arXiv:2302.12950v1 [math.MG] 25 Feb 2023

双圆盘复合对称群

Robert A. Hearn[1],William Kretschmer[2],Tomas Rokicki[3], Benjamin Streeter[4],和 Eric Vergo[5]

[1]Gathering4Gardner；bob@hearn.to [2]德克萨斯大学奥斯汀分校；kretsch@cs.utexas.edu[3] Radical Eye Software；rokicki@gmail.com [4]benpuzzles@gmail.com [5]ericvergo@gmail.com

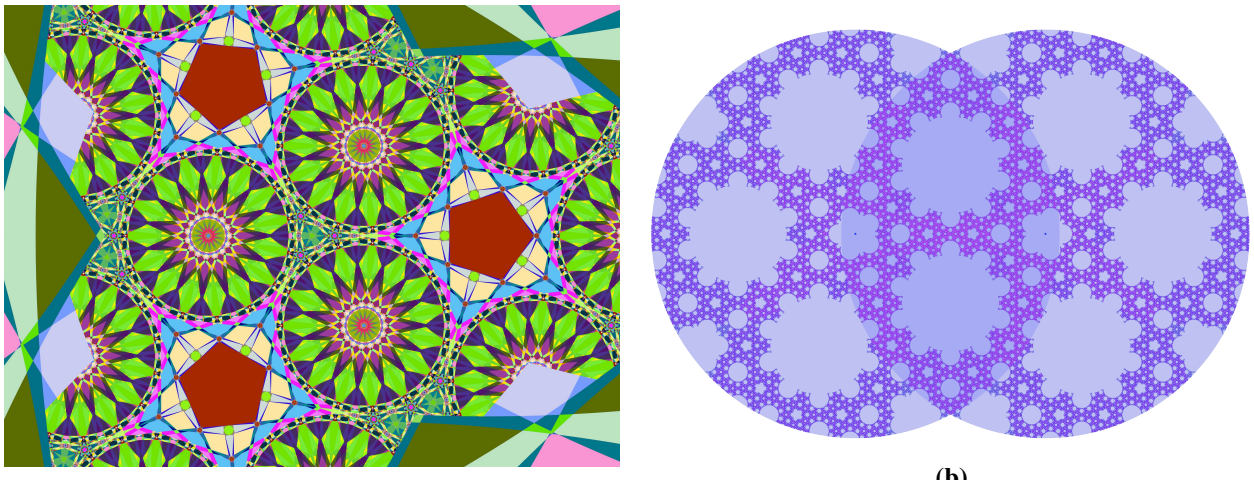
摘要

对称性是数学、物理学和艺术中许多领域的核心。传统的几何对称群是根据某个形状或图案所处环境空间的等距变换来定义的。如果我们稍微推广这一概念，允许等距变换作用于彼此重叠但并不完全相同的度量空间，就会得到我们所称的复合对称群。一个自然的例子是由平面上相互重叠的圆盘的离散旋转生成的群。对这些群的研究揭示出一类新的分形，以及丰富的结构；无论从数学还是艺术的角度看，这些结构都引人入胜。本文报告了我们初步的研究结果。

引言

对称性在数学的许多领域都具有根本重要性，从伽罗瓦理论到抽象代数中的自同构，再到壁纸图案和晶体的等距变换。在物理学中，诺特定理将空间和时间的对称性与守恒定律联系起来。在艺术中，对称性的程度和类型所蕴含的微妙之处，可以说正是美之所以成立的核心。

在此，我们至少从数学和艺术影响的角度，拓展了传统的几何对称概念。形状或图案的对称群定义为环境空间中所有保持该形状或图案不变的等距变换所构成的群。在任何给定的度量空间中，等距变换的组合方式都有限：例如，壁纸群只有 17 个（在同构意义下），带状群有 7 个，三维空间群有 230 个，等等。比如，在平面上，我们无法在任何重复图案中实现五重旋转对称——不过，准晶体可以近似实现这种对称性 [6]。



(a) **(b)**

图 1： 复合对称群的像：*(a)* $GG_{3,\ 5}(2.42,\ 2.41)$，*(b)* $n = 5$ 分形。

通过考察由度量子空间的等距变换生成的群——这些子空间并不完全相同，而是彼此重叠——我们可以用新的方式探究其中一些“禁忌”对称性。图1a 展示了其中一个“复合对称群”的一部分。从局部来看，这个像包含三重和五重对称的区域——它们必然会在更大尺度上被打破——以及诸如十五重对称这样的组合。在临界参数值处，这些群中嵌入了一个新的分形族，如图1b 所示。

本文探讨这类新型对称群的特征。其中尤其重要的是确定群变为无限群时的参数值，探究其潜在动力学，并理解恰恰出现在这些转变处的特征分形，或有时出现的伪分形。



图2： *Gizmo Gears* 谜题。

这项工作始于对某些“圆形拼图”[1, 2]的行为研究——尤其是*Gizmo Gears*，如图2所示，该拼图由 Doug Engel 设计。[1] 双圆盘复合对称群是圆形拼图的数学推广。圆形拼图群结构的研究似乎始于 [5]。

双圆盘系统的定义与基本性质

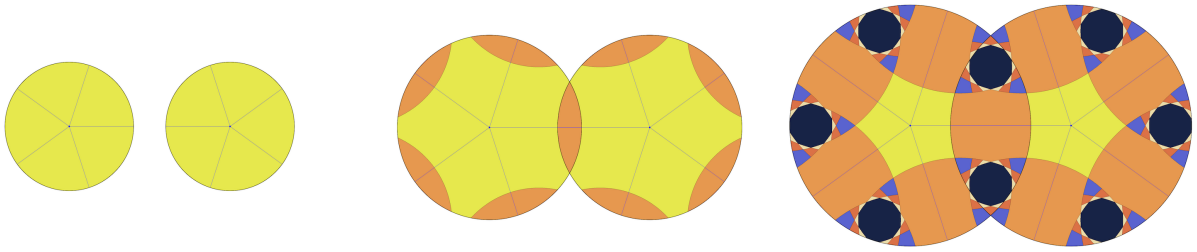
一个复合对称群是由度量空间的子空间上的一组等距变换生成的群。

在这里，我们主要关注由欧几里得平面中两个相交闭圆盘的离散旋转生成的复合对称群。我们有时将其称为双圆盘系统。不失一般性，设两个圆盘的圆心分别为（−1，0）和（1，0）。记左侧圆盘的半径为 r_1，右侧圆盘的半径为 r_2。生成元 a，b 分别是将左侧圆盘旋转 $-2\pi/n_1$，以及将右侧圆盘旋转$-2\pi/n_2$。群运算是左函数复合[2]：$ab(x) = b(a(x))$。我们将具有这些性质的群[3]记为$GG_{n_1,\ n_2}(r_1,\ r_2)$。如果 $n_1 = n_2$ 我们使用单下标，同样地也对 r_1 和 r_2如此。我们还可以省略半径说明，以表示半径未指定但彼此相等的一族群。例如，一个非常重要的族是 GG_5——由两个相等圆盘的五重旋转生成的群。

为了直观了解双圆盘系统的运作方式，请看图3。该图展示了群元素对平面上各点的作用，其中对于 GG_5 的不同 r。在所有元素作用下仍保持连通的区域（拼块）被涂成相同的颜色；颜色取决于轨道的大小。在图3a中，$r < 1$，且两种旋转彼此不发生作用——该群同构于 $C_5 \times C_5$。在图3b中，圆盘发生重叠，因此产生了一定的相互作用。从圆形谜题的角度看，我们向谜题中加入了9个拼块。该群同构于 $C_5 \times C_5 \times A_9$（我们加入了楔形拼块的偶置换）。在图3c中，

[1]具体问题是：Gizmo Gears 能否被有限地“解带”，或切分成若干拼块，使所有自然转动（30。在本例中）无论配置如何都不会受到阻碍？如果不能，则称一个谜题会“杂乱”。与当时所有直觉相悖的是，Gizmo Gears 确实会变得杂乱——对于复合对称群这一族而言，它（勉强）已经超过了临界半径 GG_{12}。原始讨论可在此处找到：https://twistypuzzles.com/forum/viewtopic.php?t=25752。 [2]我们选择这一约定，以便移动序列可以从左向右读取。同样，生成元被定义为顺时针旋转，以便与通常的扭转谜题记号兼容。[3]*GG* 这一名称既是为了向 Gizmo Gears 致敬，也很方便地表示两个群之间的相互作用。

重叠程度增加了，并形成了更多更小的拼块。请注意，在所有情况下，我们确实都具有关于两个不同点的五重旋转对称——但这种对称性仅存在于固定半径以内。



(a) (b) (c)

图3： GG_5的不同情况。*(a)* 与 $C_5 \times C_5$ 同构；*(b)* 与 $C_5 \times C_5 \times A_9$ 同构；*(c)* 则更为复杂。

需要注意的是，正则对称群由等距变换生成且其元素都是等距变换，而复合对称群同样由等距变换生成，但一般的群元素并非等距变换：如果我们执行 ab，不同区域会绕不同的中心旋转不同的角度。这称为分段等距变换 [3]。

无限群

关于任意双圆盘群，一个关键问题是它有限还是无限。如果一个族 GG 中存在无限群，那么它就有一个临界半径 $r_c(GG)$，使得当 $r < r_c(GG)$时， $GG(r)$是有限的；当 $r > r_c(GG)$时，则是无限的。[4] 我们知道这一点，是因为任意给定点的轨道大小不会随着 r增大而减小——所有会影响该点的群元素仍然可用——因此 GG 不可能随着r 增大而从无限变为有限。如果 $r_1 \neq r_2$ 时固定一个半径，我们也可以讨论临界半径。

我们可以精确刻画哪些GG_{n_1,n_2} 含有无限多个元素：

定理1. 存在某个 r，使得 $GG_{n_1,n_2}(r)$ 是无限的，当且仅当 最小公倍数$(n_1, n_2) \notin \{2, 3, 4, 6\}$。[5]

