta}(vu)=2$，$m^{\beta}(u'')=\beta(vu)=3$，且 $m^{\beta_{\mathcal{Y}}}(u)=4$。假设 $\mathcal{X}=X_v^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(2)$ 是一条路径。顶点 v 在着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 中仍然缺少颜色 1，因此在 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 中也仍然缺少颜色 1。着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 与着色 β 是 $(\mathcal{V}\setminus\{u\})$-相同的，着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 也如此。因此 $\{u',u''\}\subseteq V(\mathcal{X})$ 且 $\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)=\beta(vu)$，所以 $u\in V(\mathcal{X})$，进而 $\mathcal{X}$ 的大小至少为 3。注意，这意味着 $V(\mathcal{V})=V(\mathcal{X}_{\leqslant u})$。

圈 $\mathcal{V}$ 是 β中的一个最小圈，因此根据观察 21，它是紧的，特别是 $u\in K_{u''}(2,3)$。因此，C 是连接 u'' 和 u' 的 (2, 3)-双色路径，且不包含 u或 v。由于 $\mathcal{Y}$ 是一个 $(\mathcal{V},u)$-独立路径，着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 与 β是 C-相同的。着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 与 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 是 C-等价的，因此 C 在着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$中仍是同一条双色路径。

由于 $\mathcal{X}$ 是长度至少为 3的路径，根据引理35 ，存在一种着色 β' 使得：

- β' is $(G\setminus(C\cup\mathcal{X}))$-identical to $\beta'_{\mathcal{Y}}$,
- β' 与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是 $(\mathcal{X}_{\geqslant u})$-相同的,
- 对于任意边 $j\in[2,i-1]$，$m^{\beta'}(v_j)=\beta'_{\mathcal{Y}}(vv_j)$,
- $m^{\beta'}(u')=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)=3$,
- 对于任意边 $j\in[1,i-2]$，$\beta'(vv_j)=m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(vv_j)$,
- $\beta'(vu'')=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu')=2$,
- 对于任意边 $e\in C$:
  - if $\beta(e)=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)=3$, then $\beta'(e)=m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(u)=2$, and
  - if $\beta(e)=m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(u)=2$, then $\beta'(e)=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)=3$.

着色 β'与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是$(G\setminus(C\cup\mathcal{X}))$-相同的，并且与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是 $\mathcal{X}_{\geqslant u}$-相同的。因此，着色$\beta'$ 与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$是$(G\setminus X)$-相同的。

设 $\gamma=\mathcal{V}^{-1}(\beta)$。对于任意 $j\in[2,i-2]$，有 $\beta'(vv_j)=m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(v_j)=m^{\beta}(v_j)=\gamma(vv_j)$，且 $m^{\beta'}(v_j)=\beta'_{\mathcal{Y}}(vv_j)=\beta(vv_j)=m^{\gamma}(v_j)$，因此着色 β'与 γ是$(\mathcal{V}\setminus\{u',vu',u'',vu'',u,vu\})$-相同的。此外，$\beta'(vu)=m^{\beta_{\mathcal{Y}}}(u')=m^{\beta}(u')=\gamma(vu')$，并且 $m^{\beta'}(u'')=\beta_{\mathcal{Y}}(vu'')=\beta(vu'')=m^{\gamma}(u'')$。所以总而言之，着色 β' 与着色γ是$(\mathcal{V}\setminus\{u',vu'',u,vu\})$-相同的。

着色 β'与 $\beta'_{\mathcal{Y}}$ 是 $\mathcal{X}_{\geqslant u}$-相同的，因此特别有 $\beta'(vu)=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)=m^{\beta'_{\mathcal{Y}}}(u'')$。我们还知道 $\beta'(vu'')=2=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu')$，以及 $m^{\beta'}(u')=3=\beta'_{\mathcal{Y}}(vu)$。

最后，对于 C 中的任意边 e：

- if $\beta_{\mathcal{Y}}(e)=\beta(e)=2$, then $\beta'(e)=3$, and
- if $\beta_{\mathcal{Y}}(e)=\beta(e)=3$, then $\beta'(e)=2$.

因此根据引理36，圈 $\mathcal{V}$ 可逆；这就产生了矛盾。 □

引理 38。 设 $\mathcal{V}=(vv_1,\cdots,vv_k)$ 是颜色 β, $u=v_j$, $u'=v_{j+1}$中的一个最小圈，且$u''=v_{j-1}$ 是 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{Y}$一条$(\mathcal{V},u)$-独立路径上的三个连续顶点。那么在颜色$\beta_{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}^{-1}(\beta)$中，扇 $\mathcal{X}=X_v(m^{\beta}(u))=(vx_1,\cdots,vx_s)$ 是一个圈。

证明。根据引理 37，扇 $\mathcal{X}$不是路径。为了证明它是一个圈，我们证明 $\mathcal{X}$不是彗星。否则，假设 $\mathcal{X}$ 是彗星，那么存在 $i<s$ 使得 $m(x_i)=m(x_s)$。不失一般性，我们假设 $m^{\beta}(v)=1$, $m^{\beta}(u)=\beta(vu')=2$, $\beta(vu)=m^{\beta}(u'')=3$ 且 $m^{\beta_{\mathcal{Y}}}(x_i)=m^{\beta_{\mathcal{Y}}}(x_s)=4$。现在我们需要区分几种情况。

情况 38.1($4\notin\beta(\mathcal{V})$)。
在着色 β中，扇 $\mathcal{V}$是一个最小圈，因此根据观察 21，它是紧的，特别地， $u\in K_{u''}(2,3)$。令 $C=K_{u''}(2,3)\setminus\{vu',vu\}$。路径 C是连接 u''和 u'的 (2, 3)-双色路径，其中不包含 v，也不包含 u。由于 $\mathcal{Y}$是 $(\mathcal{V},u)$-独立路径，着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$与 β是 C-等价的，因此 C仍是连接 u''和 u'的 (2, 3)-双色路径，其中不包含 u，也不包含 v。令 $X=C\cup E(\mathcal{V})\cup(V(\mathcal{V})\cup\{v\}\setminus\{u\})$。现在我们考察着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$中 $K(1,4)$ 的连通分量。顶点 x_i和 x_s并非都属于 $K_v(1,4)$。注意，我们可能有 $x_i=u$。如果 x_i不属于 $K_v(1,4)$，那么我们交换连通分量 $C_{1,4}=K_{x_i}(1,4)$，得到一个与 $\beta_{\mathcal{Y}}$等价的着色 β' X，此时扇 $X_v(2)$ 是一条路径。根据引理 37；这就产生了矛盾。

因此， $x_i\in K_v(1,4)$，于是 $x_s\notin K_v(1,4)$。与前一种情形类似，我们现在交换连通分量 $K_{x_s}(1,4)$，并得到一个与 X等价的着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$，其中 $X_v(2)$ 是一条路径。根据引理 37，这再次导致矛盾。

情形 38.2($4\in\beta(\mathcal{V})$)。
在这种情形下，我们有 $x_i\in V(\mathcal{V})$。由于 $\mathcal{Y}$是一条 $(\mathcal{V},u)$-独立路径，它不包含任何缺少颜色 4 的顶点，因此 β 与 $\{x_s\}$相同于 $\beta_{\mathcal{Y}}$，并且在着色 β中，该顶点仍然缺少颜色 4。由于 $\mathcal{V}$是着色 β中的最小圈，根据引理 15，它是饱和的，因此 $x_i\in K_v(1,4)$，于是 $x_s\notin K_v(1,4)$。现在我们交换连通分量$C_{1,4}=K_{x_s}(1,4)$，并将交换后得到的着色记为 β'。扇 $\mathcal{Y}$在着色 β中是一条 $(\mathcal{V},u)$-独立路径，因此着色 β'与 β等价，并且在该着色中， $\mathcal{Y}$仍然是一条 $(\mathcal{V},u)$- 独立路径。现在我们对 $\mathcal{Y}$ 进行反演，得到着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$，它与着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$ 关于 $(X_v^{\beta_{\mathcal{Y}}}(2)\setminus\{x_s\})$ 等价。因此，在着色 $\beta'_{\mathcal{Y}}$中，扇$X_v(2)$ 是一条路径；根据引理 37，这导致矛盾。

□

引理 *39.* 设 $\mathcal{V}=(vv_1,\cdots,vv_k)$ 是着色 β, $u=v_j$ 中的一个最小圈，且 $u'=v_{j+1}$和 $\mathcal{V}$, $\mathcal{Y}=(uy_1,\cdots,uy_r)$ 中的两个连续顶点构成一条 $(\mathcal{V},u)$-独立路径；设 x 是 $K_{y_r}(m(u)\ m(v))$ 中不是 y_r 的那个端点。那么扇 $X_v(\beta(uy_1))$ 是一个包含 x 且缺少颜色 $m(u)$ 的彗星。

证明。 我们假设 $\mathcal{Y}$的规模最小，且 $\mathcal{X}=X_v(\beta(uy_1))$ 不是一个包含缺少颜色 $m(u)$ 的 x 的彗星。不失一般性，假设 $m(v)=1$, $m(u)=\beta(vu')=2$, $\beta(uv)=m^{\beta}(u'')=3$, 以及 $\beta(uy_1)=4$。

若 $|\mathcal{Y}|=1$，则 $\mathcal{Y}$由一条边构成。我们交换这条边，并将交换后得到的着色记为 β'。在着色 β'中，根据引理 38，扇 $X_v(2)$ 是一个圈。在此着色中，顶点 u缺少颜色 4，因此 $4\in\beta'(X_v(2))$。令 $\mathcal{X}'=(vx_1,\cdots,vx_s)$ 为 $X_v(2)$ 的极大子扇，它以一条着色为 4 的边开头，且不包含 $\mathcal{V}$ 的任何边。注意， $E(\mathcal{X}')=E(\mathcal{X})$，且 $V(\mathcal{X}')=V(\mathcal{X})$。还要注意，我们有 $m^{\beta'}(x_s)=2$。子扇 $\mathcal{X}'$不包含 $\mathcal{V}$的任何边，因此它不包含顶点 u，也就不包含任何缺少颜色 4 的顶点。因此，着色 β与着色β'是 $\mathcal{X}$-等价的，所以在着色 β中，扇 $X_v(4)=(vx_1,\cdots,vx_s,vu',\cdots,vu)$ 是一颗彗星，其中

x_s和 u都缺少颜色 2。在着色 β中，圈 $\mathcal{V}$是一个最小圈，因此根据引理 15，它是饱和的，从而 $u \in K_v(1, 2)$ 和 $x_s \notin K_v(1, 2)$。若 x_s不在 $K_{y_r}(1, 2)$ 中，则我们交换 C_1, $_2 = K_{x_s}(1, 2)$，得到着色 β''，它与 β 是 $((\mathcal{X} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{Y}) \setminus \{x_s\})$-等价的。现在我们反演路径 $\mathcal{Y}$，得到一个着色，其中 $X_v(2)$ 是一条路径；根据引理 38，这构成矛盾。

因此 $|\mathcal{Y}| > 1$。$\mathcal{Y}$的大小最小，所以对于 $\mathcal{Y}$中任意满足 $j > 1$的子路径 $X_u(\beta(uy_j))$, 扇 $X_v(\beta(uy_j))$都是包含 x的彗星。因此，扇 $X_v(4)$ 不包含任何在 $\beta(\mathcal{Y})$中缺少某种颜色的顶点，否则它就会是包含 x的彗星。因此，着色$\beta_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}^{-1}(\beta)$与 β是 $\mathcal{X}$-等价的。在着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$中，根据引理 38，扇 $X_v(2)$ 是一个圈。此外，它包含扇 $\mathcal{X}$，因为在着色 $\beta_{\mathcal{Y}}$中，u 缺少颜色 4。因此，在着色 β中，扇 $\mathcal{X} = (vx_1, \cdots, vx_s, vu', \cdots, vu)$是包含 $\mathcal{V}$的彗星，其中x_s 和 u 都缺少颜色 2。与前一种情形类似，由于 $\mathcal{V}$ 最小，根据引理 15，它是饱和的，所以有 $u \in K_v(1, 2)$，进而有 $x_s \notin K_v(1, 2)$。如果 $x_s \notin K_v(1, 2)$，那么我们交换 C_1、$_2 = K_{x_s}(1, 2)$，得到一种使 $X_v(4)$ 成为路径的着色。该着色与 β是 $\mathcal{Y}$-等价的，因此若反演 $\mathcal{Y}$，就会得到一种使 $X_v(2)$ 成为路径的着色，这与引理 38 矛盾。 □

在下一节中，我们将证明性质 $P(0)$。

4.2 P（0）的证明

本节将证明以下引理。

引理40。 性质 P（0）成立。

为了证明 $P(0)$ 成立，我们需要以下引理。

引理 41。 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色 β 中的一个最小圈，且 $u = v_j$ 和 $u' = v_{j'}$ 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点。如果 $uu' \in E(G) \cap$，并且 $\beta(uu') \neq m(v)$，则扇 $\mathcal{X} = X_v(\beta(uu'))$ 是一个饱和圈。

以下引理是证明引理41的第一步。

引理 42。 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色中的一个最小圈，β、$u = v_j$和 $u' = v_{j'}$是 $\mathcal{V}$的两个顶点。若 $uu' \in E(G)$ 以及 $\beta(uu') \neq m(v)$，则扇 $\mathcal{X} = X_v(\beta(uu'))$ 不是一条路径。

证明。 否则，假设 $\mathcal{X}$ 是一条路径。不失一般性，假设顶点 v、u 和 u' 分别缺少颜色 1、2 和 3。由于 $\beta(uu') \notin \{1, 2, 3\}$，我们还假设 $\beta(uu') = 4$。最后，假设 $\mathcal{X}$ 的长度为一；事实上，如果 $\mathcal{X}$的长度大于一，我们就对其进行反演，直到得到一个与 β β' $\mathcal{V}$-等价的着色，其中它的长度为一，同时不改变 uu'的颜色。

我们用 x 表示 $\mathcal{X}$ 的唯一顶点，用 β_2 表示交换边 vx 后得到的着色。着色 β_2 与 β' 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20， $\mathcal{V}$ 是着色 β_2 中的同一个最小圈。根据引理 24，扇 $\mathcal{U} = X_u^{\beta'}(3) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 和 $\mathcal{U}' = X_{u'}^{\beta_2}(3)$ 都是圈，而 uu' 是这两个圈共同的最后一条边；我们用 w 表示在 $\mathcal{U}$ 中缺少颜色 4 的顶点。注意，由于 $\beta(uu') = 4$，顶点 w 就是顶点 u_{l-1}，并且 $\mathcal{U} = (uu_1, \cdots, uw, uu')$。我们首先指出，$4 \notin \beta(\mathcal{V})$；否则，扇 $E(\mathcal{X}) = E(\mathcal{V})$，且扇 $\mathcal{X}$ 是一个圈，因此不是一条路径，正如所需。

我们首先证明关于扇 $\mathcal{U}$ 的一些基本性质。

命题 43。 扇 $\mathcal{U}$ 中包含一条颜色为1的边，并且在 $\mathcal{U}$中，颜色为**1** 的边与颜色为4 的边之间不存在颜色属于 $\beta(\mathcal{V})$ 的边。

证明。 我们首先证明，扇 $\mathcal{U}$ 中存在一条颜色为 1 的边。假设 $\mathcal{U}$ 在着色 β' 中不包含任何颜色为 1 的边。由于扇 $\mathcal{U}$ 是一个圈，这意味着它不包含任何缺少颜色 1 的顶点，特别是不包含 v。因此，着色 β_2 也与着色 β' $\mathcal{U}$-等价。因此， $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}'$ 包含仍缺少颜色 4 的顶点 w。因此，扇 $\mathcal{U}'$ 不与 $\mathcal{V}$ 纠缠；根据引理 24，我们得到矛盾。

因此，扇 $\mathcal{U}$ 包含一条颜色为 1 的边。由于根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，它包含缺少颜色 1 的顶点 v，因此它包含边 uv，以及边 vv_{j-1}（回顾一下， vv_{j-1} 是序列中紧接在 $vu = vv_j$ 之前的边 $\mathcal{V}$）。注意，顶点 u' 和 v_{j-1} 可能是同一个顶点。

现在证明，在序列 $\mathcal{U}$ 中，颜色为 1 的边与颜色为 4 的边之间不存在一条着色为 $\beta(\mathcal{V})$ 中某种颜色的边。反设存在这样一条边 uu_t，其颜色为 $c \in \beta(\mathcal{V})$。与前面的证明类似，这意味着在着色 β_2 中，扇 $X_u(c)$ 是序列 $(uu_t, uu_{t+1}, \cdots, uw, uu')$，其中 $m(w) = m(v) = 4$。因此，此扇与 $\mathcal{V}$ 不纠缠，根据引理 24，我们再次得到矛盾。

□

令 y_1 为与 u 通过颜色为 1 的边相连的 u 的邻点，并令 y_2 为序列 $\mathcal{U}$ 中紧接在 y_1 之后的顶点。注意，由于 $\beta'(uu') \neq 1$，顶点 y_1 不同于顶点 u'，但可能等于顶点 w。在这种情况下， y_2 和 u' 是同一个顶点。

命题 44. 边 uy_1 属于连通分量 $K_v(1, \beta(vu'))$。

证明。假设 uy_1 不属于 $K_v(1, \beta(vu'))$。如果边 vu' 在扇 $\mathcal{V}$ 中紧接着边 vu（即如果 $j' = j+1$），那么这意味着 $\beta(vu') = 3$；又因为 $\beta(uy_1) = 1$，所以顶点 u 不属于连通分量 $K_v(1, 3)$。因此扇 $\mathcal{V}$ 未饱和；根据引理 15，我们得到矛盾。因此，边 vu' 并非扇 $\mathcal{V}$ 中紧接着边 vu 的边，不失一般性，我们假设 $\beta(vu') = 5$。

令 $C_{1,5} = K_{y_1}(1, 5)$，我们先证明顶点 x 属于这个连通分量。由于顶点 y_1 不在 $K_v(1, 5)$ 中，我们有 $K_v(1, 5) \neq C_{1,5}$。扇 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈，根据引理 15，它是饱和的，因此交换 $C_{1,5}$ 后，我们得到一个与 β' 等价的着色 β'' $\mathcal{V}$。根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 在这个着色中仍是同一个最小圈。在着色 β'' 中，边 uuy_1 现在着色为 5，扇 $X_u(5)$ 仍包含顶点 w，它缺少颜色 4。此外，顶点 x 仍缺少颜色 1，因此我们交换边 vu，得到一个与 β'' 等价的着色 $\mathcal{V}$，其中 $X_u(5)$ 包含顶点 w，该顶点缺少颜色 $m(v) = 4$。因此， $X_u(5)$ 与 $\mathcal{V}$ 不纠缠，根据引理 24，我们得到矛盾。

