arXiv:2302.12956v1 [quant-ph] 25 Feb 2023

利用原子钟进行暗物质搜寻的量子计量算法

M. H. Zaheer,[1,*] N. J. Matjelo,[2] D. B. Hume,[3] M. S. Safronova,[1,4] 和 D. R. Leibrandt[5, 3, 6,†]

[1] *Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, DE, USA*

[2] *Department of Physics and Electronics, National University of Lesotho, Roma, LS*

[3] *Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO, USA*

[4] *Joint Quantum Institute, NIST and the University of Maryland, College Park, MD, USA*

[5] *Department of Physics and Astronomy, University of California, Los Angeles, CA, USA*

[6] *Department of Physics, University of Colorado, Boulder, CO, USA*（日期：2023年2月28日）

动态解耦等量子算法可用于提高量子传感器对信号的灵敏度，同时抑制其对噪声的敏感性。原子钟是最灵敏的量子传感器之一，近期钟技术的进步使其具备了前所未有的精密度和准确度。这些原子钟对基本常数的变化高度敏感，因此是探测局域超轻标量暗物质的理想工具。基于钍-229m同质异能素的拟议核钟有望进一步提高灵敏度。我们研究了使用各种量子计量算法，借助量子钟进行暗物质搜寻的方法。我们提出了一种新的宽带动力学解耦算法，并将其与此前提出并得到验证的量子计量协议进行比较，即差分光谱学和窄带动态解耦。我们针对标量暗物质搜寻开展了数值模拟，采用现实的噪声源，并考虑了暗物质退相干。最后，我们讨论了一种替代性的钍核跃迁激发方法，该方法可绕过与真空紫外激光器相关的技术挑战。

引言

过去15年间，原子钟精度的显著提升 [1, 2] 使时钟进入了一个前所未有的领域，在这里，现代物理学的基本假设尚未经过检验。例如，如果基本常数（如精细结构常数 α）依赖于时空，那么原子、分子和核跃迁频率也会如此。基本常数的变化会改变时钟的滴答速率，使其取决于位置、时间或时钟类型，因为不同类型时钟的频率对基本常数的依赖方式各不相同。

超轻标量场存在于许多超越标准模型的理论中 [3, 4] ，并可能引起基本常数的变化，从而影响原子钟频率 [5, 6]。此类粒子也可能是暗物质（DM）；暗物质占宇宙全部物质的 85%，但其起源至今仍未知。在我们的星系中，这类暗物质具有相干性，表现得如同具有振幅 $\sim \sqrt{\rho_{\rm DM}}/m_{\rm DM}$的波，其中 $\rho_{\rm DM} = 0.4\text{GeV/cm}^3$ 是局部暗物质密度，而 $m_{\rm DM}$ 是暗物质粒子的质量 [6]。这类暗物质与标准模型的耦合会导致基本常数振荡，进而使钟跃迁频率发生振荡。由于不同的时钟对这类效应的敏感度不同，随着时间测量两个时钟频率之比，可用于提取暗物质康普顿频率处的振荡信号，适用范围涵盖广泛的暗物质质量和相互作用强度[6–8]。具有较大空间延展范围的暗物质物体（例如稳定的拓扑缺陷）可能引起基本常数的瞬态变化，而时钟网络有望探测到这类变化 [5, 9–12]。这些这些进展开启了时钟实验的新纪元，旨在探测暗物质，目前已有多项相关搜索正在进行[4]。

近期有研究提出，超轻暗物质可以形成引力束缚天体，并可能被外部引力势（例如地球或太阳的引力势）俘获 [13]。研究 [14]表明，这样的晕可具有极高的暗物质超密度：在距太阳0.1 AU处，超密度最高可达17个数量级，从而大幅提升发现暗物质的潜力。Tsai 等人 [14] 提出了一项时钟比对卫星任务，在卫星上搭载两台时钟，前往太阳系内侧区域，搜寻受太阳引力束缚的暗物质晕，并探测与引力势变化相关的基本常数空间变化。然而，在这种情形下，暗物质分布在质量约为 10^{-13}eV时达到峰值，而由于时钟的探测时长限制，时钟在该质量范围内的灵敏度会降低。在这项工作中，我们探索了用于时钟运行的不同量子算法，并提出一种宽带动态解耦方案，使其能够探测此类质量，而不会显著损失灵敏度。

光学时钟对 α （时间变化、空间变化、缓慢漂移、振荡、依赖引力势、瞬态或其他变化）的灵敏度，以无量纲增强因子 K 量化。对于时钟 1 和时钟 2，稳定度最佳、总系统不确定度最低且 $\Delta K = K_1 - K_2$ 值尽可能高的时钟，具有最高的发现潜力。对于所有基于光学晶格的现有时钟以及大多数囚禁离子时钟， K 因子都很小，即 $0.008 - 1.0$；例外是 Hg^+ 四极（$K = -3$）跃迁时钟和 Yb^+ 八极跃迁时钟（$K = -6$） [15]。基于核

跃迁的时钟对基本常数变化的灵敏度可能高得多，这是因为跃迁能量要高得多。

核能级的跃迁频率远超出激光可及范围，相差 4–6 个数量级，唯一例外是 $^{229\mathrm{m}}$Th。基于这一超窄核跃迁设计时钟 [16, 17], ，其波长测得为 148.81(41) nm（参考文献 [18–20] 报道的测量结果的加权平均值），由于其对许多系统效应不敏感，因此尤其具有吸引力。预计这一跃迁对基本常数的变化具有极高的灵敏度 α 和 $m_q/\Lambda_{\mathrm{QCD}}$[21, 22], ，其中 m_q 为夸克质量， Λ_{QCD} 参数化了强相互作用的强度，其灵敏度比目前所有原子钟高出几个数量级。所提出的钍核钟的 K 因子约为 10^4 [23]。

在此，我们考虑超轻标量暗物质 ϕ 与光子场的线性耦合，其相互作用拉格朗日量为 [6]

$$\mathcal{L}_{\phi\gamma} = \kappa\phi\frac{d_e}{4e^2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \ , \tag{1}$$

