arXiv:2302.12964v1 [math.LO] 25 Feb 2023

没有大量重叠平移的博雷尔集 IV

ANDRZEJ ROS LANOWSKI 和 SAHARON SHELAH

Abstract. 我们证明，在相容的情况下，存在一个博雷尔集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，它含有一个序列 $\langle \eta_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ 由 ${}^{\omega}2$ 中互不相同的元素构成，使得对于所有 $\alpha, \beta < \lambda$，$(\eta_\alpha + B) \cap (\eta_\beta + B)$ 都是不可数的；但不存在完美集 P，使得对于任意互不相同的 $\eta, \nu \in P$，$|(\eta + B) \cap (\nu + B)| \geq 6$。这回答了我们先前的著作中的两个问题：[4, 问题 5.1]，[6,问题 7.6]。

1. Introduction

在一系列文章 [4, 5, 6] 中，我们研究了具有许多（但又不至于太多）两两非不交平移的博雷尔集是否存在。例如，在 [5], 中，对于一个可数序数 $\varepsilon < \omega_1$ 和一个整数 $2 \leq \iota < \omega$，我们构造了一个 Σ^0_2 集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，它具有以下性质。

> 在某个 ccc 强迫概念中，存在一个序列 $\langle \rho_\alpha : \alpha < \aleph_\varepsilon \rangle$ 由 ${}^{\omega}2$ 中互不相同的元素组成，使得
>
> $$\big|(\rho_\alpha + B) \cap (\rho_\beta + B)\big| \geq 2\iota \text{ for all } \alpha, \beta < \lambda$$
>
> 但在任何扩张中，都不存在由这类 ρ 构成的完美集。

关于完美阿贝尔波兰群一般情形的类似结果已在 [6] 中给出。然而，在所有这些情形中，讨论非空交时，我们只考虑了有限交。我们似乎确实需要对“非不相交性的见证”进行有限枚举。因此，在 [4, 问题 5.1] 和 [6, 问题 7.6] 中，我们提出了这样的问题：是否存在一种 ccc 强迫概念 $\mathbb{P}$，添加康托尔空间 ${}^{\omega}2$ 的一个 Σ^0_2 子集 B，使得

> 对于某个大小为 λ 的 $H \subseteq {}^{\omega}2$，所有 h、$h' \in H$ 对应的交集 $(B+h) \cap (B+h')$ 都是无限的（分别为不可数的）；但对每个完美集 $P \subseteq {}^{\omega}2$，都存在 x、$x' \in P$，使得交集 $(B+x) \cap (B+x')$ 是有限的（分别为可数的）。

在本文中，我们对上述两个问题给出了肯定的回答。我们的强迫构造对 [4, 5] 的构造略作推广并加以简化。这使我们能够证明一个更强的结果：

2020 年数学主题分类。主要分类 03E35；次要分类 03E15、03E50。关键词和短语。 Σ^0_2 集、康托尔空间、分裂秩、非不交秩、pots 集、npots 集、强迫。第二作者的第1240号出版物。研究部分由以色列科学基金会（ISF）第 1838/19 号拨款资助。两位作者感谢一位不愿透露姓名的人士在论文撰写期间提供打字服务。

若 $\lambda < \lambda_{\omega_1}$，则某个 ccc 强迫概念添加一个 Σ^0_2 集 B，它有 λ 个两两交集均不可数的平移；然而，对每个完美集 $P \subseteq {}^{\omega}2$，都存在 x、$x' \in P$，使得 $|(B+x) \cap (B+x')| < 6$。

本文安排如下。首先，在第2节中，我们回顾 Shelah [7]提出的分裂秩。这个秩对于无完美平方的问题至关重要，对于非不相交平移¯的问题也同样至关重要。然后，在第三节中，我们引入良好指标基 $\mathcal{O}$，并定义一个 Σ^0_2 集的平移何时具有 $\bar{\mathcal{O}}$–大交。这使我们能够在同一框架下处理交集有限、无限和不可数的集合。我们还分析一个 Σ^0_2 集何时可能存在一个由 $\mathcal{O}$–大交的平移构成的完美集，并在有限近似上引入非不交秩。我们的主要相容性定理将在第四节中给出。在文章的最后部分，我们总结研究结果，并提出一些相关问题。

记号：我们的记号是标准的，并且与经典教材（如耶赫 [2] 或 Bartoszyński 和犹大 [1]）中的记号相容。不过，在强迫中，我们沿用较早的约定：较强的条件更大。

(1) 对于集合 u，我们令 $u^{(2)} = \{(x,y) \in u \times u : x \neq y\}$。(2) 由所有取值为 0 和 1 的无限序列构成的康托尔空间 ${}^{\omega}2$，赋予自然的积拓扑，以及按坐标模 2 相加的群运算 $+$。(3) 序数将用希腊字母表的小写初始字母 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 以及 ξ表示。有限序数（非负整数）将用字母 a, $b, c, d, i, j, k, \ell, m, n, M$和 ι表示。(4) 希腊字母 κ, λ 表示不可数基数。(5) 对于强迫概念 $\mathbb{P}$，所有用于经由 $\mathbb{P}$ 得到的扩张中对象的 $\mathbb{P}$–名称，都用下标带波浪号的符号表示（例如 $\underset{\sim}{\tau}$, $\underset{\sim}{X}$）；而 $\underset{\sim}{G}_{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathbb{P}$中的泛滤子的规范 $\mathbb{P}$–名称。

我们充分利用了（${}^{\omega}2, +$）的代数性质，尤其是 ${}^{\omega}2$ 的所有元素都是自身的逆元这一事实。

2. The splitting rank

本节回顾 [7, 第 1] 节中的一些基本事实，这些事实涉及一种秩（定义在可数词汇模型上），并将在第四节构造一个强迫概念时用到。该秩及相关证明也曾在 [4, 第 2]节中介绍。

设 λ是一个基数，$\mathbb{M}$ 是一个论域为 λ 且词汇表可数的模型 τ。

定义 2.1. (1) 通过对序数 δ 的归纳法，对于有限非空集合 $w \subseteq \lambda$，我们定义 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta$ 何时成立。设 $w = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \lambda, |w| = n+1$。

(a) $\mathrm{rk}(w) \geq 0$ 当且仅当对于每个无量词公式 $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ 以及每个 $k \leq n$，若 $\mathbb{M} \models \varphi[\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n]$，则该集合

$$\{\alpha \in \lambda : \mathbb{M} \models \varphi[\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n]\}$$

是不可数的；

(b) 若 δ 是极限，则 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta$ 当且仅当对所有 $\gamma < \delta$，$\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \gamma$；(c) $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta + 1$ 当且仅当对于每个无量词公式 $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$以及每个 $k \leq n$，若 $\mathbb{M} \models \varphi[\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n]$，则存在 $\alpha^* \in \lambda \setminus w$ 使得

$$\mathrm{rk}(w \cup \{\alpha^*\}, \mathbb{M}) \geq \delta \quad \text{and} \quad \mathbb{M} \models \varphi[\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha^*, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n].$$

(2) 有限非空集 $w \subseteq \lambda$ 的秩 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M})$ 定义如下：

- 若 $\neg(\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq 0)$，则 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) = -1$，并且
- 若对所有序数 δ，$\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta$，则 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) = \infty$，并且
- 对某个序数 δ：$\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) = \delta$ 若 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta$ 但 $\neg(\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \delta + 1)$。

定义 2.2. 对于一个序数 ε 和一个基数 λ，令 $\mathrm{NPr}_\varepsilon(\lambda)$ 表示以下命题：“存在一个模型 $\mathbb{M}^*$，其论域为 λ，且词汇表 τ^* 可数，使得 $\sup\{\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}^*) : \emptyset \neq w \in [\lambda]^{<\omega}\} < \varepsilon$。”

$\mathrm{Pr}_\varepsilon(\lambda)$ 是 $\mathrm{NPr}_\varepsilon(\lambda)$ 的否定。

观察 2.3. 若 λ 不可数且 $\mathrm{NPr}_\varepsilon(\lambda)$，则存在一个模型$\mathbb{M}^*$，其论域为 λ，且词汇表 τ^* 可数，使得

- 对所有 $\alpha \in \lambda$，$\mathrm{rk}(\{\alpha\}, \mathbb{M}^*) \geq 0$，并且
- 对每个有限非空集 $w \subseteq \lambda$，$\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}^*) < \varepsilon$。

命题 2.4（参见 [7, 断言 1.7]和/或 [4, 命题 2.6]）。

(1) $\mathrm{NPr}_1(\omega_1)$。(2) 若 $\mathrm{NPr}_\varepsilon(\lambda)$，则 $\mathrm{NPr}_{\varepsilon+1}(\lambda^+)$。(3) 若对 $\mu < \lambda$，且 $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$，有 $\mathrm{NPr}_\varepsilon(\mu)$，则 $\mathrm{NPr}_{\varepsilon+1}(\lambda)$。

命题 2.5（参见 [7,结论 1.8] 和/或 [4, 命题 2.7]）。假设 $\beta < \alpha < \omega_1$, $\mathbb{M}$ 是一个具有可数词汇表 τ 和论域 μ, $m, n < \omega$, $n > 0$, $A \subseteq \mu$ 及 $|A| \geq \beth_{\omega \cdot \alpha}$ 的模型。那么存在 $w \subseteq A$，使得 $|w| = n$ 且 $\mathrm{rk}(w, \mathbb{M}) \geq \omega \cdot \beta + m$ [1]。

定义 2.6。令 λ_{ω_1} 为满足 $\mathrm{Pr}_{\omega_1}(\lambda)$ 的最小基数 λ。

推论 2.7. (1) 如果 $\alpha < \omega_1$，那么 $\mathrm{NPr}_{\omega_1}(\aleph_\alpha)$。(2) $\mathrm{Pr}_{\omega_1}(\beth_{\omega_1})$ 成立。(3) $\aleph_{\omega_1} \leq \lambda_{\omega_1} \leq \beth_{\omega_1}$。

推论 2.8（参见 [4, 命题 2.10 和推论 2.11]）。设 $\mu = \beth_{\omega_1} \leq \kappa$。如果 $\mathbb{P}$ 是一个 ccc 强迫概念，那么 $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{Pr}_{\omega_1}(\mu)$。特别地，如果 $\mathbb{C}_\kappa$是添加 κ 科恩实数的强迫概念，那么 $\Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \lambda_{\omega_1} \leq \mu \leq \mathfrak{c}$。

[1]“ . ”表示序数乘法

3. Spectrum of translation non-disjointness

我们希望更详细地分析具有许多非不交平移的集合，并将讨论限制在 Σ^0_2 $^\omega 2$ 的子集上。本节中我们将沿用以下假设。

假设 3.1。设 $T = \langle T_n : n < \omega \rangle$，其中每个 $T_n \subseteq {}^{\omega>}2$ 都是没有极大节点的树（对于 $n < \omega$）。设 $B = \bigcup_{n<\omega} \lim(T_n)$。

定义 3.2。（1）设 $\mathcal{L}$ 由所有非空集合 $u \subseteq {}^{\omega>}2$ 组成，使得对于某个 $\ell = \ell(u)$，有 $u \subseteq {}^{\ell}2$ $< \omega$。

（2）简单基是一个（严格）偏序 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}, \prec)$，满足 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{L}$，并且对于 $u, u' \in \mathcal{O}$：（a）若 $u \prec u'$，则 $\ell(u) < \ell(u')$ 且 $u = \{\eta{\restriction}\ell(u) : \eta \in u'\}$；（b）存在一个 $v \in \mathcal{O}$，使得 $u \prec v$；（c）若 $\rho \in {}^{\ell(u)}2$，则 $u + \rho \in \mathcal{O}$；且若 $\rho \in {}^{\ell(u')}2$ 并且 $u \prec u'$，则 $u + \rho{\restriction}\ell(u) \prec u' + \rho$。

(3) 设 $(\mathcal{O}, \prec)$ 为一个简单基。$\mathcal{O}$–塔是一个 $\prec$–递增序列 $\bar{u} = \langle u_n : n < \omega \rangle \subseteq \mathcal{O}$（因此对所有 $n < \omega$ 都有 $u_n \prec u_{n+1}$）。$\mathcal{O}$–塔的覆盖 $\bar{u}$ 是集合 $\mathcal{C}(\bar{u})$ 定义 $= \{\eta \in {}^{\omega}2 : (\forall n < \omega)(\eta{\restriction}\ell(u_n) \in u_n)\}$。

(4) 指标基是一个序列 $\langle \mathcal{O}_i : i < i^* \rangle$ 其中 $0 < i^* \leq \omega$，且每个 $\mathcal{O}_i$ 都是一个简单基。

定义 3.3。设 $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}_i : i < i^* \rangle$ 为一个指标基。