因此，顶点 x 属于连通分量 $C_{1,\,5}$。我们首先交换连通分量 $C_{1,\,5}$，得到一个与 β' 等价的着色 β'' $\mathcal{V}$。在着色 β'' 中，扇 $X_u(5)$ 现在包含仍缺少 4 的顶点 w。因此，顶点 $X_v(5)$ 包含顶点 u'，并且我们有 $X_v(5) = X_v(3)$。

由于圈 $\mathcal{V}$ 是最小圈，根据观察 21，它是紧的。在着色 β''中，顶点 x 现在缺少颜色 5。我们现在对 $t \in (j'-1, j'-2, \cdots, j+1)$ 应用形如 $K_x(m(v_{t-1})\ m(v_t))$ 的一系列 Kempe 交换，以得到一个着色 β_3，其中$m(x) = m(v_{j-1}) = 2$。注意，这些交换中的每一个都是 $\mathcal{V}$-稳定的，因为每次交换后，扇$\mathcal{V}$ 都是一个最小圈，因而是紧的。此外，由于 $\mathcal{U}$ 中 uy_2 与 uu' 之间没有任何边的颜色属于 $\beta'(\mathcal{V})$，着色 β_3 与 β'' 是 $\mathcal{U}_{[y_2,w]}$ 等价的。

因此我们有 $X_u(\beta_3(uy_1))_{\leqslant w} = (uy_1, uy_2, \cdots, uw)$。边 uy_1 可能在交换序列期间被重新着色，但在着色 β_3中，保证 uy_1 被着以 $\beta_3(\mathcal{V})$ 中的某种颜色。在着色 β_3中，顶点 x 和 u 缺少相同的颜色 2，而顶点 v 仍然缺少颜色 1。圈 $\mathcal{V}$ 是最小圈，因此根据引理 15，它是饱和的，故而 $x \notin K_v(1, 2)$。

我们交换连通分量 $C_{1,2} = K_x(1,2)$，得到一种着色，其中 v 和 x 缺少相同的颜色 1，且边 vx 的颜色为 4。现在我们交换边 vx，并将经过这些交换后得到的着色记为 β_4。着色 β_4 与 β_3 是 $\mathcal{V}$- 等价的，并且也与着色 β_3 是 $X_u(\beta_4(uy_1))_{[y_2,w]}$- 等价的。顶点 v 和 w 缺少相同的颜色 4，因此在这种着色中， $X_u(\beta_4(uy_1))$ 和 $\mathcal{V}$ 并未纠缠，由引理 24 可知这就产生了矛盾。 □

命题 45. 在着色 β_2 中，顶点 x 属于 $K_x(2, 4)$。

证明。否则，假设情况并非如此。在着色 β_2 中，扇 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈，因此由引理 15 可知它是饱和的。因此，顶点 u 属于 $K_v(2, 4)$，而顶点 w 不属于这个连通分量。由命题 43 $X_u(1)$ 包含顶点 w。我们交换连通分量 $C_{2,4} = K_w(2, 4)$，得到一个与 β' 等价的着色 β'' $\mathcal{V}$。由观察 20 可知，在着色 β'' 中，圈 $\mathcal{V}$ 仍是同一个最小圈，而此时顶点 w 缺少颜色 2。着色 β'' 也与着色 β' 是 $X_u(1)_{<w}$-等价的，因此 $X_u(1)$ 仍包含顶点 w。顶点 x 仍缺少颜色 4，所以我们交换边 vu，得到着色 β_3，其中 $X_u(1)$ 包含缺少颜色 2 的顶点 w，因此 $X_u(1)$ 是一条路径。由引理 24 可知这就产生了矛盾。 □

现在我们可以证明该引理了。我们需要区分是否 $j = j' + 1$。情形 45.1（$j = j' + 1$）。在此情形下，我们有 $\beta'(vu) = m^{\beta'}(u') = 3$。在着色 β' 中，扇 $\mathcal{V}$是饱和的，因此 $u' \in K_v(1, 3)$，从而 $uy_1 \in K_{u'}(1, 3)$。令 $C_{1,3} = K_{u'}(1, 3) \setminus \{uy_1, vu\}$，$C_{1,3}$ 是 u' 与 y_1之间的一条（1, 3）-双色路径。在着色 β_2 中，我们考察连通分量 $C_{2,4} = K_w(2, 4)$；根据命题 45，该连通分量包含顶点 x。交换 $C_{2,4}$ 后，我们得到一个与 $\mathcal{V}$ β_3 $\mathcal{V}$-等价的着色，其中扇 $X_u(1)$ 是一条路径。根据观察 20，在着色 β_3 中，扇 $\mathcal{V}$ 仍然是同一个最小圈。此外，着色 β_3 与着色 β_2是 $C_{1,3}$-等价的，因此与着色 β' $C_{1,3}$- 等价，所以 $C_{1,3}$ 仍然是 u' 与 y_1 之间的一条（1, 3）- 双色路径。

根据命题 43， $E(X_u(1))$ 中没有一条边的颜色属于 $\beta_4(\mathcal{V})$，因此我们反演 $X_u(1)$，得到着色 β_5，它与 β_4 是 $(C_{1,3} \cup (\mathcal{V} \setminus \{u\}))$-等价的。在着色 β_4 中，顶点 y_1 缺少颜色 1，因此 $K_{u'}(1, 3) = C_{1,3}$，我们交换这个连通分量；将交换后得到的着色记为 β_5。

在着色 β_5 中，顶点 u 和 u' 都缺少颜色 1，因此我们交换边 uu'，得到一个着色，其中 u 和 u' 缺少颜色 4。在着色 β_5 中，扇 $X_v(2)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，得到着色 β_6。在着色 β_6 中，边 uw 的颜色为 2，且顶点 u 现在缺少颜色 4，因此 $K_u(2, 4) = C_{2,4} \cup \{uw\}$，我们交换回这个连通分量，并将此次交换后得到的着色记为 β_7。注意，由于 $|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$，我们可以在 $C_{1,3}$ 之前交换回 $C_{2,4}$。

在着色 β_7 中，顶点 u 和 v 都缺少颜色 2，而边 vu 着色为 3，因此我们交换边 vu，从而得到一种着色，其中 u 和 v 都缺少颜色 4。在交换后得到的着色中，顶点 u 和 y_1 都缺少颜色 3，因此扇 $X_u(4)$ 现在是一条需要反演的路径。我们将交换后得到的着色记为 β_8。

在着色 β_8 中，边 uu' 着色为 1，边 uy_1 着色为 3，因此 $K_u(1,3) = C_{1,3} \cup \{uu', uy_1\}$，且该连通分量是一个 (1, 3)-双色圈，我们对其进行交换。在交换后得到的着色中，连通分量 $K_v(3,4) = \{uu', u'\}$，只需交换该连通分量即可准确得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta')$。由于 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈，这就产生了矛盾。

因此 $j \neq j+1$，并且由于 u 和 u' 的作用对称，我们也有 $j' \neq j+1$。因此，在圈 $\mathcal{V}$ 中，存在一个顶点 v_{j+1} 和 v_{j-1}，使得 $|\{u, u', v_{j-1}, v_{j'-1}\}| = 4$。不失一般性，我们假设 $\beta'(vu') = m^{\beta'}(v_{j'-1}) = 5$，且 $\beta'(vu) = m^{\beta'}(v_{j-1}) = 6$。

情形 45.2 ($j \neq j'+1$)。
对于此情形，我们需要根据 $C_{1,5} = K_{uy_1}(1,5)$ 的形状区分不同情形。由于 $\mathcal{V}$ 在着色 β' 中是饱和的，根据命题 44, $C_{1,5}$ 也包含 v 和 $v_{j'-1}$，因此该连通分量在此着色中是一条 (1, 5)-路径。此外，根据观察 21，扇 $\mathcal{V}$ 是紧的，因此 $K_{v_{j-1}}(2,6)$ 包含 vv_{j+1} 和 vu。设 $C_{2,6} = K_{v_{j-1}}(2,6) \setminus \{vu, vv_{j+1}\}$。路径 $C_{2,6}$ 是连接 v_{j+1} 和 v_{j-1} 的一条 (2, 6)-双色路径。

有两种情况。在着色 β' 中，要么 $C_{1,5}$ 使得 u 位于 $v_{j'-1}$ 和 y_1 之间，要么 y_1 位于 $v_{j'-1}$ 和 u 之间。两种情况都从在着色 β_2 中交换 $C_{2,4} = K_w(2,4)$ 开始。根据命题 45，顶点 w 属于这个连通分量；交换后，我们有 $m(w) = m(x) = m(u) = 2$。根据命题 43 $X_u(1)$ 是一条路径，我们对其进行反演，得到一个与 $\beta_2(\{uu'\} \cup (\mathcal{V} \setminus \{u\}))$ 等价的着色 β_3。

在着色 β_3 中，取决于 $C_{1,5}$ 的形状，要么 u 属于 $C = K_{v_{j'-1}}(1,5)$，要么 y_1 属于这个连通分量。现在我们必须区分这两种情况。两种情况相当相似，其证明依赖于同一原理：进行 Kempe 交换，以得到一种着色，使得 $E(\mathcal{V}) \cup \{vw'\}$ 的边诱导出两个扇，它们是比 $\mathcal{V}$ 更小的圈（并且可反演，因为 $\mathcal{V}$ 是最小的）。

子情形 45.2.1（u属于 C）。
在这种情况下，$C = K_{v_{j'-1}}(1,5)$ 是一条连接 $v_{j'-1}$ 和 u 的 (1, 5)-双色路径，并且存在一条 (1, 5)-双色路径 C' 连接 y_1 和 u'。

从着色 β_3出发，我们交换连通分量 C，得到着色 β_4，其中扇$X_v(5) = (vu', vv_{j'+1}, \cdots, vv_{j-1}, vu)$ 是一个严格小于 $\mathcal{V}$的圈。因此，由于 $\mathcal{V}$是最小的，这个圈是可逆的。此外，扇 $X_v(1) = (vx, vv_{j+1}, \cdots, vv_{j'-1})$ 也是一个严格小于 $\mathcal{V}$的圈，因此它也是可逆的。

反演这两个圈后，我们得到一种着色，其中连通分量 $K_{v_{j'-1}}(1,5) = C \cup \{vv_{j'-1}, vu\}$ $_{1,5}$ β_5 是一个 ( )-双色圈，我们将其交换回去；我们将该着色记为交换后得到的着色。现在，连通分量 $K_{y_1}(1,5)$ 恰好是 C'，我们交换它，得到着色 β_6。

在着色 β_6 中，扇 $X_v(3) = (vu', vu, vv_{j-1} \cdots, vv_{j'+1})$ 现在是一个严格小于 $\mathcal{V}$ 的圈，因此我们将其反演。在这次反演后得到的着色中，(2, 6)-双色路径 $C_{2,6}$ 仍然是连接 v_{j+1} 和 v_{j-1} 的路径，但现在 v_{j-1} 缺少颜色 6，而 v_{j+1} 缺少颜色 2。因此 $K_{v_{j+1}}(2,6) = C_{2,6}$，我们交换这个连通分量。令 β_7 为交换后得到的着色。

在着色 β_7 中，扇 $X_v(1) = (vu', vv_{j'+1}, \cdots, vv_{j-1}, vx)$ 现在是一个严格小于 $\mathcal{V}$ 的圈，因此我们将其反演。在反演后得到的着色中，$K_{y_1}(1,5)$ 现在恰好是 C'，我们将这个连通分量交换回来，并将交换后得到的着色记为 β_8。

在着色 β_8 中，顶点 y_1 和 u 都缺少颜色 1，因此扇 $X_u(2)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，得到一种着色，其中 u 和 w 缺少颜色 2。在反演后得到的着色中，连通分量 $K_{v_{j+1}}(2,6)$ 恰好是 $C_{2,6} \cup \{vv_{j-1}, vu\}$，我们将这个连通分量交换回来。在交换后得到的着色中，连通分量 $K_w(2,4)$

恰好是 $C_{2,\ 4}$，因此将这个连通分量交换回来后，我们恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta')$；这就产生了矛盾。

子情形 45.2.2（y_1 属于 C）。
在此情形下，$C = K_{v_{j'-1}}(1, 5)$ 是连接 $v_{j'-1}$ 和 y_1 的 (1, 5)-双色路径，并且存在一条连接 u 和 u' 的 (1, 5)-双色路径 C'。从着色 β_3出发，我们交换连通分量 C，得到一个着色，其中 $X_v(2) = (vv_{j+1}, \cdots, vv_{j'-1}, vx)$ 是一个严格小于 $\mathcal{V}$的圈，因此它是可逆的。反演它之后，我们得到一个着色，其中连通分量 $K_{v_{j-1}}(2, 6)$ 恰好是 $C_{2,\ 6}$。我们交换这个连通分量，并将交换后得到的着色记为 β_4。

在着色 β_4中，扇 $X_v(1) = (vv_{j'-1}, \cdots, vv_{j+1}, vu)$ 现在是一个严格小于 $\mathcal{V}$的圈，因此它是可逆的。反演它之后，连通分量 $K_{u'}(1, 5)$ 恰好是 $C' \cup \{vu', vu\}$，因此它是一个包含 vu 和 vu'的 (1, 5)-双色圈。交换这个连通分量后，我们得到一个着色，其中扇 $X_v(1) = (vu', vv_{j'+1}, \cdots, vv_{j-1}, vx)$ 现在是一个严格小于 $\mathcal{V}$的圈，我们对其进行反演。我们将反演后得到的着色记为 β_5。

在着色 β_5 中，连通分量 $K_{v_{j'-1}}(1, 5)$ 恰好是 C，我们将该连通分量交换回去。交换后得到一种着色，其中扇 $X_v(5) = (vu, vv_{j+1}, \cdots, vv_{j'-1})$ 现在是一个严格小于 $\mathcal{V}$ 的圈，因此我们将其反演，并将交换后得到的着色记为 β_6。

在着色 β_6 中，连通分量 $K_{u'}(1, 5)$ 现在恰好是 C'，我们将该连通分量交换回去。交换后得到一种着色，其中 u 和 y_1 都缺少颜色 1，因此扇 $X_u(2)$ 现在是一条将其反演的路径。我们将交换后得到的着色记为 β_7。

在着色 β_7 中，连通分量 $K_{v_{j-1}}(2, 6)$ 恰好是 $C_{2,\ 6} \cup \{vv_{j-1}, vu\}$，我们将其交换回去。交换该连通分量后，得到一种着色，其中 $K_w(2,4)$ 恰好是 $C_{2,\ 4}$。将该连通分量交换回去后，恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta')$。这是一个矛盾。

□

由前面的引理，我们得到如下推论。

推论46。 令 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 为着色 β 中的一个最小圈，$u = v_j$ 和 $u' = v_{j'}$ 为 $\mathcal{V}$的两个顶点。如果 $uu' \in E(G)$ 和 $\beta(uu') = m(v)$，则 v 周围的任何扇都不是路径。

证明。 假设存在一个 $\mathcal{X}$ 围绕 v 且为路径的扇。只需交换 vx 的 $\mathcal{X}$ 最后一条边，即可得到一个着色 β_2（$\mathcal{V} \cup \{uu'\}$），它与 β 等价，并且使得 $X_v(\beta_2(uu')) = \{vx\}$现在成为一条（长度为一的）路径。根据观察 20，该扇 $\mathcal{V}$ 是该着色中的一个最小圈β_2，因此根据引理42，得到矛盾。

□

现在我们可以证明引理41

引理 41 的证明。令 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 为着色 β中的一个最小圈，$u = v_j$ 和$u' = v_{j'}$ 为 $\mathcal{V}$的两个顶点。不失一般性，我们假设顶点 v、u 和 u'分别缺少颜色1、2和3。根据引理 24，扇 $\mathcal{U} = X_u(m(u'))$ 是一个与 $\mathcal{V}$纠缠的圈，因此边 uu' 位于 $E(G)$ 中。假设 $\beta(uu') \neq 1$。

我们首先证明 $X_v(\beta(uu'))$ 是一个饱和圈。若 $\beta(uu') \in \beta(\mathcal{V})$，则 $X_v(\beta(uu'))$恰好是扇 $\mathcal{V}$。由于 $\mathcal{V}$ 是最小的，根据引理15，它是饱和的，因此 $X_v(\beta(uu'))$ 是一个饱和圈，正如所需。

因此，假设 $\beta(uu') \notin \beta(\mathcal{V})$，不失一般性，设 $\beta(uu') = 4$。由引理42，扇 $X_v(4)$ 不是一条路径。

现在证明 $X_v(4)$ 不是彗星。假设 $X_v(4) = (vw_1, \cdots, vw_t)$ 是一颗彗星。因此存在 $i < t$，使得 $m(w_i) = m(w_t)$，我们将这种颜色记为 c。如果 $c \in \beta(\mathcal{V})$，则圈

$\mathcal{V}$ 是扇 $X_v(4)$ 的一个子扇，因此 $w_t = M(\mathcal{V}, c) \in V(\mathcal{V})$ 且 $w_i \notin V(\mathcal{V})$。由于 $\mathcal{V}$ 是最小的，根据引理 15，它是饱和的，因此 $w_t \in K_v(1, c)$，从而 $w_i \notin K_v(1, c)$。现在我们交换连通分量 $K_{w_i}(1, c)$，得到一个与 β β_2 $(\mathcal{V} \cup \{uu'\})$-等价的着色，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 在着色 β_2 中也是一个最小圈。在着色 β_2 中，扇 $X_v(\beta_2(uu')) = X_v(4)$ 现在是一条路径，根据引理 42，这就产生了矛盾。

因此 $c \notin \beta(\mathcal{V})$。顶点 w_i 和 w_t 并非都属于 $K_v(1, c)$。若 w_i 不在 $K_v(1, c)$ 中，我们交换 $K_{w_i}(1, c)$，得到一个与 β 在 $(\mathcal{V} \cup \{uu'\})$ 意义下等价的着色 β_2。因此，根据观察 20，着色 β_2 中的扇 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈。但扇 $X_v(4) = X_v(\beta_2(uu'))$ 现在是一条路径，这与引理 42 矛盾。