其中，$\kappa = \sqrt{4\pi}/M_{Pl}$ 是一个无量纲系数， e 是电子电荷， d_e 是暗物质 QED 耦合常数。

通常，光学钟的运行方式经过优化，以便在渐近长的平均时间内测量静态频率差或频率比时达到尽可能高的精度。为此，使用拉比光谱或拉姆齐光谱探测钟跃迁，并尽可能延长探测时长，同时保持时钟激光器与原子之间的相干性。测量精度的基本极限由量子投影噪声决定；对于基于非纠缠原子的时钟，这一极限称为标准量子极限（SQL）。对于若干高度禁戒的钟跃迁，原子的相干时间可能比当前最好的时钟激光器的相干时间长几个数量级，因此激光噪声构成了实验测量精度的限制。

对于光晶格钟与囚禁离子钟之间的频率比测量，近期有人提出了一种名为差分光谱学（DS）的新技术 [24], 并已进行了演示 [25] 。该技术突破了探测时长受激光相干时间限制的问题。在差分光谱学中，两台钟使用锁定到同一频率梳的激光进行同步探测，从而消除相关的激光噪声。如果光晶格钟采用两个原子系综，并以反同步方式进行探测，以实现对激光相位的零死时间测量（见图 1a），则离子钟的探测时长可延长至其原子相干时间。零死时间差分光谱学是一种很有前景的技术，可用于在低粒子质量极限下搜寻超轻标量暗物质。这类暗物质会表现为频率比的缓慢振荡，涉及钍核跃迁与镱八极跃迁的囚禁离子钟——其对暗物质场具有较高灵敏度——以及锶或镱光晶格钟——其灵敏度较低，可作为稳定参考。如图 1a 右图所示，采用差分光谱学（以及标准的拉比或拉姆齐光谱）运行的钟，主要对频率低于时钟探测时长倒数的振荡敏感；频率高于这一截止值时，灵敏度会迅速下降。虽然缩短探测时长可以提高对高于探测时长倒数的频率的灵敏度，但代价是量子投影噪声（QPN）增大。

量子传感面临的根本挑战，是在降低对技术噪声（如激光噪声）和基本噪声（如量子投影噪声）的易感性的同时，提高对信号的灵敏度。动态解耦是应对这一问题的一种方法。在自由演化时间内插入 π 个脉冲的拉姆齐脉冲序列（见图 1b），可使量子系统中的噪声与信号动态解耦。动态解耦最初用于核磁共振，并伴有自旋回波效应 [26]。后来，量子信息研究将其引入，用于应对退相干和耗散 [27]。由于激光噪声是阻碍当前原子钟在较长探测时长下达到标准量子极限的主要因素，因此有人提出用动态解耦来应对激光噪声。

一种广为人知的动态解耦脉冲序列 CPMG，是经典锁相放大器的一种量子类比技术 [28, 29]。为了与下文介绍的新型动态解耦算法相区分，以下将 CPMG 称为窄带动力学解耦（NBDD）。在$|\uparrow\rangle$ 中，使用 $\pi/2$ 脉冲将一个离子制备为叠加态（$|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$）$/2$ 。探测过程中，一系列间隔均匀的 π 脉冲用于调制对原子频率或激光频率波动的灵敏度符号。最后一个$\pi/2$脉冲完成整个脉冲序列。 π 脉冲的频率是灵敏度得到提升的信号频率的两倍（图 1b ）。Kotler 等人 *et al.* [30] 在 $^{88}Sr^{+}$ 离子上展示了这一方法；Aharony 等人*et al.* [31]则在暗物质搜寻的背景下对其进行了分析。

在本研究中，我们提出了一种新的宽带动力学去耦（BBDD）方案，使我们能够探测更高的暗物质质量，并克服差分光谱（DS）和窄带动力学去耦（NBDD）方案的不足。我们回顾了每种方案。随后，我们基于钍核同质异能跃迁，通过逼真的数值模拟评估了这三种方案的性能。模拟结果与当代暗物质搜寻实验的结果

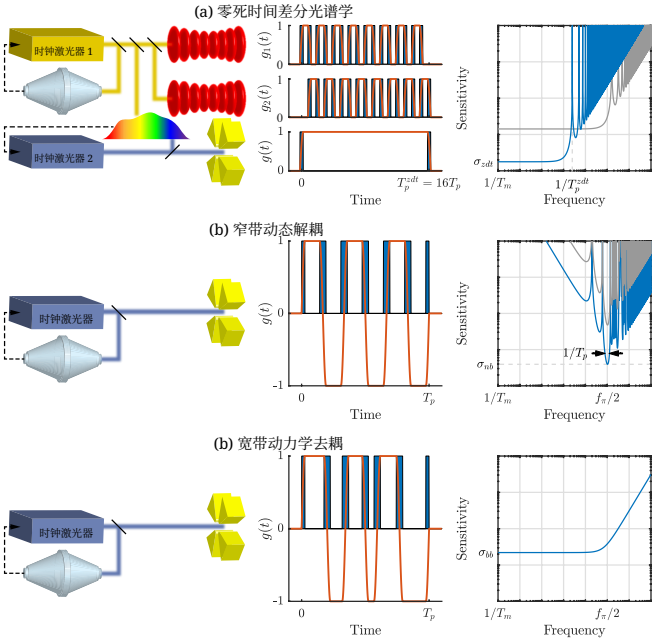


图 1. 不同量子计量算法的实验装置示意图（左）、脉冲序列（中）以及理论灵敏度图示例（右）：(a) 零死时间差分光谱学，(b) 窄带动态解耦，(c) 宽带动力学去耦。时钟激光器以蓝色和黄色方框表示；用于稳定时钟激光器的光学腔以浅灰色、两端呈圆锥形的圆柱体表示；反馈路径以黑色虚线表示；光学晶格中囚禁的原子系综以红色圆盘堆叠表示；离子阱中囚禁的离子以四个黄色阱电极表示。脉冲序列中，$\pi/2$ 和 π 脉冲以蓝色矩形表示，时间从左向右递增。红线表示脉冲序列对钟跃迁或激光频率波动的灵敏度 $g(t)$ 随脉冲序列中频率波动发生时间的变化。灵敏度图显示振荡信号的理论最小可检测振幅随振荡频率的变化；曲线在图中越低，表示灵敏度越高。T_m 表示总测量时长，T_p 表示脉冲序列单次重复的时长；蓝色曲线对应的脉冲序列之后会进行投影测量。灰色曲线显示当 T_p 减小时灵敏度如何变化。