证明. 本文省略“只有当”方向的证明，转而证明更有趣的方向。

首先，假设 $n_1 = n_2 = n$。注意， $a^{-1}b$ 是对所有经过两次旋转移动的点进行平移的结果：例如，位于 $(-1,\ 0)$ 的点会被移动（如果 $r \geq 2$），但最终旋转角度为 0。具体来说， $a^{-1}b$ 表示一个外接圆半径为 2 的正 n 边形的一条边，如图4所示。 $a^{-2}b^2$ 是另一次平移，以此类推。只要 r 允许点留在两个圆盘内，我们就可以通过组合这些序列及其逆序列，生成从这个 n边形任一顶点到另一顶点的平移。

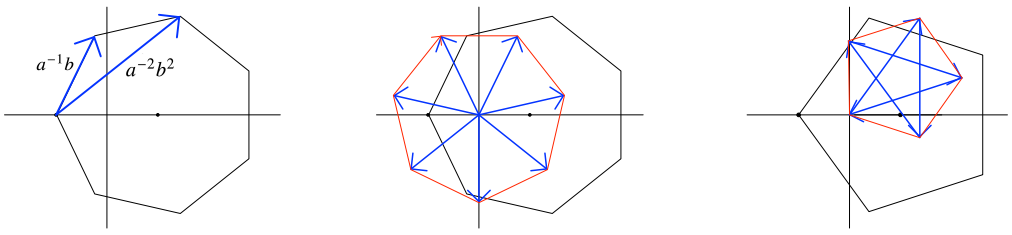


图4： 可构造的平移可以任意缩小。

[4]我们认为，尽管尚未证明，恰好在临界半径处它也会变为无限。[5]这一事实与晶体学限制定理密切相关。

有两种情况。如果 $n > 5$，我们取从一个多边形顶点到相邻顶点的所有平移，并观察通过这些平移得到的原点的像。所得的 n 个点构成另一个 n 边形，但比原来的更小。不过，我们仍可以通过对相应的平移作差，在这些新点之间构造平移，然后重复这一过程，得到更小的多边形。因此，我们可以生成任意小的平移，该群必定是无限群。

如果 $n = 5$，我们从原点出发，依次应用每隔一条的五边形边平移，得到一个五角星形，其顶点再次构成一个比原五边形更小的五边形。同样，我们可以不断迭代。

我们可以在有界的 r范围内进行此操作——检查可知，$r \geq 4$ 就足够了；所描述的移动不会使任何相关点移动到距任一圆盘中心超过 4 的位置。

如果 $n_1 \neq n_2$，则很容易证明，$(a^{-1}b)^{\alpha}$和 $(ba^{-1})^{\alpha}$（其中某个 α）分别是绕两个不同中心旋转 $2\pi/\mathrm{lcm}(n_1, n_2)$ 的旋转。我们可以在上述证明中用这些旋转代替 a 和 b（并使用 $r \geq 8$）。□

几何构造

对于某些 n，我们有几何构造证明，在 r 取与我们对临界半径的数值估计相符的值时，GG_n 是无限的。对于其他 n，我们有合理的几何构造，与数值估计相当吻合。但对于大多数 n，我们只有数值估计。

最简单的情形是 $n = 5$。图5a展示了相关的几何构型。利用图中所示的关系，通过简单的三角学可得 $r = \sqrt{3 + \varphi} \approx 2.149$，其中 φ 为黄金比例。对图5b中的几何构型进行类似分析，在该图中 $n = 10$，可得 $r = \sqrt{4 - \varphi} \approx 1.543$。

在临界半径处，从有限到无限的转变背后的动力过程在大多数情形下仍然神秘莫测。然而，对于 $n = 5$，我们可以看出其中的机制。（由于篇幅所限，我们略去证明：单个生成元 ab^{-1} 会产生相同的行为。）

定理2。 GG_5 在 $r = \sqrt{3 + \varphi}$ 处是无限的。

证明。 参见图5a，现在将其解释为复平面，令 $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$，并令点为 $E = \zeta_5 - \zeta_5^2$。注意 $|E + 1| = r$。我们关注线段 $E'E$ 如何在特定序列的作用下移动。点$F = 1 - \zeta_5 + \zeta_5^2 - \zeta_5^3$位于 $E'E$ 上，点 $G = 2F - E$也位于其上。我们有三种情形：

1. 线段 $E'F'$经 $a^{-2}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$变换为线段 GF。 2. 线段 $F'G'$经 $abab^2$变换为线段 FE。 3. 线段 $G'E$经 $abab^{-1}a^{-1}b^{-1}$变换为线段 $E'G$。

这三个操作结合起来，可以将线段 $E'E$ 的任意部分分段平移到线段自身上。在这些变换过程中，没有任何点会离开两个圆盘的交集。前两种情况是长度为 $|F - F'|$的平移，第三种情况是长度为 $|E - G|$的平移。由于 $|E - E'|/|F - F'| = \varphi$，这两个值与总长度 $|E - E'|$不成有理数比例。因此，我们可以通过反复选择与点所在区域相对应的变换，将原点依次映射到 $E'E$上的各个点，并且可以无限次进行；它有无限多个像。□

对于 $n = 8$（图 5c）和 $n = 12$（图 5d）的情形，其特征分形（见下文）能够提供一些见解。沿着分形结构，从一个圆盘的中心出发，沿一系列连续线段前进，并从内部逐渐接近圆盘边界，即可构造出一条路径。对于 $n = 8$，连续线段按 $\sqrt{2} - 1$ 的比例缩小，并沿着 $\pi/8$ 的角度延伸。我们可以根据这条路径计算出相应的极限点，从而得到 $r = \sqrt{5(2 - \sqrt{2})} \approx 1.711$。对于 $n = 12$，类似的构造给出比例因子 $2 - \sqrt{3}$，以及 $r = \sqrt{2(20 - 11\sqrt{3})} \approx 1.377$。这些闭式半径的推导依赖于极限点在临界值处落在圆盘边界上，而这一点尚未得到证明。

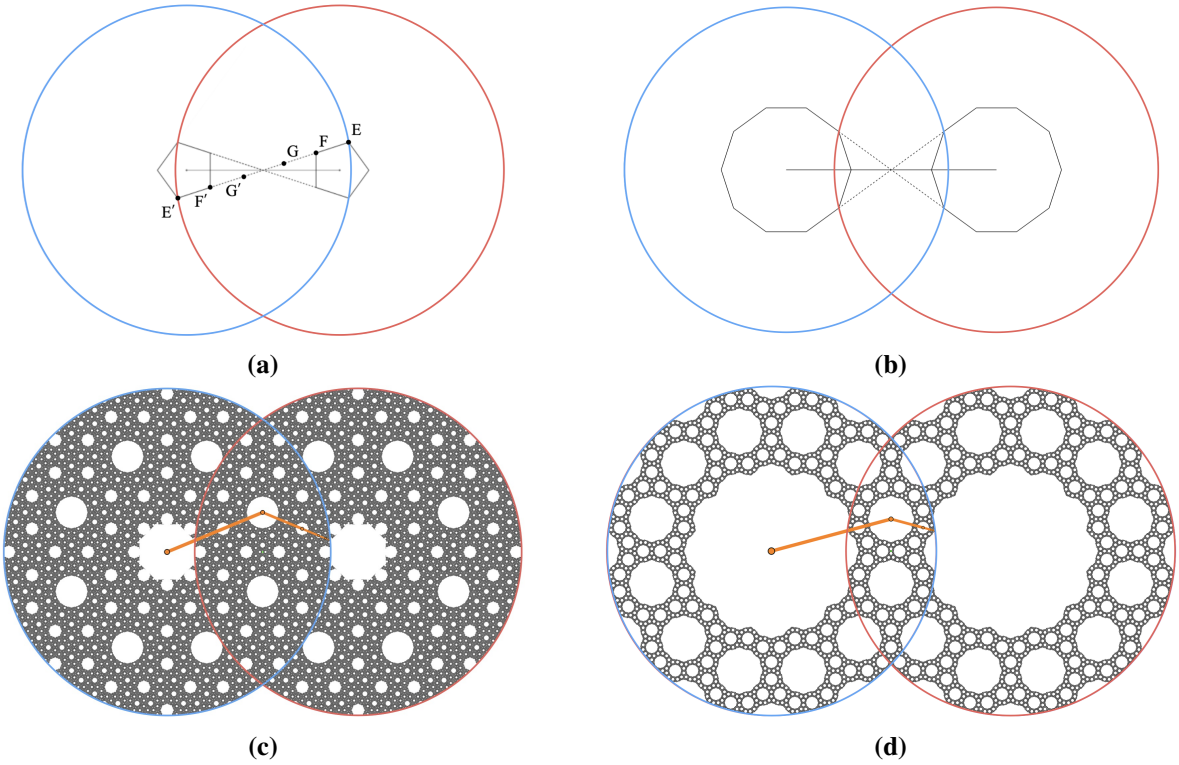


图5： 临界半径的几何构造：*(a)* $n = 5$，*(b)* $n = 10$，*(c)* $n = 8$，*(d)* $n = 1$ 2.

