arXiv:2302.12934v1 [math.GT] 24 Feb 2023

δ 连通分支的分布：Lalley-Gatzouras 型自仿海绵

张艳芳和杨永强 *

Abstract. 设 (E,ρ) 是一个度量空间，并设 $h_E(\delta)$ 表示 E 的 δ-连通分支集合的基数。文献中，对于满足开集条件的自共形集 E，或自仿 Sierpi´nski 海绵 E，已有关于下述关系成立的充要条件：

$$h_E(\delta) \asymp \delta^{-\dim_B E}, \text{ when } \delta \to 0.$$

本文将上述结果推广到 Lalley-Gatzouras 型自仿海绵；实际上，在这种情况下，我们证明存在一个伯努利测度μ，使得对任意柱集 R，均有

$$h_R(\delta) \asymp \mu(R)\delta^{-\dim_B E}, \text{ when } \delta \to 0.$$

1. Introduction

设 (E,ρ) 是一个度量空间，并设 $\delta > 0$。若存在一个序列 $\{x_1 = x, x_2, ..., x_{k-1}, x_k = y\} \subset E$，使得对 $1 \le i \le k-1$ 有 $\rho(x_i, x_{i+1}) \le \delta$，则称两点 $x, y \in E$ 为δ-等价。E 的一个 δ-等价类称为 E 的一个 δ-连通分支。我们用 $h_E(\delta)$ 表示 E 的 δ-连通分支集合的基数。

与 δ-连通分支密切相关的一个概念是紧度量空间的间隙序列，这一概念已被许多数学家研究；例如参见 [5, 7, 9, 17, 30]。一些早期研究（ [7, 9, 17]）发现，对于某些全不连通的自相似集和自共形集 E，间隙序列（记作 $\{g_E(n)\}_{n\ge1}$）与 $n^{-1/\dim_B E}$ 可比，记为

$$g_E(n) \asymp n^{-1/\dim_B E}, \ n \ge 1,$$

其中 $\dim_B$ 表示盒维数。（若存在常数 $c > 0$ 使得对所有 $x \in X$，$c^{-1}g(x) \le f(x) \le cg(x)$，则称两个函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 可比，记作 $f \asymp g$。）

设 (E,ρ) 是一个紧度量空间，且 $\gamma > 0$。已有研究表明（缪、席和熊 [25],；Zhang 和 Huang [34]）：

$$g_E(n) \asymp n^{-1/\gamma} \Leftrightarrow h_E(\delta) \asymp \delta^{-\gamma}.$$

受.....启发 根据这一关系，Zhang 和 Huang [34] 提出了以下定义。

日期：2023年2月28日。该研究获得湖州师范学院启动科研基金资助，项目编号为 RK21089。
2010年数学主题分类：28A80，28A78。关键词和短语：自仿海绵、最大幂律、分量计数测度。
* 通讯作者。

定义 1.1. 设 E 为一个紧度量空间。若 E 满足指标为 γ 的幂律，即 $h_E(\delta) \asymp \delta^{-\gamma}$；若 $\gamma = \dim_B E$，则还称 E 满足最大幂律。

许多研究致力于探讨迭代函数系（IFS）[7,9,13,17,20,21,25,34]的吸引子的最大幂律。迭代函数系统（IFS）是度量空间 X上的一族压缩映射$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 。本文始终假设所有φ_j 均为单射。IFS 的吸引子是唯一满足条件 $E = \bigcup_{j=1}^N \varphi_j(E)$ 的非空紧集E；特别地，如果所有 φ_j 都是相似变换，则称其为自相似集。若 IFS $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 满足开集条件（OSC），则存在一个有界非空开集 $U \subset \mathbb{R}^d$，使得对所有 $1 \le i \le N$， $\varphi_i(U) \subset U$且 $\varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset$对 $1 \le i \ne j \le N$成立；此外，若 $U \cap E \ne \emptyset$，则称 E满足强开集条件（SOSC），并称 U 为 E的可行强开集。

Lapidus、Pomerance [17] 和 Falconer [9] 证实了满足强分离条件的自相似集 $E \subset \mathbb{R}$ 具有最大幂律，而 Deng、Wang 和 席 [7] 将这一结果推广到了自共形集。最近，Huang 和 Zhang [13] 对满足开集条件的自共形集给出了完整的答案。

如果 $\{x\}$ 是 E的一个连通分支，则称点 $x \in E$ 为 E 的平凡点。

命题 1.1（ [13]）。设 K 是由迭代函数系 IFS$\{S_j\}_{j=1}^N$生成的 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 自共形集。假设 K 满足开集条件。则以下陈述等价:

(i) $K satisfies\ th^{\text{e 最大值}} imal$ 幂 l

此外。(ii) 存在一个强开集 U，使得 U 包含 K的平凡点。(iii) 每个关于 K 的强开集都包含 K的平凡点。(iv) K 的平凡点集在 K中稠密。

已有数项工作致力于研究贝德福德–麦克马伦地毯 [20, 21, 25] 和自仿射 Sierpi´nski 海绵 [34]的最大幂律。令 $d \ge 2$，并令

$$2 \le n_1 \le n_2 < \cdots \le n_d$$

为一个整数序列。令 $\Gamma = \text{diag}(n_1, \ldots, n_d)$ 为 $d \times d$对角矩阵。令$\mathcal{D} = \{\text{i}_1, \ldots, \text{i}_N\} \subset \prod_{j=1}^d \{0, 1, \ldots, n_j - 1\}$。对于 $\text{i} \in \mathcal{D}$和 $z \in \mathbb{R}^d$，定义 $S_\text{i}(z) = \Gamma^{-1}(z + \text{i})$。迭代函数系 $\{S_\text{i}\}_{\text{i} \in \mathcal{D}}$ 的吸引子记为 $E = K(\Gamma, \mathcal{D})$，称为 d维广义自仿射 Sierpi´nski 海绵（见 Olsen [26]）。若 $n_1 = n_2 = \cdots = n_d$，则称集合 E为分形立方体；若 $n_1 < n_2 < \cdots < n_d$，则称其为自仿射 Sierpi´nski 海绵（见 Kenyon 和 Peres [14]）；特别地，当 $d = 2$时， E 称为贝德福德–麦克马伦地毯。

若 E 不包含在立方体 $[0, 1]^d$ 的一个（$d - 1$）维面内，我们称 E 是非退化的。对于 $1 \le j \le d$，令 $\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^j$ 为投影