(1) 如果对于某个 $\langle \bar{u}_i : i < i^* \rangle$ 对每个 $i < i^*$ 我们都有：则称集合[2] B 的两个平移 $B + x$ 和 $B + y$（对于 $x, y \in {}^{\omega}2$）具有 $\mathcal{O}$–大交。

- $\bar{u}_i$ 是一个 $\mathcal{O}_i$–塔，
- 对某些 $n_1, n_2 < \omega$，
$$\mathcal{C}(\bar{u}_i) \subseteq \big(\text{极限}(T_{n_1}) + x\big) \cap \big(\text{极限}(T_{n_2}) + y\big),$$
- $\mathcal{C}(\bar{u}_i) \cap \mathcal{C}(\bar{u}_j) = \emptyset$ 只要 $j < i^*$, $j \neq i$。

在上述情形下，我们也可以说 $(B + x) \cap (B + y)$ 是 $\mathcal{O}$–大集。

(2) 我们称 B 与 $\mathcal{O}$–小集（或 $\mathcal{O}$–pots–集）完全正交，如果存在一个完美集 $P \subseteq {}^{\omega}2$，使得对所有 $x, y \in P$，平移 $B + x, B + y$ 的交集都是 $\mathcal{O}$–大交。

B 集是一个 $\mathcal{O}$–npots–集，如果它不是 $\mathcal{O}$–pots。

(3) 如果存在一个基数为 λ 的集合 $X \subseteq {}^{\omega}2$，使得对任意 $x, y \in X$，平移 $B + x, B + y$ 都有大交 $\mathcal{O}$，则称 B 有 λ 个两两 $\mathcal{O}$–非不相交平移。

(4) 我们将平移的谱定义为 $\bar{\mathcal{O}}$– B 的非不相交性

$$\mathrm{stnd}_{\bar{\mathcal{O}}}(B) = \Big\{(x, y) \in {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2 : \begin{array}{l}\text{the translations } B + x, B + y \\ \text{have a } \bar{\mathcal{O}}\text{–large intersection.}\end{array}\Big\}.$$

例 3.4。（1）设 $3 \leq \iota \leq \omega$。令 $\mathcal{O}^0 = \{u \in \mathcal{L} : |u| = 1\}$，并定义关系 $\prec^0$：

[2] 请记住假设 3.1

$u \prec^0 v$ 当且仅当 $\ell(u) < \ell(v) \ \wedge\ u = \{\eta{\restriction}\ell(u) :\ \eta \in v\}$。

那么 $\mathcal{O}^{\rm ub} = \langle \mathcal{O}^0 \rangle$ 是一个指标基。

（2）令 $\mathcal{O}^{\rm per} = \{u \in \mathcal{L} : |u| \geq 3\}$，并定义关系 $\prec^{\rm per}$ 如下：$u \prec^{\rm per} v$ 当且仅当 $u = \{\eta{\restriction}\ell(u) : \eta \in v\} \ \wedge\ (\forall \nu \in u)\ (|\{\eta \in v : \nu \lhd \eta\}| \geq 2)$。

那么 $(\mathcal{O}^{\rm per}, \prec^{\rm per})$ 是一个简单基，且 $\mathcal{O}^{\rm per} = \langle \mathcal{O}^{\rm per} \rangle$ 是一个指标基。

当且仅当 $(B + x) \cap (B + y)$ 不可数时，集合 B（对于 $x, y \in {}^{\omega}2$）的两个平移 $B + x$ 和 $B + y$ 具有 $\mathcal{O}^{\rm per}$–大交。

命题 3.5. 设 $\mathcal{O}$ 是一个指标基，并设 T, B 如假设 3.1 中所述。

(1) 集合 B 是一个 $\mathcal{O}$–pots–集，当且仅当存在一个完美集 $P \subseteq {}^{\omega}2$，使得 $P \times P \subseteq \mathrm{stnd}_{\bar{\mathcal{O}}}(B)$。 (2) 集合 $\mathrm{stnd}_{\bar{\mathcal{O}}}(B)$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$。 (3) 设 $\mathfrak{c} < \lambda \leq \mu$，并令 $\mathbb{C}_\mu$ 为添加 μ 个科恩实数的强迫概念。那么，回顾定义 3.3(2)，$\perp \vdash_{\mathbb{C}_\mu}$ “若 B 有 λ 多个两两 $\mathcal{O}$–非不相交平移，则 B 是一个 $\mathcal{O}$–pots–集”。 (4) 假设 $\mathrm{Pr}_{\omega_1}(\lambda)$。若 B 有 λ 多个两两 $\mathcal{O}$–非不相交平移，则它是一个 $\mathcal{O}$–pots–集。

证明。(1,2) 显然；在评估 $\mathrm{stnd}_{\bar{\mathcal{O}}}(B)$ 的复杂度时，注意对于 $\mathcal{O}_i$–塔 $\bar{u}_i = \langle u^i_n : n < \omega \rangle$, $x \in {}^{\omega}2$ 和 $k < \omega$：$\mathcal{C}(\bar{u}_i) \subseteq \lim(T_k) + x$ 当且仅当 $(\forall n < \omega)(u^i_n \subseteq T_k + x)$，且 $\mathcal{C}(\bar{u}_{i_1}) \cap \mathcal{C}(\bar{u}_{i_2}) = \emptyset$ 当且仅当 $(\exists \ell < \omega)(\forall n_1, n_2 > \ell)(u^{i_1}_{n_1}{\restriction}\ell \cap u^{i_2}_{n_2}{\restriction}\ell = \emptyset)$。

(3) 这是上述 (1,2) 和 Shelah [7, 事实 1.16] 的推论。(4) 根据 [7, 断言 1.12(1)]。 □

为了开展论证，我们需要假设我们的指标基 $\mathcal{O}$ 满足一些附加性质。

定义 3.6. 指标基 $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}_i :\ i < i^* \rangle$ 若满足以下要求 (i)–(v)，则称其为良好。

(i) 要么 $i^* \geq 6$，要么对某个 $i < i^*$，我们有

$$\big(\forall u \in \mathcal{O}_i\big)\big(\exists v \in \mathcal{O}_i\big)\big(u \prec v \ \wedge\ |v| \geq 6\big).$$

(ii) 若 $i < i^*$、$u \prec_i v \prec_i v' \prec_i v''$ 和 $\ell(v) \leq \ell \leq \ell(v')$，则 $\{\eta{\restriction}\ell : \eta \in v'\} \in \mathcal{O}_i$ 以及 $u \prec_i \{\eta{\restriction}\ell :\ \eta \in v'\} \prec_i v''$。(iii) 若 $i < i^*$、$u \prec_i v$、$\ell(v) < \ell$，且 $v' \subseteq {}^{\ell}2$ 满足对每个 $\nu \in v$，集合 $\{\eta \in v' : \nu \lhd \eta\}$ 恰有一个元素，则 $v' \in \mathcal{O}_i$ 且 $u \prec_i v'$。

(iv) 假设 $u \prec_i v$ 且 $u' \subseteq u$ 满足 $u' \in \mathcal{O}_i$。令 $v' = \{\eta \in v : \eta{\restriction}\ell(u) \in u'\}$。则 $v' \in \mathcal{O}_i$ 且 $u' \prec_i v'$。(v) 若 $i^* = \omega$，则对每个 $i < i^*$，都存在无穷多个 $j < i^*$ 使得 $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$。

观察 3.7。例 3.4 中引入的指标基 $\mathcal{O}^\iota$ 和 $\mathcal{O}^{\rm per}$ 是良好的。

P 命题 3.8。设指标基 $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}_i : i < i^* \rangle$ 是良好的。那么：(⊛) 若 $2 \le K < \omega$ 且 $\bar{u}^k$ （对于 $k < K$）是某个$i(k) < i^*$的 $\mathcal{O}_{i(k)}$–塔，则存在 $\mathcal{O}_{i(k)}$–塔 $\bar{v}^k = \langle v^k_n : n < \omega \rangle$ （对于 $k < K$），使得

- $\mathcal{C}(\bar{v}^k) = \mathcal{C}(\bar{u}^k)$，$v^k_0 = u^k_0$ 且
- $\bigcap_{k \in K} \{\ell(v^k_n) : n < \omega\}$ 是无限的。

证明。对 K 作归纳。对于 $K = 2$，我们按如下方式进行。设 $\bar{u}^0$ 是一个 $\mathcal{O}_{i(0)}$–塔，且 $\bar{u}^1$ 是一个 $\mathcal{O}_{i(1)}$–塔。归纳地选取一个序列 $\langle n_k : k < \omega \rangle$，使得

- $5 < n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$,
- $\ell(u^1_5) < \ell(u^0_{n_0})$,
- if $\ell(u^1_j) \le \ell(u^0_{n_k}) < \ell(n^1_{j+1})$, then $\ell(n^1_{j+5}) \le \ell(n^0_{k+1})$.

对于 $k < \omega$，令 $j(k)$ 满足 $\ell(u^1_{j(k)}) \le \ell(u^0_{n_k}) < \ell(n^1_{j(k)+1})$。设 $v_k = \{\eta{\restriction}\ell(u^0_{n_k}) : \eta \in u^1_{j(k)+1}\}$。由 3.6(ii)，$v_k \in \mathcal{O}_{i(1)}$ 且 $u^1_{j(k)-1} \prec_{i(1)} v_k \prec_{i(1)} u^1_{j(k)+2}$。其余部分应该是显而易见的。□

本节余下部分中，我们将作如下假设。

假设 3.9。(1) $T = \langle T_n : n < \omega \rangle$, B 与假设 3.1 中相同，(2) $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}_i : i < i^* \rangle$ 是一个良好指标基。此外，$\mathcal{O}_i = (\mathcal{O}_i, \prec_i)$，(3) 存在互不相同的 $x, y \in {}^{\omega}2$，使得 $(B + x) \cap (B + y)$ 是 $\mathcal{O}$– 大的。

定义 3.10. 令 $\mathbf{M}^{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 由所有元组组成

$$\mathbf{m} = (\ell^{\mathbf{m}}, \iota^{\mathbf{m}}, u^{\mathbf{m}}, \bar{h}^{\mathbf{m}}, \bar{g}^{\mathbf{m}}) = (\ell, \iota, u, \bar{h}, \bar{g})$$

使得：

(a) $0 < \ell < \omega$, $u \subseteq {}^{\ell}2$ 和 $2 \le |u|$，且若 $i^* < \omega$，则 $\iota = i^*$，否则 $3 \le \iota < \omega$；(b) $\bar{g} = \langle g_i : i < \iota \rangle$，其中[3] $g_i : u^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow \mathcal{O}_i$ 满足 $g_i(\eta, \nu) = g_i(\nu, \eta)$ 且 $\ell\big(g_i(\eta, \nu)\big) = \ell$ 对每个 $(\eta, \nu) \in u^{\langle 2 \rangle}$ 均成立；(c) 若 $(\eta, \nu) \in u^{\langle 2 \rangle}$ 且 $i < i' < \iota$，则 $g_i(\eta, \nu) \cap g_{i'}(\eta, \nu) = \emptyset$；(d) $\bar{h} = \langle h_i : i < \iota \rangle$，其中 $h_i : u^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow \omega$；(e) 对每个 $(\eta, \nu) \in u^{\langle 2 \rangle}$，若 $\sigma \in g_i(\eta, \nu)$，则 $\eta + \sigma \in T_{h_i(\eta,\nu)}$。

定义 3.11. 假设 $\mathbf{m} = (\ell, \iota, u, \bar{h}, \bar{g}) \in \mathbf{M}^{\bar{T},\ \bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\rho \in {}^{\ell}2$。我们定义 $\mathbf{m} + \rho = (\ell', \iota', u', h', \bar{g}')$ 为

- $\ell' = \ell$, $\iota' = \iota$, $u' = \{\eta + \rho : \eta \in u\}$,

[3] remember $u^{\langle 2 \rangle} = \{(\eta, \nu) \in u \times u : \eta \ne \nu\}$

- $\bar{g}' = \langle g'_i : \ i < \iota' \rangle$，其中 $g'_i : (u')^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow \mathcal{O}_i : (\eta + \rho, \nu + \rho) \mapsto g_i(\eta, \nu) + \rho$，
- $\bar{h}' = \langle h'_i : \ i < \iota' \rangle$，其中 $h'_i : (u')^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow \omega$ 满足，对于 $(\eta, \nu) \in u^{\langle 2 \rangle}$，$h'_i(\eta + \rho, \nu + \rho) = h_i(\eta, \nu)$。

此外，若 $\rho \in {}^{\omega}2$，则我们令 $\mathrm{m} + \rho = \mathrm{m} + (\rho \restriction \ell)$。

观察 3.12。(1) 若 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\rho \in {}^{\ell_{\mathrm{m}}}2$，则 $\mathrm{m} + \rho \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$。(2) 对每个 $\rho \in {}^{\omega}2$，映射 $\mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}} \longrightarrow \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}} : \mathrm{m} \mapsto \mathrm{m} + \rho$ 是一个双射。