临界转变与分形

恰好在任意群的临界半径处，我们总能观察到嵌于像中的一个独特分形。这些分形长期以来一直未被发现，着实令人惊讶；它们似乎和曼德博集合一样自然。我们将 GG 的特征分形 定义为在 GG（r_c（GG））处具有无限轨道的点集。特别是，这为每个 $n \notin \{2, 3, 4, 6\}$ 都对应一个唯一的分形； $n_1 \neq n_2$.[6] 时也同样如此。典型例子是 $n = 5$ 的分形，如图1b所示。本文还收录了 $n = 8$（图 5c）和 $n = 12$ （图 5d）的分形。在附录 B 中，我们收录了所有 n 不超过 20 的特征分形的高分辨率图像。

这里出现分形的现象似乎有些神秘。分形的典型特征是图案在越来越小的尺度上不断重复。但与按照明确递归规则构造的分形不同，这些系统中没有缩放操作，只有旋转。它们是如何产生的？为什么不同的 n 会呈现出如此不同的分形？图4或许能提供一些启示：它表明，旋转实际上可以组合起来，使图案缩小。

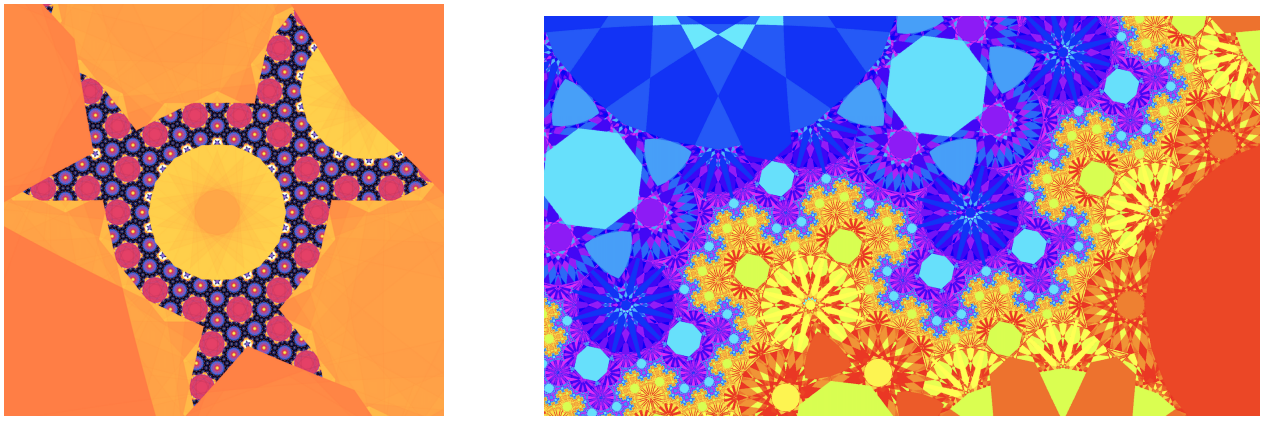
对于任何特征分形，一个自然的问题是：它是单个点的轨道闭包，还是由有限个或无限个互不相交的轨道闭包组成？在大多数情况下，这些分形似乎是单个点的轨道闭包。对于 $n = 23$，分形似乎由两个不同的拼块组成，它们关于 x 轴对称。然而，这些拼块也可能彼此相连，只是我们尚未能通过数值方法找到这种连接。

一个特别有趣的例子是 $n = 7$。这里似乎存在清晰的分形结构。我们可以连续放大数次，看到相同的结构不断重复。但随后，在某个点上，放大 500,000 倍后，图案突然发生了变化。直到我们将这个分形放大到超过 2 万亿

[6]当 $r_1 \neq r_2$时，我们也会得到分形，但在这种情况下，临界半径会变成一个双参数族 ly.

个点，才发现这一现象。破缺的尺度对称性可能是数值伪影，但有证据表明并非如此。如果它确实存在，这或许是我们迄今在这些系统中观察到的最神秘的过程。展示这一转变的视频可在https://www.youtube.com/watch?v=FFeSlh0ifYE找到。对 GG_7 略小于临界半径的部分（如图6a所示）进行观察，可以发现其特有的 $n = 7$ 分形图案。

在图6b中，我们看到嵌入 GG_{12} 其中的是一个类科赫雪花分形，它似乎基于四重对称性，而非传统的三重对称性。

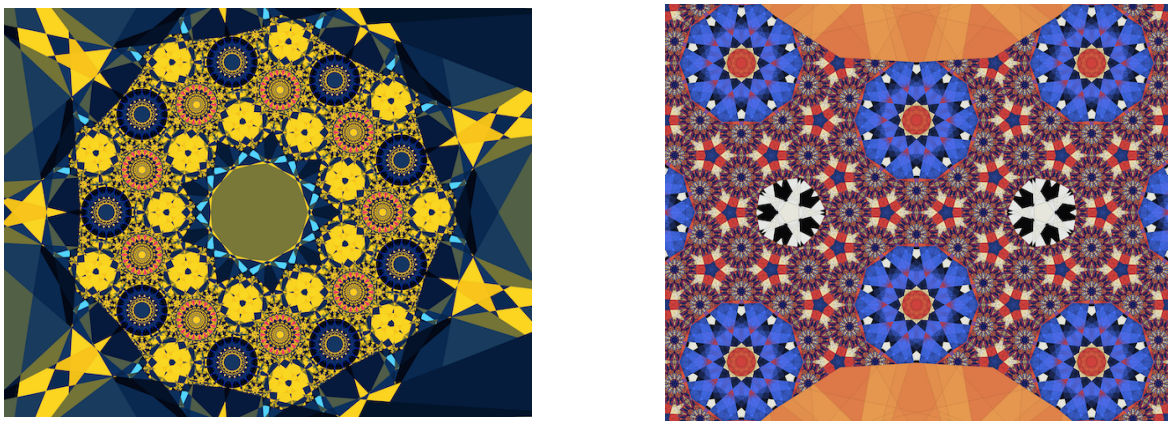


(a) GG_7的一部分(1.6233)。 **(b)** 生成元 ab^{-1} 在 GG_{12}下的一部分($\sqrt{2}$)。

图6

数值模型与算法

本文中的所有像均由模拟复合对称群的程序生成。从概念上讲，对于要成像的每个点，我们都会考虑对它施加所有可能的旋转序列，并绘制结果——也就是绘制它的轨道。例如，图1b就是以这种方式生成的。当我们想展示群对整个空间的作用时，只对圆盘边界成像会更高效。我们将边界离散化为许多小线段，对这些线段成像，将像绘制到高分辨率位图中，然后根据某种着色规则，用适当的颜色填充边界区域内由此形成的空间。图1a、6a、7a和7b就是这样生成的。



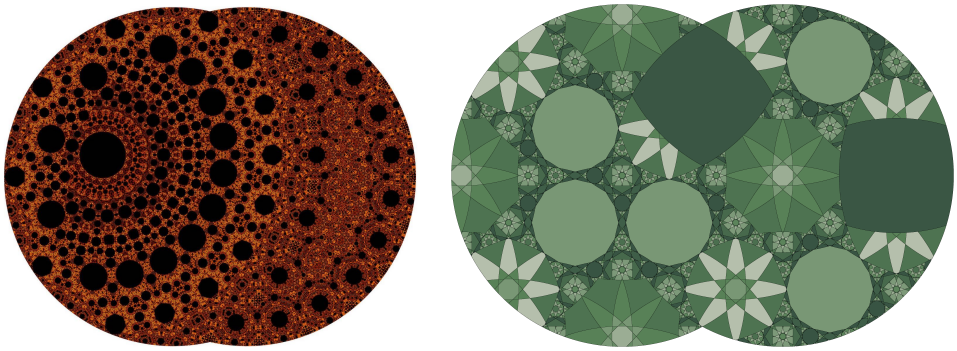
(a) **(b)**

图7： 填充的像：*(a)* GG_9的一部分(1.408)，*(b)* GG_5的一部分(2.144)。

生成轨道时使用前沿搜索 [4] 能带来极大帮助，使我们无需将整个轨道都保存在内存中。借助这一方法，我们得以对某些点进行成像，使其对应到超过10万亿个不同的目标点，从而帮助我们改进临界半径估计，并揭示了上文讨论的某些分形的奇特行为。

单生成元图像

通过成像观察单个生成元作用下的轨道，而非所有群元素，可以揭示更多结构。最简单的情况是，我们有 $a^{\alpha}b^{\beta}$。图 8 展示了两个例子。这定义了一个离散动力系统，它是一种迭代分段等距变换。已有一些研究致力于刻画这类系统，但仍有许多问题尚待解答。 [7, 8]



(a) $GG_{21}(5.82)$ 使用 a^2b^{-1}　　**(b)** $GG_8(2.12)$ 使用 a^2b^5

图 8： *(a)* 绘出上方交点的轨道，并根据其局部密度着色。*(b)* 绘出完整边界，并根据其轨道的阶为各空间着色。

临界半径

表 1 总结了我们对 GG_n 在 $n < 20$时临界半径的了解。附录 A 中有一张更完整的表，列出了截至 $n = 100$的数据。在所有情况下，找到的点至少有 100 亿个像，其中有些多达 10 万亿个。这些估算可能偏高，因为我们遗漏了像数为无穷的点；也可能偏低，因为搜索到的点像数虽极大，却仍然有限。不过，这些估算与几何推导值相当吻合，因此我们确信其精度约为 5 位小数。

表 1： GG_n的临界半径。

n	数值估计	代数表达式	最小多项式
5	2.148961	$\sqrt{3+\varphi} \approx 2.148961$	$x^4 - 7x^2 + 11$
7	1.623574		
8	1.711411	$\sqrt{5(2-\sqrt{2})} \approx 1.711412$	$x^4 - 20x^2 + 50$
9	1.408482		
10	1.543357	$\sqrt{4-\varphi} \approx 1.543362$	$x^4 - 7x^2 + 11$
11	1.290582		
12	1.376547	$\sqrt{2(20-11\sqrt{3})} \approx 1.376547$	$x^4 - 80x^2 + 148$

n	数值估计
13	1.213594
14	1.196554
15	1.163276
16	1.148470
17	1.127509
18	1.121505
19	1.104246

总结与结论

复合对称群这一概念为数学开辟了一个新的前沿。在这里，我们只是通过考察双圆盘复合对称群，开始了这番探索。这项研究揭示了一个新的分形家族，也发现了丰富的新空间来源，它们以有趣且出人意料的方式结合了对称性。这些都是值得探索的新“地方”，例如曼德博集合中的“海马谷”；在此之前，它们一直不为人所见。由于篇幅所限，我们不得不略去许多想要讨论的其他主题，例如超出临界半径后准晶体的出现，以及对非周期行为的其他观察。

尽管我们在理解双圆盘复合对称群方面取得了重大进展，但仍有许多工作有待完成。在许多情况下，我们甚至缺乏对导致这些群从有限规模转变为无限规模的行为的基本理论认识。例如，每个无限双圆盘群是否都包含一个像为无限集的点，或一个无限阶生成元？双圆盘系统的临界半径是否总是代数数？临界半径是否存在通用公式？哪些动力学机制导致了分形的形成？