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_j). \tag{1.1}$$

命题 1.2（ [34]）。设 E 是一个非退化的自仿 Sierpi´nski 海绵。那么，当且仅当 E 和所有 $\pi_j(E)$ （$1 \le j \le d-1$）都具有平凡点时， E 满足最大幂律。

本文的主要目的是证明 Lalley-Gatzouras 海绵的命题 1.2 的一个更强版本。若对角自仿海绵 Λ 的生成迭代函数系满足坐标排序条件和整齐投影条件（ [6, 16]），则称其为 Lalley-Gatzouras 海绵。精确定义见第 3 节。

注 1.1. 对角自仿射海绵是自仿射集中的一个重要类别，近年来受到广泛研究: Baranski [1], Das 和 Simmons [6], Feng 和 Wang [10], Mackay [23], Peres [28] Banaji 和 Kolossvary [2] 研究其维数理论，King [15], Jordan 和 Rams [22], Barrel 和 Mensi [3], Olsen [26], Reeve [32] 研究其多重分形分析，Li 等人 [19], Rao 等人 [31], Yang 和 Zhang [33], 研究其 Lipschitz 分类，等等。δ-连通分支的分布从一个新的角度揭示了自仿射海绵的度量和拓扑性质。

然而，这种推广并非易事。困难在于，对于 Lalley-Gatzouras型海绵 E 的一个柱集 E_I， $h_E(\delta)$ 与 $h_{E_I}(\delta)$ 之间的关系尚不明确。本文通过运用 Huang 等人 [12] 关于盒计数测度的一项近期结果，克服了这一困难。

记 $\Sigma = \{1, \ldots, N\}$，并设 $\Sigma^* = \bigcup_{n\geq 0} \Sigma^n$。对于 $I = i_1 \ldots i_n \in \Sigma^*$，我们称 $E_I = \varphi_I(E) = \varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_n}(E)$ 为 E 的第 n 级柱集。若 $z \in \mathbb{Z}^d$，则称 $\delta(z + [0, 1]^d)$ 为 δ- 网格盒。对于 $A \subset \mathbb{R}^d$，我们记

$$N_A(\delta) \tag{1.2}$$

表示与 A 相交的 δ-网格盒的数量。众所周知,

$$\dim_B A = \lim_{\delta \to 0} -\frac{\log N_A(\delta)}{\log \delta}$$

若极限存在（例如参见 [8]）。

对于 Lalley-Gatzouras 海绵，一种特殊的伯努利测度（我们称之为典范伯努利测度；其精确定义见第 3 节）与盒维数密切相关（ [12, 16]）。最近，Huang 等人证明了以下结果。

命题 1.3。（ *[12]*）设 Λ 是一个 Lalley-Gatzouras 海绵。那么，典范伯努利测度 μ 是一种柱盒计数测度，即存在常数 $M_0 > 0$，使得对于 Λ 的任意柱集 R，以及任意 $\delta < S(R)$， R 的最短边满足

$$M_0^{-1} \mu(R) \delta^{-\dim_B \Lambda} \leq N_R(\delta) \leq M_0 \mu(R) \delta^{-\dim_B \Lambda}. \tag{1.3}$$

受上述结果启发，我们提出以下概念。

定义 1.2（分量计数测度）。设 Λ 是迭代函数系 Φ 的吸引子，且 μ 是定义在 Λ 上的有限博雷尔测度。如果存在常数 $M \geq 1$，使得对于 Λ 的任意柱集 R，都存在一个 $\delta_0 = \delta_0(R)$，满足

$$M^{-1} \mu(R) \delta^{-\dim_B \Lambda} \leq h_R(\delta) \leq M \mu(R) \delta^{-\dim_B \Lambda},$$

对于 $\delta < \delta_0$，则我们称 μ 为 Λ 的分量计数测度。

注 1.2。显然，若 Λ存在分量计数测度，则不仅Λ，其所有柱集都满足带有统一常数 M的最大幂律。这反映了 Λ的一种齐次性。

首先，我们在命题 1.1 的列表中再补充一个等价表述 .

定理 1.1. 设 K 是满足开集条件的一个自共形集，且 μ 是吉布斯测度。那么，K 满足最大幂律，当且仅当 μ 是分量计数测度。

若 Lalley-Gatzouras 海绵 Λ 包含于 $[0,1]^d$的一个维数为 $d-1$的面中，则称其为退化的。从现在起，我们总是假设 Λ是非退化的 Lalley-Gatzouras 海绵。在此假设下， Λ 满足强开集条件，其开集为 $V=(0,1)^d$。记 $\Lambda_j=\pi_j(\Lambda)$，其中 π_j 由 (1.1) 定义；显然， Λ_j 也是非退化的，并且 $V_j=(0,1)^j$ 是 Λ_j的一个可行强开集。（见引理 4.4。）若 x 是 Λ的一个平凡点，且 $x\in(0,1)^d$，则称其为 Λ 的一个内部平凡点。

本文的主要结果如下两个定理所述。

定理 1.2. 设 Λ 是一个非退化的 Lalley-Gatzouras 型海绵，且 μ 是典范伯努利测度。则以下陈述等价:

(i) μ 是分量计数测度。 (ii) Λ 满足最大幂律。 (iii) 对每个 $1\le j\le d$, $V_j=(0,1)^j$ 都含有 $\Lambda_j=\pi_j(\Lambda)$ 的平凡点。 (iv) 对每个 $1\le j\le d$， Λ_j 的平凡点在 Λ_j 中稠密。

注 1.3. Zhang 和 Xu [35] 证明了，如果 Λ 是一个切片自仿射海绵（定义见注 3.1），那么只要 Λ 具有平凡点，它就具有内部平凡点。这解释了为什么在命题 1.2 中，我们要求 Λ_j 具有平凡点，而不是要求 Λ_j 具有内部平凡点。

定理 1.3. 设 Λ 是一个非退化的 Lalley-Gatzouras 海绵， μ 是典范伯努利测度。若 Λ 不满足最大幂律，则存在一个实数 $0<\chi<\dim_B\Lambda$，使得对于任意柱集 R,

$$h_R(\delta)=O\left(\mu(R)\,\delta^{-\chi}\right),\quad \delta\to 0. \tag{1.4}$$

注 1.4. 我们指出，若柱盒计数测度 μ 同时也是分量计数测度，那么对于 Λ 的任意柱集 R 以及充分小的 δ，都有

$$h_R(\delta)\asymp N_R(\delta),$$

这意味着，即使在局部范围内， δ-连通分支中也有很大一部分非常“小”。

本文组织如下。定理 1.1 在第 2 节中得到证明。第 3 节回顾关于 Lalley-Gatzouras 型海绵的一些已知结果。第 4 节给出一些记号和引理。第 5 节处理存在 j 使得 Λ_j 不包含内部平凡点的情形。定理 1.3 和定理 1.2 在第 6 节中得到证明。