定义 3.13。设 $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$。当且仅当满足以下条件时，我们称 n 严格扩张 m（简记为 $\mathrm{m} \sqsubset \mathrm{n}$）：

- $\ell_{\mathrm{m}} < \ell_{\mathrm{n}}$，$\iota_{\mathrm{m}} \leq \iota_{\mathrm{n}}$，$u_{\mathrm{m}} = \{\eta \restriction \ell_{\mathrm{m}} : \ \eta \in u_{\mathrm{n}}\}$，以及
- 对于每个 $(\eta, \nu) \in (u_{\mathrm{n}})^{\langle 2 \rangle}$ 使得 $\eta \restriction \ell_{\mathrm{m}} \neq \nu \restriction \ell_{\mathrm{m}}$ 且每个 $i < \iota_{\mathrm{m}}$，我们有 – $g_{\mathrm{m}i}(\eta \restriction \ell_{\mathrm{m}} \nu \restriction \ell_{\mathrm{m}}) \prec g_{\mathrm{n}i}(\eta, \nu)$，以及 – $h_{\mathrm{m}i}(\eta \restriction \ell_{\mathrm{m}} \nu \restriction \ell_{\mathrm{m}}) = h_{\mathrm{n}i}(\eta, \nu)$。

定义 3.14. (1) 通过对序数的归纳，α 我们定义 $D^{\bar{T}}(\alpha) \subseteq \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$。我们规定：

- $D^{\bar{T}}(0) = \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$，
- α 如果是极限序数，那么 $D^{\bar{T}}(\alpha) = \bigcap_{\beta<\alpha} D^{\bar{T}}(\beta)$，
- $D^{\bar{T}}\ \alpha$ 如果 $\alpha = \beta + 1$，那么 ( ) 由所有满足以下条件的 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 组成：对于每个每个 $\nu \in u_{\mathrm{m}}$，存在一个 $\mathrm{n} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 满足 – $\mathrm{m} \sqsubset \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{n} \in D^{\bar{T}}(\beta)$，并且如果 $i^* = \omega$，那么 $\iota_{\mathrm{m}} < \iota_{\mathrm{n}}$，以及 – 集合 $\{\eta \in u_{\mathrm{n}} : \ \nu \lhd \eta\}$ 至少有两个元素

(2) 我们定义一个函数[4] $\mathrm{ndrk}^{\bar{T}}_{\bar{\mathcal{O}}} = \mathrm{ndrk} : \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}} \longrightarrow \mathrm{ON} \cup \{\infty\}$ 如下。若对于所有序数 α，$\mathrm{m} \in D^{\bar{T}}(\alpha)$，则称 $\mathrm{ndrk}(\mathrm{m}) = \infty$。否则，$\mathrm{ndrk}(\mathrm{m})$ 是使 $\mathrm{m} \notin D^{\bar{T}}(\alpha + 1)$ 成立的最小序数 α。 ()

3 我们还定义

$$\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}}(\bar{T}) = \mathrm{NDRK}(\bar{T}) = \sup\{\mathrm{ndrk}(\mathbf{m}) + 1 : \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}\}.$$

引理 3.15。（1）关系 $\sqsubset$ 是 $\mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 上的严格偏序。

(2) 如果 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\mathrm{m} \sqsubset \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{n} \in D^{\bar{T}}(\alpha)$，那么 $\mathrm{m} \in D^{\bar{T}}(\alpha)$。(3) 如果 $\alpha < \beta$，那么 $D^{\bar{T}}(\beta) \subseteq D^{\bar{T}}(\alpha)$。因此，对于 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$，$\mathrm{m} \in D^{\bar{T}}(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha \leq \mathrm{ndrk}(\mathrm{m})$。(4) 如果 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\rho \in {}^{\omega}2$，那么 $\mathrm{ndrk}(\mathrm{m}) = \mathrm{ndrk}(\mathrm{m} + \rho)$。(5) 如果 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\mathrm{ndrk}(\mathrm{m}) \geq \omega_1$，那么存在 $\mathrm{n} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$，使得 $\mathrm{m} \sqsubset \mathrm{n}$，$|\{\eta \in u^{\mathrm{n}} : \ \nu \lhd \eta\}| \geq 2$ 对于每个 $\nu \in u^{\mathrm{m}}$，如果 $i^* = \omega$，那么 $\iota^{\mathrm{m}} < \iota^{\mathrm{n}}$，且 $\mathrm{ndrk}(\mathrm{n}) \geq \omega_1$。(6) 如果 $\mathrm{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\infty > \mathrm{ndrk}(\mathrm{m}) = \beta > \alpha$，那么存在 $\mathrm{n} \in \mathbf{M}_{\bar{T}、\bar{\mathcal{O}}}$，使得 $\mathrm{m} \sqsubset \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{ndrk}(\mathrm{n}) = \alpha$。

(7) 如果 $\mathrm{NDRK}(T) \geq \omega_1$，那么 $\mathrm{NDRK}(T) = \infty$。

[4] ndrk 表示非不交秩

(8) 假设 $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $u' \subseteq u^{\mathbf{m}}$、$|u'| \geq 2$。令 $\ell' = \ell^{\mathbf{m}}$、$\iota' = \iota^{\mathbf{m}}$，并且对于 $i < \iota'$ 令 $h'_i = h_i^{\mathbf{m}} {\restriction} (u')^{\langle 2\rangle}$ 和 $g'_i = g_i^{\mathbf{m}} {\restriction} (u')^{\langle 2\rangle}$。令 $\mathbf{m} {\restriction} u' = (\ell', u', i', h', \bar{g}')$。那么 $\mathbf{m} {\restriction} u' \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}$ 且 $\mathrm{ndrk}(\mathbf{m}) \leq \mathrm{ndrk}(\mathbf{m} {\restriction} u')$。

证明。与 [4, 引理 3.10]的证明完全相同。 □

命题 3.16. 对于良好指标基 $\mathcal{O}$，以下条件(a) – (d)等价。

(a) $\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}}(T) \geq \omega_1$。(b) $\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}}(T) = \infty$。(c) B 与 $\mathcal{O}$–小集完全正交（见 3.3(2)）。(d) 在某个 ccc 强迫扩张中，集合 B 有 λ_{ω_1} 多个两两 $\mathcal{O}$–非不相交平移（见 3.3(3)）。

证明。证明思路与 [4, 命题 3.11]非常相近。

(c) $\Rightarrow$ (d) 假设(c)成立，并设 $P \subseteq {}^{\omega}2$ 是一个完美集，使得对所有 x, $y \in P$，平移 $B + x$, $B + y$的交集均为 $\mathcal{O}$–大交。令$\kappa = \beth_{\omega_1}$。由推论 2.8，$\Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \lambda_{\omega_1} \leq \mathfrak{c}$。由命题 3.5(2)，公式“$P \times P \subseteq \mathrm{stnd}_{\bar{\mathcal{O}}}(B)$”是 Π^1_2，因此它在由 $\mathbb{C}_\kappa$得到的强迫扩张中成立。现在很容易推出(d)。

(d) $\Rightarrow$ (a) 假设 (d) 成立，并令 $\mathbb{P}$ 为见证这一假设的 ccc 强迫概念，$G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上泛型。我们在 $\mathbf{V}[G]$中讨论。

令 $\langle \eta_\alpha : \alpha < \lambda_{\omega_1}\rangle$ 是 ${}^{\omega}2$ 的一个由互不相同元素组成的序列，使得

$$\big(\forall \alpha < \beta < \lambda_{\omega_1}\big)\big((B + \eta_\alpha) \cap (B + \eta_\beta) \text{ is } \bar{\mathcal{O}}\text{–large }\big).$$

回忆定义 3.2(3)：一个 $\mathcal{O}_i$–塔是一个 $\prec_i$–递增序列 $\bar{u} = \langle u_n : n < \omega\rangle$，其覆盖 $\mathcal{C}(\bar{u})$ 是集合 $\{\eta \in {}^{\omega}2 : (\forall n < \omega)(\eta {\restriction} \ell(u_n) \in u_n)\}$。

令 $\tau = \{R_{\mathbf{m}} : \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}\}$ 为一个词汇表，其中每个 $R_{\mathbf{m}}$都是一个 $|u^{\mathbf{m}}|$元关系符号。令 $\mathbb{M} = \big(\lambda_{\omega_1}, \{R^{\mathbb{M}}_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}}\big)$ 为词汇表 τ 中的模型，其中对于 $\mathbf{m} = (\ell, \iota, u, h, g) \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}$关系 $R^{\mathbb{M}}_{\mathbf{m}}$定义为

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{M}}_{\mathbf{m}} = \Big\{ & (\alpha_0, \dots, \alpha_{|u|-1}) \in (\lambda_{\omega_1})^{|u|} : \{\eta_{\alpha_0} {\restriction} \ell, \dots, \eta_{|u|-1} {\restriction} \ell\} = u \text{ and} \\ & \text{for each distinct } j_1, j_2 < |u| \text{ and every } i < \iota \\ & \text{there is an } \mathcal{O}_i\text{–tower } \bar{u}^i(j_1, j_2) = \langle u^i_n(j_1, j_2) : n < \omega\rangle \text{ such that} \\ & g_i(\eta_{\alpha_{j_1}} {\restriction} \ell, \eta_{\alpha_{j_2}} {\restriction} \ell) = u^i_0(j_1, j_2) \text{ and } \mathcal{C}\big(\bar{u}^i(j_1, j_2)\big) \text{ is included in} \\ & [\lim(T_{h_i(\eta_{\alpha_{j_1}} {\restriction} \ell, \eta_{\alpha_{j_2}} {\restriction} \ell)}) + \eta_{\alpha_{j_1}}] \cap [\lim(T_{h_i(\eta_{\alpha_{j_2}}, \eta_{\alpha_{j_1}})}) + \eta_{\alpha_{j_2}}] \Big\}. \end{aligned}$$

断言 3.16.1。(1) 如果 α_0、α_1、……、$\alpha_{j-1} < \lambda_{\omega_1}$彼此不同，且为 $j \geq 2$, 那么对无穷多个 $k < \omega$，存在 $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}$使得

$$\ell^{\mathbf{m}} = k, \quad u^{\mathbf{m}} = \{\eta_{\alpha_0} {\restriction} k, \dots, \eta_{\alpha_{j-1}} {\restriction} k\} \quad \textit{and} \quad \mathbb{M} \models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-1}].$$

(2) 假设 $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\bar{T},\,\bar{\mathcal{O}}}$、$j < |u^{\mathbf{m}}|$、$\alpha_0$、$\alpha_1$、……、$\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1} < \lambda_{\omega_1}$和 $\alpha^* < \lambda_{\omega_1}$ 两两不同，且满足

- $\mathbb{M} \models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$ *and*
- $\mathbb{M} \models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha^*, \alpha_{j+1}, \dots \alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$.