因此，顶点 w_i 属于连通分量 $K_v(1, c)$，而 w_t 不属于该连通分量。现在我们交换 $K_{w_t}(1, c)$，得到一个与 β 在 $(\mathcal{V} \cup \{uu'\})$ 意义下等价的着色 β_2。因此，根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 仍然是 β_2 中同一个最小圈，但扇$X_v(4) = X_v(\beta_2(uu'))$ 现在是一条路径，这再次与引理 42 矛盾。

因此，扇 $X_v(4)$ 是一个圈。现在我们证明它是饱和的。注意，由于 $X_v(4)$ 是一个圈，$\beta(X_v(4)) \cap \beta(\mathcal{V}) = \{1\}$。假设 $X_v(4) = (vw_1, \cdots, vw_t)$ 不饱和，则存在 i 使得 $w_i \notin K_v(1, m(w_i))$。现在我们需要区分 $w_i = w_t$ 是否成立。

情形 46.1($w_i \neq w_t$)。
此情形与 $X_v(4)$ 是彗星的情形类似。在此情形中，顶点 w_i 缺少一种不属于 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的颜色，并且我们可以不失一般性地假设 $m(w_i) = 5$。由于 w_i 不属于 $K_v(1, 5)$，我们交换连通分量 $K_{w_i}(1, 5)$，得到一个与 β β_2 $(\mathcal{V} \cup \{uu'\})$-等价的着色。在着色 β_2 中，根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是同一个最小圈，但扇 $X_v(4) = (w_1, \cdots, w_i)$ 现在是一条路径，这与引理 42 矛盾。情形 46

.2 ($w_i = w_t$)
在此情况下，w_t 不属于 $K_v(1, 4)$。我们先交换连通分量$C_{1,4} = K_{w_t}(1, 4)$。如果$uu' \notin C_{1,4}$，那么我们得到一个着色 β_2 $(\mathcal{V} \cup \{uu'\})$，它与 β等价。因此，根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β_2中的一个最小圈，但此时扇 $X_v(4) = X_v(\beta_2(uu')) = (vw_1, \cdots, vw_t)$是一条路径；由引理 42 可知，这产生矛盾。

所以边 uu' 属于 $C_{1,4}$。交换 $C_{1,4}$ 后，我们得到一个着色 β_2 $(\mathcal{V})$，它与β等价，因此 $\mathcal{V}$仍然是一个最小圈。但此时 $\beta_2(uu') = 1$，而 $X_v(4)$ 是一条路径，因此根据推论 46，我们得到矛盾。

因此 $X_v(4)$是所需的饱和圈。

□

$P(0)$的证明直接由前两个引理推出。

引理40的证明。设 $\mathcal{V}$ 是着色 β中围绕顶点 v 的一个最小圈，u 和 u'是 $\mathcal{V}$的两个顶点，$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$，假设 $\beta(uu') \neq m(v)$，并令$\mathcal{W} = X_v(\beta(uu_l)) = (vw_1, \cdots, vw_s)$。不失一般性，我们假设顶点$v$、$u$ 和 u' 分别缺少颜色1、2和3，且边 uu' 着色为4。

我们首先证明 $\mathcal{W}$ 是一个包含 u_{l-1}的饱和圈。根据引理41，扇 $\mathcal{W}$ 是一个饱和圈，因此 w_s 缺少颜色4。现在我们证明扇 $\mathcal{W}$ 包含顶点 u_{l-1}。

如果 $4 \in \beta(\mathcal{V})$，那么 $\mathcal{W} = \mathcal{V}$，且由于 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 根据引理24纠缠在一起$u_{l-1} = w_s \in \mathcal{V} = \mathcal{W}$。因此，颜色 4 不属于 $\beta(\mathcal{V})$。
假设扇 $\mathcal{W}$ 不包含 u_{l-1}，因此特别有 $u_{l-1} \neq w_s$。圈 $\mathcal{W}$ 是饱和的，所以 $w_s \in K_v(1,4)$，从而 $u_{l-1} \notin K_v(1,4)$。由引理 49

- $u \in K_{u_{l-1}}(1, 4)$,

- 存在 $j \leqslant l-1$ 使得 $\beta(uu_j) = 1$，并且
- 子扇（uu_{j+1}、 $\cdots$、 uu_{l-1}）是一个（$\mathcal{V}$、 u）-独立子扇。

现在考虑将连通分量$C_{1、4} = K_{u_{l-1}}(1,4)$交换后从 β 得到的着色 β'。令 $\mathcal{X} =$（uu_{j+1}、 $\cdots$、 uu_{l-1}）。着色 β' 与 β（$\mathcal{X} \setminus \{u_{l-1}\}$）-等价，因此根据观察 20， $\mathcal{V}$ 是最小的，而 $\mathcal{W} = X_v(4)$仍然是一个圈。顶点 v 仍然缺少颜色 1，但现在顶点 u_{l-1} 缺少颜色 1，边 uu_j 着色为 4，边 uu_l 着色为 1。因此现在（uu_j、 $\cdots$、 uu_i）的 $X_u(4) = \mathcal{X}' =$是一个避开顶点 v的（$\mathcal{V}$、 u）-独立子扇。根据引理 34，扇 $X_v(4)$是一条路径；矛盾。 □

现在我们证明最小圈的一个顶点周围的扇的一些性质。

4.3 最小圈顶点周围的扇

我们首先证明，最小圈的一个顶点周围的某些扇不是路径。

命题*47.* 设 $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_k)$ 是着色 $\beta, u = v_j$ 中的一个最小圈，且 $u' = v_{j'}$ 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点，$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$，而 $w = u_s$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个顶点。那么对于任意颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$，扇 $\mathcal{W} = X_w(c) = (ww_1, \cdots, ww_t)$ 不是一条路径。

证明。 否则，假设扇 $\mathcal{W}$ 是一条路径。顶点 w 不是 $V(\mathcal{V})$ 的顶点，否则由于 $\mathcal{W}$ 是一条路径，根据引理24 可得矛盾。因此，顶点 w 不在$V(\mathcal{V})$。

我们不断反演，直到得到一种着色 β_2，其中 $m^{\beta_2}(w) \in \beta(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<s})$；我们将$c'$ 记作这个新的缺失颜色。由于 $c \in \beta(\mathcal{W})$，颜色 c' 有明确定义。着色 β_2 与 β是（$\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<s}$）-等价的。因此，根据观察 20，序列 $\mathcal{V}$在着色 β_2中仍然是一个最小圈。令 $\mathcal{U}' = X_u(m^{\beta_2}(u')) = (uu'_1, \cdots, uu'_l)$。由于 β_2 与 β是（$\mathcal{U}_{<s}$）-等价的，我们有 $\mathcal{U}_{<s} = \mathcal{U}'_{<s}$，因此边 uw也属于 $E(\mathcal{U}')$；它恰好就是边 uu'_s。如果 $c' \in \beta(\mathcal{V})$，那么在着色 β_2中，$\mathcal{U}'$ 与 $\mathcal{V}$并不纠缠，这与引理 24 矛盾。如果 $c' \in \beta\mathcal{U}_{<s}$，那么此时 $\mathcal{U}'$ 在着色 β_2中是一个彗星；同样，根据引理 24，我们得到矛盾。 □

引理 *48.* 设 $i \geqslant 0$, $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈，且 u' 是 $\mathcal{V}$,$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 中的两个顶点，$c \in \beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{U}_{<u_i})$。若 $u_i \notin V(\mathcal{V}) \cup \{v\}$，则扇 $\mathcal{X} = X_{u_i}(c) = (u_i x_1, \cdots, u_i x_s)$ 不是一条路径。

证明. 假设 $u_i \notin V(\mathcal{V})$，且 $\mathcal{X}$ 是一条路径。不失一般性，我们假设 $\mathcal{X}_{[x_2,x_s]}$ 中没有边的颜色属于 $\beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{U}_{<u_i})$；否则，只需考虑从这条边开始的 $\mathcal{X}$ 的子扇，该扇也是一条路径。现在我们反演 $\mathcal{X}$，得到着色 β'，其中 $m(u_i) = c$。着色 β' 与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$-等价的。因此，根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中的一个最小圈。若 $c \in \beta(\mathcal{V})$，则现在扇 $X_u(m(u'))$ 包含顶点 u_i，它缺少颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$，所以 $X_u(m(u'))$ 与 $\mathcal{V}$ 不纠缠。若 $m(u_i) \in \beta(\mathcal{U}_{<u_i}$，令 $u'' = M(\mathcal{U}_{<u_i}, c)$。那么 $X_u(m(u'))$ 现在是一个彗星，因为它包含顶点 u_i 和 u''，二者都缺少颜色 c。两种情况下，根据引理 24，都会得到矛盾。

□

现在我们证明一个充分条件：最小圈某个顶点周围的扇包含一条边，其颜色为最小圈中心顶点缺少的颜色。

引理 *49.* 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β中的一个最小圈，且 u 和 u' 是 $\mathcal{V}$、 $\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 以及 $i \leqslant l$ 的两个顶点。如果 $\beta(uu_i) \neq m(v)$、 $m(u_i) \notin \beta(\mathcal{V})$ 且 $u_i \notin K_v(m(v)\ m(u_i))$，则：

- $u \in K_{u_i}(m(v)\ m(u_i))$,
- 存在 $j < i$，使得 $\beta(uu_j) = m(v)$，并且
- 子扇 $(uu_{j+1},\ \cdots,\ uu_i)$ 是一个$(\mathcal{V},\ u)$-独立子扇。

证明。设 $\mathcal{V}$、u、u' 和 $\mathcal{U}$ 如引理中所述。不失一般性，假设顶点 v、u 和 u' 分别缺少颜色 1、2 和 3。假设 $u_i \notin K_v(1, m(u_i))$。由于圈 $\mathcal{V}$ 是最小圈，根据引理 15，它是饱和的，因此对于任意 $u'' \in V(\mathcal{V})$，$u'' \in K_v(m(v)\ m(u''))$，于是 $u_i \notin V(\mathcal{V})$；因此不失一般性，我们可以假设 u_i 缺少颜色 4。我们首先考虑连通分量$C_{1,4} = K_{u_i}(1, 4)$。在着色β中，根据引理 24，$\mathcal{U}$ 是与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，因此不包含其他缺少颜色 4 的顶点。由于 $v \notin C_{1,4}$，因此 $V(C_{1,4}) \cap V(\mathcal{U}) = \{u_i\}$。交换 $C_{1,4}$ 后，我们得到着色 $\beta'(V(\mathcal{U}) \setminus \{u_i\})$-与 β 等同，其中 u_i 现在缺少颜色 1。注意，着色 β' 也与 β $\mathcal{V}$-等价，因此 $\mathcal{V}$ 仍然是 β' 中的最小圈。此外，顶点 v 在 β' 中仍然缺少颜色 1。

我们首先证明顶点 u 属于 $C_{1,4}$，并且 $\{uu_1, \cdots, uu_{i-1}\}$中有一条颜色为 1 的边。若 $u \notin C_{1,4}$，或者 $\{uu_1, \cdots, uu_{i-1}\}$中没有颜色为 1 的边，则着色 β' 也与 β是 $(E(\mathcal{U}_{[uu_1, uu_i]}))$-相同的，因此 $X_u(3)$现在包含顶点 u_i，而该顶点缺少颜色 1，所以 $X_u(3)$不是与 $\mathcal{V}$纠缠的圈。由于圈 $\mathcal{V}$是最小的，根据引理 24，这就导致矛盾。因此 $u \in C_{1,4}$，并且存在一条边 uu_j，其颜色为 1。

现在我们证明 $(uu_{j+1}, \cdots, uu_i)$ 是一个 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。注意，我们有 $j + 1 = i$（即该子扇的长度为 1）。由于 β' 与 β是 $(V(\mathcal{U}) \setminus \{u_i\})$-相同的，序列 $(uu_{j+1}, \cdots, uu_i)$ 是一个子扇。假设存在 $s \in \{j + 1, \cdots, i\}$，使得$\beta(uu_s) \in \beta(\mathcal{V})$。那么在着色 β'中，$X_u(\beta(uu_s))$ 包含顶点 u_i，该顶点缺少颜色 1，因此它不是与 $\mathcal{V}$纠缠的圈。根据引理 24，这就导致矛盾。□

引理 *50.* 设 $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈，u 和 u' 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点，$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$，且 $i \leqslant l$ 满足 $m(u_i) \notin \beta(\mathcal{V})$。设 β' 是通过交换某种颜色 $c \notin (\beta(\mathcal{U}_{<u_i}) \cup \{m(v)\})$ 的 $(m(v)\ c)$-连通分量 C（该连通分量不包含 v）而从 β 得到的着色。若存在着色 β'' 使得:

- β'' *is* $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$*-equivalent to* β'*, and*
- $m^{\beta''}(u_i) \in \beta''(\mathcal{V}) \cup \beta''(\mathcal{U}_{<u_i})$.

Then

- $u \in C$,
- 存在 $j < i$ 使得 $\beta(uu_j) = m(v)$，并且
- 子扇 $(uu_{j+1},\ \cdots,\ uu_i)$ 是 β 中的一个 $(\mathcal{V},\ u)$-独立子扇。

证明。令 $\mathcal{V}$、$\mathcal{U}$、u、u'、β' 和 c 如引理中所述。不失一般性，我们假设顶点 v、u 和 u' 分别缺失颜色 1、2 和 3。假设存在这样的着色 β''。注意，由于 $m(u_i) \notin \beta(\mathcal{V})$，顶点 u_i 不在 $\mathcal{V}$ 中。圈 $\mathcal{V}$ 是 β 中的最小圈，因此根据引理 15，它是饱和的。因此，如果 $c \in \beta(\mathcal{V})$，那么 $M(\mathcal{V}, c) \in K_v(1, c)$，从而 $M(\mathcal{V}, c) \notin C$。所以 β' 与 β 是 $V(\mathcal{V})$-等价的。此外，$v \notin C$，因此 β' 也与 β 是 $(E(\mathcal{V}) \cup \{v\})$-等价的。因此，着色 β' 与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \{v\})$-等价的。

我们首先证明顶点 u 属于 C，并且 $\mathcal{U}_{<u_i}$ 中存在一条着色为 1 的边。假设 u 不属于 C，或者在 β 中的 $\mathcal{U}_{<u_i}$ 中不存在着色为 1 的边。我们证明 β'' 与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$-等价的。为证明这一点，只需证明 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{<u_i}$-等价的。β 与 β' 之间的交换只会改变着色为 1 或 c 的边的颜色。由于 $\{1, c\} \cap \beta(\mathcal{U}_{<u_i}) = \emptyset$，这意味着着色 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{<u_i}$-等价的。由于 β' 也与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \{v\})$-等价的，因此总的来说，它与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$-等价的。注意，$v$ 的缺失颜色在 β' 和 β'' 中可能不同。由于 β'' 与 β' 是 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$-等价的，着色 β'' 与 β 是 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{<u_i})$- 等价的。注意，$v$ 的缺失颜色在 β' 和 β'' 中可能不同。因此，在着色 β'' 中，根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈，并且我们有 $X_u(m(u'))$ 现在包含顶点 u_i，该顶点在 $(\beta''(\mathcal{V}) \cup \beta''(\mathcal{U}_{<u_i}))$ 中缺失一种颜色。令 c' 为该颜色。由于圈 $\mathcal{V}$ 是 β'' 中的最小圈，根据引理 24，$X_u(m(u'))$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。如果 $c' \in \beta''(\mathcal{V})$，那么 $X_u(m(u'))$ 不与 $\mathcal{V}$ 纠缠；而如果 $c' \in \beta''(\mathcal{U}_{<u_i})$，那么 $X_u(m(u'))$ 是一颗彗星。在这两种情况下，我们都得到矛盾。因此，$u \in C$，并且存在 $j < i$ 使得 $\beta(uu_j) = 1$。

现在我们证明，子扇 $\mathcal{X} = (uu_{j+1}, \cdots, uu_i)$ 是 β 中的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。注意，我们有 $j+1 = i$（即该子扇的长度为 1）。如果 $\mathcal{X}$ 不是 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇，那么存在 $s \in \{j+1, \cdots, i\}$，使得 $c' \in \beta(uu_s) \in \beta(\mathcal{V})$。回忆着色 β' 与 β $(\mathcal{V} \cup \{v\})$-等价，因此 β'' 也与 β $(\mathcal{V} \cup \{v\})$-等价。在着色 β' 中，边 uu_j 现在被着为 c，这是在交换 C 期间被重新着色的 $E(\mathcal{U}_{<u_i})$ 中唯一的边。此外，圈 $\mathcal{V}$ 是 β 中的最小圈，因此根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 是一个圈，并且不包含任何在 $V(\mathcal{U}_{[u_j, u_i]})$ 中缺少颜色 1 的顶点。由于 $c \notin \beta(\mathcal{U}_{<u_i})$，着色 β' 也与着色 β $(V)(\mathcal{U}_{[u_j, u_i]})$- 等价，因此它与 β $\mathcal{X}$- 等价。着色 β'' 与 β' $\mathcal{U}_{<u_i}$- 等价，因此它与 β $(\mathcal{X} \setminus \{u_i\})$-等价，从而扇 $X_u(c')$ 现在以边 uu_s 开始，并包含顶点 $u_i \notin V(\mathcal{V})$，该顶点在 $\beta(\mathcal{V}) = \beta''(\mathcal{V})$ 中缺少一种颜色。由于 $\mathcal{V}$ 也是 β'' 中的最小圈，根据引理 24，$X_v(c')$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈；这就产生了矛盾。 □

在以下章节中，我们将证明：如果性质 P 对某个 i 以内的范围成立，则可以保证一些性质。

4.4 由 $P(i)$ 保证的性质

以下引理保证两个圈的最后一个顶点相同。

引理 *51.* 设 $i \geqslant 0$, $\mathcal{V}$ 是着色 β 中围绕顶点 v 的一个最小圈，且 u'' 和 $\mathcal{V}(m^{\beta}(u'')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 是两个顶点，β' 是一个与 β 和 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(m^{\beta'}(u'')) = (uu'_1, \cdots, uu'_s)$ 的 $\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)}, u_l]} \bigcup \bigcup_{j \in [0, i-1]} X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 等价的着色。如果

- 对任意 $j < i$ $P(j)$ 均成立，并且
- $\{m^{\beta}(v), m^{\beta'}(v)\} \cap \beta(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)}, u_l]})) = \emptyset$