以及其他提案进行了比较。最后，我们介绍了另一种钍核激发方案。

结果

差分光谱学。差分光谱学（图 1a）对离子时钟跃迁频率 $\nu(t) = \nu_0 + \nu_S \cos(2\pi f t + \theta)$ 的确定性振荡的灵敏度，与标准拉姆齐光谱法相同；但在差分光谱学（DS）中，离子时钟探测时长 T_p 不受激光相干时间的限制。延长探测时长可提高对低频振荡的灵敏度，同时降低对频率高于 $1/T_p$的振荡的灵敏度。在振荡频率范围$1/T_m \ll f \ll 1/T_p$ 内，其中 T_m 为总测量时长，对未知相位 θ 的确定性振荡的小信号分数频率灵敏度为

$$\sigma_{Ramsey}(f) = \frac{X}{2\pi\nu_0\sqrt{T_p T_m}} \,. \tag{2}$$

对于$X = X_{det,\ 95\%} \approx 3.95$，振荡幅度$|\nu_S| < \sigma_{Ramsey}(f)\nu_0$的95%置信度为 [32]。

原子叠加态在旋转坐标系中的相位在第 j次探测期间累积为

$$\phi_j = \int_{t_j - T_p/2}^{t_j + T_p/2} 2\pi g(t)\nu(t)dt \,, \tag{3}$$

其中，$t_j = jT_p$ 是起始时间，T_p 现在表示单次探测的脉冲序列持续时间。灵敏度函数 [33] $g(t) = 2\lim_{\delta\phi\to 0} \frac{\delta p}{\delta\phi}$ 决定了失谐 $\nu(t) = \nu_S\cos(2\pi f t + \theta) + \nu_N(t)$引起的原子跃迁概率 p 变化；该失谐存在于离子跃迁频率与激光频率之间，其中$\nu_N(t)$为频率噪声，包括宽带激光频率噪声和量子投影噪声。

灵敏度函数随时间变化，可通过施加激光脉冲改变布洛赫矢量的方向，从而将其设定为-1到1之间的任意值。例如，标准拉姆齐序列由两个 $\pi/2$脉冲组成，两者间隔为序列总持续时间 T。我们采用如下约定：第一个 $\pi/2$ 脉冲使布洛赫矢量绕 x 轴旋转 $\pi/2$ 弧度，第二个 $\pi/2$ 脉冲使布洛赫矢量绕 y 轴旋转 $\pi/2$ 弧度。（这里假设激光脉冲的持续时间远短于序列总持续时间，因此可以忽略。）拉姆齐算法在整个序列持续时间内的灵敏度函数为 $g(t) = +1$，因此对于探测时间无关的失谐是最优的。在拉姆齐序列期间，沿 y 轴施加 π 脉冲可以翻转灵敏度函数的符号。

窄带动态解耦。差分光谱学在较高频率下的灵敏度会降低，尤其是在灵敏度低谷处；这些低谷出现在 $1/T_p$ 的整数倍处，这是因为整数个暗物质振荡恰好落在探测时间内。按照文献 [30] 的方法进行窄带动态解耦，可在探测时间内引入脉冲，从而提高对较高暗物质质量的灵敏度。但它也存在同样的问题（图 1b）。这种测量方案的一个缺点是，它只能提高频率范围较窄的信号的灵敏度，而该频率范围由 π 脉冲之间的时间间隔决定。每个 Ramsey 脉冲序列随机选择 π 脉冲的频率，可以克服这些问题。这

就是我们在此采用的脉冲序列，以下称为窄带动力学解耦（NBDD）。

宽带动态解耦。针对在宽广粒子质量范围内开展的暗物质搜索，即对应于大范围失谐振荡频率 f_{DM}，我们提出了一种宽带动力学解耦算法。在该算法中，在拉姆齐序列内以随机时刻插入绕 x 轴的 π 脉冲，其时间分布经设计以最大化对目标振荡频率范围的灵敏度。在搜索频率未知的信号时，宽带动力学解耦与在每次探测中采用不同随机 π 脉冲频率的窄带动态解耦具有完全相同的优势，但进一步降低了对激光相干性的要求。

利用钍进行暗物质搜索的灵敏度。我们进行了数值模拟，以确定各种量子计量算法对暗物质诱导的钟跃迁频率振荡的灵敏度。在这些模拟中，我们纳入了真实的噪声源以及标量场暗物质的随机性质。

对于频率为 f 的确定性频率振荡，在第 j 次探测期间累积的相位。

$$\begin{aligned}\phi_{S,j}^{det}(f) &= 2\pi\nu_S \int_{t_j-T_p/2}^{t_j+T_p/2} g(t)\cos(2\pi f t+\theta)dt \\ &= 2\pi\nu_S\left[g_{I,j}\cos\theta - g_{Q,j}\sin\theta\right] ,\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}g_{I,j}(f) &= \int_{t_j-T_p/2}^{t_j+T_p/2} g(t)\cos(2\pi f t)dt \\ g_{Q,j}(f) &= \int_{t_j-T_p/2}^{t_j+T_p/2} g(t)\sin(2\pi f t)dt\end{aligned} \tag{5}$$