2. 自共形集的分量计数测度

设 $\alpha > 0$。共形映射 $S: V \to \mathbb{R}^d$ 是 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 可微的，如果存在常数 $C > 0$ 使得

$$||S'(x)| - |S'(y)|| \le C|x-y|^\alpha \text{ for all } x, y \in V. \tag{2.1}$$

迭代函数系 $\{S_j\}_{j=1}^N$ 的吸引子称为 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 自共形集，如果迭代函数系中的所有映射都是 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 可微的。

本节中，我们始终假设 K 是由迭代函数系 $\{S_j\}_{j=1}^N$生成的 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 自共形集。令 $s = \dim_H K (= \dim_B K)$，并令 μ 为K上的吉布斯测度。

对于 $A \subset \mathbb{R}^d$，我们用 $|A|$ 表示 A的直径。以下引理是众所周知的。

引理 2.1（有界畸变原理 [27,28]）。设 E 为 V的一个紧子集。那么存在 $C_1 \ge 1$，使得对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma^*$,

$$C_1^{-1}|S_{\boldsymbol{\sigma}}(E)| \cdot |x-y| \le |S_{\boldsymbol{\sigma}}(x) - S_{\boldsymbol{\sigma}}(y)| \le C_1|S_{\boldsymbol{\sigma}}(E)| \cdot |x-y|$$

对所有 x、$y \in E$均成立。

若两个字符串中任一个都不是另一个的前缀，则称它们不可比较。

引理 2.2（阿尔福斯正则性 [27,28]）。若 K 满足开集条件，则 $\mu \asymp \mathcal{H}^s|_K$，且存在常数 $C_2 > 0$，使得对任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma^*$,

$$C_2^{-1}|K_{\boldsymbol{\sigma}}|^s \le \mu(K_{\boldsymbol{\sigma}}) \le C_2|K_{\boldsymbol{\sigma}}|^s.$$

此外，若 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 不可比较，则 $K_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $K_{\boldsymbol{\tau}}$ 在 μ 中不相交 .

定理 1.1 的证明。首先，设 K 是满足最大幂律的自共形集。设 K_I是一个柱集，并令 $\delta < |K_I|$。设 $\delta' = C_1\delta/|K_I|$，其中 C_1是引理 2.1 中的常数。设 U_1 和 U_2 是 K的两个 δ'-连通分支。由引理 2.1，$x \in S_I(U_1)$ 和 $y \in S_I(U_2)$ 属于 K_I的不同 δ-连通分支。因此，

$$\begin{aligned} h_\delta(K_I) &\ge h_{\delta'}(K) && \text{(By the similarity mentioned above.)} \\ &\ge M(\delta')^{-s} && \text{(By the maximal power law.)} \\ &= MC_1^{-s}|K_I|^s\delta^{-s} \\ &\ge M(C_1C_2)^{-s}\mu(K_I)\delta^{-s}. && \text{(By Lemma 2.2.)} \end{aligned}$$

反向不等式也可以用同样的方法证明。因此，μ是分量计数测度。

另一方面，如果 μ 是分量计数测度，那么显然 K满足最大幂律（见注 1.2）。定理得证。□

3. Lalley-Gatzouras 型自仿海绵

本节回顾 Lalley-Gatzouras 型海绵的一些已知结果。

3.1. Lalley-Gatzouras 型海绵。若 T 是一个 $d\times d$ 对角矩阵，且其所有对角元均为正数，则称 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $f(x) = Tx + b$ 为对角自仿射映射。若 IFS $\Phi = \{\phi_j(x)\}_{j=1}^m$ 中的所有映射 $\phi_j(x)$ 都是互不相同的对角自仿射压缩映射，则称其为对角自仿射迭代函数系；其吸引子称为对角自仿射海绵，记作 Λ_Φ。不失一般性地，我们始终假设 $\Lambda_\Phi \subset [0,1]^d$。下面给出另一种等价定义。

定义 3.1（对角迭代函数系 [6]）。设 $d \geq 1$ 为一个整数。对于每个 $i \in \{1, ..., d\}$，设 $A_i = \{0, 1, ..., n_i - 1\}$ 满足 $n_i \geq 2$，并令 $\Phi_i = (\phi_{a,\ i})_{a\in A_i}$ 为一组压缩相似变换，作用于 $[0,1],$，称为第 i 个坐标上的基迭代函数系。令 $A = \prod_{i=1}^d A_i$，并且对于每个 $a = (a_1, \cdots, a_d) \in A$，考虑压缩仿射映射 $\phi_a\colon\ [0,1]^d \to [0,1]^d$，其定义公式如下：

$$\phi_a(x_1, \cdots x_d) = (\phi_{a,1}(x_1), \cdots, \phi_{a,d}(x_d))$$

其中，$\phi_{a,\ i}$ 是上式中$\phi_{a_i,\ i}$ 的简写。于是我们可以得到

$$\phi_a\left([0,1]^d\right) = \prod_{i=1}^d \phi_{a,i}([0,1]) \in [0,1]^d$$

给定 $\mathcal{D} \subset A$，我们称集合 $\Phi = (\phi_a)_{a\in\mathcal{D}}$ 为对角迭代函数系，并称其不变集 Λ 为对角自仿射海绵。

注 3.1. 对角自仿射迭代函数系 Φ 称为切片自仿射迭代函数系，若对每个 $i \in \{1, ..., d\}$,

$$[0,1] = \phi_{0,i}[0,1) \cup \cdots \cup \phi_{n_i-1,i}[0,1)$$

是 $[0, 1$从左到右的一个划分；在这种情况下，我们称 Λ 为切片自仿射海绵。特别地，若 $d = 2$，则称 Λ 为 Bara ´nski 地毯。此外，若对每个 $1 \leq j \leq d$，$\phi_{a,j}$, $a \in \mathcal{D}$ 的压缩比都相等，则 Λ 是自仿射 Sierpi ´nski 海绵。

我们称 Φ 满足坐标排序条件，若

$$\phi'_{a,1} > \cdots > \phi'_{a,d}, \quad \text{for all } a \in \mathcal{D}, \tag{3.1}$$

其中，f'表示函数 f的导数。

回顾一下，$\pi_j(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_j)$。令

$$\Phi_{\{1,\cdots,j\}} = \left((\phi_{a,1}, \cdots, \phi_{a,j})\right)_{a\in\pi_j(\mathcal{D})},$$

which 是 $\mathbb{R}^j$上的一个迭代函数系。显然，$\Lambda_j = \pi_j(\Lambda)$ 是迭代函数系 $\Phi_{\{1,\cdots,j\}}$的吸引子 .