那么对于任意 $t \leqslant i$, $u_{l-t} = u'_{s-t}$，结论均成立。

证明。设 i、$\mathcal{V}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$、β、β'、v、u 和 u'' 如引理中所述。假设对所有 $j < i$，$P(j)$ 都成立，且 $\{m^{\beta}(v)\ m^{\beta'}(v)\} \cap \beta(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)}, u_l]})) = \emptyset$，并且存在 $t \leqslant i$ 使得 $u_{l-t} \neq u_{s-t}$。不失一般性，我们可以假设这样的 t 是最小的。圈 $\mathcal{V}$ 是 β 中的一个最小圈，而 β' 与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 也是着色 β' 中的一个最小圈。因此根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 分别是在 β 和 β' 中与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。注意，由于 $m^{\beta}(v) \notin \beta(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)}, u_l]})$),

并且对所有 $j < i$、所有 $j < i$， $P(j)$ 都成立，扇 $X_v(\beta(uu_{l-j})$ 是一个包含 u_{l-j-1} 的圈。此外，这也意味着 $V(\mathcal{U}_{[u_{l-i},u_l]})$ 中没有顶点缺少颜色 $m(v)$，因此其中没有顶点是 v。所以，顶点 v 在 β 和 β' 中可能分别缺少不同的颜色。另请注意，在着色 β 中，边 uu_{l-i} 可以着成 $m^{\beta}(v)$ 或 $m^{\beta'}(v)$。

我们首先证明 $t \neq 0$。由于扇 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{U}'$都是圈，因此有 $m^{\beta}(u_l) = m^{\beta'}(u_s) = m^{\beta}(u'')$，此外， $\mathcal{U}$和 $\mathcal{U}'$与 $\mathcal{V}$纠缠，因此 $u_l = u'' = u'_s$，从而$t \neq 0$。

由于 t 是最小的， $u_{l-(t-1)} = u'_{s-(t-1)}$。此外， β' 与 β是 $\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)},u_l]}$-等价的，因此特别有 $\beta(uu_{l-(t-1)}) = \beta'(uu_{l-(t-1)}) = \beta'(uu'_{s-(t-1)})$，不失一般性，我们假设该颜色为 1。这意味着顶点 u_{l-t} 和 u'_{s-t} 都缺少颜色 1。为了导出矛盾，我们证明这两个顶点属于同一个圈。由于 $1 \neq m^{\beta}(v)$ 且 $P(t-1)$ 成立，因此 $X^{\beta}(1)$ 是一个包含 u_{l-t}的圈。类似地， $1 \neq m^{\beta'}(v)$ 且 $P(t-1)$ 成立，因此 $X_v^{\beta'}(1)$ 是一个包含 u'_{s-t}的圈。然而，着色 β' 是 $(\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j}))$-$_{j\in[0,i-1]}$

等价于着色 β，因此特别有 $X_v^{\beta}(1) = X_v^{\beta'}(1)$；我们将此扇记为 $\mathcal{X}$。扇 $\mathcal{X}$是一个圈，且包含两个都缺少颜色 1 的顶点 u_{l-t} 和 u_{s-t}，这就产生了矛盾。

□

现在我们证明，可以保证最小圈的中心顶点周围不存在路径

引理 52. 设 $i \geqslant 0$, $\mathcal{V}$ 是着色 β中围绕顶点 v 的一个最小圈， u 和 u'' 是 $\mathcal{V}, \mathcal{U} = X_u^{\beta}(m(u''))$ $= (uu_1, \cdots, uu_l)$中的两个顶点，而 $\mathcal{X} = (vx_1, \cdots, vx_s)$ 是围绕 v的一个扇。若

- 对任意 $j < i$ $P(j)$ 都成立，
- $P_{weak}(i)$ 成立，且
- $\beta(uu_{l-i}) = m(v)$,

那么 $\mathcal{X}$ 不是一条路径。

证明。设 i、 $\mathcal{V}$、 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{X}$、 β、 v、 u和 u''如引理中所述，不失一般性，假设 $m(v) = 1$。假设对任意 $j < i$ P，j均成立， $P_{weak}(i)$成立，$\beta(uu_{l-i}) = m(v)$，且 $\mathcal{X}$ 是一条路径。扇 $\mathcal{X}$ 是一条路径，因此顶点 x_s 也缺少颜色 1；不失一般性，假设 $\beta(vx_s) = 2$。注意，这意味着 $X_v(2)$也是一条路径（长度为 1）。圈 $\mathcal{V}$ 是最小的，根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 是一个与 $\mathcal{V}$纠缠的圈。由于 $\beta(uu_{l-i}) = 1$， $E(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)},u_l]})$中没有边染成颜色 1。由于对所有 $j < i$，$P(j)$都成立， $X_v(\beta(uu_{l-j})$对所有 $j < i$都是一个圈；由于 $X_v(2)$是一条路径，$E(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)},u_l]})$中也没有边染成颜色 2。

现在考虑通过交换边 vx_s 从 β 得到的着色 β'。注意，在着色 β' 中，顶点 v 现在缺少颜色 2，而扇 $X_v^{\beta'}(1)$ 现在是一条长度为 1 的路径。显然，着色 β' 与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中的最小圈。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(m(u'')) = (uu'_1, \cdots, uu'_s)$。$E(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)},u_l]})$ 中没有边着色为 1，因此 $V(\mathcal{U}_{[u_{l-i},u_l]})$ 中没有顶点缺少颜色 1，于是 β' 也与 β 是 $\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)),}\ u_l]}$-等价的。最后，由于 $E(\mathcal{U}_{[u_{l-(i-1)},u_l]})$ 中没有边着色为 1，且对所有 $j < i$，$P(j)$ 都成立，所以对所有 $j < i$，扇 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 都是圈。因此，着色β' 也是 $(\bigcup_{j\in[0}$

$_{,i-}$ $X_v(\beta(uu_{l-j}))$等价于 β。根据引理 51，对于任意 $t \leqslant i$ $u_{l-t} = u'_{s-t}$,$^{1]}$ 因此特别有 $u_{l-i} = u'_{s-i}$。在着色 β' 中，边 uu_{s-i} 仍然着色为 1，而现在顶点 v 缺少颜色 2。由于 $P_{weak}(i)$ 成立，扇 $X_v^{\beta'}(1)$ 不是一条路径，这就产生了矛盾。

□

下一个引理讨论 $(\mathcal{V}, u)$-独立圈。

引理 53。设 $i \geqslant 0$， $\mathcal{V}$ 是着色 β中的一个最小圈， u 和 u' 是 $\mathcal{V}$，$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$，$h \leqslant i$ 中的两个顶点，使得 $\beta(uu_{l-h}) = m(v)$， c' 是一个不在 $\beta(\mathcal{V})$ 中的颜色，使得 $\mathcal{Y} = X_u(c') = (uy_1, \cdots, uy_r)$ 是一个不同于 $\mathcal{U}$ 的（$\mathcal{V}$， u）-独立圈，并且$\mathcal{X} = X_v(c') = (vx_1, \cdots, vx_s)$ 是一个不同于 $\mathcal{V}$ 的圈，其中有 $y_r = x_s = z$，且 c'' 是 $\beta(\mathcal{V})$ 中的一个颜色。如果对于所有 $j \leqslant i$， $P(j)$ 都成立，则 $\mathcal{Z} = X_z(c'')$ 不是一条路径。

证明。不失一般性，假设顶点 v、 u 和 u' 分别缺少颜色 1、2 和 3；我们还假设 $c' = 4$。注意，由于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是不同的圈，我们有 $\beta(\mathcal{U}) \cap \beta(\mathcal{Y}) = \{m(u)\} = \{2\}$；又由于 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{V}$是不同的圈，我们有 $\beta(\mathcal{V}) \cap \beta(\mathcal{X}) = \{m(v)\} = 1$。假设扇 $\mathcal{Z}$是一条路径。扇 $\mathcal{V}$是一个最小圈，因此根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$是一个与 $\mathcal{V}$纠缠的圈，从而 $u_l = u'$。

我们首先反演 $\mathcal{Z}$，直到得到着色 β'，其中 $m(z) = c \in (\beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{X}) \cup \beta(\mathcal{Y})) \setminus \{4\}$。着色 β' 与 β是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 在着色 β'中仍是同一个最小圈。着色 β' 也与 β是 $\mathcal{U}$-等价的，因此在着色 β'中，扇 $X_u(3)$ 恰好是 $\mathcal{U}$。由于性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$ 都成立，对于任何满足$\beta(uu_{l-j}) \neq 1$的 $j \leqslant h$，扇 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 是一个包含 u_{l-j-1}的饱和圈。

我们首先证明 $c \notin \beta(\mathcal{V})$。否则，假设 $c \in \beta(\mathcal{V})$，则 $c \notin \beta(\mathcal{Y})$，因为 $\mathcal{Y}$是一个 $(\mathcal{V}, u)$-独立圈；又由于 $\mathcal{X}$不同于 $\mathcal{V}$，所以 $c \not\in \beta(\mathcal{X})$。因此，着色 β'与 β是 $(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \setminus \{z\})$-等价的。于是，在着色 β'中，扇 $X_u(4)$ 和 $X_v(4)$ 仍包含顶点 z。若 $c = 1$，那么在着色 β'中，由于扇 $X_u(4)$ 仍包含顶点 z，我们有 $X_u(4)_{\leqslant z}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。然而，扇$X_v(4)$现在是一条包含 z 的路径。由引理 34，得到矛盾。因此 $c \neq 1$。由于扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β'中的一个最小圈，根据引理 15，它是饱和的，故 $z \notin K_v(1, c)$。现在我们交换连通分量 C_1，$_c = K_z(1, c)$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 与 β' 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20， $\mathcal{V}$ 在着色β'' 中仍是一个最小圈。着色 β'' 也与 β'是 $(X_u(4)_{\leqslant z}) \cup X_v(4))$-等价的，因此扇$X_u(4)$仍包含顶点 z，而该顶点现在缺少颜色 1。与前一种情形类似，子扇 $X_u(4)_{\leqslant z}$ 现在是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇，而 $X_v(4)$现在是一条路径；再次由引理 34，得到矛盾。不失一般性，我们假设$c = 5$。

情况 53.1 ($5 \notin \beta(\mathcal{X})$)。

在这种情况下，着色 β' 与 β 是 $(\mathcal{X} \setminus \{z\})$-等价的，因此在着色 β' 中，扇$X_v(4)$ 仍包含顶点 z，而该顶点现在缺少颜色 5。

子情况 53.1.1($5 \in \beta(\mathcal{U}_{<u_{l-h}})$)。

令 z' 为 $\mathcal{U}_{<u_{l-h}}$ 中缺少颜色 5 的顶点。若顶点 z' 不属于 $K_v(1, 5)$，则我们交换连通分量 $C_{1,5} = K_{z'}(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 显然与 β' 等价，所以根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 仍是着色 β'' 中的同一个最小圈。由于着色 β' 中，$\mathcal{U}_{<u_{l-h}}$ 内没有边被染成颜色 1 或 5，着色 β'' 也与 β' 等价。因此，在着色 β'' 中，扇 $X_u(3)$ 仍包含顶点 z'，该顶点现在缺少颜色 1，于是 $X_u(3)$ 不与 $\mathcal{V}$ 纠缠。根据引理 24，得到矛盾。因此，顶点 z' 属于$K_v(1, 5)$，而顶点 z 不属于 $K_v(1, 5)$。现在我们交换连通分量$C_{1,5} = K_z(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 也与 β' 等价，因此扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β'' 中的最小圈。此外，由于 $5 \in \beta(\mathcal{U}_{<u_{l-h}})$， $5 \notin \beta(\mathcal{Y})$。我们还知道 $5 \notin \beta(\mathcal{X})$，因此总之，着色 β'' 与着色 β' $(\mathcal{Y} \cup \mathcal{X} \setminus \{z\})$ 等价。这意味着在着色 β'' 中，扇 $X_u(4)$ 仍包含顶点 z，该顶点现在缺少颜色 1，因此 $X_u(4)_{\leqslant z}$ 是 $(\mathcal{V}, u)$-独立

避开 v 的子扇。我们还知道，扇 $X_v(4)$ 现在是一条包含顶点 z 的路径，因此根据引理34 得到矛盾。

子情形 53.1.2($5 \in \beta(\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-h}})$)。

令 s 满足 $m(u_{l-s}) = 5$。扇 $X_v(5)$ 是一个包含 u_{l-s} 的饱和圈，因此顶点u_{l-s} 属于连通分量 $K_v(1, 5)$，而顶点 z 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $K_z(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β''。由于颜色 5 不在 $\beta(X_v(4))$ 中，着色 β''与 β' 是 $(X_v(4) \setminus \{z\})$-等价的。因此，在着色 β'' 中，扇 $X_v(4)$仍包含缺少颜色 1 的顶点 z，所以它现在是一条路径。由于颜色 5 在 $\beta(\mathcal{U}_{>u_{l-h}})$ 中，而不在 $\beta(\mathcal{Y})$ 中，因此着色 β'' 与 β' 是 $(X_u(4) \setminus \{z\})$-等价的，故 $X_u(4)$ 仍包含顶点 z。所以子扇 $X_u(4)_{\leqslant z}$ 现在是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。根据引理 34，扇 $X_v(4)$ 是一条不包含z的路径；矛盾。

子情形 53.1.3 ($5 \in \beta(\mathcal{Y})$)。

令 z' 为 $\mathcal{Y}$ 中在着色 β下缺少颜色 5 的顶点。顶点 z 和 z' 在着色 β'下都缺少颜色 5，因此它们中至少有一个不属于 $K_v(1, 5)$。如果顶点z 不属于 $K_v(1, 5)$，那么我们交换连通分量$C_{1,5} = K_z(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 与 $\mathcal{V}$等价，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β'' 下相同的最小圈。

如果顶点 u 不属于$C_{1,5}$，那么扇 $X_u(5)$现在包含顶点 z，该顶点缺少颜色 1。因此，$X_u(5)_{\leqslant z}$ 现在是一个避开 v的$(\mathcal{V}, u)$-独立子扇；根据引理 34，扇 $X_v(5)$是一条路径。然而，$\beta''(uu_{l-h}) = \beta(uu_{l-h}) = 1$，并且性质$P(j)$对所有 $j \leqslant h$都成立，因此根据引理 52，v周围不存在路径。这是一个矛盾。

因此，顶点 u 属于$C_{1,\,5}$，现在 $X_u(1)$ 包含顶点 z，它缺少颜色1。因此 $X_u(1)$ 与 $\mathcal{V}$不纠缠，根据引理24，我们也得到矛盾。

情形 53.2 ($5 \in \beta(\mathcal{X})$)。 设 z' 为 $\mathcal{X}$ 中在着色 β下缺少颜色 5 的顶点。

子情形 53.2.1($5 \in \beta(\mathcal{U}_{<u_{l-h}})$).

设 z'' 为 $\mathcal{U}_{<u_{l-h}}$ 中在着色 β下缺少颜色 5 的顶点。注意，我们可能有$z'' = z'$。顶点 z 和 z'' 在着色 β'下都缺少颜色 5，因此它们不可能都属于 $K_v(1, 5)$。如果 z'' 不在 $K_v(1, 5)$ 中，那么我们交换 $K_{z''}(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 与 β' $\mathcal{V}$等价，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β''中的同一个最小圈。由于 $E(\mathcal{U}_{\leqslant z''})$中没有颜色为 1 或 5 的边，着色 β'' 也与着色 β' $\mathcal{U}_{\leqslant z''}$等价，因此 $X_u(3)$仍包含顶点 z''，它现在缺少颜色 1，所以根据引理 24，它与 $\mathcal{V}$不纠缠；这是一个矛盾。

因此，顶点 z'' 属于 $K_v(1, 5)$，从而顶点 z 不属于该连通分量。我们交换连通分量 C_{1}、$_{5} = K_z$1、5，并将交换后得到的着色记为 β''。在着色 β''中，扇 $X_v(5)$ 仍包含缺少颜色 1 的顶点 z，因此该扇现在是一条路径。若顶点 u 不属于 C_1、5，则 $\beta''(uu_{l-h}) = 1$。由于性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$都成立，围绕 v不存在路径，矛盾。因此，顶点 u属于 C_1、5。现在在着色 β''中，扇 $\mathcal{U}' = X_u(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$ 更小了，但对于任意 $j \leqslant h$，我们仍有 $u_{l-j} = u'_{l'-j} \in V(\mathcal{U}')$。注意，我们有 $z'' = u'_{l'-h-1}$。因此，我们有 $\mathcal{U}' = (uu'_1, \cdots, uu'_{l-h-1} = uz'', uu_{l-h}, \cdots, uu_l)$。由于性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$都成立，扇 $X_v(\beta(uu_{l-h})) = X_v(5)$ 是一个圈，矛盾。

子情形 53.2.2($5 \in \beta(\mathcal{U}_{>u_{l-h}})$)。

令 s 满足 $m^{\beta}(u_{l-s}) = 5$。在着色 β 中，由于性质 $P(s)$ 成立，扇$X_v(5)$ 是一个包含 u_s 的饱和圈。但颜色 5 属于 $\mathcal{X}$，因此扇 $X_v(5)$ 也包含顶点 z，从而 $X_v(5) = \mathcal{X}$。在着色 β' 中，扇 $X_v(5)$ 仍包含顶点 z

而该顶点现在缺少颜色 5。由于性质 $P(s)$ 成立，圈 $X_v(5)$ 是一个包含顶点 u_{l-s} 的圈，因此我们得出矛盾。

子情形 53.2.3 ($5 \in \beta(\mathcal{Y})$)。

令 z'' 为 $\mathcal{Y}$ 中在着色 β里缺少颜色 5 的顶点。注意，$z'' = z'$可能成立。由于顶点 z 和 z'' 在着色 β'中都缺少颜色 5，因此它们不可能同时属于 $K_v(1, 5)$。如果 z 不在 $K_v(1, 5)$中，那么我们交换连通分量 $K_z(1, 5) = C_{1,5}$，并将交换后得到的着色记为 β''。着色 β'' 与 β'是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β''中的同一个最小圈。此外，着色 β'' 也与 β'是($X_v(5) \setminus \{z\}$)-等价的，因此这个扇现在是一条包含 z的路径。

如果顶点 u 不属于$C_{1,5}$，那么着色 β'' 与β'是($X_u(5) \setminus \{z\}$)-等价的，因此 $X_u(5)$仍包含顶点 z，该顶点现在缺少颜色 1。所以，子扇$X_u(<)_{\leqslant z}$ 现在是一个避开 v的($\mathcal{V}, u$)-独立子扇，并且也包含 z。根据引理 34，扇 $X_v(5)$是一条不包含 z的路径，矛盾。

因此顶点 u 属于 $C_{1,5}$，而现在在着色 β''中，扇 $X_u(1)$ 包含顶点 z，该顶点缺少颜色 1。因此，根据引理 $\mathcal{V}$，该扇与 $\mathcal{V}$24不纠缠，我们也得到了矛盾。