是第 j次探测灵敏度函数的同相分量和正交分量。此处，积分在第 j次探测的持续时间内进行。超轻暗物质会引发随机性质的振荡，其线宽 [32]非零。在这种情况下，暗物质信号累积的相位为

$$\phi_{S,j} = \int_{t_j-T_p/2}^{t_j+T_p/2} 2\pi g(t)\nu_S(t)dt \tag{6}$$

其中，$\nu_S(t)$是暗物质场引起的失谐。

第 j 次探测的测得相位 $\phi_{M,\,j} = \phi_{QPN,\,j} + \phi_{LN,\,j} + \phi_{S,\,j}$ 其中 $\phi_{QPN,\,j}$ 和 $\phi_{LN,\,j}$ 分别是量子投影噪声和激光噪声的贡献。受式 (4) 启发，在由 $N_p = T_m/T_p$ 次探测组成的测量过程结束时，我们通过将每次探测的相位相加，计算测得信号 ϕ_M 随分析频率 f 变化的函数，并根据调制频率为各次探测的相位赋予相应的正负号，使信号贡献相干叠加：

$$\begin{aligned}(\phi_M)^2 = &\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{N_p-1}\mathrm{sgn}(g_{I,j}(f))\phi_{M,j}(f_{DM})\right)^2 \\ &+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{N_p-1}\mathrm{sgn}(g_{Q,j}(f))\phi_{M,j}(f_{DM})\right)^2 .\end{aligned} \tag{7}$$

该方程定义了对所有探测进行整体相干分析，这是本研究的新方法。噪声源的贡献独立于暗物质信号的贡献，因此以非相干方式叠加。

在 f_{DM} 处，跃迁频率相干振荡对应的分数频率不确定度可写为

$$\sigma(f) = \frac{1}{\nu_0}\sqrt{\frac{\langle(\phi_N)^2\rangle}{\langle(\phi_S/\nu_S)^2\rangle}} . \tag{8}$$

每次探测期间由激光频率噪声导致的相位累积遵循式（3）。对于差分光谱，由于光晶格钟提供了前馈相位校正，实际的有效激光相位噪声就是光晶格钟的量子投影噪声。将其视为高斯白噪声，其阿伦偏差取为光晶格钟的标准量子极限；这里的光晶格钟是由1000个原子组成、探测时间为1 s的锶光晶格钟。对于动力学解耦算法，激光频率噪声采用 $1/f$ 功率谱密度，这与腔稳频激光器的典型情况一致。时钟中的量子投影噪声贡献为$\phi_{QPN,\,j} = \pm 1$，将其与激光频率噪声的贡献相加，得到第 j^{th} 次探测中由噪声导致的总相位累积$\phi_{N,\,j}$。计及退相干导致的暗物质谱线宽度非零后，计算每次探测中由暗物质信号累积的相位$\phi_{S,\,j}$。关于如何获得$\phi_{S,\,j}$ 和$\phi_{N,\,j}$ 的更多细节见方法部分。为考虑暗物质谱线宽度非零的情况，我们在暗物质康普顿频率 f_{DM}附近的一系列分析频率 f 上进行分析。随后，将计算得到的测量结果拟合到预期线型。

我们对 DS、NBDD 和 BBDD 进行了全面模拟。对于每个暗物质康普顿频率 f_{DM}，我们分析其附近的 1000 个频率点 f。使用的测量时间为 $T_m = 10^6$ s，光谱脉冲序列的持续时间为 $T_p = 1$ s，因此每个分析频率对应 10^6 个模拟探针。计算暗物质线形和激光频率噪声时，分别采用 $dt = 0.1/f_{DM}$ 和 $dt = 0.01/f_{DM}$ 的时间步长。差分光谱、窄带动态解耦和宽带动态解耦搜索所用的探测时间分别为 $T_p = 100$ s，

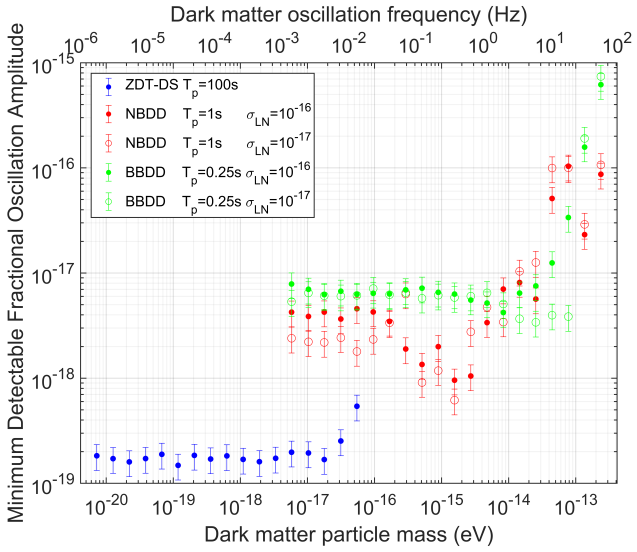


图 2. 差分光谱、窄带动态解耦和宽带动态解耦中，由暗物质引起的振荡时钟频率的最小可探测分数频率振幅。动态解耦算法的灵敏度强烈取决于激光频率噪声，实心圆和空心圆对应不同的噪声水平。

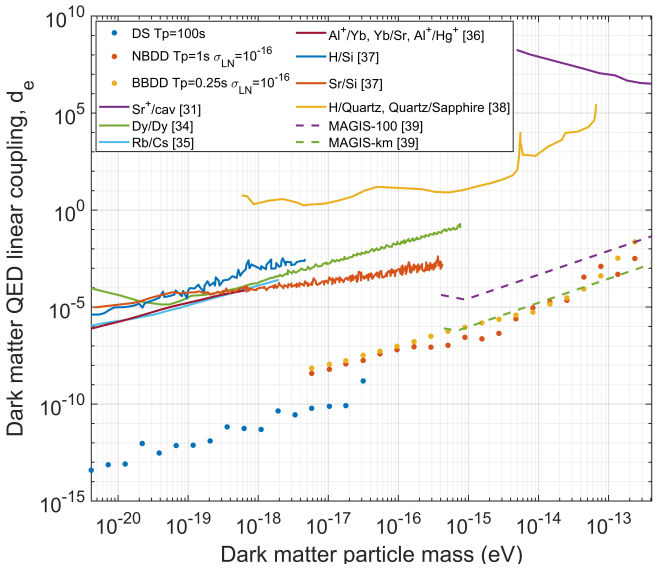


图 3. 标量暗物质与 QED电磁场张量之间的线性耦合常数排除图。实线所示的耦合常数上限已被先前的实验排除。圆圈表示基于钍核钟的搜索模拟灵敏度。这里展示了所考虑的三种量子计量算法。其他拟议实验以虚线表示 [31, 34–39]。关于这些线的更多详情见参考文献 [4]。