对于多圆盘系统或任意复合对称群，也可以提出类似的问题；在这些情形下，决定群具有无限规模的行为更加复杂。例如，我们发现定理1无法推广到三圆盘系统：考虑三个圆盘，其中心分别为 (0，0)、(1，0) 和 (√2，0)，再考虑由旋转增量$n_1 = n_2 = n_3 = 2$生成的复合对称群。此时，若将圆盘半径选得足够大，所得复合对称群便是无限群，因为平面上的三个相应旋转会生成一对沿 x 轴方向的平移，且二者之比为无理数。另一个值得探讨的问题是：判定给定的多圆盘复合对称群是否有限，是否可判定？

一些关于　　具有不同缩放比例和半径的系统的电影可见于https://tinyurl.com/yz9pntwy。

致谢

感谢 Doug Engel 创作了 Gizmo Gears，并编写了两本关于圆形拼图的权威著作。感谢 Brandon Enright 作出的重要贡献，分享了真知灼见和创意。感谢 Oskar van Deventer 和 Carl Hoff，他们最先向 Hearn 介绍了这个问题，并分享了见解。我们还要感谢 Bram Cohen、Scott Elliott、Landon Kryger、Andreas Nortmann、Jason Smith、Nathaniel Virgo，以及所有在twistypuzzles.com论坛上分享兴趣和见解的人。

参考文献

[1] D. Engel。《圆形谜题手册》。1986年。https://www.jaapsch.net/puzzles/circleman.htm.[2] D. Engel。《圆形谜题手册》第2部分。2019年。https://www.puzzleatomic.com/circlemanpart2.pdf.[3] A. Goetz。《分段等距变换——动力系统中的新兴领域》。Springer，2003年。[4] R. Korf、W. Zhang、I. Thayer 和 H. Hohwald。“前沿搜索”。《ACM学报》（JACM），第52卷，第5期，2005年，第715–748页。[5] W. Kretschmer。“《圆形谜题中的群》”。《游戏与谜题设计》，第3卷，第2期，2017年，第15–26页。[6] M. Senechal。《准晶体与几何》。CUP Archive，1996年。[7] L. Smith、P. Umbanhowar、R. Lueptow、J. Ottino。“切割与洗牌的几何：分段等距变换的可能性概述”。《物理学报告》，第802卷，2019年，第1–22页[8] M. Gassow。《科汉圆形谜题的推广》。2020年。https://vrs.amsi.org.au/wp-content/uploads/sites/92/2020/01/gossow_martin_vrs-report.pdf。

附录 A：截至 $n = 100$ 的临界半径

表 2： GG_n 的临界半径。

n	数值估计
5	2.148961
7	1.623574
8	1.711411
9	1.408482
10	1.543357
11	1.290582
12	1.376547
13	1.213594
14	1.196554
15	1.163276
16	1.148470
17	1.127509
18	1.121505
19	1.104246
20	1.100581
21	1.086016
22	1.078162
23	1.072011
24	1.071404
25	1.061321
26	1.056958
27	1.052668
28	1.049731
29	1.045731

n	数值估计
30	1.043758
31	1.040158
32	1.037741
33	1.035512
34	1.033498
35	1.031647
36	1.030127
37	1.028368
38	1.026958
39	1.025591
40	1.024352
41	1.023174
42	1.022142
43	1.021105
44	1.020197
45	1.019279
46	1.018459
47	1.017692
48	1.016968
49	1.016287
50	1.015651
51	1.015053
52	1.014492
53	1.013942

n	数值估计
54	1.013437
55	1.012954
56	1.012498
57	1.012067
58	1.011657
59	1.011267
60	1.010908
61	1.010545
62	1.010210
63	1.009890
64	1.009585
65	1.009294
66	1.009018
67	1.008750
68	1.008499
69	1.008253
70	1.008020
71	1.007797
72	1.007582
73	1.007377
74	1.007180
75	1.006990
76	1.006809
77	1.006633

n	数值估计
78	1.006465
79	1.006302
80	1.006146
81	1.005996
82	1.005851
83	1.005712
84	1.005578
85	1.005447
86	1.005321
87	1.005200
88	1.005083
89	1.004970
90	1.004860
91	1.004754
92	1.004652
93	1.004552
94	1.004456
95	1.004363
96	1.004273
97	1.004186
98	1.004101
99	1.004019
100	1.003939

附录 B：截至 $n = 20$ 的特征分形

这里仅展示每个 n 在临界半径处具有无限轨道的点集。

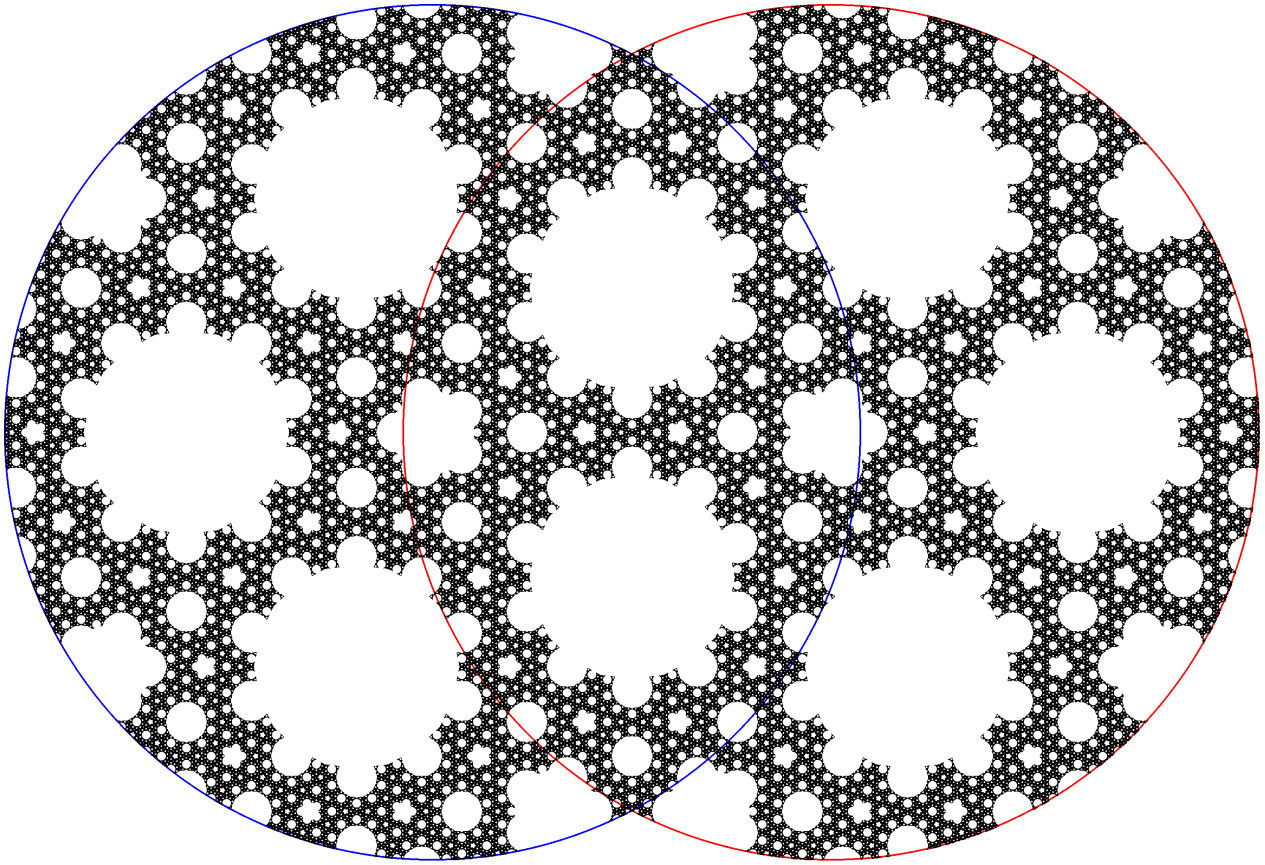


图 9： $GG_5(2.148958)$。

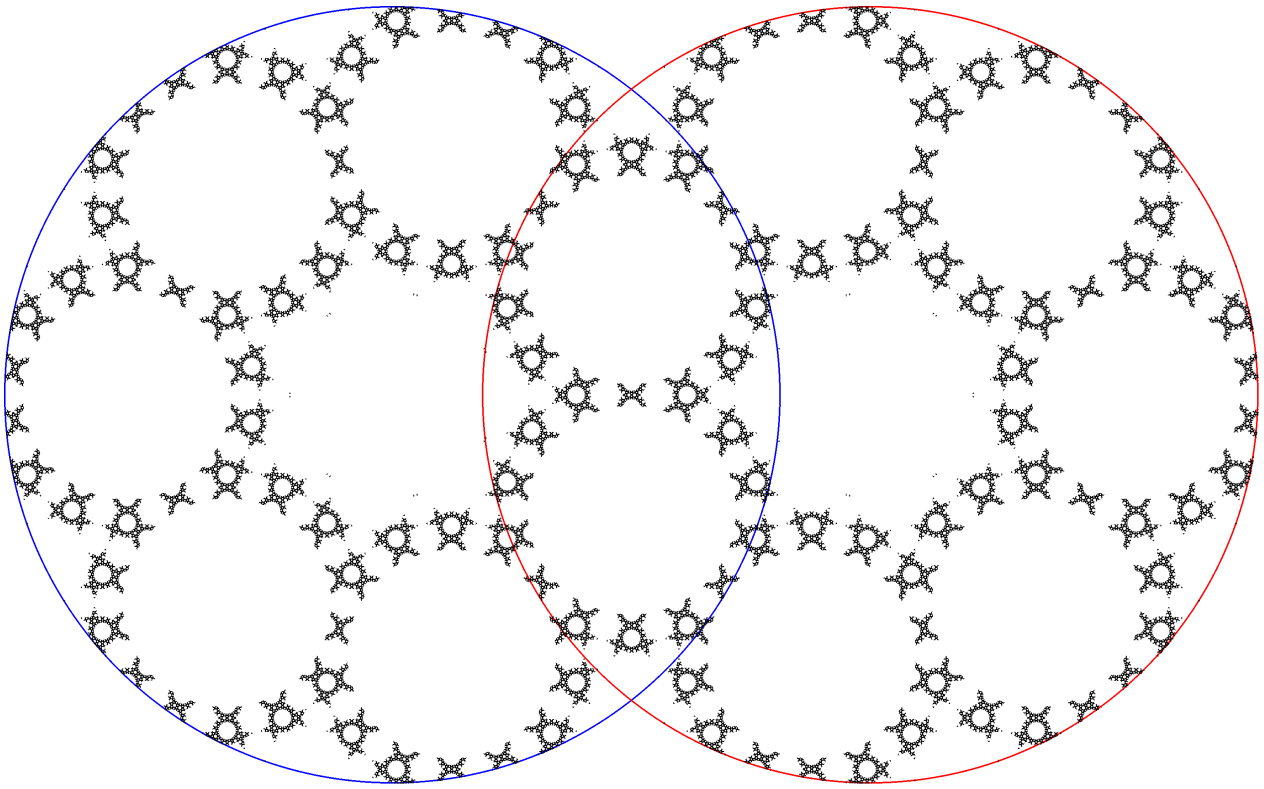


图10： $GG_7(1.623574)$.