子情形 53.2.4（$5 \notin (\beta(\mathcal{Y}) \cup \beta(\mathcal{U}))$）。

顶点 z 和 z' 都缺少颜色 5，因此它们中至少有一个不在 $K_v(1, 5)$ 中。

如果顶点 z不在 $K_v(1, 5)$ 中，由于对所有 $j \leqslant h$，$P(j)$ 都成立，因此对所有 $j \leqslant h$，顶点 z 都不在 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 中。现在我们交换连通分量 $C_{1,5} = K_z(1, 5)$，得到着色 β''，其中子扇 $X_u(4)$ 现在是一个避开 v 的（$\mathcal{V}$，u）-独立子扇。着色 β'' 与 β'是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β'中的同一个最小圈。根据引理 34，扇 $X_v(4)$ 现在是一条不包含 z的路径。由于对所有 $j \leqslant h$，$P(j)$ 都成立，且 z 不属于 $X_v(\beta(uu_{l-j})$，着色 β'' 也是（$\bigcup_{j\in[0,h]} X_v(\beta(uu_{l-j}))$)-等价于着色 β'。

若顶点 u 不属于 $C_{1,5}$，则着色 β'' 也与着色 β'等价。边 uu_{l-h} 仍着色为 1，且性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$均成立。根据引理52，绕过 v 不存在路径，矛盾。因此，顶点 u 属于连通分量$C_{1,5}$，且边 uu_{l-h}现在着色为 5。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta''}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_l)$。由于对所有 $j \leqslant h$，$z \notin X_v(\beta(uu_{l-j}))$，着色 β'' 与着色$_{j\in[0,h]}(\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j})))$-等价于着色 β'，且它也与 $\mathcal{U}_{>u_{l-h}}$着色 β'等价，因此根据引理 51，对所有 $j \leqslant h$，有$u'_{l-j} = u_{l-j}$。特别地，$u'_{l-h} = u_{l-h}$。着色 β'' 与 $X_u(5)_{<z}$着色等价于β'，因此在着色 β''中，扇 $X_u(5)$ 仍包含顶点 z，它现在缺少颜色 1，所以扇 $X_u(5)$ 是一条路径。由于 $P(h)$ 成立，因此产生矛盾。

因此，顶点 z 属于 $K_v(1, 5)$，而顶点 z' 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,5} = K_{z'}(1, 5)$，得到一个着色 β''，它与 β' $\mathcal{V}$-等价。根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β'' 中仍是同一个最小圈。由于性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$ 都成立，且 z' 不在 $K_v(1, 5)$ 中，因此对于所有 $j \leqslant h$，顶点 z' 不在 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 中，并且着色 β'' 与着色 $_{j\in[0,h]}(\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j})))$-等价于 β'。在着色 β'' 中，扇 $X_v(4)$ 现在是一条路径，因此与前一种情形类似，顶点 u 属于连通分量 $C_{1,5}$。因此，在着色 β'' 中，边 uu_{l-h} 被着色为 5。

令 $\mathcal{U}' = (uu'_1, \cdots, uu'_l)$。由于着色 β'' 是($\bigcup_{j\in[0,h]} X_v(\beta(uu_{l-j}))$)-等价于着色 β'，根据引理 51，对于任意 $j \leqslant h$，我们有 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$。着色 β'' 与 β'等价，因此 v属于 $\mathcal{U}''$，从而我们有 $X_u(1) = X_u(5) = \mathcal{U}'$。因此，扇 $X_u(1)$ 中存在一个顶点z'' 缺少颜色 5。注意，由于 $m(z') = 1$ 且 $m(z'') = 5$，我们有

$z \neq z''$，然而，我们可能有 $z'' = z$，在这种情况下， X_u(1) 中存在一个顶点缺少 $\beta(X_u(4)_{\leqslant z})$ 中的某种颜色。现在我们必须区分这些情况。

子子情形 53.2.4.1($z'' \neq z$)。

我们考虑着色 β'。在此着色中，顶点 z'' 属于 X_u(5)，因为 u 属于 C_1,5。如果顶点 z'' 也属于 C_1,5，那么此时 $X_u(5)_{\leqslant z''}$ 是一个避开 v 的子扇。若 $E(X_u(5)_{\leqslant z''})$ 中有一条边 uu''，其颜色属于 $\beta'(\mathcal{V})$，则扇 $X_u(\beta'(uu''))$ 与 $\mathcal{V}$ 不纠缠，由引理 24 可得矛盾。因此，子扇 $X_u(5)_{\leqslant z''}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。由引理 34，扇 X_v(5) 是一条路径；然而，在着色 β' 中，扇 X_v(5) 仍包含顶点 z，该顶点缺少颜色 5，因此 X_v(5) 是一个圈，矛盾。

因此，顶点 z'' 不属于 $C_{1,5}$，因此在着色β'中仍缺少颜色 5 。现在交换连通分量 $K_{z''}(1,5)$，得到着色 β_f，其中 $X_u(5)_{\leqslant z''}$ 是一个$(\mathcal{V}, u)$-独立子扇，且避开 v；并且 $X_u(5)$ 是一个圈。根据引理34 ，再次得到矛盾。

子子情形 53.2.4.2($z'' = z'$)。

因此，存在一个顶点 w 属于 X_u(5)，使得 $m(w) \in \beta'(X_u(4)_{\leqslant z})$ 且 $w \notin V(X_u(4)_{\leqslant z})$。现在需要区分 $m(w) = 4$ 是否成立。

子子子情形53.2.4.2.1 ($m(w) \neq 4$)。

在此情形下，不失一般性，假设 $m(w) = 6$，并令 w' 为 $X_v(4)_{\leqslant z}$ 中缺少颜色 6 的顶点。顶点 w 和 w' 都缺少颜色 6，因此它们不可能同时属于 K_v(1, 6)。

如果 w' 不属于 K_v(1, 6)，那么我们交换 $C_{1,6} = K_{w'}$(1, 6)，得到着色 β'' ，其中X_u(4)$_{\leqslant w'}$ 是一个避开 v的（$\mathcal{V}, u$）-独立子扇。着色 β'' 与 $\mathcal{V}$是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，在着色 β' 中，扇 $\mathcal{V}$仍是同一个最小圈。因此，根据引理 34，扇 X_v(4) 是一条不包含 w'的路径。如果顶点 u 不属于 C_1,6，那么着色 β'' 与 β'是 $\mathcal{U}$-等价的，性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant h$ 和 $\beta''(uu_{l-h}) = 1$都成立，因此根据引理 52， v周围不存在路径，矛盾。

因此，顶点 u 属于 $C_{1,\ 6}$，并且我们有 $\beta''(uu_{l-h}) = 6$。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta''}$ (3) =($uu'_1, \cdots, uu'_l$)。着色 β'' 与着色 β' 是 ($\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j}))$)-等价的，并且$_{j\in[0,h]}$

与着色 β' 是 $\mathcal{U}_{>u_{l-h}}$-等价的，因此根据引理 51，对于所有 $j \leqslant h$ ，我们都有 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$。在着色 β' 中，扇 X_v(4) 包含顶点 z' ，该顶点缺少颜色 5；扇 X_v(5) 是一个圈，包含顶点 z；而在着色 β'' 中，扇 X_u(4) 是一条路径。因此， X_v(4) 中存在一个顶点 w'' ，它在着色 β' 中缺少颜色 6，并且属于$C_{1,\ 6}$。现在，该顶点在着色 β'' 中缺少颜色 1。如果 w'' 位于 $X_v^{\beta'}$(4)$_{\leqslant z'}$ 中，那么扇 $X_v^{\beta''}$ (6) 现在是一个彗星，其中有两个顶点（z 和 z'）缺少颜色 5。由于性质 $P(h)$ 成立，因此产生矛盾。所以顶点 w'' si 位于 $X_v^{\beta'}$ (5) 中。但现在，在着色 β'' 中，扇 X_v(6) 包含顶点 z ，该顶点仍然缺少颜色 5；而扇X_v(5) 是一条路径，因此扇 X_v(6) 是一条路径。同样，由于 $P(h)$ 成立，因此产生矛盾。所以顶点 w' 属于 K_v(1, 6)。

因此，顶点 w 不属于 K_v(1, 6)，我们交换连通分量 $C_{1,6}$ =K_w(1, 6)，得到着色 β'' ，其中 $X_u(5)_{\leqslant w}$ 是一个避开 v 的子扇。着色 β'' 与着色 β' 等价，因此根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β'' 中的同一个最小圈。与前一种情形类似，子扇 $X_u(5)_{\leqslant w}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$- 独立子扇，因此 X_v(5) 是一条路径，且顶点 u 属于 C_1,6。由于顶点 z 仍然缺少颜色 5，这意味着在着色 β'' 中，扇 X_u(1) 现在包含顶点w ，该顶点缺少颜色 1，因此它与 $\mathcal{V}$ 不纠缠。根据引理 24，我们得到矛盾。

子子子情形53.2.4.2.2 ($m(w) = 4$)。
由于扇 $\mathcal{Y} = X_z(5)$ 是着色 β 中的一条路径，扇 $X_z(4)$ 是着色 β' 中的一条路径。在着色 β' 中，我们反演路径 $X_z(5)$，直到得到一个满足 $m(z) \in \beta'(X_u(5)_{\leqslant w})$ 的着色，并将反演后得到的着色记为 β''。注意，由于 $4 \in \beta'(X_z(5)) \cap \beta(X_u(5)_{\leqslant w})$，该反演是定义良好的。着色 β'' 与 β' 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β'' 中仍是同一个最小圈。着色 β'' 也与 β' 是 $\mathcal{U}$-等价的，所以 $X_u^{\beta''}(3) = \mathcal{U}$；并且由于对所有 $j \leqslant h$， $P(j)$ 都成立，因此若 $\beta''(uu_{l-j}) \neq 1$，扇 $X_v(\beta''(uu_{l-j}))$ 就是一个饱和圈。着色 β'' 与 β' 是 $(X_v(4) \setminus \{z\})$-等价的，因此扇 $X_v(4)$ 仍包含缺失颜色为 5 的顶点 z'，以及顶点 z。最后，着色 β'' 与着色 β' 是$X_u(5)_{\leqslant w}$-等价的。令 c_z 为 z 在 β'' 中缺失的颜色，并令 w' 为 $X_u(5)_{\leqslant w}$ 中缺失颜色 c_z 的顶点。注意，若 $c_z = 4$，则我们有 $w' = w$。

证明与前一种情形类似，现在我们考虑 $K(1, c_z)$ 的连通分量。顶点 z 和 w' 都缺少颜色 c_z，因此它们中至少有一个不在 $K_v(1, c_z)$ 中。如果顶点 z 不在 $K_v(1, c_z)$ 中，那么我们交换连通分量 $C_{1,c_z} = K_z(1, c_z)$，得到一个着色 β_f，它与 β'' 是 $\mathcal{V}$-等价的。根据观察 18，扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β_f 中仍是同一个最小圈，而此时 $X_u(4)_{\leqslant z}$ 是一个避开 v 的（$\mathcal{V}, u$）- 独立子扇，因此根据引理 34，扇 $X_v(4)$ 现在是一条不包含 z 的路径。注意，着色 β_f 也与着色 β'' 是（$\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j}))$）-等价的。如果顶点 u 不属于 $C_{1,c_z,j\in[0,h]}$，那么着色 β_f 与 β'' 是 $\mathcal{U}$-等价的，特别地，$\beta_f(uu_{l-h}) = 1$。由于对所有 $j \leqslant h$， $P(j)$ 都成立，根据引理 52，不存在绕过 v 的路径，矛盾。

因此，顶点 u 属于 $C_{1,\ c_z}$，现在 $\beta_f(uu_{l-h}) = 6$。由于扇 $X_v(4)$ 现在是一条不包含 z 的路径，这意味着在着色 β'' 中， $X_v(4)$ 中有一个顶点 w'' 缺少颜色 c_z，并且也属于 $C_{1,\ c_z}$。这意味着在着色 β_f 中，扇 $X_v(c_z)$ 现在是一条包含 z 的路径。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta_f}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$。着色 β_f 与 β'' 是 $\mathcal{U}_{>u_{l-h}}$-等价的，并且也与 β'' 是 $(\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j})))$-等价的，因此 $_{j\in[0,h]}$
对于所有 $j \leqslant h$，根据引理 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$ 可得 51。特别地， $u'_{l-h} = u_{l-h}$。由于 $P(h)$ 成立，且 $\beta_f(uu'_{l'-h}) = c_z$，扇 $X_v(c_z)$ 是一个圈，矛盾。

因此，顶点 z 属于 $K_v(1, c_z)$，而顶点 w' 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,c_z} = K_w(1, c_z)$，并将交换后得到的着色记为 β_f。着色 β_f 与 β'' 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 18，扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β_f中仍是同一个最小圈。着色 β_f 也与 $_{j\in[0,h]}$（$\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j}))$）等价
于着色 β''。在着色 β_f 中，子扇 $X_u(5)_{\leqslant w'}$ 现在是一个避开 v的子扇。如果 $E(X_u(5)_{\leqslant w'})$ 中存在一条边 uu''，其着色所用的颜色属于 $\beta_f(\mathcal{V})$，那么 $X_u(\beta_f(uu''))$便不与 $\mathcal{V}$ 纠缠，于是根据引理 24 得到矛盾。因此，子扇 $X_u(5)_{\leqslant w'}$ 是一个避开 v 的（$\mathcal{V}, u$）-独立子扇，从而根据引理 34，扇 $X_v(5)$现在是一条不包含 w'的路径。与前一种情形类似，这意味着顶点 u 属于连通分量 C_{1,c_z}，从而 $\beta_f(uu_{l-h}) = c_z$。扇 $X_v(5)$仍包含顶点 z，该顶点缺少颜色 c_z；而扇 $X_v(5)$是一条路径，因此扇 $X_v(c_z)$是一条路径。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta_f}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$。由于对于所有 $j \leqslant h$， $P(j)$都成立，并且着色 β_f 与着色 β''是（ $\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j}))$）-等价的，根据引理 51，对于 $j \leqslant h$，我们有 $_{j\in[0,h]}u'_{l'-j} = u_{l-j}$。特别地， $u'_{l-h} = u_{l-h}$。现在边 $uu'_{l'-h}$ 着色为 c_z，且性质 $P(h)$成立，因此扇 $X_v(c_z)$是一个圈。这是一个矛盾。

□

在证明归纳步骤之前，我们需要引入一项由 $P(i)$ 蕴含的新性质。

4.5 性质 $Q(i)$

定义 54. 设 $i \geqslant 0$，我们将性质 $Q(i)$ 定义如下：

对于着色 β中的任意最小圈 $\mathcal{V}$，对于 $\mathcal{V}$中的任意一对顶点 u 和 u'，设 $\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$。若 $\beta(uu_{l-i}) \neq m(v)$，则对于任意颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$，扇$X_{u_{l-i-1}}(c)$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-i-2}}$纠缠的圈。

现在我们证明性质 $Q(i)$ 可由性质 $P(i)$ 推出。首先证明下面这个关于最小圈中心顶点周围的饱和圈的引理。

引理 55. 设 $\mathcal{V} = (vv_1, \cdots, vv_k)$ 是着色 β 中的一个最小圈，且 $u = v_j$ 和 $u' = v_{j'}$ 是 $\mathcal{V}$ 的两个顶点，$\mathcal{W} = (vw_1, \cdots, vw_t)$ 是围绕 v 的一个饱和圈。那么扇 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{U} = X_u(m(u'))$ 是纠缠的。

证明。由引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，因此若 $\mathcal{W} = \mathcal{V}$，则扇 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{U}$ 如所需地纠缠。故设 $\mathcal{W} \neq \mathcal{V}$，且 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{U}$ 不纠缠。不失一般性，假设顶点 v、u 和 u' 分别缺少颜色 1、2 和 3。由于 $\mathcal{W} \neq \mathcal{V}$ 且 $\mathcal{W}$ 以 v 为中心，我们有 $\beta(\mathcal{W}) \cap \beta(\mathcal{V}) = \{1\}$。由于 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{U}$ 不纠缠，存在 $c \in \beta(\mathcal{U}) \cap \beta(\mathcal{W})$，使得 $M(\mathcal{U}, c) \neq M(\mathcal{W}, c)$。不失一般性，由于 $c \notin \{1, 2, 3\}$，我们假设 $c = 4$，且 $u_i = M(\mathcal{U}, 4)$ 是 $\mathcal{U}$ 中第一个这样的顶点；将 $\mathcal{W}$ 中的指标平移后，我们也假设 $m(w_t) = 4$，因此 $\mathcal{W} = X_v(4)$。

由于圈 $\mathcal{W}$ 是饱和的，顶点 w_t 属于 $K_v(1, 4)$，因此顶点 z 不属于 $K_v(1, 4)$。我们交换连通分量 $C_{1,\ 4} = K_z(1, 4)$，并将交换后得到的着色记为 β_2。

如果$u \notin C_{1,\ 4}$，或者1 不是 $\mathcal{U}_{<i}$中的边的颜色，那么着色 β_2 与$(\mathcal{V} \cup \mathcal{W} \cup \mathcal{U}_{<i})$-等价于 β。因此，在着色 β_2 中，根据观察 $\mathcal{V}$ 20，扇20是一个最小圈，但现在扇 $X_u(m(u') = (uu_1, \cdot, uu_i)$ 是一条路径。根据引理24，这就产生了矛盾。

因此 $u \in C_1$、4，而且 $\mathcal{U}_{<i}$中有一条颜色为 1 的边。由于根据引理 24，圈 $\mathcal{U}$与 $\mathcal{V}$交织在一起，因此边 uv_{j-1}和边 uv 都属于 $E(\mathcal{U})$。我们将通过颜色为 1 的边与 u 相连的顶点记为 x，将 β中 v_{j-1} 的缺失颜色记为 c_{j-1}。注意，我们可能有$v_{j-1} = u'$，因此 $c_{j-1} = 2$。扇 $\mathcal{U}$具有如下形式：$(uu_1, \cdots, uv_{j-1}, uv, ux, \cdots, uu_i, \cdots, uu')$。着色 β_2 与 $\beta(\mathcal{V})$-等价，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是 β_2中的一个最小圈。但现在，扇 $X_u(4)$ 是一个彗星，其中 v 和 u_i 缺失相同的颜色 1；更准确地说，$X_u(4) = (ux, \cdots, uu_i, \cdots, uu', uu_1, \cdots, uv_{j-1}, uv)$。注意，$X_u(3)$是 $X_u(4)$的一个子序列所对应的圈。如果在 $X_u(4)$中，边 ux 和边 uu_i之间有一条颜色为 $c \in \beta(\mathcal{V})$ 的边，那么扇 $X_v(c)$就是一个彗星，这与引理 24 矛盾。