$T_p = 1$ s 和 $T_p = 0.25$ s。对于动态解耦序列，宽带情况下使用频率为 $f_\pi = 20$ Hz 的 π 脉冲；窄带情况下，每个探针使用 2 Hz 至 5 Hz 之间的随机频率。对于每种测量协议，动态解耦算法至少模拟 100 次测量，差分光谱则模拟 1000 次测量，并进行拟合，以获得理论暗物质线形在 95%置信度下的最大振幅。

图 2 展示了分数频率不确定度图。由于探测时间内容纳了不止一个暗物质振荡，差分光谱在超过 $f_{DM} = 1/T_p$ 后灵敏度会迅速下降。窄带动态解耦能够在更高的暗物质质量下实现灵敏探测。宽带动态解耦以较短的探测时间 T_p 达到相当的灵敏度，而且在很宽的质量范围内保持一致，不像差分光谱或窄带动态解耦那样。最重要的是，我们清楚地证明，宽带动态解耦在 10^{-13} 暗物质质量范围内不会显著损失灵敏度；这一点对于近期提出的搜寻束缚于太阳的暗物质晕的方案至关重要 [14]。

d_e 所示的排除图见图 3，它表明采用核钟实验后，灵敏度提高了许多个数量级。对于更高的暗物质质量，只有拟议的 1 km 原子 MAGIS 干涉仪 [4] 能够提供与采用动态解耦的桌面式核钟相近的灵敏度。

电子桥双光子光谱学。近期测量表明，嵌入 MgF_2 晶体 [20]中的钍核同质异能跃迁波长为 148.71(42) nm，激发态寿命为 670(102) s。孤立的 $^{229}Th^{3+}$ 离子预计具有更长的寿命。$^{229}Th^{3+}$ 的电子能级和核能级结构如图 4 所示。对于接近异构态寿命极限的光谱学序列持续时间，核光谱学中电子态的自然选择是 $5F_{5/2}$ 电子基态 [40]。在这种情况下，核跃迁最自然的驱动方式是使用单个 149 nm 光子。尽管在制造该波长的窄线宽激光器方面已经取得了重大进展 [41], ，但这些激光器极具挑战性，且可运行时间有限。

另一种方法是双光子电子桥光谱学 [42, 43]。从亚稳态 $^g7S_{1/2}$ 电子激发态（其中 g 上标表示核基态）出发，可以利用 $^g7P_{1/2}$ 作为中间态，驱动跃迁至核激发态 $^m7S_{1/2}$ 。该跃迁的第二步依赖于这样一个事实：$^m7S_{1/2}$ 中含有少量的 $^g8S_{1/2}$ 态混合成分，其振幅估计为 $\sim 10^{-5}$ [43]。电子桥技术将所需激光波长从极具挑战性的、接近 149 nm 的真空紫外波段移至相对容易实现的紫外波段

表 I. 直接激发与电子桥激发方法的比较。

	直接	电子桥	
激光波长（纳米）	149	269	332
激光功率（瓦）	10^{-6}	10^{-8}	1
$1/e^2$ 光束半径（μ米）	10	30	3
失谐（GHz）		10	
最小 π 脉冲持续时间（ms）	40	4	
相干时间（s）	10^3	0.6	
每个脉冲的自发发射概率		0.02	

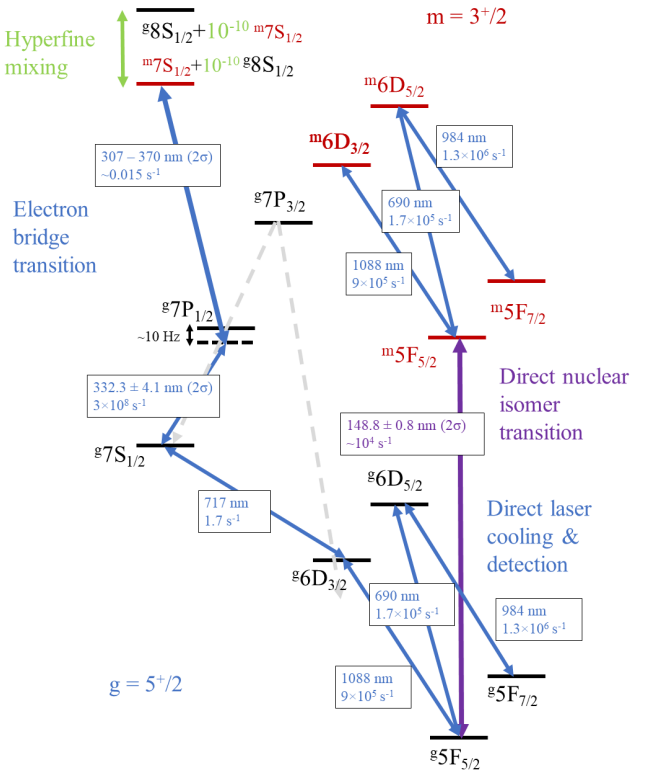


图 4. （在线彩色版）$^{229}Th^{3+}$同质异能素的能级图，展示驱动钟跃迁的两种方法。

波长为 269 nm 和约 332 nm。

为利用电子桥技术进行精密核光谱学，我们提出将频率相对于中间态失谐 $\sim$ 10 GHz，并驱动非共振双光子跃迁 [44]。当拉比频率足够低时，$^{g}7P_{1/2}$ 不会被布居，光谱相干时间将受限于 $7S_{1/2}$ 态 0.6 s 的电子衰变寿命 [45]。这足以支持长达数百毫秒的动态去耦序列，适用于在 0.1 至 1 kHz 频率范围内搜寻暗物质振荡。表 I 比较了直接激发和电子桥激发方法中的各种参数。