定义 3.2（ [6]）。设 Λ_Φ 是满足（3.1）的对角自仿海绵。我们称 Φ 满足整齐投影条件，如果对每个 $j \in \{1, \ldots, d\}$，迭代函数系 $\Phi_{\{1,\ldots,j\}}$ 都满足开集条件，且开集为 $\mathbb{I}^j = (0, 1)^j$，即：

$$\left\{\phi_{\mathbf{d},\{1,\ldots,j\}}(\mathbb{I}^j)\right\}_{\mathbf{d}\in\pi_j(\mathcal{D})}$$

彼此不相交。此外，如果一个对角自仿射海绵 Λ_Φ 满足坐标排序条件和整齐投影条件，我们就称它为 Lalley-Gatzouras 型。

3.2. 典范伯努利测度。设 $\mathbf{p}=(p_{\mathbf{d}})_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}}$ 为概率权重。满足下列条件的唯一概率测度 $\mu_{\mathbf{p}}$

$$\mu_{\mathbf{p}}(\cdot)=\sum_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}}p_{\mathbf{d}}\phi_{\mathbf{d}}^{-1}(\cdot)$$

称为由权重 $\mathbf{p}$ 确定的伯努利测度。

设 Λ_Φ 是一个 Lalley-Gatzouras 型海绵。现在我们定义一个与 Λ_Φ 相关的序列 $\{\beta_j\}_{j=1}^d$。设 $\beta_1>0$ 是满足下列条件的唯一实数

$$\sum_{f_1\in\Phi_{\{1\}}}(f_1')^{\beta_1}=1.$$

若已定义 $\beta_1,\dots,\beta_{j-1}$，则定义 $\beta_j>0$ 为满足下列条件的唯一实数

$$\sum_{(f_1,\dots,f_j)\in\Phi_{\{1,\dots,j\}}}\prod_{k=1}^{j}(f_k')^{\beta_k}=1. \tag{3.2}$$

接下来，对于 $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_j)\in\Phi_{\{1,\dots,j\}}$，定义

$$p_{\mathbf{f}}=\prod_{k=1}^{j}(f_k')^{\beta_k}. \tag{3.3}$$

设 μ_j 是 Λ_j 上由权重 $(p_{\mathbf{f}})^{\mathbf{f}\in\Phi_{\{1,\dots,j\}}}$ 确定的伯努利测度。特别地，我们记 $\mu:=\mu_d$，并称 μ 为 Λ 的典范伯努利测度。可以证明

定理 3.1. (*[12]*) 设 Λ 是一个 Lalley-Gatzouras 型海绵，则

$$\dim_B\Lambda_\Phi=\sum_{j=1}^{d}\beta_j,$$

且典范伯努利测度 μ 是柱盒计数测度。

记

$$\alpha_j:=\dim_B\Lambda_j=\sum_{k=1}^{j}\beta_k. \tag{3.4}$$

特别地，$\dim_B\Lambda=\alpha_d:=\alpha$。

注 3.2. 设 R 和 R 是 Λ_Φ 的两个 ℓ 阶柱集，且 ν 是 Λ_Φ 的一个伯努利测度。那么 $\nu(R\cap R)=0$ 始终成立。例如参见 [31]。

引理 3.3. 设 Λ 是一个非退化的拉利-加祖拉斯型对角自仿射海绵，则所有 Λ_j、$1\le j\le d$ 都是非退化的。

证明。定义 $\pi_k'(x_1,\dots,x_d)=x_k$。那么，$\Lambda$ 是非退化的，当且仅当对每个 $1\le k\le d$，$\pi_k'(\Lambda)\neq\{0\}$ 且 $\pi_k'(\Lambda)\neq\{1\}$。由于对于 $k\le j$，$\pi_k'\circ\pi_j=\pi_k'$，我们得到该引理。□

4. 记号与引理

在本节中，我们始终假设 Λ 是一个非退化的广义 Lalley-Gatzouras 型海绵。我们将使用 $\mathcal{D}$ 作为字母表，并记作 $\mathcal{D}^* = \bigcup_{n\geq 1}\mathcal{D}^n$。对于 $i_1\dots i_k \in \mathcal{D}^k$，我们称 $\Lambda_{i_1\dots i_k} := \phi_{i_1\dots i_k}(\Lambda)$ 为第 k 个柱集；此外，令

$$S(W) = \prod_{j=1}^{k} \phi'_{i_j,d} \tag{4.1}$$

作为 W 的"最短边"。令

$$r_* = \min\left\{\phi'_{a,d};\ a\in\mathcal{D}\right\}. \tag{4.2}$$

Let

$$\mathcal{V}_\delta = \{\Lambda_{i_1\dots i_k};\ S(\Lambda_{i_1\dots i_k}) < \delta/r_* \text{ and } S(\Lambda_{i_1\dots i_{k-1}}) \geq \delta/r_*\} \tag{4.3}$$

并称其为 Λ 的 δ-阻塞。显然，对于 $H\in\mathcal{V}_\delta$，有

$$\delta \leq S(H) < \delta/r_*.$$

下面的引理显而易见。

引理 4.1. (i) 对任意有界集 $A\subset\mathbb{R}^d$，有 $h_A(\delta) \leq 3^d N_A(\delta)$。(ii) $h_A(\delta)+h_B(\delta) \geq h_{A\cup B}(\delta)$。(iii) 若 f 是压缩映射，则 $h_A(\delta)\geq h_{f(A)}(\delta)$。

我们用 ∂E 表示集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ 的边界。

设 $W=\Lambda_I$ 是 Λ 的一个柱集。记

$$N_W^b(\delta)$$

为与 $\phi_I(\partial[0,1]^d\cap\Lambda)$ 相交的 δ-网格盒子的数量。本节的主要目标是估计 $N_W^b(\delta)$。为此，我们的策略是估计集合的 μ-测度

$$\Lambda_m^b = \cup\{\Lambda_I;\ I\in\mathcal{D}^m \text{ and } \varphi_I([0,1]^d)\cap\partial[0,1]^d\neq\emptyset\}, \tag{4.4}$$