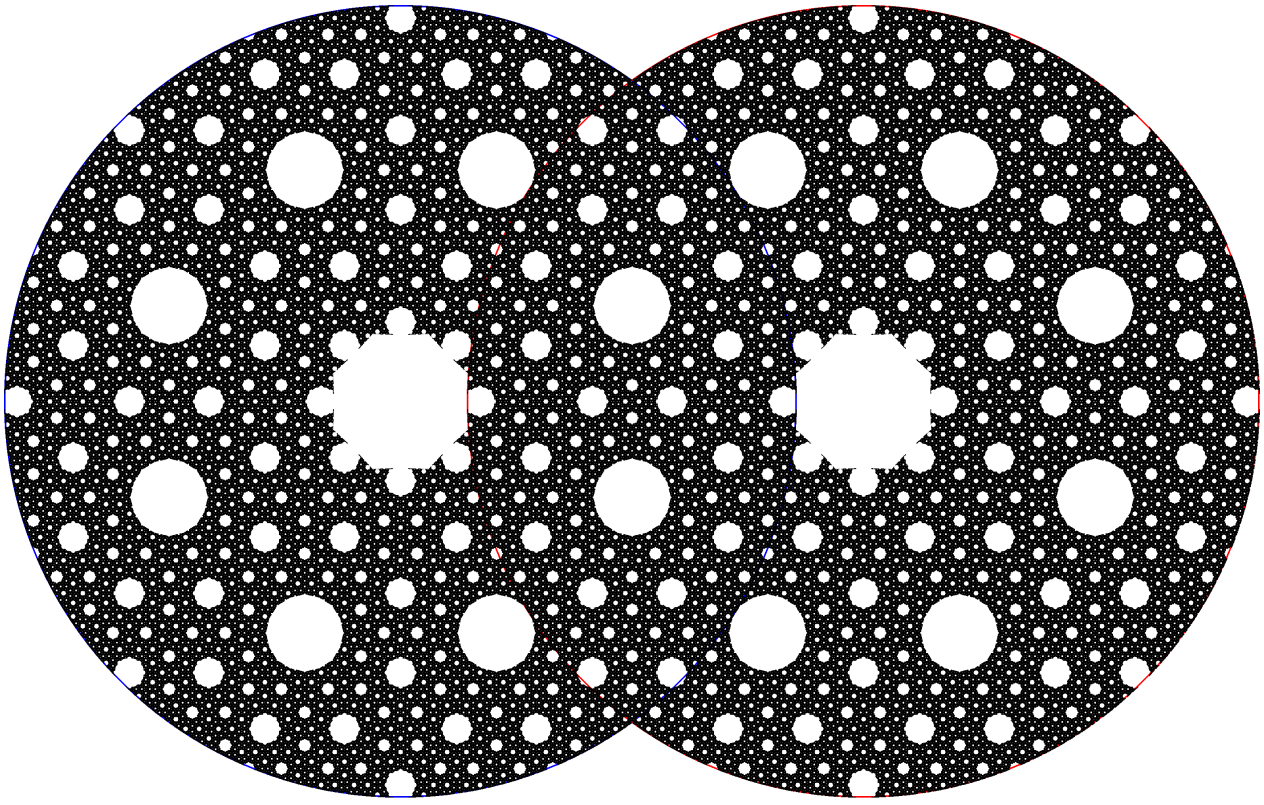


图11： $GG_8(1.711405)$.

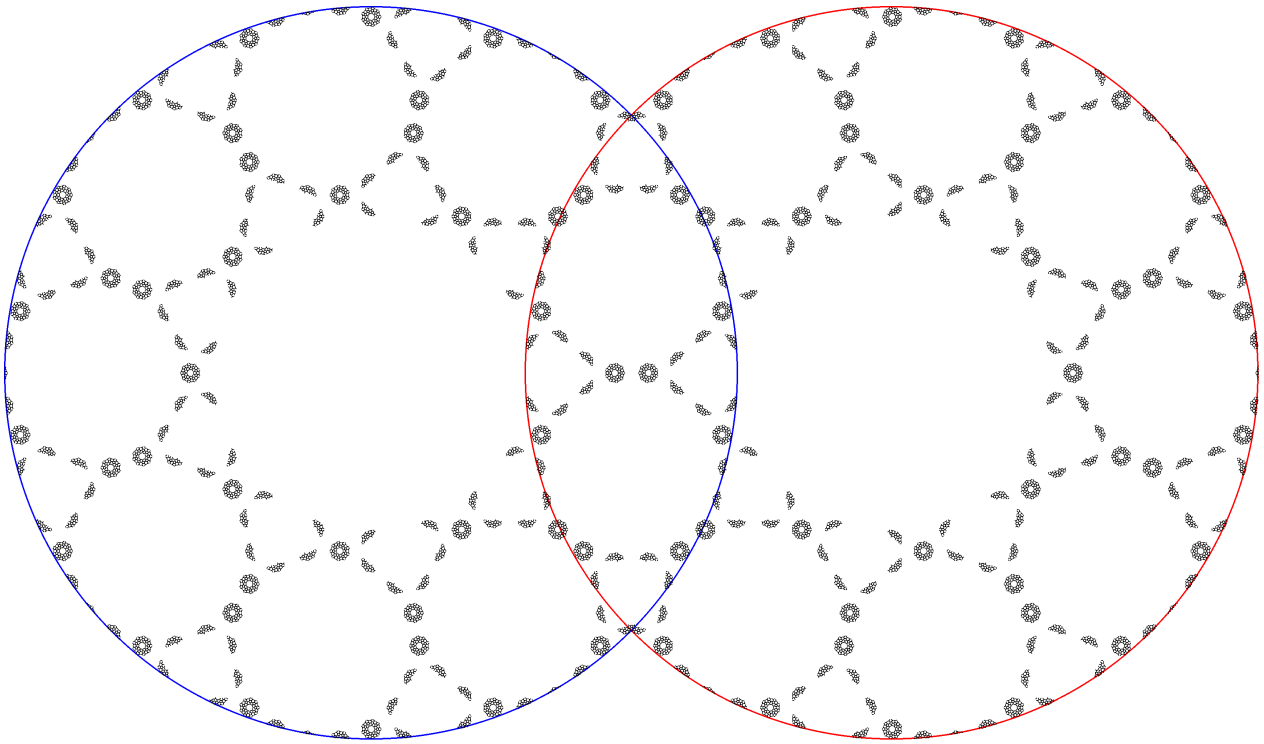


图12： $GG_9(1.408482)$.

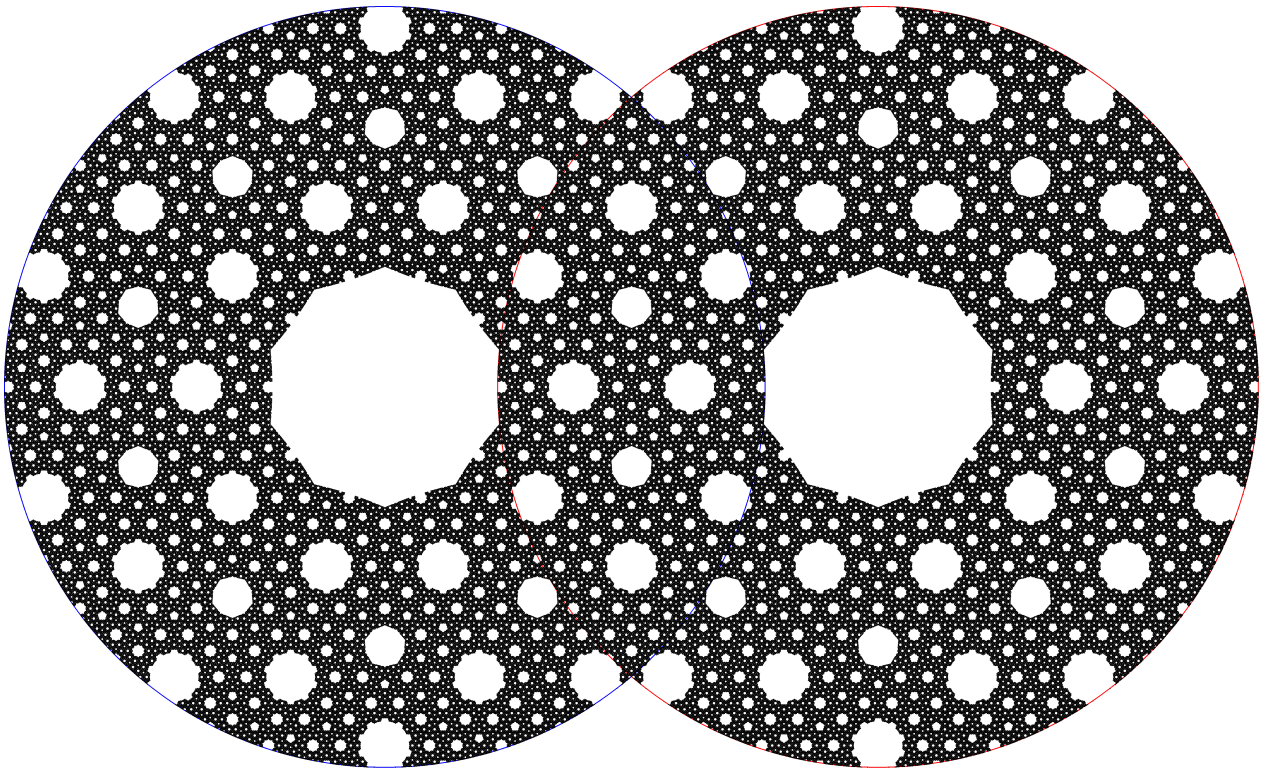


图13： $GG_{10}(1.543357)$.