讨论

超轻标量暗物质具有很强的理论动机，针对这类暗物质候选粒子的搜寻也日益受到关注。与所有现有或已提出的实验相比，基于钍的核钟实验在很大范围的暗物质质量上，对超轻标量暗物质的灵敏度都将高出许多个数量级。对于较低暗物质质量范围内的此类实验，差分光谱学提供了一种出色的方案；但在 $f_{DM} = 1/T_p$ 以上，由于实验的探测时间内包含了过多次暗物质振荡，灵敏度会大幅降低。动态解耦序列为此提供了解决方案，可提高对超轻暗物质质量范围内较高暗物质质量的灵敏度，其表现仅次于已提出的 MAGIS-km 实验。特别是，宽带动力学去耦具备上述所有优势，且灵敏度不依赖于探测时间，因此采用这一方案时可以使用较短的探测时间。我们已开发出完整规模的模拟，用于模拟通过 α 变化搜寻超轻标量暗物质的时钟实验，其中纳入了暗物质退相干、激光噪声和量子投影噪声。利用这些模拟，我们证明了宽带动力学去耦对激光噪声不太敏感，因此在很大范围的质量上，当激光噪声水平为 10^{-16} 时，其对超轻标量暗物质的灵敏度与激光噪声水平为 10^{-17} 时相近。

本文提出的宽带动力学去耦技术也可应用于激光频率噪声测量，类似于 Bishof等人[46]的工作。激光的频率稳定度通常通过测量待测激光与更稳定的参考激光器之间的拍频来表征。然而，对于最先进的时钟激光器，往往没有更稳定的参考激光器可用。在这种情况下，可以利用光学时钟中的原子作为更稳定的参考来表征时钟激光器的频率稳定度，而宽带动力学解耦算法则提供了一种技术，可在高于传统光谱学所能达到的噪声频率下表征激光频率噪声。

方法

暗物质退相干。 我们根据参考文献 [47] 的方法，将暗物质场视为随机场，而非确定性场。这种方法考虑了暗物质退相干，因此更适用于频率较高、相干时间较短的暗物质。对于随机场，功率谱密度并非仅在康普顿频率处为一个狄拉克 δ 函数，而是分布在该频率周围。它

与线型成正比

$$F(\omega) = (2\pi)^{-1/2}\tau_c\eta^{-1}e^{-\eta^2}e^{-(\omega-2\pi f_{DM})\tau_c} \times \sinh(\eta\sqrt{(}\eta^2 + 2(\omega - 2\pi f_{DM})\tau_c)) \ . \tag{9}$$

这里， η 是星系速度与 v_{vir} 的比值，其中 v_{vir} 是暗物质晕的维里速度，取为 1； $\tau_c = 10^6/f_{DM}$ 是相干时间，f_{DM} 是暗物质康普顿频率。分析频率 f 取为对应于所有 $\omega = 2\pi f$ 的频率，其中 $F(\omega)$非零。

功率谱密度可根据线型由下式获得

$$\langle|\tilde{\phi}_p|^2\rangle = \frac{\pi N_f}{dt}\Phi_0^2 F(\omega_p) \ . \tag{10}$$

这里， N_f 是频域中的点数，使暗物质谱线上有 1000 个点； $dt = 0.1/f_{DM}$ 是选取的采样间隔，应足够小； Φ_0 是与暗物质能量密度 ρ_{DM} 相关的有效场幅度，其关系为$\Phi_0 = \frac{\hbar}{m_\phi c}\sqrt{2\rho_{DM}}$，其中 m_ϕ是与康普顿频率（ $\omega_{DM} = m_\phi c^2/\hbar)$ 对应的暗物质质量。

频域中的随机系数由以下方式生成

$$p(\tilde{\phi}) = \prod_{p=0}^{N_f/2} \frac{1}{(\beta_p^{-1}\pi\langle|\tilde{\phi}_p|^2\rangle)^{\beta_p}} \exp -\beta_p \frac{|\tilde{\phi}_p|^2}{\langle|\tilde{\phi}_p|\rangle^2} \tag{11}$$

最后，为了获得时域中振荡信号的振幅$\nu_{S,\ j}$ 和相位 θ_j ，对离散逆傅里叶变换 $\phi_j = N_f^{-1}\sum_{p=0}^{N_f-1}\exp{(i\frac{2\pi}{N_f}jp)}\ \tilde{\phi}_p$ 进行计算，得到

$$\phi_{S,j} = \int_{t_j - T_p/2}^{t_j + T_p/2} 2\pi g(t)\nu_{S,j}\cos(2\pi f t + \theta_j)dt \ . \tag{12}$$

暗物质线型。暗物质信号的预期线型通过将式 9 与 sinc函数的绝对值进行卷积得到：

$$F_c = 4\pi\int F(f - f')\ \mathrm{abs}(\mathrm{sinc}((f' - f - f_{DM})\ T_m))df' \ . \tag{13}$$

此处， f' 是积分的自变量，取大量数值，从$-1000/T_m$ 到 $1000/T_m$ ，用于数值计算积分。若积分时间 T_m 大于退相干时间 τ_c，则取值的数量为 $N_i = 10^5$ ；否则取 $N_i = 10^6$。

如果询问时间显著短于相干时间 $T_m < 0.1\tau_c$，我们不使用线型（9），而是直接使用 sinc函数

$$F_c = \mathrm{abs}(\mathrm{sinc}((f - f_{DM})\ T_m)) \tag{14}$$

其中， ω_{DM} 是暗物质角频率。

模拟得到的线型 ϕ_S 来自公式 7，其中暗物质对 j^{th} 探测$\phi_{S,\ j}$ 的贡献由公式 12 给出。使用 MATLAB 中的 fmincon函数将模拟信号拟合到预期线型上，其中最小化的函数是均方误差。

$$\mathrm{MSE}(p_1, p_2) = \mathrm{mean}\left(\left(\sqrt{p_1^2\ F_c^2 + p_2^2} - \phi_M\right)^2\right) \tag{15}$$