然后利用 μ 是一种盒计数测度这一事实。

设 $F_1,\dots,F_{2d}$ 是 $[0,1]^d$ 的 $(d-1)$-面。对于 $1\leq j\leq 2d$，记

$$\mathcal{D}^{(j)} = \left\{a\in\mathcal{D};\ \phi_a\left([0,1]^d\right)\cap F_j\neq\emptyset\right\}.$$

记

$$Q_j = \sum_{a\in\mathcal{D}^{(j)}} \mu(\Lambda_a)$$

并设

$$Q = \max\{Q_j;\ j=1,\dots,2d\}. \tag{4.5}$$

由于 Λ 是非退化的，我们得出对于每个 j，$\mathcal{D}^{(j)}$ 都是$\mathcal{D}$ 的真子集，因此 $Q_j<1$。

引理 4.2. 对于每个整数 $m \geq 1$，我们有

$$\mu(\Lambda_m^b) = \sum_{j=1}^{2d} Q_j^m \leq 2dQ^m.$$

证明。显然， $\varphi_I([0,1]^d) \cap \partial F_j \neq \emptyset$ 当且仅当 $I \in (\mathcal{D}^{(j)})^m$，因此此类柱集并的测度为 Q_j^m。引理得证。□

引理 4.3。设 W 是 Λ 的一个柱集，且 $m \geq 1$ 是一个整数。若 $\delta < r_*^m S(W)$，则

$$N_W^b(\delta) \leq 2dM_0 Q^m \mu(W) \delta^{-\alpha},$$

其中， M_0 是命题 1.3 中的常数。

证明。设 $W = \Lambda_I$ 是一个柱集。由于 $\delta < r_*^m S(W)$，如果一个 δ-网格盒 B 与∂W相交，则 $B \subset \varphi_I(\Lambda_m^b)$。根据 μ的定义，对于任意 Λ的柱集 A，有 $\mu(\varphi_I(A)) = \mu(W)\mu(A)$。因此，根据引理 4.2,

$$\mu(\varphi_I(\Lambda_m^b)) \leq 2dQ^m \mu(W).$$

因此,

$$N_W^b(\delta) \leq N_{\varphi_I(\Lambda_m^b)}(\delta) \leq M_0 \mu(\varphi_I(\Lambda_m^b)) \leq M_0 2dQ^m \mu(W)\delta^{-\alpha},$$

其中第二个不等式成立是因为 μ 是盒计数测度。 □

最后，我们刻画 Λ 何时具有内部平凡点。

设 Φ 是一个迭代函数系，其吸引子为 K，并假设 Φ 满足强开集条件，且开集为 V。称平凡点 $x \in K$ 为 K 的内部平凡点，如果 $x \in V$。按照 Zhang 和 Huang [34], 的说法，若 F 是 Λ 的开闭集（既闭又开），则称其为 Λ 的一个孤岛，当且仅当 $F \cap \partial\left([0,1]^d\right) = \emptyset$。显然，当 k 足够大时，孤岛 F 是若干个 k 阶柱集的并。

Zhang 和 Huang [34] 证明，若 Φ 是满足强开集条件的迭代函数系，则其吸引子 K 具有内部平凡点，当且仅当 K 存在孤岛。

引理 4.4. 设 Λ 是一个非退化的 Lalley-Gatzouras 型对角自仿海绵。则 Λ 具有内部平凡点，当且仅当存在 $\delta > 0$ 和 Λ 的一个 δ-连通分支 X，使得 $X \cap \partial[0,1]^d = \emptyset$。

证明。显然， $V = (0,1)^d$ 是一个满足开集条件的开集。 Λ 非退化意味着 Λ 满足此 V的强开集条件。因此，根据 [34]的一般结果， Λ 存在内部平凡点，当且仅当 Λ 存在孤岛。

假设 Λ 存在一个孤岛 U。设 d_0 为 U 与 $\Lambda \setminus U$之间的距离，并令 $\delta < d_0/3$。设 X 为一个与 U相交的 δ-连通分支。显然， X与 $\Lambda \setminus U$不相交，因此也与 $\partial[0,1]^d$不相交。

另一方面，假设存在 $\delta > 0$ 以及 δ-连通分支X 属于 Λ，使得 $X \cap \partial[0,1]^d = \emptyset$。令 m 为一个足够大的整数，使每个 m阶柱集的直径都小于 δ。那么，与 X 相交的 m阶柱集的并构成了 Λ的一个孤岛。□

5. 对于某个 j， Λ_j 不含有内部平凡点的情形

在本节中，我们始终假设 Λ 是一个 Lalley-Gatzouras 型的非退化自仿海绵。

定理 5.1. 假设 Λ 不含有内部平凡点。令 $\tau \in (1, +\infty)$。则存在 $0 < \chi <$ 维$_B \Lambda$ 和 $C_1 > 0$，使得对于 Λ 的任意柱集 W，

$$h_W(\delta) \le C_1 \mu(W) \delta^{-\chi}, \quad \text{for } \delta \le (r_* S(W))^{\tau}. \tag{5.1}$$

因此， Λ 不满足最大幂律。

证明. 令 $W = \Lambda_I$ 为一个柱集，并令 $\delta < S(W)$。令 m 为满足下式的整数

$$(r_*)^{m+1} \le \frac{\delta}{S(W)} < (r_*)^m. \tag{5.2}$$

由于 Λ 不具有内部平凡点，根据引理 4.4， Λ 的每个 δ-连通分支都必须与 $\Lambda \cap \partial[0,1]^d$ 相交。由此可知， W 的每个 δ-连通分支都必须与 $W \cap \varphi_I(\partial[0,1]^d)$ 相交，因此

$$\begin{aligned} h_W(\delta) &\le h_{W \cap \varphi_I(\partial[0,1]^d)}(\delta) \\ &\le 3^d N_W^b(\delta) \qquad \text{(By Lemma 4.1 (i).)} \\ &\le 2d 3^d M_0 Q^m \mu(W) \delta^{-\alpha}. \qquad \text{(By Lemma 4.3.)} \end{aligned}$$

由 (5.2) 的左侧不等式可得，对于

$$\delta \le (r_* S(W))^{\tau}, \tag{5.3}$$

成立：

$$Q^m \le \delta^s,$$

其中 $s = (1 - \frac{1}{\tau})$ 对数$_Q$对数$_{r_*}$。因此，令 $\chi = \alpha - s$，定理即得。 □

从现在起，我们固定 τ_0 为数

$$\tau_0 = \min_{j=1,\dots,d-1} \frac{\log \max\{\phi'_{\mathbf{a},j+1};\ \mathbf{a} \in \mathcal{D}\}}{\log \min\{\phi'_{\mathbf{a},j};\ \mathbf{a} \in \mathcal{D}\}}.$$