那么对于无穷多个 $k<\omega$，存在 $\mathbf{n}\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma}$ 使得 $\mathbf{m}\sqsubset\mathbf{n}$ 且 $\ell^{\mathbf{n}}=k$、$u^{\mathbf{n}}=\{\eta_{\alpha_0}{\restriction}k,\dots,\eta_{\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}}{\restriction}k,\eta_{\alpha^*}{\restriction}k\}$ 和 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{n}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1},\alpha^*]$；如果 $i^*=\omega$，那么还满足 $\iota^{\mathbf{m}}<\iota^{\mathbf{n}}$。

(3) 如果 $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma}$ 且 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$，则

$$\mathrm{rk}(\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}\},\mathbb{M})\le \mathrm{ndrk}^{\bar T}_{\bar{\mathcal{O}}}(\mathbf{m}).$$

断言的证明。(1) 这是下面证明的一个较简单版本。

(2) 根据 $R^{\mathbb{M}}_{\mathbf{m}}$ 的定义，由于 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1},\alpha^*,\alpha_{j+1},\dots\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$且 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$，我们可以选取一个序列

$$\langle \bar u^i(j_1,j_2):(j_1,j_2)\in\big(|u^{\mathbf{m}}|+1\big)^{\langle 2\rangle}\ \wedge\ i<\iota^{\mathbf{m}}\rangle$$

满足以下要求。令 $\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|}=\alpha^*$，对于 $(j_1,j_2)\in\big(|u^{\mathbf{m}}|+1\big)^{\langle 2\rangle}$ 且 $i<\iota^{\mathbf{m}}$:

- $\bar u^i(j_1,j_2)=\bar u^i(j_2,j_1)$ 是一个 $\mathcal{O}_i$–塔,
- 若 $\{j_1,j_2\}\neq\{j,|u_{\mathbf{m}}|\}$，则 $u^i_0(j_1,j_2)=g_{\mathbf{m}i}(\eta_{\alpha_{j_1}}{\restriction}\ell_{\mathbf{m}},\eta_{\alpha_{j_2}}{\restriction}\ell_{\mathbf{m}})$,
- 若 $i_1<i_2<\iota_{\mathbf{m}}$，则 $\mathcal{C}\big(\bar u^{i_1}(j_1,j_2)\big)\cap\mathcal{C}\big(\bar u^{i_2}(j_1,j_2)\big)=\emptyset$,
- 若 $\{j_1,j_2\}\neq\{j,|u_{\mathbf{m}}|\}$，则 $\mathcal{C}\big(\bar u^i(j_1,j_2)\big)$ 包含于

$$[\lim(T_{h^{\mathbf{m}}_i(\eta_{\alpha_{j_1}}{\restriction}\ell^{\mathbf{m}},\eta_{\alpha_{j_2}}{\restriction}\ell^{\mathbf{m}})})+\eta_{\alpha_{j_1}}]\cap[\lim(T_{h^{\mathbf{m}}_i(\eta_{\alpha_{j_2}}{\restriction}\ell^{\mathbf{m}},\eta_{\alpha_{j_1}}{\restriction}\ell^{\mathbf{m}})})+\eta_{\alpha_{j_2}}],$$

- 对于某个 N'_i,N''_i，我们有

$$\mathcal{C}\big(\bar u^i(j,|u^{\mathbf{m}}|)\big)\subseteq[\lim(T_{N'_i})+\eta_{\alpha_j}]\cap[\lim(T_{N''_i})+\eta_{\alpha^*}].$$

由于 $\mathcal{O}$ 是良好的（且 $\iota^{\mathbf{m}}$ 和 $u^{\mathbf{m}}$ 是有限的），我们可以使用 3.8(⊛) 并修改$\bar u^i(j_1,j_2)$（而不改变 $u^i_0(j_1,j_2)$），并要求集合

$$A=\bigcap_{i<\iota^{\mathbf{m}}}\ \bigcap_{j_1<j_2\le|u^{\mathbf{m}}|}\big\{\ell\big(u^i_n(j_1,j_2)\big):n\in\omega\big\}$$

是无限的。令 $\ell_0\in A\setminus(\ell^{\mathbf{m}}+1)$ 大于 $A\setminus(\ell^{\mathbf{m}}+1)$ 的第二个元素，并满足 $\eta_{\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|}}{\restriction}\ell_0\neq\eta_{\alpha_j}{\restriction}\ell_0$；每当 $x\in\mathcal{C}(\bar u^{i_1}(j_1,j_2))$ 时，$x{\restriction}\ell_0\neq y{\restriction}\ell_0\ \ y\in\mathcal{C}(\bar u^{i_2}(j_1,j_2))$，$(j_1,j_2)\in\big(|u^{\mathbf{m}}|+1\big)^{\langle 2\rangle}$ 以及 $i_1<i_2<\iota^{\mathbf{m}}$。

若 $i^*<\omega$，令 $\iota=\iota^{\mathbf{m}}=i^*$；否则令 $\iota=\iota^{\mathbf{m}}+1$。在后一种情况下，我们还必须选取 $\mathcal{O}_{\iota^{\mathbf{m}}}$–塔 $\bar u^{\iota^{\mathbf{m}}}(j_1,j_2)$；但为确保满足 3.10(c)，我们必须修改已经选取的塔 $\bar u^i(j_1,j_2)$（对于 $i<\iota^{\mathbf{m}}$）。暂时固定 $(j_1,j_2)\in\big(|u^{\mathbf{m}}|+1\big)^{\langle 2\rangle}$。令

$$K=\sum\big\{\big|u^i_n(j_1,j_2)\big|:\ell(u^i_n(j_1,j_2))=\ell_0\ \wedge\ i<\iota^{\mathbf{m}}\ \wedge\ n<\omega\big\}.$$

根据 3.6(v) 以及关于 $\langle\eta_\alpha:\alpha<\lambda_{\omega_1}\rangle$ 的假设，存在无穷多个$\mathcal{O}_{\iota^{\mathbf{m}}}$–塔 $\bar v^k$，使得它们的覆盖两两不相交，并且包含于$\big(\lim(T_{k_1})+\eta_{\alpha_{j_1}}\big)\cap\big(\lim(T_{k_2})+\eta_{\alpha_{j_2}}\big)$，其中某些 k_1、k_2。

选取足够大的 $\ell(j_1,j_2)\in A\setminus(\ell_0+1)$，使得存在多于 $K+1$many 个 k，满足集合 $\{\eta{\restriction}\ell(j_1,j_2):\eta\in v^k_n\}$（当 n 足够大时）两两不相交，并且对所有这些 k，都有 $\ell(v^k_5)<\ell(j_1,j_2)$。对于 $i<i^{\mathbf{m}}$，令 $n(i)$ $m(i)$ 满足 $\ell(u^i_{n(i)}(j_1,j_2))=\ell_0$ 且 $\ell(u^i_{m(i)}(j_1,j_2))=\ell(j_1,j_2)$，并令 $v^i\subseteq$

$u^i_{m(i)}(j_1,j_2)$ 满足：对每个 $\nu\in u^i_{n(i)}(j_1,j_2)$，集合 $\{\eta\in v^i:\ \nu\lhd\eta\}$ 恰有一个元素。由 3.6(iii) 可得

$$v^i\in\mathcal{O}_i\quad\text{ and }\quad u^i_{n(i)-1}(j_1,j_2)\prec_i v^i.$$

反复应用 3.6(iv)，我们可以修改塔 $\bar{u}^i(j_1,j_2)$（针对 $i<i^{\mathbf{m}}$），并要求

- 对于每个 $i<\iota_{\mathbf{m}}$，存在某个 $n^*(i)$，

$\ell(u^i_{n^*(i)}(j_1,j_2))=\ell(j_1,j_2)$ 且 $\left|u^i_{n^*(i)}(j_1,j_2)\right|=\left|\{\eta{\restriction}\ell_0:\eta\in u^i_{n^*(i)}(j_1,j_2)\}\right|$.回顾塔 $\bar{v}^k$，我们可以选取其中一个 $\bar{v}^{k^*}=\bar{v}(j_1,j_2)$，使其具有这样的性质：对于所有足够大的 n

$$\{\eta{\restriction}\ell(j_1,j_2):\eta\in v_n(j_1,j_2)\}\cap\bigcup\{u^i_{n^*(i)}(j_1,j_2):i<\iota^{\mathbf{m}}\}=\emptyset.$$

现在取消对 (j_1,j_2) 的固定，并令 $\ell=\max\{\ell(j_1,j_2):(j_1,j_2)\in(|u^{\mathbf{m}}|+1)^{\langle 2\rangle}\}$。

假设 $j_1<j_2\le|u^{\mathbf{m}}|$，并令 n 满足 $\ell(v_{n-1}(j_1,j_2))<\ell\le\ell(v_n(j_1,j_2))$。由 3.6(ii)，我们可以令

- $u^{\iota^{\mathbf{m}}}_0(j_1,j_2)=u^{\iota^{\mathbf{m}}}_0(j_2,j_1)=\{\eta{\restriction}\ell:\eta\in v_n(j_1,j_2)\}$,
- $u^{\iota^{\mathbf{m}}}_m(j_1,j_2)=u^{\iota^{\mathbf{m}}}_m(j_2,j_1)=v_{n+m}(j_1,j_2)$ for $m>0$,

得到一个 $\mathcal{O}_{\iota^{\mathbf{m}}}$–塔 $\bar{u}^{\iota^{\mathbf{m}}}(j_1,j_2)$。我们还固定 $k(j_1,j_2)$ $k(j_2,j_1)$，使得

$$\mathcal{C}(\bar{u}^{\iota^{\mathbf{m}}}(j_1,j_2))\subseteq\left(\lim(T_{k(j_1,j_2)}+\eta_{\alpha_{j_1}}\right)\cap\left(\lim(T_{k(j_2,j_1)}+\eta_{\alpha_{j_2}}\right).$$

若 $i^*=\iota^{\mathbf{m}}<\omega$，则无需进行导出 $\bar{u}^{\iota^{\mathbf{m}}}(j_1,j_2)$ 的步骤，我们只需令 $\ell=\min(A\setminus(\ell_0+1))$。

令 $u=\left\{\eta_{\alpha_0}{\restriction}\ell,\dots,\eta_{\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}}{\restriction}\ell,\eta_{\alpha^*}{\restriction}\ell\right\}$。

对每个 $i<\iota$ 以及 $(j_1,j_2)\in\left(|u^{\mathbf{m}}|+1\right)^{\langle 2\rangle}$，令 $g_i(\eta_{\alpha_{j_1}}{\restriction}\ell,\eta_{\alpha_{j_2}}{\restriction}\ell)=u^i_n(j_1,j_2)$，其中 n 满足 $\ell\left(u^i_n(j_1,j_2)\right)=\ell$。这定义了 g_i：对 $i<\iota$，有 $u^{\langle 2\rangle}\longrightarrow\mathcal{O}_i$。对于 $(\nu_1,\nu_2)\in u^{\langle 2\rangle}$，我们还令

$$h_i(\nu_1,\nu_2)=\begin{cases}h^{\mathbf{m}}_i(\nu_1{\restriction}\ell^{\mathbf{m}},\nu_2{\restriction}\ell^{\mathbf{m}}) & \text{if } \nu_1{\restriction}\ell^{\mathbf{m}}\neq\nu_2{\restriction}\ell^{\mathbf{m}},\ i<\iota^{\mathbf{m}},\\ N'_i & \text{if } \nu_1\lhd\eta_{\alpha_j},\ \nu_2\lhd\eta_{\alpha^*},\ i<\iota^{\mathbf{m}},\\ N''_i & \text{if } \nu_1\lhd\eta_{\alpha^*},\ \nu_2\lhd\eta_{\alpha_j},\ i<\iota^{\mathbf{m}},\\ k(j_1,j_2) & \text{if } \nu_1\lhd\eta_{\alpha_{j_1}},\ \nu_2\lhd\eta_{\alpha_{j_2}},\ i=\iota^{\mathbf{m}}<\iota.\end{cases}$$

显然，$\mathbf{n}=(\ell,\iota,u,g,h)\in\mathbf{M}^{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 符合要求。

(3) 通过对 β 进行归纳法，我们证明

for every $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ and *all* $\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}<\lambda_{\omega_1}$ such that $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$:
$\beta\le\mathrm{rk}(\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}\},\mathbb{M})$ implies $\beta\le\mathrm{ndrk}(\mathbf{m})$.

Steps $\beta=0$ and β is limit: 显然。

Step $\beta=\gamma+1$: 假设 $\mathbf{m}\in\mathbf{M}^{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}}$ 且 α_0、…、$\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}<\lambda_{\omega_1}$ 满足 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$ 和 $\gamma+1\le$秩$(\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}\},\mathbb{M})$。令 $\nu\in u^{\mathbf{m}}$，于是对于某个 $j<|u^{\mathbf{m}}|$，有 $\nu=\eta_{\alpha_j}{\restriction}\ell^{\mathbf{m}}$。由于 $\gamma+1\le$秩$(\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}\},\mathbb{M})$，我们可以找到 $\alpha^*\in\lambda_{\omega_1}\setminus\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}\}$，使得

$$\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1},\alpha^*,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}]$$

且 秩($\{\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1},\alpha^*\},\mathbb{M}$) $\geq\gamma$。根据子句 (2)，我们可以找到 $\mathbf{n}\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma}$使得 $\mathbf{m}\sqsubset\mathbf{n}$ 且 $u^{\mathbf{n}}=\{\eta_{\alpha_0}{\restriction}\ell^{\mathbf{n}},\dots,\eta_{\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1}}{\restriction}\ell^{\mathbf{n}},\eta_{\alpha^*}{\restriction}\ell^{\mathbf{n}}\}$，并且若 $i^*=\omega$则 $\iota^{\mathbf{m}}<\iota^{\mathbf{n}}$，且 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{n}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{|u^{\mathbf{m}}|-1},\alpha^*]$。那么也有 $|\{\eta\in u^{\mathbf{n}}:\ \nu\lhd\eta\}|\geq 2$。根据归纳假设，我们也有 $\gamma\leq\mathrm{ndrk}(\mathbf{n})$。现在可以很容易地得出 $\gamma+1\leq\mathrm{ndrk}(\mathbf{m})$。□

根据 λ_{ω_1}的定义，

$(\odot)$ $\sup\{\mathrm{rk}(w,\mathbb{M}):\emptyset\neq w\in[\lambda_{\omega_1}]^{<\omega}\}\geq\omega_1$