输入 p_1 和 p_2 的初始猜测值分别取为 max(F_c) max(ϕ_S) 和 $\sqrt{T_m/T_p}/4$ 。fmincon函数会求出使均方误差最小的值 p_1 和 p_2 。

激光噪声。动态解耦序列的激光噪声由近似幂律谱 $S = S_0\nu_{LN}^{\lambda}$ 产生，其中粉红噪声对应 $\lambda = -1$ 。比例因子$S_0 = 1/\sqrt{2}\log 2$ 的选择使得粉红噪声的阿伦偏差为 1。这里使用 Mandelbrot状态空间噪声模型。我们生成一个大小为 $m = 10$的模型，以近似从最低频率 $f_{Min} = 10^{-6}$ Hz 到最高频率$f_{Max} = 10^3$ Hz 的目标频谱。转移矩阵A、输入向量 B和输出向量 C 的元素为

$$A(i,i) = \exp\left(-\beta^{i-1}\frac{dt}{\alpha\tau}\right) \ , \tag{16}$$

$$B(i,1) = \frac{1 - \exp(-\beta^{i-1}\frac{dt}{\alpha\tau})}{\beta^{i-1}} \ , \text{ and} \tag{17}$$

$$C(1,i) = S_0\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^{\frac{6-\lambda}{8}}(f_{Min}dt)^{\lambda/2} \times \prod_{j=1, j\neq i}^{m}(\alpha-1)\frac{\beta^{i-1}}{\alpha^m}\frac{\alpha\beta^{j-1} - \beta^{i-1}}{\beta^{j-1} - \beta^{i-1}} \ . \tag{18}$$

这里，索引 i 从 1 递增到 m， dt 是选取的时间步长，设为探测时间的一个足够小的分数； $\tau = 1/(2\pi f_{Min})$、$\beta = (10f_{Max}/f_{Min})^{1/m}$以及$\alpha = \beta^{-\lambda/2}$。时间步长为 j 时的状态向量 z 根据更新方程由时间步长为 $j-1$ 时的状态向量得到

$$z = A\ z + B\ r \tag{19}$$

其中， r 是一个由正态分布随机数组成的 m 元素向量，并在每个 j重新生成。状态向量用于根据以下公式生成每个时间步的激光频率：

$$f_{LN} = C\ z \ . \tag{20}$$

激光噪声频率归一化为 $\nu_{LN} = f_0 \times \sigma_{LN} \times f_{LN}$，其中 $f_0 = c/\lambda_0$ 为激光频率，单位为$\lambda_0 = 148.8$ nm，而 $\sigma_{LN} = 10^{-16}$ 或 $\sigma_{LN} = 10^{-17}$ 为闪烁激光噪声的阿伦偏差。

致谢

作者感谢 J. Valencia 和 D. A. Hite 对稿件进行仔细审阅。本研究得到美国陆军研究办公室（资助编号 W911NF- 20-1-0135）、美国国家标准与技术研究院、美国国家科学基金会 Q-SEnSE 量子飞跃挑战研究所（资助编号 OMA- 2016244）、美国海军研究办公室（资助编号 N00014-20-1-2513）以及欧盟地平线2020研究与创新计划下的欧洲研究委员会（ERC）（资助编号 856415）的支持。本研究部分使用了特拉华大学 HPC Caviness 和 DARWIN 计算系统：DARWIN——特拉华大学及特拉华地区计算与数据密集型研究资源，Rudolf Eigenmann、Benjamin E. Bagozzi、Arthi Jayaraman、William Totten 和 Cathy H. Wu，特拉华大学，2021年，网址：https://udspace.udel.edu/handle/19716/29071。

作者贡献

D.R.L.、D.B.H. 和 M.S.S. 提出了宽带动态解耦算法。D.R.L. 为单处理器计算机开发了模拟代码。M.H.Z. 对代码进行了并行化，并开展了模拟。N.J.M. 开发并测试了 Mandelbrot 状态空间噪声模型。D.R.L. 提出了非共振双光子激发方案。所有作者均讨论了研究结果及其意义，并参与了论文的撰写和编辑。