由坐标排序条件可知 $\tau_0 > 1$；此外，对于Λ的任意柱集 W，有

$$S(\pi_{j+1}(W)) \le S(\pi_j(W))^{\tau_0}, \quad j = 1, \dots, d-1. \tag{5.4}$$

引理 5.1. 假设存在 $0 < \chi < \alpha_{d-1}$ 和 $C_1 > 0$，使得对于 Λ_{d-1}的每个柱集 W'，均有

$$h_{W'}(\delta) \le C_1 (\mu_{d-1}(W') \delta^{-\chi}) \quad \text{for } \delta \le (r_* S(W'))^{\tau_0}. \tag{5.5}$$

那么，对于 Λ的每个柱集 W，有

$$h_W(\delta) \le 2^d {r_*}^{-(1+\tau_0)d} C_1 \mu_d(W) \delta^{-\eta} \quad \text{for } \delta \le S(W), \tag{5.6}$$

其中 $\eta = \chi + \beta_d$。

证明。设 H 是 Λ 的一个柱集，并记为 $H' = \pi_{d-1}(H)$。我们断言，对于 $\varepsilon < \delta/2$，有

$$S(H) < \delta/2 \Rightarrow h_H(\delta) \leq h_{H'}(\varepsilon). \tag{5.7}$$

取 $x, y \in H$。若 $|\pi_{d-1}(x) - \pi_{d-1}(y)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$，则 $|x-y| \leq \delta$，因为 $S(H) \leq \delta/2$。因此，若 $\pi_{d-1}(x)$ 和 $\pi_{d-1}(y)$ 属于 H' 的同一个 ε-连通分支，则 x 和 y 属于 H 的同一个 δ-连通分支，这就证明了我们的断言。

现在我们转而证明该引理。取 Λ 的一个柱集 W，并令 $\delta < S(W)$。设

$$\delta' = \delta r_*/2 \text{ and } \varepsilon = \delta r_*^{1+\tau_0}/2.$$

那么对于 $H \in \mathcal{V}_{\delta'}$，我们有 $\delta r_*/2 \leq S(H) < \delta/2$。此外，由 (5.4) 可得

$$\varepsilon \leq r_*^{\tau_0} S(H) \leq (r_* S(H'))^{\tau_0}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
h_W(\delta) &\leq \textstyle\sum_{H \in \mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H \subset W} h_H(\delta) && \text{(By Lemma 4.1(ii))} \\
&\leq \textstyle\sum_{H \in \mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H \subset W} h_{H'}(\varepsilon) && \text{(By (5.7) and } S(H) < \delta/2) \\
&\leq \textstyle\sum_{H \in \mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H \subset W} C_1 \mu_{d-1}(H') \varepsilon^{-\chi} && \text{(By (5.5))} \\
&= \textstyle\sum_{H \in \mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H \subset W} C_1 \mu_d(H) S(H)^{-\beta_d} \varepsilon^{\beta_d - \eta} \\
&\leq 2^{\eta} r_*^{\tau_0 \beta_d - (1+\tau_0)\eta} C_1 \mu_d(W) \delta^{-\eta} && \text{(Since } (S(H)/\varepsilon) \geq r_*^{\tau_0}) \\
&\leq 2^d r_*^{-(1+\tau_0)d} C_1 \mu_d(W) \delta^{-\eta}, && \text{(Since } \eta < d \text{ and } r_* < 1)
\end{aligned}$$

这验证了 (5.6)。引理得证。 □

推论 5.1. 设 Λ 是一个 Lalley-Gatzouras 型非退化自仿海绵。若存在 $j \in \{1, \ldots, d\}$ 使得 Λ_j 不含内部平凡点，则存在一个实数 $0 < \chi < \dim_B \Lambda$，使得对于任意柱集 R，

$$h_R(\delta) = O\left(\mu(R) \delta^{-\chi}\right), \quad \delta \to 0. \tag{5.8}$$

证明. 若 $j = d$，则由定理 5.1 可得该推论。若 $j < d$，则由引理 5.1 和归纳法可得 (5.8)。□

6. 定理 1.2 的证明

本节中，我们始终假设 Λ 是一个 Lalley-Gatzouras 型非退化自仿海绵，并将 μ_j 记为 Λ_j 的典范伯努利测度。特别地，$\mu := \mu_d$。

设 $W = \Lambda_I$ 是 Λ 的第 k 个柱集。我们称 $\phi_I\left([0,1]^d\right)$ 为 W 对应的第 k 个基本柱。若 W 的一个 δ-连通分支 U 满足

$$U \subset \phi_I(0,1)^d;$$

否则，我们称 U 为一个边界 δ-连通分支。记 $h_W^b(\delta)$ 为 W 的边界 δ-连通分支数，记 $h_W^i(\delta)$ 为 W 的内部 δ-连通分支数。

引理 6.1. 那么，对于任意 $\kappa > 0$，存在一个整数 $m_0 \geq 1$，使得对于 Λ 的任意柱集 W 和任意 $\delta < (r_*)^{m_0} S(W)$，有

$$h_W^b(\delta) \leq \kappa \mu(W) \delta^{-dim_B \Lambda}.$$

证明。记 $\alpha = \dim_B \Lambda$。由命题 1.3，存在 $M_0 > 0$，使得对于 Λ 的任意柱集 H，

$$M_0^{-1} \mu(H) \delta^{-\alpha} \leq N_H(\delta) \leq M_0 \mu(H) \delta^{-\alpha} \quad \text{for } \delta < S(H).$$