现在，假设 $\beta<\omega_1$。根据（$\odot$），存在互不相同的 α_0、……、$\alpha_{j-1}<\lambda_{\omega_1}$、$j\geq 2$，使得 $\mathrm{rk}(\{\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1}\},\mathbb{M})\geq\beta$。根据断言 3.16.1(1)，我们可以找到 $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma}$使得 $\mathbb{M}\models R_{\mathbf{m}}[\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1}]$。于是，根据断言 3.16.1(3)，我们还有 $\mathrm{ndrk}^{\bar\tau}_{\bar\sigma}(\mathbf{m})\geq\beta$。因此，$\mathrm{NDRK}(\bar\tau)\geq\omega_1$。

上述所有讨论都是在 $\mathbf{V}[G]$ 中进行的。然而，秩函数 $\mathrm{ndrk}^{\bar\tau}_{\bar\sigma}$ 是绝对的，因此我们也可以断言，在 $\mathbf{V}$ 中有$\neg\mathrm{NDRK}_{\bar\sigma}(\tau)\geq\omega_1$。□

4. The main result

本节将构造一个强迫概念，添加一个序列 τ，其中的元素是 ${}^{\omega>}2$ 的子-树，并且 $\mathrm{NDRK}_{\bar\sigma^6}(\tau)<\omega_1$，但同时存在许多 $\mathcal{O}$–不相交的平移（对于一个良好 $\mathcal{O}$）。序列 τ 将通过有限逼近添加，因此我们需要定义 3.10 的有限版本。

定义 4.1。假设

(a) $0<n,M<\omega$, $\bar t=\langle t_m:\ m<M\rangle$，且每个 t_m 都是 ${}^{n\geq}2$ 的一棵子树，其中所有终端分支的长度均为 n，(b) $T_j\subseteq{}^{\omega>}2$（对于 $j<\omega$）是没有极大节点的树，$T=\langle T_j:j<\omega\rangle$ 且 $t_m=T_m\cap{}^{n\geq}2$ 对于 $m<M$，(c) $\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma^6}$按照定义 3.10 定义，其中 $\bar\sigma^6$ 在例 3.4(1) 中引入。

我们令 $\mathbf{M}^n_{\bar t,\bar\sigma^6}$由所有满足以下条件的元组 $\mathbf{m}=(\ell^{\mathbf{m}},6,u^{\mathbf{m}},h^{\mathbf{m}},\bar g^{\mathbf{m}})\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma^6}$组成：$\ell^{\mathbf{m}}\leq n$ 且 $\mathrm{rng}(h^{\mathbf{m}}_i)\subseteq M$ 对每个 $i<6$均成立。

$\mathbf{M}^n_{\bar t,\bar\sigma^6}$上的扩张关系 $\sqsubset$ 继承自 $\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma^6}$（参见定义 3.13）。

观察 4.2. (1) $\mathbf{M}^n_{\bar t,\bar\sigma^6}$ 的定义不依赖于对 τ的选择，只要满足子句 4.1(c)。(2) 若 $\mathbf{m}\in\mathbf{M}^n_{\bar t,\bar\sigma^6}$ 且 $\rho\in{}^{\ell^{\mathbf{m}}}2$，则 $\mathbf{m}+\rho\in\mathbf{M}^n_{\bar t,\bar\sigma^6}$（请记住定义 3.11）。

引理 4.3（参见 [3,引理 2.3]）。设 $0<\ell<\omega$，且设 $\mathcal{B}\subseteq{}^{\ell}2$ 是（在 ${}^{\ell}2$，$+$中）关于 $\mathbb{Z}_2$ 的线性无关集。若 $\mathcal{A}\subseteq{}^{\ell}2$、$|\mathcal{A}|\geq 5$ 且 $\mathcal{A}+\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}+\mathcal{B}$，则存在唯一的 $x\in{}^{\ell}2$，使得 $\mathcal{A}+x\subseteq\mathcal{B}$。

定理 4.4. 假设不可数基数 λ 满足 $\mathrm{NPr}_{\omega_1}(\lambda)$，并设 $\mathcal{O}=\langle\mathcal{O}_i:i<i^*\rangle$ 是一个良好指标基。那么存在一个

大小为 λ 的 ccc 强迫概念 $\mathbb{P}$，使得

$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " *for some* Σ^0_2 $\bar{\mathcal{O}}^6$–**npots**–*set* $B = \bigcup\limits_{n<\omega} \lim(T_n) \subseteq {}^{\omega}2$ *there is a sequence* $\langle \eta_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ *of distinct elements of* ${}^{\omega}2$ *such that all intersections* $(\eta_\alpha + B) \cap (\eta_\beta + B)$ *are* $\bar{\mathcal{O}}$*–large for* $\alpha, \beta < \lambda$ ".

证明。固定一个可数词汇表 $\tau = \{R_{n,\zeta} : n、\zeta < \omega\}$，其中 $R_{n,\zeta}$ 是一个 n 元关系符号（对于 $n、\zeta < \omega$）。根据关于 λ 的假设，我们可以固定词汇表 τ 中的一个模型 $\mathbb{M} = (\lambda、\{R^{\mathbb{M}}_{n,\zeta}\}_{n,\zeta<\omega})$，其论域为 λ，并存在一个序数 $\alpha^* < \omega_1$，使得：

（⊛）$_{\rm a}$ 对于每个 n 以及一个无量词公式 $\varphi(x_0、\ldots\ldots、x_{n-1}) \in \mathcal{L}(\tau)$，存在 $\zeta < \omega$，使得对于所有 $a_0、\ldots\ldots、a_{n-1} \in \lambda$，

$$\mathbb{M} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \Leftrightarrow R_{n,\zeta}[a_0, \ldots, a_{n-1}],$$

（⊛）$_{\rm b}$ $\sup\{$秩$(v、\mathbb{M}) : \emptyset \neq v \in [\lambda]^{<\omega}\} < \alpha^*$，

（⊛）$_{\rm c}$ 每个单元素集的秩至少为 0。

对于非空有限集 $v \subseteq \lambda$，令 $\mathbf{rk}(v) = \mathbf{rk}(v, \mathbb{M})$，并令 $\zeta(v) < \omega$ 和 $k(v) < |v|$ 满足条件，使得 $R_{|v|,\zeta(v)}, k(v)$ 见证了 v 的秩。因此，令 $\{a_0, \ldots, a_k, \ldots a_{n-1}\}$ 为 v 的递增枚举，并令 $k = k(v)$ 和 $\zeta = \zeta(v)$，我们有

(⊛)$_{\rm d}$ 若 $\mathbf{rk}(v) \geq 0$，则 $\mathbb{M} \models R_{n,\zeta}[a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-1}]$ 但不存在满足以下条件的 $a \in \lambda \setminus v$

$$\mathrm{rk}(v \cup \{a\}) \geq \mathrm{rk}(v) \text{ and } \mathbb{M} \models R_{n,\zeta}[a_0, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}],$$

(⊛)$_{\rm e}$ 若 $\mathbf{rk}(v) = -1$，则 $\mathbb{M} \models R_{n,\zeta}[a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-1}]$ 但集合

$$\{a \in \lambda : \mathbb{M} \models R_{n,\zeta}[a_0, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}]\}$$

是可数的。

不失一般性，我们还可以要求（对于 $\zeta = \zeta(v)$，$n = |v|$）

（⊛）对于每个 b_0，……，$b_{n-1} < \lambda$

$$\text{if } \mathbb{M} \models R_{n,\zeta}[b_0, \ldots, b_{n-1}] \text{ then } b_0 < \ldots < b_{n-1}.$$

现在我们将定义一个强迫概念 $\mathbb{P}$。$\mathbb{P}$ 中的条件 p 是一个元组

$$\big(w^p, n^p, \iota^p, M^p, \bar{\eta}^p, \bar{t}^p, \bar{r}^p, \bar{h}^p, \bar{g}^p, \mathcal{M}^p\big) = \big(w, n, \iota, M, \bar{\eta}, \bar{t}, \bar{r}, \bar{h}, \bar{g}, \mathcal{M}\big)$$

满足以下要求（$*$）$_1$–（$*$）$_{11}$。

(∗)$_1$ $w \in [\lambda]^{<\omega}$，$|w| \geq 5$，$5 \leq n$，$M < \omega$，$\iota < \omega$ 且若 $i^* < \omega$ 则 $\iota = i^*$。(∗)$_2$ $\bar{\eta} = \langle \eta_\alpha : \alpha \in w \rangle \subseteq {}^{n}2$。(∗)$_3$ $\bar{t} = \langle t_m : m < M \rangle$，其中 $\emptyset \neq t_m \subseteq {}^{n\geq}2$ 对于 $m < M$ 是这样一棵树：所有终端分支的长度均为 n，且 $t_m \cap t_{m'} \cap {}^{n}2 = \emptyset$ 对于 $m < m' < M$。(∗)$_4$ $\bar{r} = \langle r_m : m < M \rangle$，其中 $0 < r_m \leq n$ 对于 $m < M$。(∗)$_5$ $\bar{h} = \langle h_i : i < \iota \rangle$，其中 $h_i : w^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow M$ 满足 $h_i(\alpha, \beta) = h_i(\beta, \alpha)$。(∗)$_6$ $\bar{g} = \langle g_i : i < \iota \rangle$，其中 $g_i : w^{\langle 2 \rangle} \longrightarrow \mathcal{O}_i$ 满足 $\ell\big(g_i(\alpha, \beta)\big) = n$，$g_i(\alpha, \beta) = g_i(\beta, \alpha)$，并且对于每个 $(\alpha, \beta) \in w^{\langle 2 \rangle}$，$\big|\bigcup g_i(\alpha, \beta)\big| \geq 6$。$_{i<\iota}$

$(*)_7$ 对于每个 $m<M$，

$$t_m\cap {}^n2=\bigcup\big\{\eta_\alpha+g_i(\alpha,\beta):(\alpha,\beta)\in w^{\langle 2\rangle}\text{ and }i<\iota\text{ and }h_i(\alpha,\beta)=m\big\}.$$

$(*)_8$ 该族

$$\big\{\eta_\alpha:\alpha\in w\big\}\cup\bigcup\big\{g_i(\alpha,\beta):(\alpha,\beta)\in w^{\langle 2\rangle}\ \wedge\ i<\iota\big\}$$

是 ${}^n2$（在域 $\mathbb{Z}_2$ 上的）向量线性无关集；特别地，上述表示中不存在重复项，且所有元素都是非零向量。

$(*)_9$ $\mathcal{M}$ 由所有满足以下条件的三元组 $\mathfrak{d}=(\ell^{\mathfrak{d}},v^{\mathfrak{d}},\mathbf{m}^{\mathfrak{d}})=(\ell,v,\mathbf{m})$ 组成，其中 $(*)_{9}^{\mathrm{a}}$ $0<\ell\le n$，$v\subset\mu$，$5\le|v|$，且对于不同的 $\eta_\alpha{\restriction}\ell\ne\eta_\beta{\restriction}\ell$、$\alpha$、$\beta\in v$，$(*)_{9}^{\mathrm{b}}$ $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_t^n$，$\mathcal{O}^{\mathbf{m}}=\mathcal{O}$，$\ell^{\mathbf{m}}=\ell$，$u^{\mathbf{m}}=\{\eta_\alpha{\restriction}\ell:\alpha\in v\}$，

$(*)_9^{\mathrm{c}}$ 对于每个 $(\alpha,\beta)\in(v)^{\langle 2\rangle}$，且 $i<6$，都有 $r_{h_i^{\mathbf{m}}(\eta_\alpha{\restriction}\ell,\eta_\beta{\restriction}\ell)}\le\ell^{\mathfrak{d}}$，

$(*)_9^{\mathrm{d}}$ $\big(\forall(\alpha,\beta)\in v^{\langle 2\rangle}\big)\big(\forall i<6\big)\big(\exists j<\iota\big)\big(h_i^{\mathbf{m}}(\eta_\alpha{\restriction}\ell,\eta_\beta{\restriction}\ell)=h_j(\alpha,\beta)\big)$.