竞争利益

作者声明不存在竞争利益。

* hani@udel.edu

† leibrandt@physics.ucla.edu

[1] A. D. Ludlow、M. M. Boyd、J. Ye、E. Peik 和 P. O. Schmidt，《现代物理评论》**87**，637（2015年）。[2] S. M. Brewer、J.-S. Chen、A. M. Hankin、E. R. Clements、C.-w. Chou、D. J. Wineland、D. B. Hume 和 D. R. Leibrandt，《物理评论快报》**123**，033201（2019年）。[3] A. Banerjee、G. Perez、M. Safronova、I. Savoray 和 A. Shalit，arXiv 预印本 arXiv:2211.05174（2022年）。[4] D. Antypas、A. Banerjee、C. Bartram、M. Baryakhtar、J. Betz、J. Bollinger、C. Boutan、D. Bowring、D. Bud- ker、D. Carney、 *et al.*，arXiv 预印本 arXiv:2203.14915（2022年）。[5] A. Derevianko 和 M. Pospelov，《自然·物理》**10**，933（2014）。[6] A. Arvanitaki、J. Huang 和 K. Van Tilburg，《物理评论D》91，015015（2015年）。[7] K. Van Tilburg、N. Leefer、L. Bougas 和 D. Budker，《物理评论快报》115，011802（2015年）。[8] A. Hees、J. Gu´ena、M. Abgrall、S. Bize 和 P. Wolf，《物理评论快报》117，061301（2016年）。[9] Y. V. Stadnik 和 V. V. Flambaum，《物理评论快报》114，161301（2015年）。[10] P. Wcis·lo、P. Morzy´nski、M. Bober、A. Cygan、D. Lisak、R. Ciury·lo 和 M. Zawada，《自然·天文学》1，0009（2016年）。[11] B. M. Roberts、G. Blewitt、C. Dailey、M. Murphy、M. Pospelov、A. Rollings、J. Sherman、W. Williams 和 A. Derevianko，《自然·通讯》8，1195（2017年）。[12] T. Kalaydzhyan 和 N. Yu，《物理评论D》96，075007（2017年）。[13] A. Banerjee、D. Budker、J. Eby、H. Kim 和 G. Perez，《通讯·物理》3，1（2020年），arXiv:1902.08212 [高能物理—现象学]。[14] Y.-D. Tsai、J. Eby 和 M. S. Safronova，《自然·天文学》7，113（2023年），arXiv:2112.07674 [高能物理—现象学]。[15] V. A. Dzuba 和 V. V. Flambaum，《加拿大物理学杂志》87，25（2009年）。[16] E. Peik 和 C. Tamm，《欧洲物理快报》61，181（2003年）。[17] C. J. Campbell、A. G. Radnaev、A. Kuzmich、V. A. Dzuba、V. V. Flambaum 和 A. Derevianko，《物理评论快报》108，120802（2012年）。[18] B. Seiferle、L. von der Wense、P. V. Bilous、I. Amersdorf- fer、C. Lemell、F. Libisch、S. Stellmer、T. Schumm、C. E. D¨ullmann、A. P´alffy、 *et al.*，《自然》573，243（2019年）。[19] T. Sikorsky *et al.*，《物理评论快报》125，142503（2020年）。[20] S. Kraemer *et al.*，（2022年），arXiv:2209.10276。[21] V. V. Flambaum，《物理评论快报》97，092502（2006年）。[22] J. Berengut 和 V. Flambaum，载于 *Journal of Physics: Conference Series* 264 2011，第卷（IOP出版公司，）第012010页。[23] P. Fadeev、J. C. Berengut 和 V. V. Flambaum，《物理评论A》102，052833（2020年）。[24] D. B. Hume 和 D. R. Leibrandt，《物理评论A》93，032138（2016年）。[25] M. E. Kim、W. F. McGrew、N. V. Nardelli、E. R. Clements、Y. S. Hassan、X. Zhang、J. L. Valencia、H. Leopardi、D. B. Hume、T. M. Fortier、A. D. Ludlow 和 D. R. Leibrandt，（2022年），arXiv:2109.09540。[26] E. L. Hahn，《物理评论》80，580（1950年）。[27] L. Viola 和 S. Lloyd，《物理评论A》58，2733（1998年）。[28] H. Y. Carr 和 E. M. Purcell，《物理评论》94，630（1954年）。[29] S. Meiboom 和 D. Gill，《科学仪器评论》29，688（1958年）。[30] S. Kotler、N. Akerman、Y. Glickman、A. Keselman 和 R. Ozeri，《自然》473，61（2011年）。[31] S. Aharony、N. Akerman、R. Ozeri、G. Perez、I. Savoray 和 R. Shaniv，《物理评论D》103，075017（2021年）。[32] G. P. Centers、J. W. Blanchard、J. Conrad、N. L. Figueroa、A. Garcon、A. V. Gramolin、D. F. J. Kim- ball、M. Lawson、B. Pelssers、J. A. Smiga、 *et al.*，《自然·通讯》12，7321（2021年）。[33] A. Quessada、R. P. Kovacich、I. Courtillot、A. Clairon、G. Santarelli 和 P. Lemonde，《光学杂志B：量子与半经典光学》5，S150（2003年）。[34] K. Van Tilburg、N. Leefer、L. Bougas 和 D. Budker，《物理评论快报》115，011802（2015年）。

[35] A. Hees、J. Gu´ena、M. Abgrall、S. Bize 和 P. Wolf，《物理评论快报》**117**，061301（2016年）。[36] K. Beloy *et al.*，《自然》**591**，564（2021年）。[37] C. J. Kennedy、E. Oelker、J. M. Robinson、T. Bothwell、D. Kedar、W. R. Milner、G. E. Marti、A. Derevianko 和 J. Ye，《物理评论快报》**125**，201302（2020年）。[38] W. M. Campbell、B. T. McAllister、M. Goryachev、E. N. Ivanov 和 M. E. Tobar，《物理评论快报》**126**，071301（2021年）。[39] M. Abe、P. Adamson、M. Borcean、D. Bortoletto、K. Bridges、S. P. Carman、S. Chattopadhyay、J. Coleman、N. M. Curfman、K. DeRose、*et al.*，《量子科学与技术》**6**，044003（2021年）。[40] C. J. Campbell、A. G. Radnaev、A. Kuzmich、V. A. Dzuba、V. V. Flambaum 和 A. Derevianko，《物理评论快报》**108**，120802（2012年）。[41] C. Benko、T. K. Allison、A. Cing¨oz、L. Hua、F. Labaye、D. C. Yost 和 J. Ye，《自然·光子学》**8**，530（2014年）。[42] S. G. Porsev、V. V. Flambaum、E. Peik 和 C. Tamm，《物理评论快报》**105**，182501（2010年）。[43] S. G. Porsev 和 V. V. Flambaum，《物理评论A》**81**，032504 2010年( )。[44] D. J. Wineland、C. Monroe、W. M. Itano、D. Leibfried、B. E. King 和 D. M. Meekhof，J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech. **103**，259（1998年）。[45] A. G. Radnaev、C. J. Campbell 和 A. Kuzmich，《物理评论A》**86**，7（2012年）。[46] M. Bishof、X. Zhang、M. J. Martin 和 J. Ye，《物理评论快报》**111**，093604（2013）。[47] A. Derevianko，《物理评论A》**97**，042506（2018）。[48] J. Bovy 和 S. Tremaine，《天体物理学杂志》**756**，89 2012年( )。[49] S. Sivertsson、H. Silverwood、J. I. Read、G. Bertone 和 P. Steger，《皇家天文学会月报》**478**，1677（2018年）。[50] C. F. McKee、A. Parravano 和 D. J. Hollenbach，《天体物理学杂志》**814**，13（2015年）。