因此，在边 ux 和 uu_i之间的 $X_u(4)$中，没有边被着成颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$。由于扇 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈，根据引理 15，它是饱和的，因此 $u \in K_v(1, 2)$，从而$u_i \notin K_v(1, 2)$。现在我们交换连通分量 $K_{u_i}(1, 2)$，得到一个着色 β_3。着色β_3 与 β_2是$(\mathcal{V} \cup \mathcal{W})$-等价的，因此根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是 β_3 中的一个最小圈。

现在我们证明 $\mathcal{V}$ 在着色 β_3 中是可逆的。根据观察 21，圈 $\mathcal{V}$ 是紧的，因此顶点 u 属于连通分量 $C_{2,j-1} = K_{v_{j-1}}(2, c_{j-1})$，所以边 vu 和 vv_{j+1} 也属于 $C_{2,j-1}$。在着色 β_3 中，扇 $X_u(4)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，直到得到着色 β_4，其中 $m(u) \in \beta(\mathcal{W})$。注意，由于 $4 \in \beta(\mathcal{W})$，该反演定义良好；此外，由于 β_3 也与 β $(\mathcal{W})$-等价，我们有 $\beta_3(\mathcal{W}) = \beta(\mathcal{W})$。由于 $u \notin \mathcal{W}$，根据观察17，着色 β_4 与 β_3 $(\mathcal{W})$-等价，因此 $\mathcal{W}$ 在 β_4 中仍是同一个圈。此外，由于 $\beta_3(X_u(4)) \cap \beta_3(\mathcal{V}) = \{2\}$，着色 β_4 与 β_3 $(\mathcal{V} \setminus \{u\} \cup C_{2,j-1})$-等价。

我们将 $\mathcal{W}$ 中满足 $m^{\beta_4}(u) = m^{\beta_4}(w_s)$ 的顶点记为 w_s，并将这种缺失颜色记为 c_s。注意，我们可能有 $w_t = w_s$，因此 $c_s = 4$。顶点 u 和 w_s 缺失相同的颜色 c_s，所以它们不可能同时属于连通分量 $K_v(1, c_s)$，现在我们必须区分各种情况。

情形 55.1（$u \notin K_v(1, c_s)$）。在此情形下，我们交换连通分量 $C_{1,c_s} = K_u(1, c_s)$，并得到一种着色，记为 β_5。由于 $\{1, c_s, 2, c_{j-1}\} = 4$，着色 β_5 与 β_4 是 $(C_{2,j-1})$-等价的，因此也与 β_3 是 $(C_{2,j-1})$-等价的。在着色 β_5 中，顶点 u 现在缺少颜色 1，因此扇 $X_v(m(u)) = (vv_{j+1}, \cdots, vv_{j-1}, vu)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演；将反演后得到的着色记为 β_6。在着色 β_6 中，顶点 v_{j+1} 和 v 缺少颜色 2，而顶点 u 缺少颜色 c_{j-1}。因此现在连通分量 $C'_{2,j-1} = K_{v_{j'-1}}$ 恰好是 $C_{2,j-1} \cup \{vv_{j-1}\} \setminus \{vu, vv_{j+1}\}$，我们交换它。交换后，顶点 v 和 u 缺少相同的颜色 c_{j-1}，且边 uv 被着为颜色 1；我们交换这条边，并将交换后得到的着色记为 β_7。在着色 β_7 中，顶点 u 缺少颜色 1，因此连通分量 $K_u(1, c_s)$ 现在恰好是 C_{1,c_s}，所以我们将此连通分量交换回去。注意，由于 $\{1, 2, c_s, c_{j-1}\} = 4$，我们可以先交换回 C_{1,c_s}，再交换回 $C'_{2,j-1}$。在交换后得到的着色中，扇 $X_u(2)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，并将反演后得到的着色记为 β_8。在着色 β_8 中，顶点 u 现在缺少颜色 2，因此连通分量 $K_{v_{j-1}}(2, c_{j-1})$ 现在恰好是 $C'_{2,j-1} \cup \{uv\}$。将此连通分量交换回去后，我们恰好得到 $\mathcal{V}^{-1}(\beta_3)$，这就产生了矛盾。

情形 55.2（$u \in K_v(1, c_s)$）。原理与前一种情形相同，但我们不改变 u 的缺失颜色，而是使用扇 $X_v(c_s)$ 改变 v 的缺失颜色，从而将 $\mathcal{V}$ 转化为路径。由于 u 属于 $K_v(1, c_s)$，顶点 w_s 不属于这个连通分量。因此，我们交换连通分量 $C_{1,c_s} = K_{w_s}(1, c_s)$，得到一种着色，其中 $X_v(c_s)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演；将反演后得到的着色记为 β_5。注意，由于 $X_v(c_s)$ 在 β_4 中是一个圈，我们有 $\beta_4(X_v(c_s)) \cap \beta_4(\mathcal{V}) = \{1\}$，因此 $\{2, c_{j-1}\} \cap \beta_4(X_v(c_s)) = \emptyset$。于是，着色 β_5 与着色 β_4 是 $(C_{2,j-1})$-等价的。在着色 β_5 中，扇 $X_v(2) = (vv_{j+1}, \cdots, vu)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，并将交换后得到的着色记为 β_6。与前一种情形类似，在着色 β_6 中，顶点 v 和 v_{j+1} 缺失颜色 2，而顶点 u 缺失颜色 c_{j-1}。因此，在着色 β_6 中，连通分量 $C'_{2,j-1} = K_{v_{j-1}}(2, c_{j-1})$ 恰好是 $C_{2,j-1} \cup \{vv_{j-1}\} \setminus \{vv_{j'+1}, vu\}$，我们交换它，得到一种着色，其中顶点 u 和 v 缺失颜色 c_{j-1}，且边 uv 被着为 c_s。交换边 uv 后，我们得到一种着色，其中扇 $X_v(1)$ 现在是一条路径；我们对其进行反演，并将反演后得到的着色记为 β_7。在着色 β_7 中，连通分量 $K_{w_s}(1, c_s)$ 恰好是 C_{1,c_s}，我们将这个连通分量交换回来。注意，由于 $|\{1, 2, c_s, c_{j-1}\}| = 4$，我们可以在 $C'_{2,j-1}$ 之前交换回这个连通分量。在交换后得到的着色中，扇 $X_u(2)$ 现在是一条路径，我们对其进行反演，并将交换后得到的着色记为β_8。在着色 β_8 中，顶点 u 现在缺失颜色 2，因此连通分量 $K_{v_{j-1}}(2, c_{j-1})$ 现在恰好是 $C'_{2,j-1} \cup \{vu\}$，我们将这个连通分量交换回来，得到所需的 $\mathcal{V}^{-1}(\beta_3)$。

□

引理56。设 $i \geqslant 0$，若对所有 $j \leqslant i$，$P(i)$ 都成立，则对所有 $j \leqslant i$，$Q(j)$ 都成立。

证明。设 $i \geqslant 0$，$\mathcal{V}$ 是着色 β中的一个最小圈，且 u 和 u' 是 $\mathcal{V}$的两个顶点，$\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$，并假设对所有 $j \leqslant i$，$P(j)$都成立。不失一般性，我们假设顶点 v、u 和 u' 分别缺少颜色1、2和3。设 $t \leqslant i$，且 $z = u_{l-t-1}$。我们证明 $Q(t)$成立。

断言 57。顶点 z 在 $\beta(\mathcal{V})$中并未缺少颜色。

证明。否则，假设 $m(z) \in \beta(\mathcal{V})$。扇 $\mathcal{V}$ 是 β 中的最小圈，因此根据引理24，扇 $\mathcal{U}$ 是与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。

如果 $m(z) \neq 1$，那么由于 $\mathcal{U}$ 是与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，根据引理 24，我们有 $z \in V(\mathcal{V})$；因此，根据引理 24，对于任意颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$，$X_z(c)$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。此外，由于性质 $P(t)$ 成立，因此 $X_v(\beta(uz)) = (vw_1, \cdots, w_x)$ 是一个饱和圈，并且根据引理 55，它与 $\mathcal{U} = X_u(m(u'))$ 和 $X_z(m(u)) = (zz_1, \cdots, zz_r)$ 纠缠，因此 $u_{l-t-2} = w_x = z_{r-1}$，所以 $Q(t)$ 成立。

如果 $m(z) = 1$，那么由于 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 纠缠，我们有 $z = v$。因此，对于任意 $c \in \beta(\mathcal{V})$，$X_z(c) = \mathcal{V}$，从而是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。此外，这意味着 $\beta(uz) = \beta(uv)$，因此 $m(u_{l-t-2}) = \beta(uv)$，所以 u_{l-t-2} 是圈 $\mathcal{V}$ 中紧邻 u 之前的顶点。根据 $\mathcal{V}$ 的定义，扇 $X_z(m(u)$ 包含该顶点，因此 $Q(t)$ 成立。在这两种情况下，我们都会得到矛盾。 □

断言58. $E(\mathcal{U}_{>z})$ 中不存在颜色为 $beta(\mathcal{V})$ 的边。

证明。我们首先证明，$V(\mathcal{U}_{>z}) \setminus \{u'\}$ 中不存在缺少颜色 $c \in \beta(\mathcal{V})$ 的顶点。否则，假设存在这样的顶点 z'。圈 $\mathcal{V}$ 在 $\beta(\mathcal{V})$ 中是最小的，因此根据引理 24，扇 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 纠缠。若 $c \neq 1$，则 $z' \in V(\mathcal{V})$。根据引理 24，扇$\mathcal{U}' = X_u(m(z')) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈，因此 $u'_{l'} = z'$且 $V(\mathcal{U}) = V(\mathcal{U}')$。于是存在 $t' < t$ 使得 $z = ul' - t' - 1$。由于 t 是最小的，$Q(t')$ 成立，因此$Q(t)$ 成立。

如果 $c = 1$，那么 $z' = v$，因为 $\mathcal{U}$与 $\mathcal{V}$纠缠，且 $\beta(uz') = \beta(uv)$。令 z'' 为 $\mathcal{U}$中紧邻 z'之前的顶点。由于 $\beta(uz') = \beta(uv)$，因此 $m(z'') = \beta(uv) \in \beta(\mathcal{V})$。由于 $m(z) \notin \beta(\mathcal{V})$，我们有 $z'' \neq z$。这意味着 z''是 $V(\mathcal{U}_{>z}) \setminus \{u'\}$ 中的一个顶点，在 $\beta(\mathcal{V})$中缺少一种颜色，这就产生了矛盾。

□

令 $c \in \beta(\mathcal{V})$，我们证明 $\mathcal{Z} = X_z(c) = (zz_1, \cdots, zz_r)$ 是一个与 $\mathcal{V}$和$\mathcal{U}_{\geqslant z}$纠缠的圈。

根据断言 57 $m(z) \notin \beta(\mathcal{V})$，不失一般性地，我们假设 z 缺少颜色 4。根据引理48，扇 $\mathcal{Z}$ 不是一条路径。在证明 $\mathcal{Z}$ 不是彗星之前，我们先证明它与 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-t-2}}$纠缠。

命题 59。 扇 $\mathcal{Z}$ 与 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-t-2}}$纠缠在一起。

证明。否则，假设存在 s，使得 $m(z_s) \in \beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{U}_{\geqslant z})$，且 $z_s \notin V(\mathcal{V}) \cup V(\mathcal{U}_{\geqslant z})$。不失一般性，我们假设这样的 s 是最小的。我们还假设在 $E(\mathcal{Z}_{[z_2, z_{s-1}]})$ 中不存在颜色属于 $\beta(\mathcal{V})$ 的边。否则，如果存在这样的边 zz_x，只需考虑扇 $X_z(\beta(zz_x)) = (zz_x, \cdots, zz_s)$。现在我们必须区分各种情况。

情形 59.1（$m(z_s) = 1$）。

在这种情况下，由于 $P(t)$ 成立，$X_v(4)$ 是一个包含 z 的饱和圈，因此 $v \in K_z(1, 4)$，从而 $z_s \notin K_z(1, 4)$。现在我们交换连通分量 $C_{1,4} = K_{z_s}(1, 4)$，并将交换后得到的着色记为 β'。在着色 β' 中，扇 $X_z(c)$ 现在是一条路径。着色 β' 与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此 $\mathcal{V}$ 仍是 β' 中的一个最小圈。如果着色 β' 也与 β 是 $\mathcal{U}_{\leqslant z}$-等价的（即，$C_{1,4}$ 不包含 u，或者 $\mathcal{U}_{\leqslant z}$ 中没有颜色为 1 的边），那么 z 仍是 $\mathcal{U} = X_u(3)$ 的一个顶点，并且扇 $X_z(c)$ 现在是一条路径；由引理 48，这就构成矛盾。因此，顶点 u 属于 $C_{1,4}$，并且 $\mathcal{U}_{<z}$ 中有一条边 uu_h 的颜色为 1。因此，在着色 β' 中，边 uu_h 现在的颜色为 4，而边 u_{l-t} 现在的颜色为 1。扇 $X_v(4)$ 仍是一个包含 z 的饱和圈，但现在扇 $X_u(4)$ 也是一个包含 z 的圈。在这个着色中，扇 $X_z(c)$ 是一条路径，因此由引理 53，得到矛盾。

情形 59.2 ($m(z_s) = c' \in \beta(\mathcal{V}) \setminus \{1\}$)。
在这种情况下，由于 $\mathcal{V}$ 是最小的，根据引理 15，它是饱和的，因此 $z_s \notin K_v(1, c')$。现在我们交换连通分量 $C_{1,c'} = K_{z_s}(1, c')$，并将交换后得到的着色记为 β'。这种着色与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此 $\mathcal{V}$ 仍然是着色 β' 中的最小圈。根据断言58，在 $\mathcal{U}_{>z}$ 中不存在颜色属于 $\beta(\mathcal{V})$ 的边，因此 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{>z}$-等价的。此外，设 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$；着色 β' 也与 $\beta^{j\in[0,t]}$ 是（$\bigcup X_v(\beta(uu_j))$）-等价的
因为这些扇都是饱和圈，而且顶点 z_s 不属于其中任何一个。因此，根据引理 51，在着色 β' 中，对于任意 $j \leqslant (t+1)$，$u'_{l'-j} = u_{l-j}$。特别是，$u'_{l'-t-1} = u_{l-t-1} = z$。但现在 $X_z(c)$ 与 $\{v\}$纠缠，因为它包含顶点 z_s，而该顶点缺少颜色 1。这种情况与前一种情况类似。

Case 59.3 ($m(z_s) = c' \in \beta(\mathcal{U}_{>z})$).
令 u_{l-h} 为缺少颜色 c' 的 $\mathcal{U}_{>z}$ 的顶点。在这种情况下，由于对所有 $j \leqslant t$，$P(j)$ 都成立，因此扇 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 是一个饱和圈。特别地，顶点 u_{l-h} 属于连通分量 $K_v(1, c')$，因此 z_s 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,c'} = K_{z_s}(1, c')$，并将交换后得到的着色记为 β'。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$。如果着色 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{>z}$-等价的，那么理由与前一种情形相同，z 恰好是顶点 $u'_{l'-t-1}$，而 $X_z(c')$ 现在不再与 $\{v\}$ 纠缠，因为其中包含缺少颜色 1 的顶点 z_s。这种情形与第一种情形类似。因此，β' 与 β 不是 $\mathcal{U}_{>z}$-等价的；又由于它与 β 是 $\{u_{l-h}\}$-等价的，连通分量 $C_{1,c'}$ 包含顶点 u。现在我们必须区分着色 β 中的 $\mathcal{U}_{<z}$ 是否有一条着色为 1 的边 uu_p。

子情形 59.3.1（$\mathcal{U}_{<z}$中有一条颜色为 1 的边 uu_p）。
在这种情况下，在着色 β' 中，边 uu_p 现在着色为 c'，边 uu_{l-h+1} 现在着色为 1。在着色 β' 中，扇 $X_u(4)$ 现在是一个圈，因为其中包含顶点 u_{l-h}，而该顶点仍缺少颜色 c'；$X_v(c')$ 现在包含顶点 z，而该顶点仍缺少颜色 4。扇 $X_v(4)$ 仍然是一个圈，其中也包含顶点 z；扇 $\mathcal{U}'$ 现在包含一条颜色为 1 的边 uu_{l-p}，使得 $p \leqslant t$。

现在考虑 $K(1, 4)$ 的连通分量。如果顶点 z 不属于连通分量 $K_v(1, 4)$，那么我们对其进行交换，得到着色 β''，此时 $X_v(4)$ 是一条路径。令 $\mathcal{U}'' = X_u^{\beta''}(3) = (uu''_1, \cdots, uu''_{l''})$。如果 $u \notin K_v(1, 4)$，那么 $\beta''(uu_{l-p}) = \beta''(uu''_{l''-t}) = 1$，但 $p \leqslant t$，并且对所有 $j \leqslant t$，$P(j)$ 都成立，因此由引理 52 可得矛盾。同样，如果 $u \in K_v(1, 4)$，那么此时 $\beta''(uu_{l-t}) = 1$。由于 β'' 与 β' 关于$\bigcup X_v(\beta(uu_j))$ 等价，由 $j\in[0,t-1]$
引理51，对于 $j \leqslant t$，$u''_{l''-j} = u'_{l'-t}$。因此，边 uu_{l-t} 恰好就是边 $uu''_{l''-t}$。这条边的颜色是 1，且 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant t$ 都成立，因此根据引理 52，我们得到矛盾。

因此，顶点 z 属于 $K_v(1, 4)$，所以顶点 z_s 不属于这个连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,4} = K_{z_s}(1, 4)$，并将交换后得到的着色记为 β''。设 $\mathcal{U}'' = X_u^{\beta''}(3) = (uu''_1, \cdots, uu''_{l''})$。无论顶点 u 是否属于连通分量 $C_{1,4}$，扇 $X_u(3)$ 都包含一条颜色为 1 的边$uu''_{l''-j}$，其中 $j \leqslant t$ (如果u 属于该连通分量，则 $\beta''(uu''l'' - t) = 1$，且 $\beta''(uu''_{l''-p}) = 1$)。此外，扇 $X_u(4)$ 是一个包含 z 的圈，扇 $X_v(4)$ 是一个包含 z 的圈，扇 $X_z(c)$ 是一条路径，并且性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant t$ 都成立，因此根据引理 53，我们得到矛盾。