$(*)_{10}$ 若 $\mathfrak{d}_0,\mathfrak{d}_1\in\mathcal{M}$，$\ell^{\mathfrak{d}_0}=\ell^{\mathfrak{d}_1}=\ell$，$\rho\in{}^\ell2$ 和 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}=\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}+\rho$，则 $\mathbf{rk}(v^{\mathfrak{d}_0})=\mathbf{rk}(v^{\mathfrak{d}_1})$，$\zeta(v^{\mathfrak{d}_0})=\zeta(v^{\mathfrak{d}_1})$，$k(v^{\mathfrak{d}_0})=k(v^{\mathfrak{d}_0})$；且若 $\alpha\in v^{\mathfrak{d}_0},\beta\in v^{\mathfrak{d}_1}$ 满足 $|\alpha\cap v^{\mathfrak{d}_0}|=k(v^{\mathfrak{d}_0})=k(v^{\mathfrak{d}_1})=|\beta\cap v^{\mathfrak{d}_1}|$，则 $(\eta_\alpha{\restriction}\ell)+\rho=\eta_\beta{\restriction}\ell$。

$(*)_{11}$ 假设

- $\mathfrak{d}_0$、$\mathfrak{d}_1\in\mathcal{M}$、$\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}\sqsubset\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}$ 和 $v^{\mathfrak{d}_0}\subseteq v^{\mathfrak{d}_1}$，并且
  - $\alpha_0\in v^{\mathfrak{d}_0}$、$|\alpha_0\cap v^{\mathfrak{d}_0}|=k(v^{\mathfrak{d}_0})$、$\mathbf{rk}(v^{\mathfrak{d}_0})=-1$。

那么 $|\{\nu\in u_{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}:(\eta_{\alpha_0}{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0})\trianglelefteq\nu\}|=1$。

为了定义 $\mathbb{P}$ 的序 $\le$，我们规定对于 p、$q\in\mathbb{P}$，$p\le q$ 当且仅当

- $w^p\subseteq w^q$、$n^p\le n^q$、$M^p\le M^q$、$\iota^p\le\iota^q$和
- $t^p_m=t^q_m\cap{}^{n^p\ge}2$ 和 $r^p_m=r^q_m$ 对于所有 $m<M^p$，并且
- $\eta^p_\alpha\trianglelefteq\eta^q_\alpha$ 对所有 $\alpha\in w^p$，以及
- $h^q_i{\restriction}(w^p)^{\langle 2\rangle}=h^p_i$ 以及 $g^p_i(\alpha,\beta)\preceq_i g^q_i(\alpha,\beta)$ 对于 $i<\iota^p$和 $(\alpha,\beta)\in(w^p)^{\langle 2\rangle}$。

命题 4.4.1。（1）$(\mathbb{P},\le)$ 是一个大小为 λ 的偏序。

（2）对于每个 $\beta<\lambda$ 和 n_0，$M_0<\omega$ 集合

$$D^{n_0,M_0}_\beta=\big\{p\in\mathbb{P}:n^p>n_0\ \wedge\ M^p>M_0\ \wedge\ \beta\in w^p\big\}$$

在 $\mathbb{P}$ 中是开稠密的。

（3）如果 $i^*=\omega$，那么对于每个 $\iota<\omega$，集合 $D_\iota=\{p\in\mathbb{P}:\iota^p\ge\iota\}$ 在 $\mathbb{P}$ 中是开稠密的。

断言的证明。(1) 首先我们来论证 $\mathbb{P}\ne\emptyset$。若 $\iota=i^*$ 是有限的，令 $\iota=i^*$；若 $i^*=\omega$，则令 $\iota=6$。令 $w=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 λ 的任意一个 5 元子集。利用 3.2(2c)+3.6(ii)，我们可以找到 $v(i,b)$，其中 $i<\iota$ 且 $b<2$，使得对于某个 $\ell<\omega$，对所有 $i<\iota$ 和 $b<2$，都有

$$v(i,b)\in\mathcal{O}_i,\quad v(i,0)\prec_i v(i,1),\quad\text{and}\quad\ell\big(v(i,1)\big)=\ell.$$

根据 3.6(i)，我们还可以要求：若 $i^*<6$，则存在某个 $i<\iota$，使得 $|v(i,1)|\ge 6$。固定一个枚举

$$\big\{(\sigma_a,i_a,j_a,k_a):a<A\big\}=\big\{(\sigma,i,j,k):j<k<5\ \wedge\ i<\iota\ \wedge\ \sigma\in v(i,1)\big\}.$$

选取 $n > \ell + 5$ 和一个序列 $\langle \rho_a : a < A + 5\rangle \subseteq {}^n 2$，使得

- $\langle \rho_a{\restriction}[\ell, n) : a < A + 5\rangle$ 在 ${}^{[\ell,n)}2$ 上关于 $\mathbb{Z}_2$ 线性无关，并且
- $\sigma_a \lhd \rho_a$ 对每个 $a < A$。

Put

- $\eta_{\alpha_b} = \rho_{A+b}$ (for $b < 5$) and $\bar{\eta} = \langle \eta_{\alpha_b} : b < 5\rangle$,
- $g_i(\alpha_j, \alpha_k) = g_i(\alpha_k, \alpha_j) = \{\rho_a : a < A \ \wedge\ j = j_a \ \wedge\ k = k_a \ \wedge\ i_a = i\}$ (for $i < \iota$ and $j < k < 5$) and $\bar{g} = \langle g_i : i < \iota\rangle$.

由定义 3.6(iii) 可得 $g_i(\alpha_j, \alpha_k) \in \mathcal{O}_i$。

我们还令 $M = 10 \cdot \iota$，并固定一个双射 $\varphi : [w]^2 \times \iota \longrightarrow M$。于是，对于 $j < k < 5$ 和 $i < \iota$，我们令 $h_i(\alpha_j, \alpha_k) = h_i(\alpha_k, \alpha_j) = \varphi(\{\alpha_j, \alpha_k\}, i)$。这样，我们定义了 $h = \langle h_i : i < \iota\rangle$。

对于 $m < M$，我们令 $r_m = n$，并令 $t_m \subseteq {}^{n\geq}2$ 为树，其中所有终端分支的长度均为 n，且满足

$$t_m \cap {}^n 2 = \bigcup \{\eta_\alpha + g_i(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in w^{\langle 2\rangle} \text{ and } i < \iota \text{ and } h_i(\alpha, \beta) = m\}.$$

最后，$\mathcal{M}$由子句 $(*)_9$定义。

容易验证，$(w, n, \iota, M, \bar{\eta}, \bar{t}, \bar{r}, h, \bar{g}, \mathcal{M}) \in \mathbb{P}$。

从上述论证可知 $|\mathbb{P}| \geq \lambda$，又由于满足 $w^p = w$的 $\mathbb{P}$ 中只有可数多个元素 p，因此得到 $|\mathbb{P}| = \lambda$。

显然，$\leq$ 是 $\mathbb{P}$上的一个偏序。

（2）设 $p \in \mathbb{P}$, $\beta \in \lambda \setminus w^p$。我们将以与上述（1）中的构造类似的方式定义一个条件 q。令 $\alpha^- =$为$\min(w^p)$，$\alpha^+ =$为$\max(w^p)$。

设 $w^q = w^p \cup \{\beta\}$, $\iota^q = \iota^p$。

对于 $(\alpha_0, \alpha_1) \in (w^q)^{\langle 2\rangle}$ 以及 $i < \iota^q$，选取 $v(i, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{O}_i$ 使得：对于某个ℓ，对于所有 $i < \iota^q$ 和 $(\alpha_0, \alpha_1) \in (w^q)^{\langle 2\rangle}$，我们有

- $\ell\big(v(i, \alpha_0, \alpha_1)\big) = \ell$,
- if $\alpha_0, \alpha_1 \in w^p$ then $g_i^p(\alpha_0, \alpha_1) \prec_i v(i, \alpha_0, \alpha_1) = v(i, \alpha_1, \alpha_0)$,
- if $\alpha_0 \in w^p$ then $g_i^p(\alpha^+, \alpha^-) \prec_i v(i, \alpha_0, \beta) = v(i, \beta, \alpha_0)$.

固定一个枚举

$$\{(\sigma^a, i^a, \alpha_0^a, \alpha_1^a) : a < A\} = \{(\sigma, i, \alpha_0, \alpha_1) : \alpha_0 < \alpha_1 \text{ are from } w^q \text{ and } i < \iota^q \ \wedge\ \sigma \in v(i, \alpha_0, \alpha_1)\}.$$

选取 $n > \ell + |w^p| + 1$ 和一个序列 $\langle \rho_a : a \leq A + |w^p|\rangle \subseteq {}^n 2$ 使得

- $\langle \rho_a{\restriction}[\ell, n) : a \leq A + |w^p|\rangle$ 在 ${}^{[\ell,n)}2$ 上关于 $\mathbb{Z}_2$线性无关,
- $\sigma^a \lhd \rho_a$ 对每个 $a < A$, 并且
- 若 $\alpha \in w^p$ 满足 $|w^p \cap \alpha| = k$，则 $\eta_\alpha^p \lhd \rho_{A+k}$。

Put

- $\eta_\beta^q = \rho_{A+|w^p|}$, 且如果 $\alpha \in w^p$ 满足 $|w^p \cap \alpha| = k$，那么 $\eta_\alpha^q = \rho_{A+k}$ 和 $\bar{\eta}^q = \langle \eta_\alpha^q : \alpha \in w^q\rangle$,
- $g_i^q(\alpha_0, \alpha_1) = g_i^q(\alpha_1, \alpha_0) = \{\rho_a : a < A \wedge i = i^a \wedge \alpha_0 = \alpha_0^a \wedge \alpha_1 = \alpha_1^a\}$（对于来自 w^q 的 $i < \iota^q$ 和 $\alpha_0 < \alpha_1$），以及 $\bar{g}^q = \langle g_i^q : i < \iota^q\rangle$。

由定义 3.6(iii) 可知 $g_i^q(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{O}_i$ 且若 $(\alpha_0, \alpha_1) \in (w^p)^{\langle 2\rangle}$ 则 $g_i^p(\alpha_0, \alpha_1) \prec_i g_i^q(\alpha_0, \alpha_1)$.

我们还令 $M^q = M^p + \iota^q \cdot |w^p|$，并定义映射 $h^q_i\colon (w^q)^{\langle 2\rangle} \longrightarrow M^q$，使得：

- 若 $(\alpha_0, \alpha_1) \in (w^p)^{\langle 2\rangle}$ 且 $i < \iota^q$，则 $h^q_i(\alpha_0, \alpha_1) = h^p_i(\alpha_0, \alpha_1)$，
- 若 $\alpha \in w^p$ 且 $i < \iota^q$，则 $h^q_i(\alpha, \beta) = h^q_i(\beta, \alpha) = M^p + |\alpha \cap w^p| \cdot \iota + i$。

由此我们定义 $\bar{h}^q = \langle h^q_i : i < \iota^q\rangle$。

我们令 $r^q_m = r^p_m$ 表示 $m < M^p$，并令 $r^q_m = n$ 表示 $M^p \le m < M^q$。我们称 $t^q_m \subseteq {}^{n\ge}2$ 为满足以下条件的树：所有终端分支的长度均为 n，且

$$t^q_m \cap {}^n2 = \bigcup \big\{\eta^q_\alpha + g^q_i(\alpha,\beta) : (\alpha,\beta) \in (w^q)^{\langle 2\rangle} \text{ and } i < \iota^q \text{ and } h^q_i(\alpha,\beta) = m\big\}.$$

[注意，根据上述定义以及子句（$*$）$_7$，对于 p，我们有 $t^p_m \cap {}^{n^p}2 = t^q_m \cap {}^{n^p}2$ 对所有 $m < M^p$ 均成立。] 自然，我们也令 $n^q = n$，并根据子句（$*$）$_9$ 定义 $\mathcal{M}^q$。

我们断言 $q = \big(w^q,\ n^q,\ \iota^q,\ M^q,\ \bar{\eta}^q,\ \bar{t}^q,\ \bar{r}^q,\ \bar{h}^q,\ \bar{g}^q,\ \mathcal{M}^q\big) \in \mathbb{P}$。条件（$*$）$_1$–（$*$）$_9$ 相当直接。

关于（$*$）$_{10}$：为说明子句（$*$）$_{10,}$，假设 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}^q$，$\ell^{\mathfrak{d}_0} = \ell^{\mathfrak{d}_1} = \ell$，$\rho \in {}^\ell 2$，且 $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} = \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1} + \rho$，并考虑以下两种情况。

Case 1: $\beta \notin v^{\mathfrak{d}_0} \cup v^{\mathfrak{d}_1}$

若 $\ell \le n^p$，则 $r_{h^{\mathbf{m}}_i(\eta_{\alpha_0}\restriction\ell,\ \eta_{\alpha_1}\restriction\ell)} \le n^p$，因此对所有 $(\alpha_0,\alpha_1) \in \big(v^{\mathfrak{d}_0}\big)^{\langle 2\rangle}$，$h^{\mathbf{m}}_i(\eta_{\alpha_0}\restriction\ell, \eta_{\alpha_1}\restriction\ell) < M^p$。于是 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}^p$ 以及针对 p 的子句 $(*)_{10}$ 也适用。

若 $\ell > n^p$，则序列 $\langle \eta^q_\alpha\restriction\ell : \alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \cup v^{\mathfrak{d}_1}\rangle$ 线性无关，并且

$$\{(\eta^q_\alpha\restriction\ell) + \rho : \alpha \in v^{\mathfrak{d}_0}\} = \{\eta^q_\alpha\restriction\ell : \alpha \in v^{\mathfrak{d}_1}\}.$$