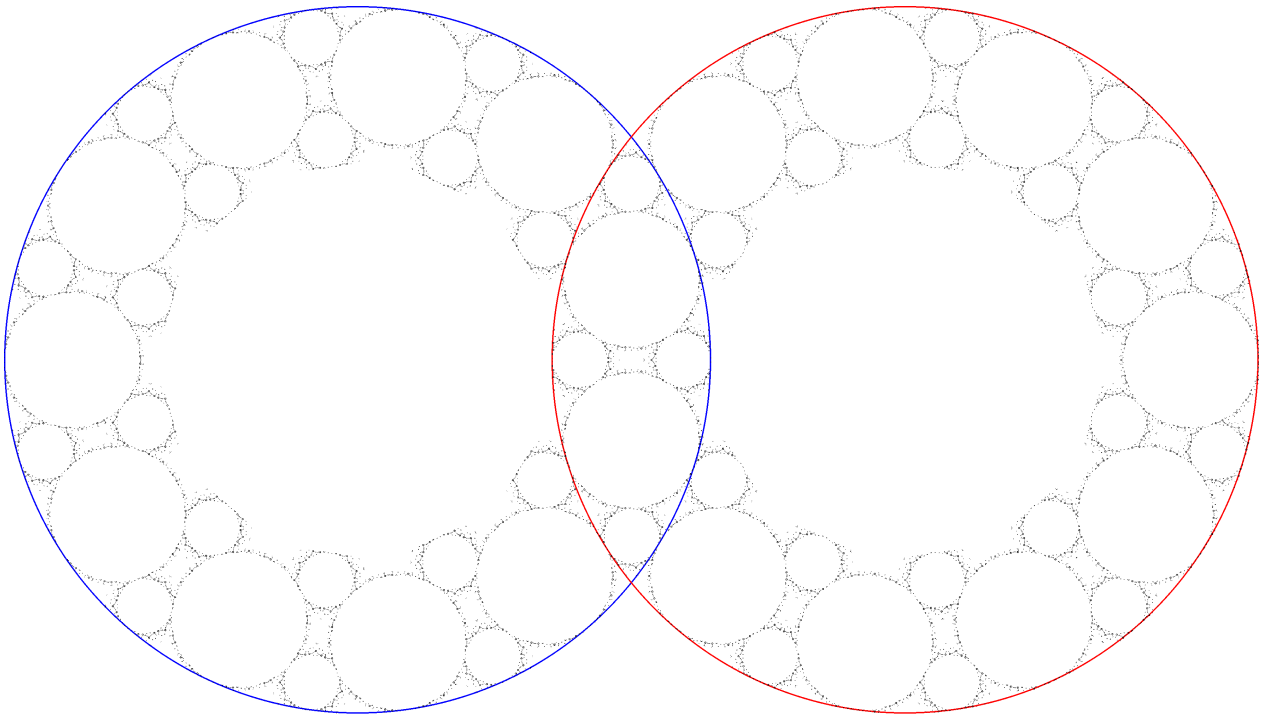


图 14： $GG_{11}(1.290582)$.

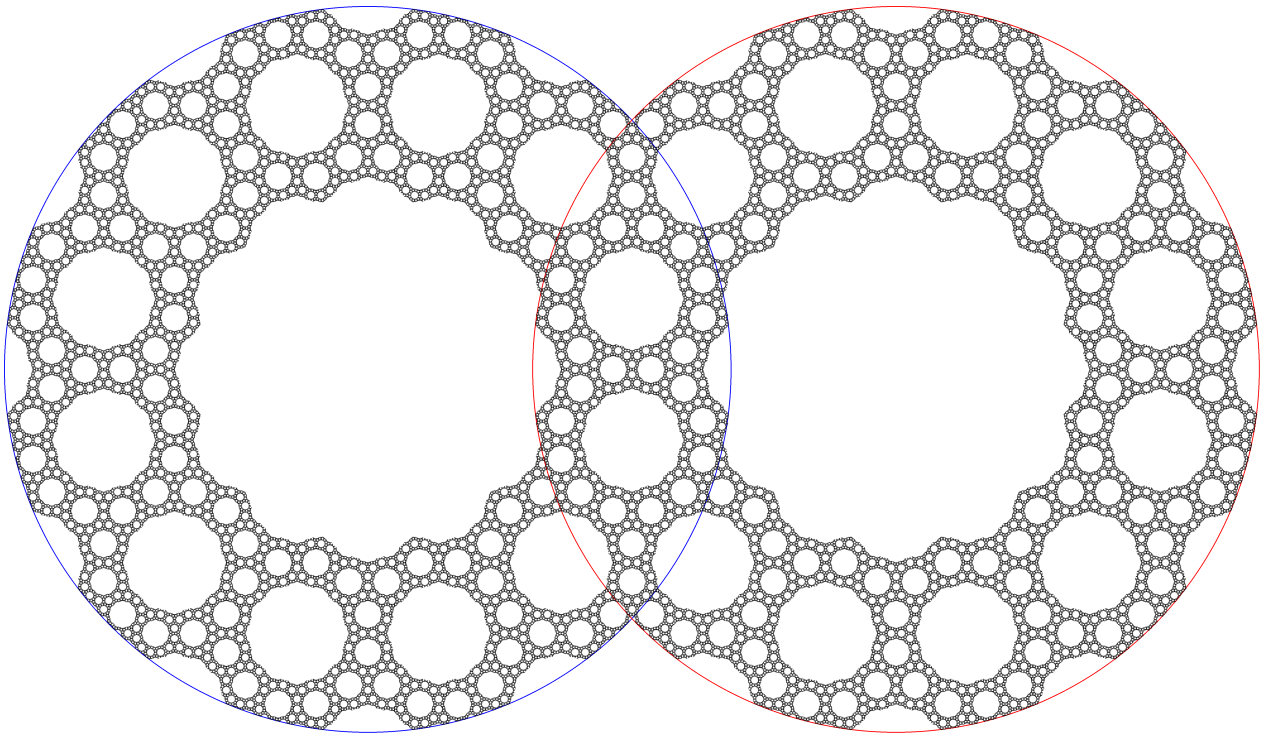


图 15： $GG_{12}(1.376547)$.

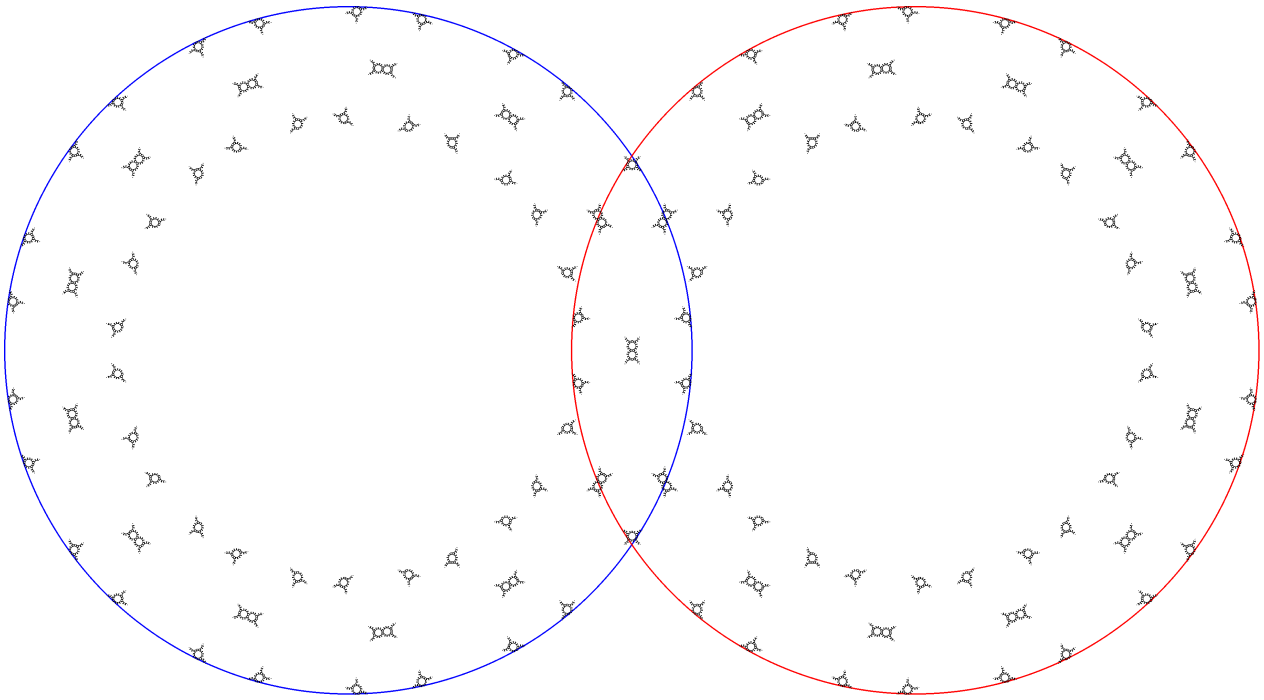


图16： $GG_{13}(1.213594)$.