设 $W = \Lambda_I$ 是 Λ 的一个柱集，且设 $m \geq 1$。令 $\mathcal{B}(W, m)$ 表示 W 中对应的基本柱体与 $\varphi_I(\partial [0,1]^d)$ 相交的 $(k+m)$ 阶柱集的集合。那么

$$\cup \mathcal{B}(W, m) = \varphi_I(\Lambda_m^b) := W^*,$$

其中 Λ_m^b 由 (4.4) 定义。由引理 4.2，得

$$\mu(W^*) = \mu(\Lambda_m^b) \mu(W) \leq 2dQ^m \mu(W).$$

取整数 m_0，使得 $3^d M_0 (2d) Q^{m_0} < \kappa$。令 $\delta < (r_*)^{m_0} S(W)$；在这种情况下，若 U 是 W 的一个边界 δ-连通分支，则 U 必与 W^* 相交。因此，

$$\begin{aligned} h_W^b(\delta) &\leq h_{W^*}(\delta) \leq \textstyle\sum_{H \in \mathcal{B}(W, m_0)} h_H(\delta) \\ &\leq 3^d \textstyle\sum_{H \in \mathcal{B}(W, m_0)} N_H(\delta) \qquad \text{(By Lemma 4.1 (i).)} \\ &\leq 3^d \textstyle\sum_{H \in \mathcal{B}(W, m_0)} M_0 \mu(H) \delta^{-\alpha} \\ &\leq 3^d M_0 \mu(W^*) \delta^{-\alpha} \\ &\leq \kappa \mu(W) \delta^{-\alpha}, \end{aligned}$$

这就证明了该引理。 □

定理 6.1。若 μ_{d-1} 是 Λ_{d-1} 的分量计数测度，且 Λ 具有内部平凡点，则 μ 是 Λ 的分量计数测度。

证明。由于 Λ 是非退化的且含有平凡点，由引理 4.4，存在 Λ 的一个既开又闭子集 F，使得 $F \cap \partial [0,1]^d = \emptyset$。设 F 是 L 个第 m_1层柱集的并。令 U 为 F 中一个第 m_1层柱集，且它在 μ中具有最大测度，则

$$\mu(U) \geq \mu(F)/L.$$

令 W为 Λ的一个第 k层柱集，并记为 $W' = \pi_{d-1}(W)$。令 $\delta \leq S(W)$。由于

$$h_W(\delta) \leq 3^d N_W(\delta) \asymp \mu_d(W) \delta^{-\alpha_d},$$

我们只需考虑 $h_W(\delta)$的下界估计。

μ_{d-1} 是分量计数测度这一事实意味着，存在一个常数 M，使得

$$h_{W'}(\delta) \geq M \mu_{d-1}(W') \delta^{-\alpha_{d-1}}, \qquad \text{for all } \delta < S(W').$$

（我们注意到，此处设定阈值 $\delta_0(W') = S(W')$。）

令 $\kappa = M/2$，并令 m_0 为引理 6.1 中的常数。设 $\delta' = \delta/(r_*)^{m_0+m_1}$。令 $\mathcal{V}_{\delta'}$ 为 Λ 的 δ'-阻挡。

取 $H \in \mathcal{V}_{\delta'}$ 和 $H \subset W$。令 f_H 为满足 $H = f_H(\Lambda)$ 的仿射映射，则 $H_F := f_H(F)$ 是 H 意义下的一个孤岛，即 $f_H(F)$ 是 H 的既开又闭子集，且 $f_H(F)$ 与 $f_H(\partial[0,1]^d)$ 不相交。显然

$$\mu(H_F) = \mu(F)\mu(H).$$

现在我们估计 $h_{H_F}(\delta)$。记

$$U_H = f_H(U) \text{ and } U'_H = \pi_{d-1}(U_H).$$

首先，由于 π_{d-1} 是压缩的，根据引理 4.1(iii)，有

$$h_{U_H}(\delta) \geq h_{U'_H}(\delta).$$

注意到

$$\delta = (r_*)^{m_0+m_1}\delta' \leq (r_*)^{m_0+m_1}S(H) \leq (r_*)^{m_0}S(U_H) \leq (r_*)^{m_0}S(U'_H).$$

一方面，由于 μ_{d-1} 是分量计数测度，有

$$h_{U'_H}(\delta) \geq M\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}}. \tag{6.1}$$

另一方面，根据引理 6.1，有

$$h^b_{U'_H}(\delta) \leq \kappa\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}} = \frac{M}{2}\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}}.$$

结合式 (6.1)，可得

$$h^i_{U'_H}(\delta) \geq \frac{M}{2}\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}}. \tag{6.2}$$

首先，我们证明 $h_{H_F}(\delta)$ 不小于 (6.2) 的左端：

$$h_{H_F}(\delta) \geq h_{\pi_{d-1}(H_F)}(\delta) \geq h^i_{U'_H}(\delta). \tag{6.3}$$

其次，我们证明 $\mu(H)$ 与 (6.2) 的右端可比。由于

$$\delta = (r_*)^{m_0+m_1}\delta' \geq (r_*)^{m_0+m_1+1}S(H) \geq (r_*)^{m_0+m_1+1}S(U_H), \tag{6.4}$$

我们有

(6.5)

$$\begin{aligned}
\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}} &= \mu(U_H)\left(\tfrac{\delta}{S(U_H)}\right)^{\beta_d}\delta^{-\alpha_d} \\
&\geq \mu(U_H)r_*^{(m_0+m_1+1)}\delta^{-\alpha_d} \quad \text{(By (6.4) and using the fact } \beta_d \leq 1.) \\
&\geq r_*^{(m_0+m_1+1)}\tfrac{\mu(H_F)}{L}\delta^{-\alpha_d} \\
&= r_*^{(m_0+m_1+1)}\tfrac{\mu(F)}{L}\mu(H)\delta^{-\alpha_d}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
h_W(\delta) &\geq \textstyle\sum_{H\in\mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H\subset W} h_{H_F}(\delta) && \text{(Since } H_F \text{ are 'islands'.)} \\
&\geq \textstyle\sum_{H\in\mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H\subset W} h^i_{U'_H}(\delta) && \text{(By equation (6.3).)} \\
&\geq \textstyle\sum_{H\in\mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H\subset W} \frac{M}{2}\mu_{d-1}(U'_H)\delta^{-\alpha_{d-1}} && \text{(By equation (6.2).)} \\
&\geq \textstyle\sum_{H\in\mathcal{V}_{\delta'} \text{ and } H\subset W} \frac{Mr_*^{(m_0+m_1+1)}\mu(F)}{2L}\mu(H)\,\delta^{-\alpha} && \text{(By equation (6.5).)} \\
&= \tfrac{Mr_*^{(m_0+m_1+1)}\mu(F)}{2L}\mu(W)\,\delta^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

这证明 μ 是一种分量计数测度，并且阈值 $\delta_0(W)$ 可以设为 $S(W)$。□

定理 1.2 的证明。定理中的第二个断言已在推论 5.1 中证明。下面我们证明 (i)⇒ (ii) ⇒ (iii)⇒ (i)。(i)⇒(ii) 是显然的，见注 1.2。(ii)⇒(iii) 由推论 5.1 得出。(iii) ⇒(i)：首先，根据定理 1.1， μ_1 是 $\Lambda_1 = \pi_1(\Lambda)$ 的分量计数测度。然后根据定理 6.1 和归纳法，我们得出，对于每个 $1 \leq j \leq d$， μ_j 是 Λ_j 的分量计数测度。(iii)⇔(iv) 显然成立。定理得证。