由于 $|v^{\mathfrak{d}_0}| \ge 5$，我们立即得出 $\rho = \mathbf{0}$，因此也得出 $v^{\mathfrak{d}_0} = v^{\mathfrak{d}_1}$（记住 $\ell > n^p$）。

Case 2: $\beta \in v^{\mathfrak{d}_0} \cup v^{\mathfrak{d}_1}$

例如，$\beta \in v^{\mathfrak{d}_0}$。若 $\alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \setminus \{\beta\}$，则对所有 $j < \iota$，$h^q_j(\alpha,\beta) \ge M^p$，因此 $r^q_{h^{\mathbf{m}}_i(\eta_\alpha\restriction\ell,\ \eta_\beta\restriction\ell)} = n^q$（记住 $(*)^{\rm d}_9$）。因此，$\ell = n^q$。由于序列 $\langle \eta^q_\alpha : \alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \cup v^{\mathfrak{d}_1}\rangle$ 线性无关，像之前一样，我们得到 $\rho = \mathbf{0}$ 和 $v^{\mathfrak{d}_0} = v^{\mathfrak{d}_1}$。

RE $(*)_{11}$：反设存在某个 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}^q$，使得：

- $v^{\mathfrak{d}}_0 \subseteq v^{\mathfrak{d}}_1$ 且不失一般性地，$|v^{\mathfrak{d}_1}| = |v^{\mathfrak{d}_0}| + 1$，
- $\alpha_0 \in v^{\mathfrak{d}_0}$，$|\alpha_0 \cap v^{\mathfrak{d}_0}| = k(v^{\mathfrak{d}_0})$，$\mathbf{rk}(v^{\mathfrak{d}_0}) = -1$，且 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}$，并且
- 存在 $\alpha_1 \in v^{\mathfrak{d}_1}$，使得 $\eta^q_{\alpha_0}\restriction\ell^{\mathfrak{d}_0} = \eta^q_{\alpha_1}\restriction\ell^{\mathfrak{d}_0}$，但 $\eta^q_{\alpha_0}\restriction\ell^{\mathfrak{d}_1} \ne \eta^q_{\alpha_1}\restriction\ell^{\mathfrak{d}_1}$。

令 $\ell_0 = \ell^{\mathfrak{d}_0}$，$\ell_1 = \ell^{\mathfrak{d}_1}$。

假设 $\beta \in v^{\mathfrak{d}_0}$，并取 $\beta' \in v^{\mathfrak{d}_0} \setminus \{\beta\}$。那么，对于所有 $j < \iota$，$h^q_j(\beta,\beta') \ge M^p$。因此，存在某个 $j < \iota$，

$$r^q_{h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}_0(\eta_\beta\restriction\ell_0, \eta_{\beta'}\restriction\ell_0)} = r^q_{h^p_j(\beta,\beta')} = n^q = \ell_0 = \ell_1,$$

这与我们假设中的最后一项相矛盾。

如果我们有了 $v^{\mathfrak{d}_1} = v^{\mathfrak{d}_0} \cup \{\beta\}$，那么考虑一个 $\beta' \in v^{\mathfrak{d}_0} \setminus \{\alpha_0\}$，我们将立即得到

$$M^p > h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}_0(\eta_\alpha\restriction\ell_0, \eta_{\beta'}\restriction\ell_0) = h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_0(\eta_\beta\restriction\ell_1, \eta_{\beta'}\restriction\ell_1) \ge M^p,$$

矛盾。

因此，唯一剩下的可能性是 $\beta \notin v^{\mathfrak{d}_1}$。

若 $\ell_1 \le n^p$，则由 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}^p$ 以及针对 p 的子句 $(*)_{11}$ 可得矛盾。因此，假设 $\ell_1 > n^p$。由于 $\{\eta^q_\gamma{\restriction}n^p\colon\ \gamma \in v^{\mathfrak{d}_1}\}$ 两两不同，我们推出 $\ell_0 < n^p$ 且 $\mathrm{m}^{\mathfrak{d}_0} \in \mathcal{M}^p$。我们通过如下设定定义 $\mathbf{n} \in \mathbf{M}^n_{\bar t,\ \bar{\mathcal{O}}^6}$：

- $\ell^{\mathbf{n}} = n^p$, $u^{\mathbf{n}} = \{\eta^q_\gamma{\restriction}n^p : \gamma \in v^{\mathfrak{d}_1}\} = \{\eta^p_\gamma : \gamma \in v^{\mathfrak{d}_1}\}$, $\iota^{\mathbf{n}} = 6$, and for $(\gamma,\gamma') \in (v^{\mathfrak{d}_1})^{\langle 2\rangle}$ and $i < 6$:
- if $\{\gamma,\gamma'\} \ne \{\alpha_0,\alpha_1\}$, then

$$g^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) = \{\sigma{\restriction}n^p\colon \sigma \in g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta^q_\gamma{\restriction}\ell_1, \eta^q_{\gamma'}{\restriction}\ell_1)\}$$

以及 $h^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) = h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta^q_\gamma{\restriction}\ell_1, \eta^q_{\gamma'}{\restriction}\ell_1)$,

- 若 $\{\gamma,\gamma'\} = \{\alpha_0,\alpha_1\}$，则我们固定互不相同的 $\sigma_0,\dots,\sigma_5 \in \bigcup\limits_{j<\iota^q} g^p_j(\alpha_0,\alpha_1)$

（记住 $(*)_6$，对于 p），并令 $g^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_{\alpha_0}, \eta^p_{\alpha_1}) = g^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_{\alpha_1}, \eta^p_{\alpha_0}) = \{\sigma_i\}$以及 $h^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_{\alpha_0}, \eta^p_{\alpha_1}) = h^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_{\alpha_1}, \eta^p_{\alpha_0}) = m$，其中 $\eta^p_{\alpha_0} + \sigma_i, \eta_{\alpha_1} + \sigma_i \in t^p_m$（对于 $i < 6$）。

由于 $\mathrm{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathrm{m}^{\mathfrak{d}_1}$，在 $\{\gamma,\gamma'\} \ne \{\alpha_0,\alpha_1\}$ 的情形下，我们有

$$g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}_i(\eta^p_\gamma{\restriction}\ell_0, \eta^p_{\gamma'}{\restriction}\ell_0) \prec_{\mathcal{O}^0} g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta^p_\gamma{\restriction}\ell_1, \eta^p_{\gamma'}{\restriction}\ell_1)$$

因此，只要 $i < j < 6$，就有 $g^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) \cap g^{\mathbf{n}}_j(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) = \emptyset$。于是 3.10(c) 得以满足。其他情形以及 3.10 的其他条件，由我们的选择可立即得到，因此

$$\mathbf{n} = (n^p, 6, u^{\mathbf{n}}, \bar h^{\mathbf{n}}, \bar g^{\mathbf{n}}) \in \mathbf{M}^n_{\bar t, \bar{\mathcal{O}}^6}.$$

此外，$\mathrm{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathrm{n}$ 且 $\mathfrak{d}_* = (n^p, v^{\mathfrak{d}_1}, \mathrm{n}) \in \mathcal{M}^p$。然而，这时 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_*$ 与针对 p 的子句 $(*)_{11}$ 相矛盾。

(3) 令 $p \in \mathbb{P}$。设 $w^q = w^p$ 和 $\iota^q = \iota^p + 1$。对于 $(\alpha_0,\alpha_1) \in (w^q)^{\langle 2\rangle}$ 和 $i < \iota^q$，我们使用命题 3.8 选取 $v(i,\alpha_0,\alpha_1) \in \mathcal{O}_i$，使得：对于某个 ℓ，对于所有 $i < \iota^q$ 以及 $(\alpha_0,\alpha_1) \in (w^q)^{\langle 2\rangle}$，我们有

- $\ell\big(v(i,\alpha_0,\alpha_1)\big) = \ell$,
- if $i < \iota^p$ then $g^p_i(\alpha_0,\alpha_1) \prec_i v(i,\alpha_0,\alpha_1) = v(i,\alpha_1,\alpha_0)$,
- for some $v \in \mathcal{O}_{\iota^p}$, $v \prec_{\iota^p} v(\iota^p,\alpha_0,\alpha_1) = v(\iota^p,\alpha_1,\alpha_0)$.

固定一个枚举

$$\big\{(\sigma^a, i^a, \alpha^a_0, \alpha^a_1) : a < A\big\} = \big\{(\sigma, i, \alpha_0, \alpha_1) : \alpha_0 < \alpha_1 \text{ are from } w \text{ and } i < \iota^q \ \wedge\ \sigma \in v(i,\alpha_0,\alpha_1)\big\}.$$

选择 $n = n^q > \ell$ 和一个序列 $\langle \rho_a :\ a < A + |w^p|\rangle \subseteq {}^n2$，使得

- $\langle \rho_a{\restriction}[\ell,n) :\ a < A + |w^q|\rangle$ 在 ${}^{[\ell,n)}2$ 上关于 $\mathbb{Z}_2$ 线性无关，并且
- $\sigma^a \lhd \rho_a$ 对每个 $a < A$，并且
- 若 $\alpha \in w^q$ 满足 $|w^q \cap \alpha| = k$，则 $\eta^p_\alpha \lhd \rho_{A+k}$。

Put

- if $\alpha \in w^q$ is such that $|w^q \cap \alpha| = k$ then $\eta^q_\alpha = \rho_{A+k}$ and $\bar\eta^q = \langle \eta^q_\alpha : \alpha \in w^q\rangle$,

- $g_i^q(\alpha_0,\alpha_1)=g_i^q(\alpha_1,\alpha_0)=\{\rho_a: a<A\wedge i=i^a\wedge\alpha_0=\alpha_0^a\wedge\alpha_1=\alpha_1^a\}$ (for $i<\iota^q$ and $\alpha_0<\alpha_1$ from w^q) and $\bar g^q=\langle g_i^q: i<\iota^q\rangle$.

由定义 3.6(iii)可知，$g_i^q(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{O}_i$，且若 $(\alpha_0,\alpha_1)\in(w^p)^{\langle 2\rangle}$，则 $g_i^p(\alpha_0,\alpha_1)\prec_i g_i^q(\alpha_0,\alpha_1)$。

我们还令 $M^q=M^p+|[w^q]^2|$，并固定一个双射 $\psi:[w^q]^2\longrightarrow[M^p,M^q)$。接着定义映射 $h_i^q:(w^q)^{\langle 2\rangle}\longrightarrow M^q$，使得对于来自 w^q 的 $\alpha_0<\alpha_1$，我们有

- if $i<\iota^q$, then $h_i^q(\alpha_0,\alpha_1)=h_i^q(\alpha_1,\alpha_0)=h_i^p(\alpha_0,\alpha_1)$,
- $h_{\iota^p}^q(\alpha_0,\alpha_1)=h_{\iota^p}^q(\alpha_1,\alpha_0)=\psi(\{\alpha_0,\alpha_1\})$.

如此便定义了 $h^q=\langle h_i^q: i<\iota^q\rangle$。

我们令 $r_m^q=r_m^p$ 表示 $m<M^p$，并令 $r_m^q=n$ 表示 $M^p\le m<M^q$。设 $t_m^q\subseteq{}^{n\ge}2$ 为所有终端分支长度均为 n 的树，并且满足

$$t_m^q\cap{}^n2=\bigcup\{\eta_\alpha^q+g_i^q(\alpha,\beta):(\alpha,\beta)\in(w^q)^{\langle 2\rangle}\text{ and }i<\iota^q\text{ and }h_i^q(\alpha,\beta)=m\}.$$

[注意，根据上述定义以及子句（$*$），对于 p，我们有 $t_m^p\cap{}^{n^p}2=t_m^q\cap{}^{n^p}2$，对所有 $m<M^p$均成立。] 我们通过子句（$*$）$_9$定义 $\mathcal{M}^q$。和之前一样，很容易验证 $q=(w^q,n^q,\iota^q,M^q,\bar\eta^q,\bar t^q,\bar r^q,\bar h^q,\bar g^q,\mathcal{M}^q)\in\mathbb{P}$。[关键在于，若 $\mathfrak{d}\in\mathcal{M}^q$, $\eta,\nu\in u^{\mathbf{m}^\mathfrak{d}}$ 且 $h_i^{\mathbf{m}^\mathfrak{d}}(\eta,\nu)\ge M^p$，则 $\ell^\mathfrak{d}=n^q$。

] □

断言 4.4.2. 强迫概念 $\mathbb{P}$ 具有 Knaster 性质。

断言的证明。设 $\langle p_\xi: \xi<\omega_1\rangle$ 是来自 $\mathbb{P}$ 的两两不同条件组成的序列，并令

$$p_\xi=(w_\xi,n_\xi,\iota_\xi,M_\xi,\bar\eta_\xi,\bar t_\xi,\bar r_\xi,\bar h_\xi,\bar g_\xi,\mathcal{M}_\xi)$$