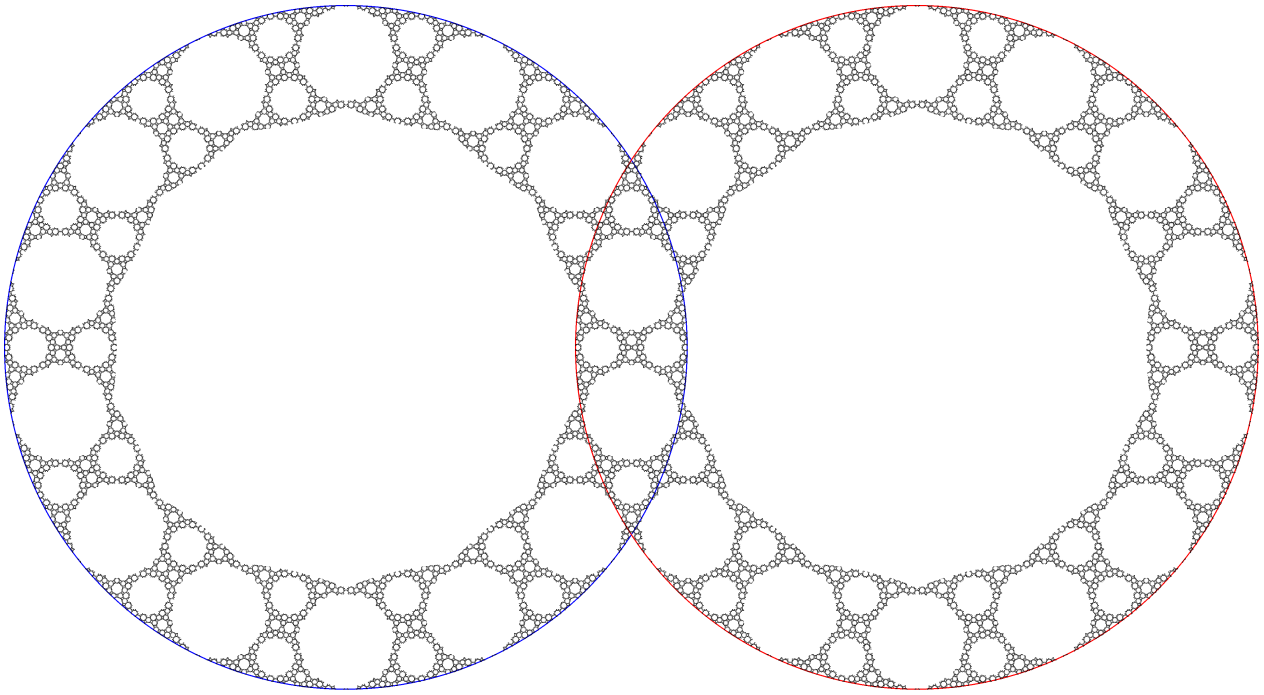


图17： $GG_{14}(1.196554)$.