子情况 59.3.2（$\mathcal{U}_{<z}$中没有颜色为 1 的边）。
在这种情况下，着色 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{\leqslant z}$-等价的。现在我们考察 $K(1, 4)$ 的连通分量。如果 z 不属于 $K_v(1, 4)$，那么我们交换连通分量 $K_z(1, 4)$，得到一种着色，其中 $X_u(3)$ 仍包含顶点 z，而该顶点此时缺少颜色 1。在这种着色中，圈 $\mathcal{V}$ 仍是一个最小圈，因为 β' 与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，所以根据引理 24，

我们得到一个矛盾。

因此，顶点 z 属于 $K_v(1,\ 4)$，因此 z_s 不属于这个连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,\ 4} = K_{z_s}(1,\ \ ,$ 并将 β'' 记为交换后得到的着色。着色 β'' 与 $\mathcal{U}_{\leqslant z}$-等价于 β'，因此 $z \in X_u(3)$。然而，此时扇 $X_z(c)$ 是一条路径。根据引理48，我们得到矛盾。

情形 59.4($m(z_s) = c' = m(u_{l-t-2})$)。
在此情形下，由于 $c' \notin \beta(\mathcal{V})$，不失一般性，我们假设 $c' = 5$。现在考虑 $K(1, 5)$ 的连通分量。若 u_{l-t-2} 不属于 $K_z(4, 5)$，则交换连通分量 $C_{4,\ 5} = K_{u_{l-t-2}}(4, 5)$，并将 β' 记为交换后得到的着色。令$\mathcal{U}' = X^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$。着色 β'与 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{U}_{>z})$-等价于 β，且对于任意$j \leqslant t$、 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$，以及 $u'_{l'-j} = u_{l-j-1}$，否则。注意，这意味着 $l' = l - 1$，即 $|\mathcal{U}'| = |\mathcal{U}| - 1$。如果颜色 5 不在 $X_v^{\beta}(4)$ 中，那么 $X_v(4)$ 仍然是一个包含 z 的圈，因此它不包含 $u_{l-t-2} = M(X_u(3), 4)$。由于性质 $P(t)$ 成立，我们得到矛盾。

因此，颜色 5 属于 $X_v^{\beta}(4)$。如果 v 属于 C_4,5，那么我们就遇到了与前一种情况类似的情形：其中 $X_v^{\beta'}(4)$ 是一个包含 z的圈，因此不包含 $u_{l-t-2} = M(X_u(3), 4)$。由于 $P(t)$ 成立，我们得出矛盾。因此， v不属于 C_4,5。现在，在着色 β'中，扇 $X_v(5)$ 是一颗彗星，包含顶点 z和 u_{l-t-2}，它们都缺少颜色 4。现在我们考虑 $K(1, 4)$ 的连通分量。由于性质 $P(t)$ 成立， $X_v(4)$ 是一个饱和圈，因此 u_{l-t-2}属于 $K_v(1, 4)$，而 z不属于这个连通分量。现在我们交换连通分量 $K_z(1, 4)$，得到一种着色，其中 $\{uz\}$ 是一个避开 v的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇，且 $X_v(5)$ 是一条包含 z的路径。根据引理 34，我们得出矛盾。

因此，顶点 u_{l-t-2} 属于连通分量 $K_z(4,\ 5)$，因此，顶点 x_s 不属于这个连通分量。现在我们交换连通分量 $K_{z_s}(4,\ 5)$，得到一种着色$(\mathcal{V} \cup \mathcal{U})$-等价于 β，其中 $X_z(c)$ 现在是一条路径。根据引理 48，我们再次得到矛盾。

□

因此，扇 $\mathcal{Z}$与 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{U}_{\leqslant u_{l-t-2}}$纠缠。现在我们证明它不是彗星。假设 $\mathcal{Z}$ 是彗星，那么存在 $h < r$ 使得 $m(z_h) = m(z_r) = c$。根据命题 59，$c \notin \beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-2-t}}$。不失一般性，我们假设 $c = 5$，现在考虑 $K(1, 5)$ 的连通分量。顶点 z_h 和 z_r 不可能同时属于 $K_v(1, 5)$。

如果 z_h 不属于 $K_v(1, 5)$，那么我们交换 $C_{1,\ 5} = K_v(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β'。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$。性质 $P(j)$ 对所有 $j \leqslant t$ 都成立，因此着色 β' 与 β 是 $(\bigcup X_v(\beta(uu_{l-j})))$-等价的，因为这些$_{j\in[0,p]}$
扇都是饱和圈。因此，根据引理 51，对于任意 $j \leqslant (t + 1)$，$u'_{l'-j} = u_{l-j}$。特别地，$z = u'_{l'-t-1}$。如果顶点 z 不属于 C_1,5 或 $c \neq 1$，那么着色 β' 与 β 等价。扇 $X_z(c)$ 此时包含顶点 z_h，该顶点缺少颜色 1；根据命题 59，我们得到矛盾。因此，顶点 z 属于 C_1,5 和 $c = 1$。于是，在着色 β' 中，边 zz_1 此时着色为 5，而边 zz_{s+1} 此时着色为 1。如果顶点z_r 属于连通分量C_1,5，那么在着色 β' 中，该顶点此时缺少颜色 1，且 $X_z(1)$ 此时是一个包含该顶点的扇。因此，扇 $X_v(1)$ 与 $\mathcal{V}$ 不纠缠，由命题 59 可知这会导致矛盾。如果顶点 z_r 不属于该连通分量，那么扇 $X_z(1)$ 此时包含顶点 z_s，该顶点缺少颜色 1；同样，根据命题 59 可得矛盾。

因此，顶点 z_h 属于 $K_v(1, 5)$，所以顶点 z_r 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{1,\ 5} = K_{z_s}(1, 5)$，并将交换后得到的着色记为 β'。与前一种情形类似，若顶点 z 不属于 $C_{1,\ 5}$，或者

$c \neq 1$，那么着色 β' 与 $\mathcal{Z}_{<z_r}$-等价于着色 β，并且现在 $X_z(c)$ 包含顶点 z_r，该顶点缺少颜色 1。根据命题 59，这就产生矛盾。因此，顶点 z 属于 $C_{1,\,5}$，并且 $c = 1$。在这种情形下，扇 $X_z(1)$ 仍然包含顶点 z_r，该顶点缺少颜色 1。再次根据命题 59，这就产生矛盾。

因此，扇 $\mathcal{Z}$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-t-2}}$ 纠缠的圈，因此 $Q(t)$ 如所需成立。

□

现在我们可以证明，对于所有 i， $P(i)$ 都成立。

4.6 P（i）的证明

引理33的证明。设 $i \geqslant 0$， $\mathcal{V}$ 是着色 β 中的一个最小圈， u 和 u' 是 $\mathcal{V}$， $\mathcal{U} = X_u(m(u')) = (uu_1, \cdots, uu_l)$ 的两个顶点，并假设 $P(i)$ 尚未得到验证。不失一般性，我们假设 i 是最小的，并且顶点 v、 u 和 u' 分别缺少颜色 1、 2 和 3。根据引理 40，性质 $P(0)$ 成立，因此 $i > 0$。假设 $\beta(uu_{l-i}) \neq 1$，并令 $\mathcal{X} = X_v(\beta(uu_{l-i}))$。

断言 60。 E（$\mathcal{U}_{>u_{l-i}}$）中不存在使用 β（$\mathcal{V}$）中的某种颜色着色的边

证明。 该证明类似于引理 56 中断言58的证明。 □

我们首先证明 $P_{weak}(i)$ 成立（即 $\mathcal{X}$ 不是一条路径）。

断言61。 性质 P_{weak}（i） 成立。

证明。假设 $\beta'(uu_{l-i}) \neq 1$，且 $\mathcal{X} = X_v(\beta(uu_{l-i}))$ 是一条路径。那么我们有 $\beta(uu_{l-i}) \notin \beta(\mathcal{V})$。不失一般性，我们假设 $\beta(uu_{l-i}) = 4$。此外，我们有 $m(u_{l-i}) \neq 1$。由于对于所有 $j < i$ 和所有 $j < i$， $P(j)$ 都成立，若 $\beta(uu_{l-j}) \neq 1$，则$X_u(\beta(uu_{l-j})$ 是一个饱和圈。现在我们对 $\mathcal{X}$ 进行反演，直到得到一个着色，使得 $X_v(4)$ 是一条长度为 1 的路径；我们将该着色中唯一的顶点记为 z。对颜色重新标号后，不失一般性地假设 v 在 β' 中也缺少颜色 1。着色 β' 与着色 β $\mathcal{V}$-等价，因此 $\mathcal{V}$ 在着色 β 中是同一个最小圈。因此，根据引理 24，扇 $\mathcal{U}' = X_u(m(u')) = (uu'_1, \cdots, uu'_{l'})$ 是一个与 $\mathcal{V}$ 纠缠的圈。此外，着色 β' 与 β ($\bigcup_{j<i} X_v(\beta($ $uu_{l-j}))$)-等价，因此根据引理 51，对于任意 $j \leqslant i$、 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$， 扇$X_v(\beta'(uu'_{l'-j}))$ 是一个包含 $u'_{l'-j-1}$ 的饱和圈。因此特别地，$uu'_{l'-i} \in E(\mathcal{U}')$，并且 $\mathcal{U}'$ 中存在一个缺少颜色 4 的顶点。令 z' 为该顶点。注意，由于 $X_v(4)$ 是一条路径，对于所有 $j < i$， $X_v(\beta'(uu'_{l-j}))$ 不包含顶点 z'。

现在我们交换边 vz，并将 β'' 记为交换后得到的着色。如果着色 β'' 与 $\mathcal{U}'$-等价于 β'，则这意味着 $v \notin V(\mathcal{U}')$。因此，在着色 β'' 中，扇 $X_u(3) = \mathcal{U}'$ 包含顶点 z'，该顶点仍缺失颜色 4。该颜色也是顶点 v的缺失颜色。因此， $\mathcal{U}'$ 与 $\mathcal{V}$不纠缠，根据引理 24，我们得到矛盾。

因此，顶点 v 属于 $V(\mathcal{U}')$，在着色 β' 中，扇 $X_u(1)$ 包含顶点z'，该顶点缺失颜色 4。如果 $E(V_u(1)_{\leqslant z'})$ 的边 uu'' 中有一条边着有 β'' 中的某种颜色，那么 $X_u(\beta''(uu''))$ 与 $\mathcal{V}$ 不纠缠，因此根据引理 24，我们得到矛盾。因此，子扇 $X_u(1)_{\leqslant z'}$ 是一个避开 v 的（$\mathcal{V}, u$）-独立子扇。着色 β'' 与着色 β' $\mathcal{U}'_{\leqslant v}$-等价，因此在着色 β'' 中，扇 $\mathcal{U}'' = X_u(3)$ 等于（$uu'_1, \cdots, uv, uu'_{l'-i)} \cdots, uu'_{l'} = uu'$）。

由于对于所有 $j < i$， $P(j)$ 都成立，因此对于所有 $j < i$，扇 $X_v(\beta''(uu'_{l'-j}))$ 都是包含 $u'_{l'-j-1}$ 的饱和圈。特别地，扇 $X_v(\beta''(uu'_{l'-(i-1)})$ 是包含

$u'_{l'-i}$。不失一般性，假设 $m(u'_{l'-i}) = 5$。顶点 $u'_{l'-i}$ 属于连通分量 K_v(4,5)，因此顶点 z' 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{4,5} = K_{z'}$(4,5)，并将交换后得到的着色记为 β_3。注意， β_3 与 β'' 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 在着色 β_3 中仍是同一个最小圈。着色 β_3 也与 β'' 是 $\mathcal{U}''$-等价的，因此仍有 X_u(3) $= (uu'_1, \cdots, uv, uu'_{l'-i}, \cdots, uu'_{l'} = uu')$。

如果顶点 z 不属于$C_{4,\ 5}$，那么我们可以将边 vz交换回去。扇X_u(3) $= X_u$(1)仍然包含缺少颜色 5 的顶点 z'，而 $X_v(\beta''(uu'_{l'-i-1}))$仍是包含顶点$u'_{l'-i}$的饱和圈。由于 $P(i-1)$成立，因此产生矛盾。所以顶点 z 属于$C_{4,\ 5}$，并且在着色 β_3 中，顶点 z 缺少颜色 5。

由于性质 $P(j)$对所有 $j < i$都成立，根据引理56，性质 $Q(i-1)$成立，因此扇 $X_{u'_{l-i}}$(2)是一个包含 z'的圈，所以存在一条边$u'_{l'-i}z$。我们将这条边的颜色记为 c'。现在交换这条边，并将交换后得到的着色记为 β_4。着色 β_4 与 β_3是 $\mathcal{V}$-等价的，因此根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β_4 中是同一个最小圈。着色 β_4 也是 X_u(3)$^{<u'_{l'-i}}$，所以顶点 $u'_{l'-i}$仍在 X_u(3)中。注意，现在顶点 $u'_{l'-i}$ 和 z' 都缺少颜色 c'。现在我们需要区分不同的情况。

情形61.1($c' = 1$)。
在此情形下，扇 $X_u(1)$ 包含缺少颜色 z' 的顶点1，而扇 $X_u(3)$ 包含缺少颜色$u'_{l'-i}$的顶点 1。因此，扇 $X_u(3)$ 是一个包含两个缺少颜色1的顶点的彗星。由引理24，可得矛盾。

情形61.2($c' \in \beta_3(\mathcal{V})$)。
在此情形下，由于$u'_{l'-i} \in V(X_u(3))$，扇 $X_u(3)$ 与 $\mathcal{V}$不纠缠，因此由引理24可得矛盾。

不失一般性，我们现在假设 $c' = 6$。

情形61.3($6 \in \beta_3(X_u(3)_{<u'_{l'-i}})$).
在此情况下，扇 $X_u(3)$ 现在是一个彗星，其中两个顶点缺失颜色6，因此根据引理24，我们也得到矛盾。

Case 61.4 ($6 \in \beta_3(X_u(3)_{>u'_{l'-i}})$).
令 $t < i$ 使得 $m^{\beta_3}(u'_{l'-t}) = 6$。由于 $P(t-1)$ 成立，在着色 β_3中，扇 X_v(6) 是一个包含 $u'_{l'-t}$的圈。由于 $P(i-1)$ 成立，扇 X_v(5) 是一个包含 $u'_{l'-i}$的圈。我们首先证明，在着色 β_3中，有 X_v(5) $= X_v$(6)。在着色 β_4中，顶点 $u'_{l'-i}$缺失颜色 6，因此扇 X_u(3) 等于 $(uu'_1, \cdots, uv, uu'_{l'-i}, uu'_{l'-(t-1)}$ $\cdots, uu'_{l'} = uu')$，而 $u'_{l'-i}$现在是该圈中缺失颜色 6 的顶点。由于 $P(t-1)$ 成立，扇X_v(6) 现在是一个包含 $u'_{l'-i}$的圈。在 β_3和 β_4 中，缺失颜色不同的唯一顶点是顶点 $u'_{l'-i}$ 和 z'。在着色 β_3中，由于 $z' \notin X_v$(6)，如果 $u'_{l'-i} \notin V(X_v(6))$，则着色 β_4 与着色 β_3是 X_v(6)-等价的。这意味着在着色 β_4中，扇 X_v(6) 是一个包含顶点 $u'_{l'-t}$而不包含 $u'_{l'-i}$的圈，矛盾。因此，在着色 β_3中，顶点 $u'_{l'-i}$ 属于 X_v(6)，从而 X_v(5) $= X_v$(6)，如 desired。

因此，在着色 β_3 中，圈 X_v(5) 包含顶点$u'_{l'-t}$，该顶点缺少颜色 6。现在考虑着色 β_4。扇 X_v(5) 仍包含顶点 $u'_{l'-t}$，该顶点仍缺少颜色 6。扇 X_v(6) 是一个包含顶点 $u'_{l'-i}$ 的饱和圈，因此彗星 fnaX_v(5) 包含 X_v(6) 作为子扇。圈 X_v(6) 是饱和的，因此 $u'_{l'-i}$ 属于 K_v(4,6)，所以 z' 不属于这个连通分量。

现在我们交换连通分量 $C_{4,6} = K_{z'}$(4,6)，并将交换后得到的着色记为 β_5。着色 β_5 与 β_4 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此扇 $\mathcal{V}$ 在着色 β_5 中仍是同一个最小圈。由于顶点 $u'_{l'-i} \notin C_{4,6}$，且 $\beta_4(uu'_{l'-})$ $= 4$，顶点 u 并不

属于 C_4,6，因此着色 β_5 与着色 β_4 是 X_u(3)-等价的。扇 X_u(1)仍包含顶点 z'，该顶点现在缺少颜色 4，因此子扇 $X_u(1)_{\leqslant z'}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。根据引理 34，扇 X_v(1) 是一条不包含 z' 的路径。在着色 β_5 中，顶点 z 仍缺少颜色 5，而且我们仍有$\beta_5(vz) = 1$。如果顶点 $u'_{l'-t}$ 属于 C_4,6，那么着色 β_5 与 β_4 是 X_v(5)-等价的，因此扇 X_v(1) 是一个彗星，并包含作为子扇的 X_v(6)。所以顶点 $u'_{l'-t}$ 属于连通分量C_4,6，并且现在缺少颜色 4。

在着色 β_5 中，扇 X_u(5) 仍包含顶点 $u'_{l'-t}$，该顶点现在缺少颜色 4。因此，$E(X_u(5)_{\leqslant u'_{l'-t}})$ 中不存在边 uu''，其颜色属于 $\beta_5(\mathcal{V})$；否则，$X_u(\beta_5(uu''))$ 将不与 $\mathcal{V}$ 纠缠，并且由引理 24 可得矛盾。因此，子扇$X_u(5)_{\leqslant u'_{l'-t}}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。由引理 34，扇 X_v(5) 是一条不包含 $u'_{l'-t}$ 的路径，矛盾。

情形 61.5 ($6 \notin \beta_3(X_u(3)) \cap \beta_3(\mathcal{V}) \cup \{1\}$)。

在着色 β_4 中，顶点 $u'_{l'-i}$ 缺少颜色 6，且 $uu'_{l'-i} \in E(X_u(3))$。因此，我们有$X_u(6) = X_u(3)$。由于扇 X_u(5) 也包含顶点 u'，要么 $X_u(5) = X_u(6) = X_u(3)$，要么 $X_u(5)$ 是一颗彗星，其包含 $X_u(3)$ 作为子扇。