□

定理 1.3 的证明。根据定理 1.2，如果 Λ 不满足最大幂律，则存在 $1 \leq j \leq d$, 使得 Λ_j 不包含内部平凡点。现在定理直接由推论 5.1 得出。□

References

[1] K. Bara´nski，某些平面几何构造的极限集的Hausdorff维数，《数学进展》，2007, 210(1)：215-245。[2] A. Banaji 和 I. Kolossvary，贝德福德–麦克马伦地毯的中间维数及其在Lipschitz等价中的应用。2021。[3] J. Barral 和 M. Mensi，自仿射 Sierpi´nski 地毯上的吉布斯测度及其奇异性谱，《Ergod. Th. & Dynam. Sys.》，2007，27(5)：1419-1443。[4] T. Bedford，《皱曲线、马尔可夫分割与维数》，博士论文，华威大学，1984。[5] A.S. Besicovitch 和 S.J. Taylor，关于零勒贝格测度线性闭集的补区间，《J. London Math. Soc.》29 (1954)，449-459。[6] T. Das，D. Simmons，自仿海绵的Hausdorff维数和动力学维数：维数间隙结果，《数学创刊》，2016，2：1-50。[7] J. Deng，Q. Wang，L.F. Xi，自共形集的间隙序列，《Arch. Math.》，104 (2015)，391-400。[8] K.J. Falconer，《分形几何：数学基础与应用》，John Wiley & Sons，1990。[9] K.J. Falconer，关于分形的闵可夫斯基可测性，《Proc. Amer. Math. Soc.》，1995，123：1115-1124。[10] D.J. Feng，Y. Wang，一类自仿射集与自仿射测度，《Journal of Fourier Analysis & Applications》，2005，11(1)：107-124。[11] L.Y. Huang，H. Rao，分形立方体的维数下降现象，《J. Math. Anal. Appl.》，497 (2021)，11页。[12] L.Y. Huang，H. Rao，Z.Y. Wen 和 Y.L. Xu，度量空间的盒计数测度及其应用，预印本，2022。[13] L.Y. Huang，Y. Zhang，自共形集强开集条件的二分性，《Fractals》，30(10) (2022)，6页。[14] R. Kenyon，Y. Peres，仿射不变集上的满维数测度，《Egodic Theory and Dynamical Systems》，1996，16：307-323。[15] J.F. King，一般 Sierpi´nski 地毯的奇异性谱。《数学进展》，1995，116(1)：1-11。[16] S.P. Lalley，D. Gatzouras，某些自仿射分形的Hausdorff维数与盒维数，《Indiana Univ. Math. J.》，1992，41(2)：533-568。

[17] M.L. Lapidus，C. Pomerance，黎曼ζ函数与分形鼓的一维 Weyl-Berry 猜想，《Proc. Lond. Math. Soc.》，66 (1993)，41-69。[18] K.S. Lau，H. Rao，Y.L. Ye，勘误："迭代函数系统与Ruelle算子"，《J. Math. Anal. Appl.》，262 (2001)，446-451。[19] B.M. Li，W.X. Li，J.J. Miao，McMullen集的Lipschitz等价，《Fractals》，2013，21(3 & 4)，1350022，11页。[20]Z. Liang，J.J. Miao，H. J. Ruan，贝德福德–麦克马伦集的间隙序列与拓扑性质，预印本（2021），（arXiv:2003.08262 [math.PH]）。[21] Z. Liang，H. J. Ruan，分形正方形的间隙序列，《J. Math. Anal. Appl.》472 (2019) 1475-1486。[22] T. Jordan，M. Rams，贝德福德–麦克马伦地毯的多重分形分析，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》，2011，150：147-156。[23] J.M. Mackay，自仿射地毯的Assouad维数。（英文摘要）《Conformal Geometry & Dynamics》，2011，15(12)：177-187。[24] C. McMullen，Sierpi´nski 地毯的Hausdorff维数。《Nagoya Math. J.》，1984，966：1-9。[25] J.J. Miao，L.F. Xi，Y. Xiong，McMullen集的间隙序列，《Proc. Amer. Math. Soc.》，145 (2017)，1629-1637。[26]L. Olsen，$\mathbb{R}^d$中自仿射多重分形 Sierpi´nski 海绵的符号与几何局部维数，《Stochastics and Dynamics》，2007，7(01)：37-51。[27] N. Patzschke，自共形多重分形测度，《Adv. Appl. Math.》，19 (1997)，486-513。[28] Y. Peres，M. Rams，K. Simon，B. Solomyak，自共形集的正Hausdorff测度与开集条件等价，《Proc. Amer. Math. Soc.》，129(2001)，2689-2699。[29] Y. Peres，McMullen 和 Bedford 的自仿射地毯具有无穷Hausdorff测度，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》，1994，116：513-526。[30] H. Rao，H.J. Ruan，Y.M. Yang，分形集的间隙序列、Lipschitz等价与盒维数，《Nonlinearity》，2008，21：1339-1347。[31]H. Rao，Y.M. Yang，Y. Zhang，贝德福德–麦克马伦地毯的双Lipschitz分类（I）：多重分形谱的不变性与测度保持性质，2019，预印本（arXiv:2005.07451 [math.DS]）。[32] H.W. Reeve，Lalley-Gatzouras排斥子上Birkhoff平均的多重分形分析，《Fundamenta Mathematicae》，2010，212 (1)。[33] Y.M. Yang，Y. Zhang，具有均匀水平纤维的贝德福德–麦克马伦地毯的 Lipschitz 分类，《J. Math. Anal. Appl.》，2020，495(2)：124742。[34]Y. Zhang，L.Y. Huang，自仿射 Sierpi´nski 海绵的拓扑性质与度量性质之间的关系，《J. Math. Anal. Appl.》，514 (2022)，https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126295。[35] Y.F. Zhang，Y.L. Xu，切片自仿海绵的连通部分的维数下降，《J. Math. Anal. Appl.》，2022，509，13页。

School of Science

, Huzhou University, Huzhou, 313000, China;
电子邮件地址：03002@zjhu.edu.cn

Department of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan, 430079, China
电子邮件地址：yangyq@mails.ccnu.edu.cn