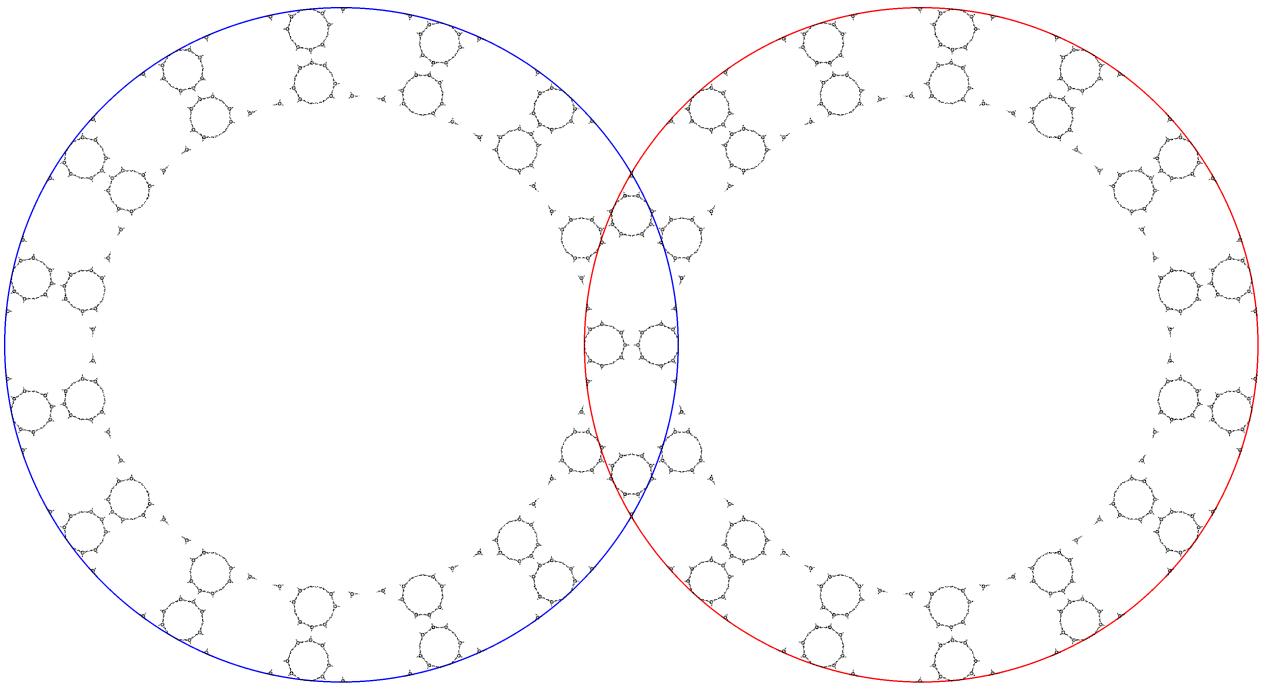


图18： GG_{15}（1.163275）。

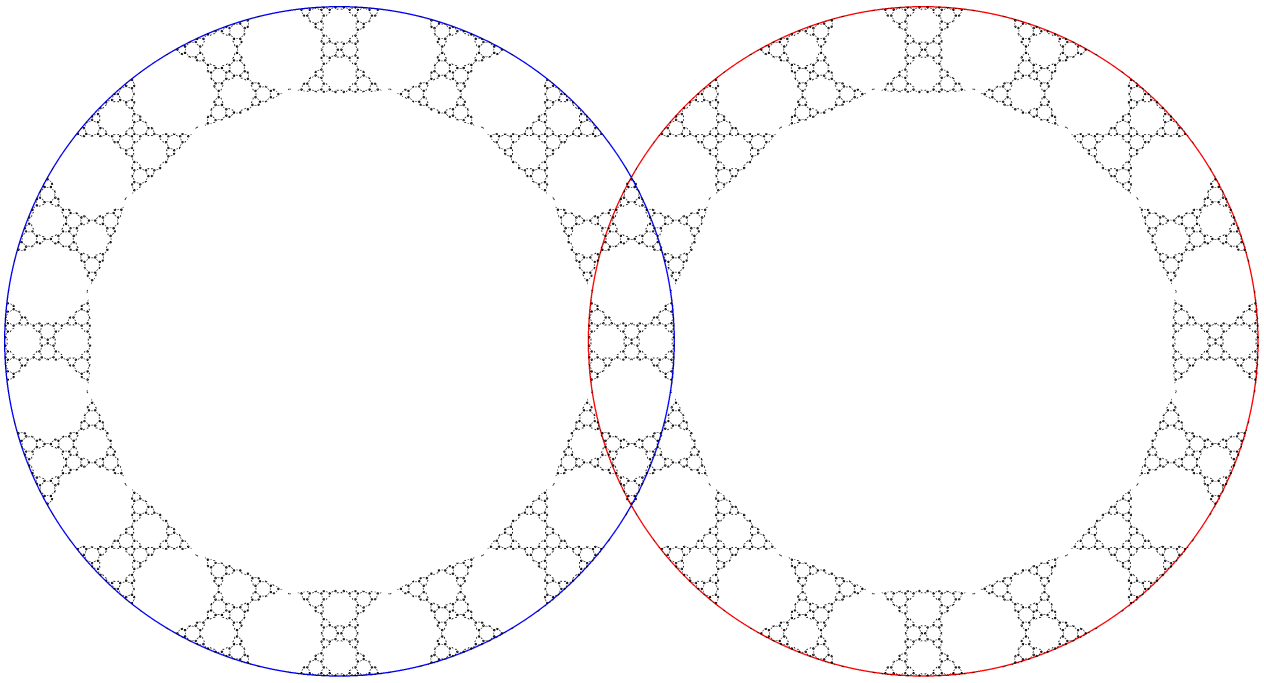


图19： GG_{16}（1.1484703）。

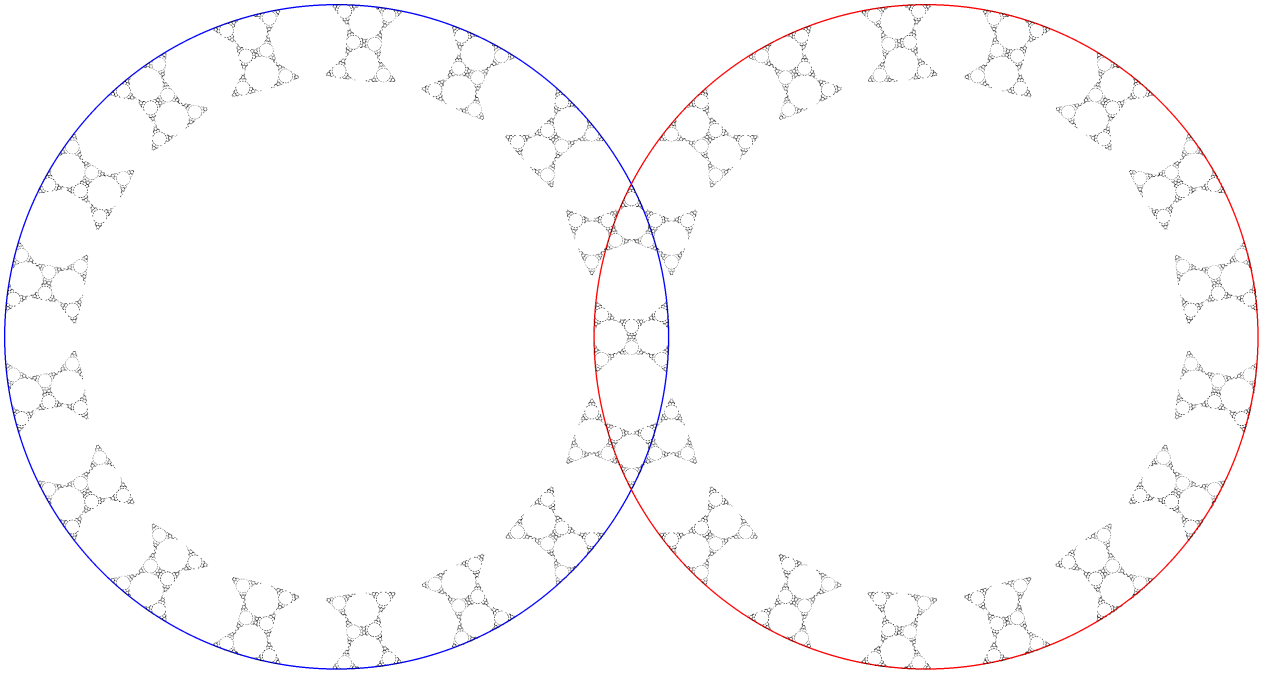


图20： $GG_{17}(1.127509)$.

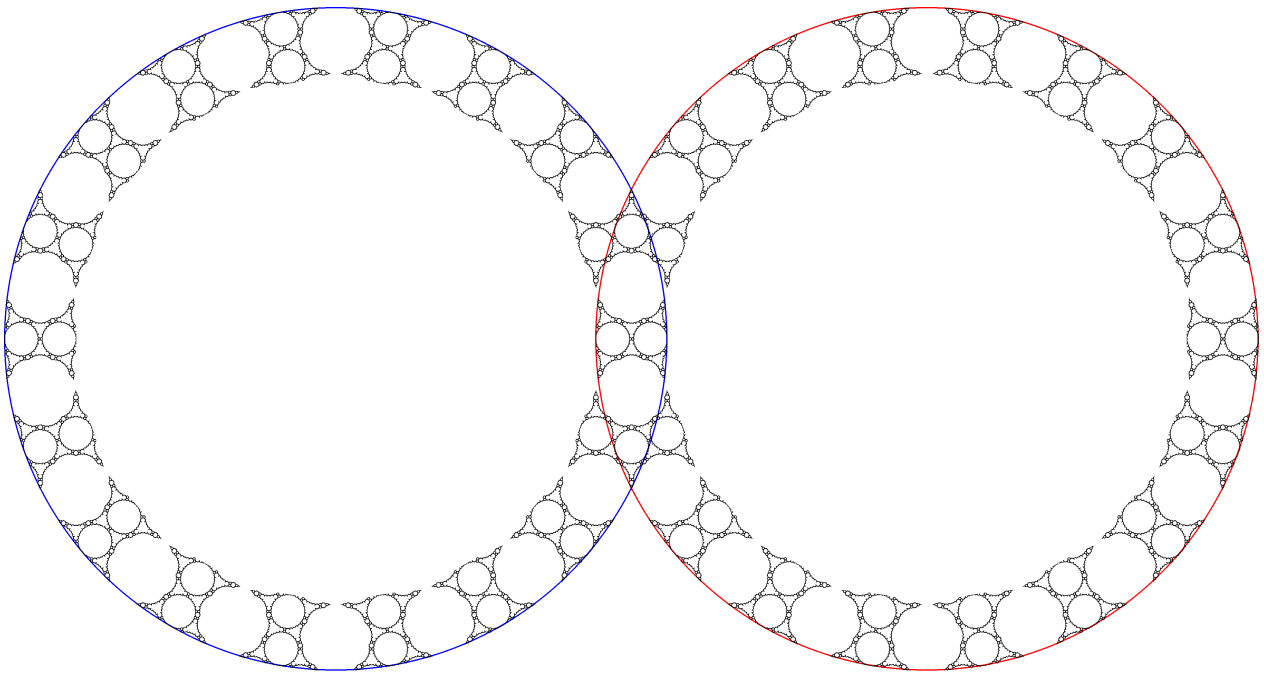


图21： $GG_{18}(1.121504)$.

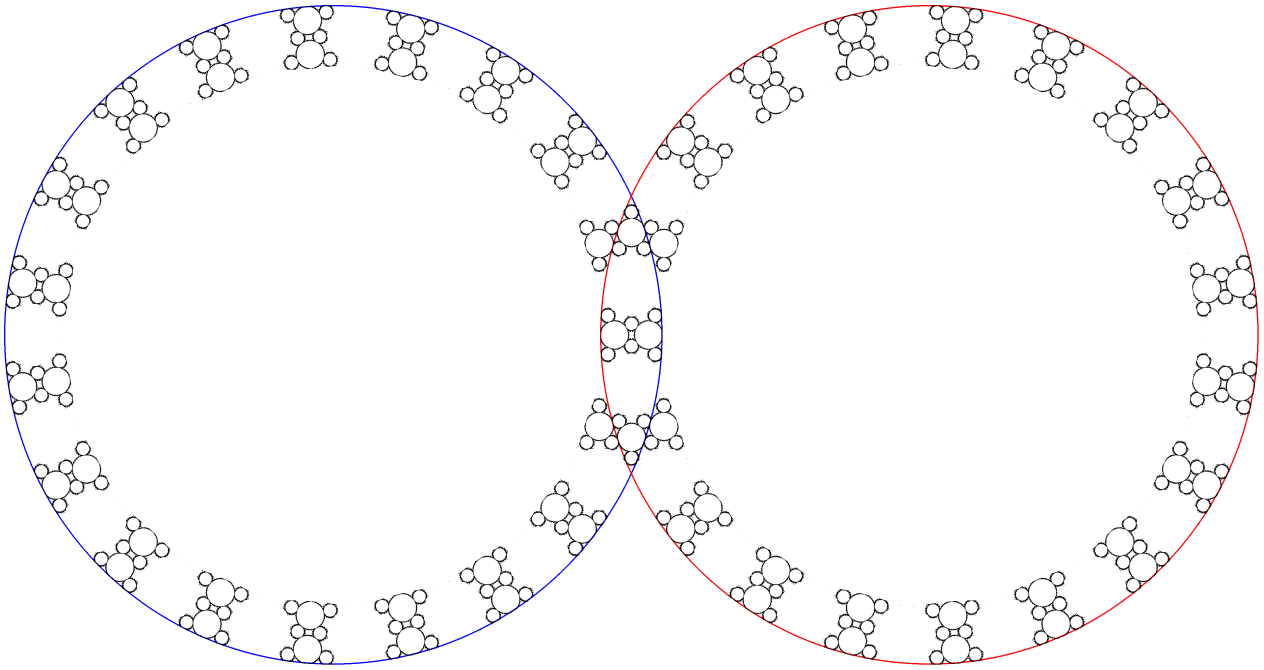


图22： $GG_{19}(1.104246)$.

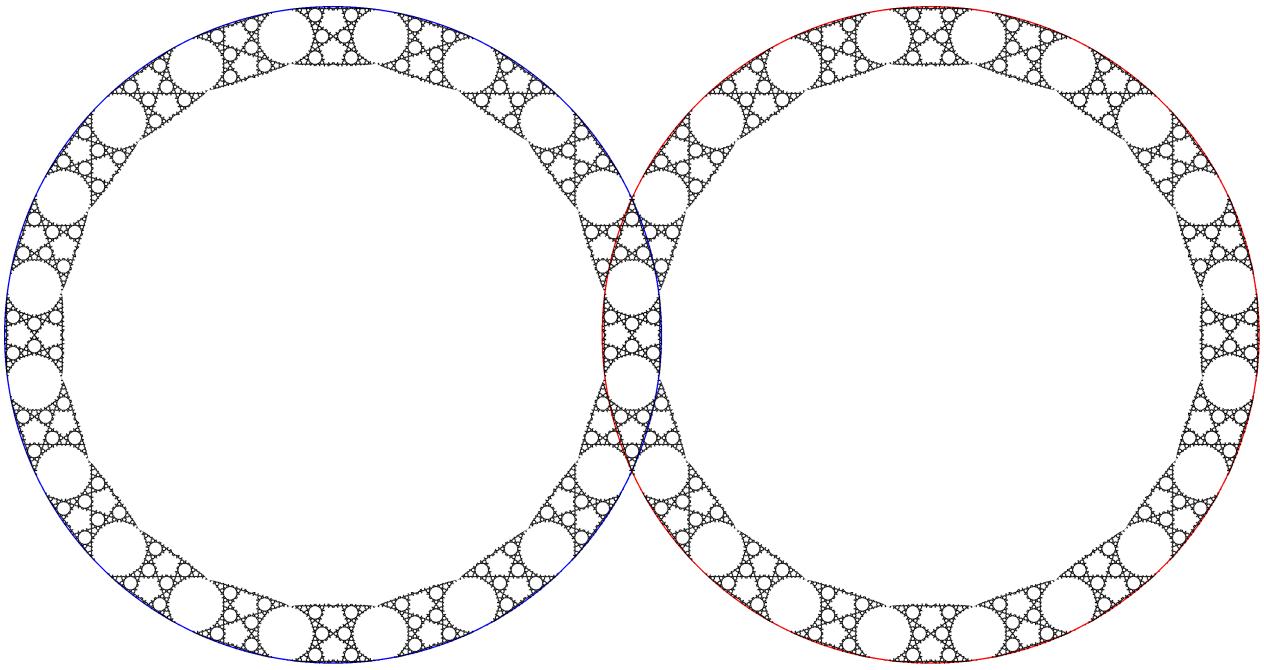


图23： $GG_{20}(1.100581)$.