子情形 61.5.1($X_u(5) = X_u(3)$)。

令 z'' 为 X_u(3) 中缺失颜色 5 的顶点。注意，我们可能有 $z'' = z$。由于 $P(i-1)$ 成立，扇 X_v(5) 现在是一个包含 z'' 的圈。但 $u'_{l'-i}$ 是 β_3 和 β_4 中唯一缺失颜色不同的顶点，因此在着色 β_4 中，扇 X_v(5) 仍包含顶点 $u'_{l'-i}$，而该顶点现在缺失颜色 6。因此，扇 X_v(6) 等于扇 X_v(5)，并且是一个包含 z'' 和 $u'_{l'-i}$ 的饱和圈。顶点 z 仍缺失颜色 5，因此扇 X_v(1) 现在是一个彗星，并以 X_v(5) 为子扇。

由于扇 X_v(6) 是饱和的，顶点 $u'_{l'-i}$ 属于连通分量 K_v4, 6，因此顶点 z' 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $C_{4,6} = K_{z'}$(4, 6)，并将交换后得到的着色记为 β_5。着色 β_5 与 β_4 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此扇 $\mathcal{V}$ 是该着色中的最小圈。现在扇 X_u(1) 仍包含顶点 z'，而该顶点现在缺失颜色 4，因此它是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇；由引理 34，扇 X_v(1) 是一条路径。但着色 β_5 也与着色 β_4 是 X_v(1)-等价的，因此扇 X_v(1) 是一个彗星。这就产生了矛盾。

子情形 61.5.2 (X_u(5) 是一颗包含 X_u(3) 的彗星)。

令 $u'_{l'-t}$ 为 X_u(5) 中不属于 X_u(3) 的第一个顶点，并令 z'' 为 X_u(3) 中缺失颜色 $c_t = m(u'_{l'-t})$ 的顶点。在着色 β_3 中，由于 $P(t-1)$ 成立，扇 $X_v(c_t)$ 是一个包含 $u'_{l'-t}$ 的饱和圈。如果着色 β_4 与着色 β_3 是 $X_v(c_t)$-等价的，那么在着色 β_4 中，扇 $X_v(c_t)$ 仍包含顶点 $u'_{l'-t}$，因此不包含顶点 z''。由于 $P(t-1)$ 成立，我们得到矛盾。

因此，着色 β_4 与着色 β_3 并非 $X_v(c_t)$-等价的。由于 $u'_{l'-i}$ 和 z' 是在 β_3 和 β_4 中缺失颜色不同的唯一顶点，且 $z' \notin V(X_v(c_t))$，我们得到 $u'_{l'-i} \in V(X_v(c_t))$。在着色 β_3 中，顶点 $u'_{l'-i}$ 也属于 X_v(5)，因此在此着色中有 $X_v(5) = X_v(c_t)$。因此，在着色 β_4 中，顶点 $u'_{l'-t}$ 也属于 X_v(5)。

在着色 β_4 中，顶点 $u'_{l'-i}$ 现在缺少颜色 6。由于 $P(t-1)$ 成立，扇 $X_v(c_t)$ 是一个包含顶点 z'' 的饱和圈。因此，在这种着色中，我们有 $X_v(c_t) = X_v(6)$。然而，在这种着色中，顶点 $u'_{l'-t}$ 仍属于 X_v(5)，也属于 X_u(5)，并且仍缺少颜色 c_t。圈 $X_v(c_t)$ 是饱和的，因此顶点 z'' 属于连通分量 $K_v(4, c_t)$，所以顶点 $u'_{l'-t}$ 不属于该连通分量。现在我们交换连通分量 $K_{u'_{l'-t}}(4, c_t)$，并将交换后得到的着色记为 β_5。

着色 β_5 与 $\mathcal{V}$-等价于 β_4，因此根据观察 20，扇 $\mathcal{V}$ 是一个最小圈

在着色 β_5 中，着色 β_5 也与着色 β_4 关于 $((X_u(5)\cup X_v(5))\setminus\{u'_{l'-t}\})$ 等价，因此顶点 $u'_{l'-t}$ 仍同时属于 $X_u(5)$ 和 $X_v(5)$。所以，子扇 $X_u(5)^{\leqslant u'_{l'-t}}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V},u)$- 独立子扇。根据引理 34，扇 $X_v(5)$ 是一条不包含 $u'_{l'-t}$ 的路径。我们再次得到矛盾。

□

根据前面的断言，我们有 $\mathcal{X}$ 不是一条路径；现在证明它不是一颗彗星。假设 $\mathcal{X}=(vx_1,\cdots,vx_t)$ 是一颗彗星，其中 x_s 和 x_t 缺少相同的颜色 c_s。由于 x_s 和 x_t 都缺少颜色 c_s，它们中至少有一个不在 $K_v(1,c_s)$ 中。由于对于所有 $j<i$，对所有 $j<i$，$P(j)$ 都成立，如果 $\beta(uu_{l-j})\neq 1$，那么 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 是一个圈，因此 $\beta(\mathcal{X})\cap(\bigcup_{j\in[0,i-1]}\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))))=\emptyset$.

情形 61.6 $(c_s\notin\beta(\mathcal{U}_{u>l-1}))$.

如果 x_s 不在 $K_v(1,c_s)$ 中，那么我们交换连通分量 $C_{1,c_s}=K_{x_s}(1,c_s)$，得到一个着色 β'，它与 β 是 $\mathcal{V}$-等价的，因此扇 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中的同一个最小圈。在着色 β' 中，扇 $X_v(4)$ 现在是一条路径。此外，$c_s\notin\beta(\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-i}})$，且根据断言 60，有 $1\notin\beta(\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-i}})$。因此，着色 β' 与着色 β 是 $\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-i}}$-等价的。令 $\mathcal{U}'=X_u^{\beta'}(3)=(uu'_1,\cdots,uu'_{l'})$。由于 $\beta(\mathcal{X})\cap(\bigcup_{j\in[0,i-1]}\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))))=\emptyset$，着色 β' 与 β 是 $(\bigcup_{j\in[0,i-1]}\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))))$-等价的。因此根据引理 51，对于所有 $j\leqslant i$，我们有 $u'_{l'-i}=u_{l-i}$。特别地，$u'_{l'-i}=u_{l-i}$。由于 $\beta'(uu'_{l'-i})=4$，且 $Pweak(i)$ 成立，扇 $X_v(4)$ 不是一条路径。

同样，若 $x_t\notin K_v(1,c_s)$，我们交换连通分量 $C_{1,c_s}=K_{x_t}(1,c_s)$。注意，$\mathcal{V}$ 是一个最小圈，因此根据引理 15，它是饱和的，从而 $x_t\notin V(\mathcal{V})$。因此，着色 β' 与 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{V}$-等价的，所以扇 $\mathcal{V}$ 在此着色中仍是同一个最小圈。扇 $X_v(4)$ 现在是着色 β' 中的一条路径。令 $\mathcal{U}'=X_u^{\beta'}(3)=(uu'_1,\cdots,uu'_{l'})$。与前一种情形类似，着色 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{>u_{l-i}}$-等价的，并且 $(\bigcup_{j\in[0,i-1]}\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))))$-等价于 β。因此，根据引理51，对于所有 $j\leqslant i$，我们有 $u'_{l'-j}=u_{l-j}$。特别地，$u'_{l'-i}=u_{l-i}$，并且 $\beta'(uu'_{l'-i})=4$。由于 $P_{weak}(i)$ 成立，扇 $X_v(4)$ 不是一条路径，这就产生了矛盾。

情形 61.7 $(c_s\in\beta(\mathcal{U}_{>u_{l-1}}))$.

令 t' 使得 $m(u_{l-t'})=c_s$。由于对于所有 $j<i$，$P(j)$ 都成立，扇 $X_v(c_s)$ 是包含 $u_{l-t'}=x_t$ 的饱和圈。因此，顶点 x_s 不属于 $K_v(1,c_s)$。现在我们交换连通分量 $C_{1,c_s}=K_{x_s}(1,c_s)$，得到一个着色 β'，其中 $X_v(4)$ 现在是一条路径。着色 β' 与 β $\mathcal{V}$-等价，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中的同一个最小圈。如果顶点 u 不属于 C_{1,c_s}，那么着色 β' 也与 β $\mathcal{U}$-等价，从而 $X_u(3)=\mathcal{U}$。由于 $\beta'(uu_{l-i})=4$，且 $P_{weak}(i)$ 成立，扇 $X_v(4)$ 不是一条路径。这是一个矛盾。

因此，顶点 u 属于 C_{1,c_s}，并且在着色 β' 中，边 $uu_{l-(t'-1)}$ 现在被着色为 1。令 $\mathcal{U}'=X_u^{\beta'}(3)$。着色 β' 与 β 是 $\mathcal{U}_{>u_{l-t'}}$-等价的。着色 β' 也与 β 是 $(\bigcup_{j\in[0,t'-1]}\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))))$-等价的，因此根据引理 51，对于任意 $j\leqslant t'$，我们有 $u'_{l'-j}=u_{l-j}$。特别地，$u'_{l'-(t'-1)}=u_{l-(t'-1)}$。现在，边 $uu'_{l'-(t'-1)}$ 被着色为 1，且扇 $X_v(4)$ 是一条路径。由于对于所有 $j\leqslant t'$，$P(j)$ 都成立，根据引理 52，v 周围不存在路径，矛盾。

因此，扇 $\mathcal{X}=(vx_1,\cdots,vx_t)$ 是一个圈，下面证明它是饱和的。否则，存在 x_s 使得 $x_s\notin K_v(1,m(x_s))$。注意到，由于对所有 $j<i$，$P(j)$ 都成立，因此

对所有 $j < i$，扇 $X_v(\beta(uu_{l-j}))$ 是一个饱和圈，因此 $\beta(X_v(\beta(uu_{l-j}))) \cap \beta(\mathcal{X}) = \emptyset$，特别地 $x_s \notin \beta(\mathcal{U}_{>u_{l-i}})$。

情形 61.8（$m(x_s) \neq 4$）。

不失一般性，假设 $m(x_s) = 5$。由于 x_s 不属于 $K_v(1,5)$，我们交换连通分量 $C_{1,5} = K_{x_s}(1,5)$，得到一个着色 β'，其中 $X_v(4)$ 是一条路径。着色 β' 与 $\mathcal{V}$ 等价于 β，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 是着色 β' 中相同的最小圈。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_l)$。此外，$5 \notin \beta(\mathcal{U}_{\geqslant u_{l-i}})$，根据断言 60，颜色 1 也不出现在 $\mathcal{U}_{>u_{l-i}}$ 中。着色 β' 也是 $(\bigcup \beta(X_v(\beta(uu_{l-j})))$-$j\in[0,i-1]$

等价于 β，因此根据引理 51，对于任意 $j \leqslant i$，都有 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$。特别地，$u'_{l'-i} = u_{l-i}$。边 $uu'_{l'-i}$ 在着色4 中仍着 β'，且性质 $P_{weak}(i)$ 成立，因此X_v（4）不是一条路径，矛盾。

情形 61.9($m(x_s) = 4$)。

在这种情形下，我们交换连通分量 $C_{1,4} = K_{x_s}(1,4)$，并将交换后得到的着色记为 β'。如果顶点 u 不属于这个连通分量，那么我们就处于与前一种情形类似的着色中。因此，顶点 u 属于 $C_{1,4}$，且有 $\beta'(uu_{l-i}) = 1$。在着色 β' 中，$\mathcal{V}$ 与 β 等价，因此根据观察 20，圈 $\mathcal{V}$ 仍是该着色中的同一个最小圈。扇 $X_v(4)$现在是着色 β'中的一条路径。令 $\mathcal{U}' = X_u^{\beta'}(3) = (uu'_1, \cdots, uu'_l)$。着色 β' 与 β等价，并且也是 $(\bigcup \beta(X_v(\beta(uu_{l-j})))$-$j\in[0,i-1]$

等价于 β。因此根据引理 51 对于所有 $j \leqslant i$，我们有 $u'_{l'-j} = u_{l-j}$。特别地 $u'_{l'-i} = u_{l-i}$。性质 $P(j)$ 对所有 $j < i$都成立，且 $P_{weak}(i)$ 也成立，因此根据引理 52 在 v周围不存在路径。这是一个矛盾。

因此，扇 $\mathcal{X} = (vx_1, \cdots, vx_t)$ 是一个饱和圈，从而有 $x_t \in K_v(1,4)$。由于 $P(i)$ 为假，我们有 $x_t \neq u_{l-i-1}$。因此，顶点 u_{l-i-1}（它同样缺少颜色 4）不属于 $K_v(1,4)$。现在我们交换连通分量 $C_{1,4} = K_{u_{l-i-1}}(1,4)$，并将 β' 记为交换后的着色。根据引理 50，顶点 u 属于 C_1，4，在 $\mathcal{U}_{<u_{l-i}}$ 中有一条着色为 1 的边 uu''，且子扇 $X_u(1)_{\leqslant u_{l-i}}$ 是一个 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。因此，在着色 β' 中，顶点 u_{l-i} 现在缺少颜色 1，边 uu'' 现在着色为 4，且子扇 $X_u(4)_{\leqslant u_{l-i}}$ 是一个避开 v 的 $(\mathcal{V}, u)$-独立子扇。根据引理 34，扇 $X_v(4)$ 是一条路径。然而，着色 β' 与着色 β是 $X_v(4)$-等价的，因此扇 $X_v(4)$ 是一个圈，矛盾。

□

5 圈的相互作用

在本节中，我们证明引理23。

证明。我们首先证明这三个圈都是紧且饱和的。

断言 62。圈 $\mathcal{V}$、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是饱和且紧的。

证明。由于扇 $\mathcal{V}$ 不可逆，根据引理 15，它是饱和的。如果 $\mathcal{X}$ 或 $\mathcal{Y}$ 不饱和（不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{X}$ 不饱和），那么我们将连通分量 $K_u(c_v, c_u)$ 与 u 在 $\mathcal{X}$ 和 $u \notin K_v(c_v, c_u)$ 中交换，从而将 β 转化为一种着色，其中 $\mathcal{V}$ 仍是大小相同的圈，并且围绕 v 的扇是一条路径。根据引理 22，$\mathcal{V}$ 在这种着色中可逆，因此它在原着色中也可逆。类似地，假设 $\mathcal{X}$ 或 $\mathcal{Y}$ 不紧。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{X}$ 不紧。那么我们可以找到 $\mathcal{X}$、u_i 和 u_{i-1} 的两个连续顶点，使得连通分量 $K_{u_{i-1}}(m(u_i) \; m(u_{i-1}))$ 不包含 u_i。如果我们交换这个连通分量，就会得到一种着色，其中 $\mathcal{V}$ 仍是大小相同的圈，

并且围绕 v 的扇是一颗彗星，同样根据引理 22， $\mathcal{V}$ 在这种着色中可逆，因此它在着色 β 中也可逆。 □

根据引理 24，我们已经知道，如果 $(z,\ z') \in \mathcal{V}^2$，那么 $X_z(c_{z'})$ 是一个包含 z' 的圈，因此现在我们假设 $(z,\ z')$ 不在 $\mathcal{V}^2$ 中。

断言 63。 扇 $\mathcal{Z}$ 不是一条路径。

证明。 由于 $\mathcal{Z}$ 是一条路径，我们对其进行反演，直到得到一种着色，使得 $m(z) \in (\beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{X}) \cup \beta(\mathcal{Y})) \setminus \{m_\beta(z)\}$。在这种着色下，扇 $\mathcal{V}$仍然是一个大小相同的圈，并且，在 v 周围存在一个扇，它是一条路径或一颗彗星，根据引理22，这就产生了矛盾。 □

断言 64。 扇 $\mathcal{Z}$与 $\mathcal{V}$、 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$纠缠在一起。

证明。假设存在 $z'' \in \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{V} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{X})$，其中 $m(z'') \in (\beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{Y}) \cup \beta(\mathcal{X})) \setminus \{c_z\}$。如果 $m(z'') = c_v$，由于这些圈由断言 62 饱和， $K_{z''}(c_z, c_v)$ 不包含 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{X})$ 的任何顶点；交换它之后，我们得到一种着色，其中$\mathcal{V}$ 仍然是一个大小相同的圈，并且 $\mathcal{Z}$ 是一条路径，根据断言 63，这就产生了矛盾。如果 $m(z'') \neq c_v$，那么，由于这些圈是饱和的，连通分量 $K_{z''}(c_v, m(z''))$ 不包含 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{X})$ 的任何顶点，因此，如果我们交换它，就会得到一种对应于前一种情形的着色。 □

断言 65。 扇 $\mathcal{Z}$ 不是彗星。

证明。假设 $\mathcal{Z}$ 是彗星，则存在 z_1 和 z_2，使得 $m(z_1) = m(z_2) = c$。根据前一个断言，我们有 $c \notin (\beta(\mathcal{V}) \cup \beta(\mathcal{X}) \cup \beta(\mathcal{Y}))$，否则， $\mathcal{Z}$不会与这些圈中的一个纠缠。因此，连通分量 $K_z(c, m(z))$ 要么包含 z_1，要么包含 z_2；不失一般性，我们可以假设 $z_1 \notin K_z(c, m(z))$。如果我们交换 $K_{z_1}(c, m(z))$，就会得到一种着色，其中 $(\mathcal{V} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 的任何边都没有改变，并且 $\mathcal{Z}$ 是一条路径；根据断言 63，这就产生了矛盾。 □

根据前面的断言， $\mathcal{Z}$ 是一个圈，并且由于它与另外三个圈纠缠在一起，所以它包含 z'；证明至此完成。

□

致谢。 我们感谢 Marthe Bonamy、František Kardoš 和 Éric Sopena 提供有益的讨论，并衷心感谢 Penny Haxell 指出了早期版本中的一处错误

参考文献

[AC16] Armen S. Asratian 和 Carl Johan Casselgren。关于最大度为 4 的图的交换问题（Vizing 问题）的解及相关结果。图论期刊，82(4):350–373，2016。[BDK+21] Marthe Bonamy、Oscar Defrain、Tereza Klimošová、Aurélie Lagoutte 和 Jonathan Narboni。关于 Vizing 边染色问题。*arXiv* 预印本 *arXiv:2107.07900*，2021。[MMS12] Jessica McDonald、Bojan Mohar 和 Diego Scheide。次三次图和次四次图中边着色的 Kempe 等价。图论期刊，70(2):226–239，2012。

[Moh06] Bojan Mohar。着色的 Kempe 等价。载于巴黎图论，第 287–297 页。Springer，2006。