其中 $\bar\eta_\xi=\langle\eta_\alpha^\xi: \alpha\in w_\xi\rangle$, $\bar t_\xi=\langle t_m^\xi: m<M_\xi\rangle$, $\bar r_\xi=\langle r_m^\xi: m<M_\xi\rangle$，且 $\bar h_\xi=\langle h_i^\xi: i<\iota_\xi\rangle$, $\bar g_\xi=\langle g_i^\xi: i_\xi<\iota\rangle$。通过标准的 Δ–系清理程序，我们可以找到一个不可数集 $A\subseteq\omega_1$，使得以下要求 $(*)_{12}$–$(*)_{15}$ 得到满足。

$(*)_{12}$ $\{w_\xi: \xi\in A\}$ 构成一个以 w^* 为核的 Δ–系。$(*)_{13}$ 若 $\xi,\varsigma\in A$，则 $|w_\xi|=|w_\varsigma|$, $n_\xi=n_\varsigma$, $\iota_\xi=\iota_\varsigma$, $M_\xi=M_\varsigma$，且 $t_m^\xi=t_m^\varsigma$ 和 $r_m^\xi=r_m^\varsigma$（对于 $m<M_\xi$）。$(*)_{14}$ 若 $\xi<\varsigma$ 来自 A，且 $\pi: w_\xi\longrightarrow w_\varsigma$ 是序同构，则

(a) $\pi(\alpha)=\alpha$ for $\alpha\in w^*=w_\xi\cap w_\varsigma$,
(b) if $\emptyset\ne v\subseteq w_\xi$, then $\mathrm{rk}(v)=\mathrm{rk}(\pi[v])$, $\zeta(v)=\zeta(\pi[v])$ and $k(v)=k(\pi[v])$,
(c) $\eta_\alpha^\xi=\eta_{\pi(\alpha)}^\varsigma$ (for $\alpha\in w_\xi$),
(d) $g_i^\xi(\alpha,\beta)=g_i^\zeta(\pi(\alpha),\pi(\beta))$ and $h_i^\xi(\alpha,\beta)=h_i^\zeta(\pi(\alpha),\pi(\beta))$ for $(\alpha,\beta)\in(w_\xi)^{\langle 2\rangle}$ and $i<\iota_\xi$, and

$(*)_{15}$ $\mathcal{M}_\xi=\mathcal{M}_\varsigma$ 这实际上是由先前的要求推导出来的。)

注意，此时也有

$(*)_{16}$ 若 $\xi\in A$、$v\subseteq w^*$ 和 $\delta\in w_\xi\setminus w^*$ 满足 $\mathbf{rk}(v\cup\{\delta\})=-1$，则 $k(v\cup\{\delta\})\ne|\delta\cap v|$。

[为什么? 假设 $\mathbf{rk}\big(v\cup\{\delta\}\big)=-1$，且 $k=k\big(v\cup\{\delta\}\big)=|\delta\cap v|$、$j=j\big(v\cup\{\delta\}\big)$。对于 $\varsigma\in A$，令 $\pi_\varsigma\colon\ w_\xi\longrightarrow w_\varsigma$ 为序同构，并令 $\delta_\varsigma=\pi_\varsigma(\delta)$。由 $(*)_{14}$ 可知 $k=k\big(v\cup\{\delta_\varsigma\}\big)=|\delta_\varsigma\cap v|$ 且 $j=j\big(v\cup\{\delta_\varsigma\}\big)$。因此，令 $v\cup\{\delta\}=\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$ 为递增枚举，对于每个 $\varsigma\in A$，都有 $\mathbb{M}\models R_{n,\ j}[a_0,\dots,a_{k-1},\delta_\varsigma,a_{k+1},\dots,a_{n-1}]$。于是集合

$$\{b<\lambda:\mathbb{M}\models R_{n,j}[a_0,\dots,a_{k_1},b,a_{k+1},\dots,a_{n-1}]\}$$

是不可数的，这与定理证明开头的（$\circledast$）$_{\rm e}$ 相矛盾。]

我们将证明，对于来自 A 的不同 ξ、ς，条件 p_ξ、p_ς 是相容的。因此，设 ξ、$\varsigma\in A$、$\xi<\varsigma$，并令 $\pi\colon\ w_\xi\longrightarrow w_\varsigma$ 为序同构。我们将定义 $q=\big(w$、n、ι、M、$\bar\eta$、$\bar t$、$\bar r$、$\bar h$、$\bar g$、$\mathcal{M}\big)$，其中 $\bar\eta=\langle\eta_\alpha\colon\ \alpha\in w\rangle$，$\bar t=\langle t_m\colon\ m<M\rangle$，$\bar r=\langle r_m\colon\ m<M\rangle$，以及 $h=\langle h_i\colon\ i<\iota\rangle$、$\bar g=\langle g_i\colon\ i<\iota\rangle$。

我们设

$(*)_{17}$ $\iota=\iota_\xi$ 和 $w=w_\xi\cup w_\varsigma$。

与前面各个断言中的论证类似，我们先选取

$$\langle v(i,\alpha_0,\alpha_1):(\alpha_0,\alpha_1)\in w^{\langle 2\rangle}\ \wedge\ i<\iota\rangle$$

并选取一个 ℓ，使得对所有 $i<\iota$ 和 $(\alpha_0,\alpha_1)\in w^{\langle 2\rangle}$，都有

- $v(i,\alpha_0,\alpha_1)=v(i,\alpha_1,\alpha_0)\in\mathcal{O}_i$，$\ell\big(v(i,\alpha_0,\alpha_1)\big)=\ell$，
- 若 $\alpha_0,\alpha_1\in w_\xi$，则 $g_i^\xi(\alpha_0,\alpha_1)\prec_i v(i,\alpha_0,\alpha_1)$，并且
- 如果 α_0、$\alpha_1\in w_\varsigma$，那么 $g_i^\varsigma(\alpha_0,\alpha_1)\prec_i v(i,\alpha_0,\alpha_1)$。

（对 $v(i,\alpha_0,\alpha_1)$ 除了当 $\alpha_0\in w_\xi\setminus w_\varsigma$ 和 $\alpha_1\in w_\varsigma\setminus w_\xi$ 时的对称性之外没有其他要求。）然后我们固定一个枚举

$$\big\{(\sigma^a,i^a,\alpha_0^a,\alpha_1^a):a<A\big\}=\big\{(\sigma,i,\alpha_0,\alpha_1):\alpha_0<\alpha_1\text{ are from }w\text{ and }i<\iota\ \wedge\ \sigma\in v(i,\alpha_0,\alpha_1)\big\}$$

并选择 $n>\ell$ 和 $\langle\rho_a:\ a<A+|w|\rangle\subseteq{}^n2$ 使得

- $\langle\rho_a{\restriction}[\ell,n)\colon\ a<A+|w|\rangle$ 在 ${}^{[\ell,n)}2$ 上关于 $\mathbb{Z}_2$ 线性无关，并且
- $\sigma^a\lhd\rho_a$ 对每个 $a<A$，并且
- 如果 $\alpha\in w_\xi$ 满足 $|w_\xi\cap\alpha|=k$，那么 $\eta_\alpha^\xi\lhd\rho_{A+k}$，
- 如果 $\alpha\in w_\varsigma\setminus w_\xi$ 满足 $|(w_\varsigma\setminus w_\xi)\cap\alpha|=k$，那么 $\eta_\alpha^\varsigma\lhd\rho_{A+|w_\xi|+k}$。

Put

$(*)_{18}$ n 是上面刚刚选定的那个，

$(*)_{19}$ $\bar\eta=\langle\eta_\alpha\colon\ \alpha\in w\rangle$，其中

- 如果 $\alpha\in w_\xi$ 满足 $|w_\xi\cap\alpha|=k$，那么 $\eta_\alpha=\rho_{A+k}$，
- 如果 $\alpha\in w_\varsigma\setminus w_\xi$ 满足 $|(w_\varsigma\setminus w_\xi)\cap\alpha|=k$，那么 $\eta_\alpha=\rho_{A+|w_\xi|+k}$，

$(*)_{20}$ $\bar g=\langle g_i\colon\ i<\iota\rangle$，其中对于来自 w 的 $i<\iota$ 和 $\alpha_0<\alpha_1$，我们设

$$g_i(\alpha_0,\alpha_1)=g_i(\alpha_1,\alpha_0)=\big\{\rho_a:a<A\ \wedge\ i=i^a\ \wedge\ \alpha_0=\alpha_0^a\ \wedge\ \alpha_1=\alpha_1^a\big\}.$$

与之前一样，由 3.6(iii) 可知 $g_i(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{O}_i$，并且若 $(\alpha_0,\alpha_1)\in(w_\xi)^{\langle 2\rangle}$，则 $g_i^\xi(\alpha_0,\alpha_1)\prec_i g_i(\alpha_0,\alpha_1)$；将 ξ 替换为 ς 时，结论也类似。

Let

$(*)_{21}$ $M = M_\xi + |w_\xi \setminus w_\varsigma|^2$

并令 $\psi\colon (w_\xi \setminus w_\varsigma) \times (w_\varsigma \setminus w_\xi) \longrightarrow [M_\xi, M)$ 为一个双射。于是我们定义 $(*)_{22}$ $\bar{h} = \langle h_i : i < \iota\rangle$，其中映射 $h_i : w^{\langle 2\rangle} \longrightarrow M$ 满足：对于互不相同的 α_0、$\alpha_1 \in w$ 和 $i < \iota$，有

- $h_i(\alpha_0, \alpha_1) = h_i(\alpha_1, \alpha_0)$,
- 若 α_0、$\alpha_1 \in w_\xi$，则 $h_i(\alpha_1, \alpha_0) = h_i^\xi(\alpha_1, \alpha_0)$,
- 若 α_0、$\alpha_1 \in w_\varsigma$，则 $h_i(\alpha_1, \alpha_0) = h_i^\varsigma(\alpha_1, \alpha_0)$,
- 若 $\alpha_0 \in w_\xi \setminus w_\varsigma$ 且 $\alpha_1 \in w_\varsigma \setminus w_\xi$，则 $h_i(\alpha_1, \alpha_0) = \psi(\alpha_0, \alpha_1)$.

$(*)_{23}$ $\bar{t} = \langle t_m : m < M\rangle$，其中 $t_m \subseteq {}^{n\geq}2$ 是树，其所有终端分支的长度均为 n，并且满足

$$t_m \cap {}^n2 = \bigcup \big\{\eta_\alpha + g_i(\alpha,\beta) : (\alpha,\beta) \in w^{\langle 2\rangle} \text{ and } i < \iota \text{ and } h_i(\alpha,\beta) = m\big\},$$

$(*)_{24}$ $\bar{r} = \langle r_m : m < M\rangle$，其中对于 $m < M_\xi$、$r_m = n$，若 $M_\xi \leq m < M$，则 $r_m = r_m^\xi$。

$(*)_{25}$ $\mathcal{M}$ 由 $(*)_9$ 定义（针对在 $(*)_{17}$–$(*)_{24}$ 中引入的对象）。

在子句 $(*)_{17}$–$(*)_{25}$ 中，我们定义了以下各项的全部组成部分：

$$q = \big(w, n, M, \bar{\eta}, \bar{t}, \bar{r}, \bar{h}, \bar{g}, \mathcal{M}\big).$$

我们仍需证明 $q \in \mathbb{P}$（在此之后，显然它是一个比 p_ξ 和 p_ς 都更强的条件）。

q 满足要求 $(*)_1$–$(*)_9$ 是相当直接的。

RE $(*)_{10}$：为证明子句 $(*)_{10}$,，假设 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}$, $\ell^{\mathfrak{d}_0} = \ell^{\mathfrak{d}_1} = \ell$和 $\rho \in {}^\ell 2$ 以及 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1} = \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} + \rho$，并考虑以下三种情况。

Case 1: $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w_\xi$

那么，对于每个 $(\delta,\varepsilon) \in (v^{\mathfrak{d}_0})^{\langle 2\rangle}$ 和 $i < \iota$，都有 $h_i(\delta,\varepsilon) < M_\xi$，因此 $\mathrm{rng}\big(h_j^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}\big) \subseteq M_\xi$ (for $j < 6$)。于是 $\mathrm{rng}\big(h_j^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}\big) \subseteq M_\xi$ (for$j < 6$) 也成立。但观察 $(*)_{22}$（并记住 $(*)_9^{\mathrm{d}}$），我们现在得出结论：$h_i(\delta,\varepsilon) < M_\xi$，对于 $(\delta,\varepsilon) \in (v^{\mathfrak{d}_1})^{\langle 2\rangle}$ 和 $i < \iota$。因此，$v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\xi$或 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\varsigma$。

若 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\xi$ and $\ell \leq n_\xi$，则可使用 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}_\xi$ 和子句 $(*)_{10}$，针对 p_ξ 得出所需结论。

若 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\xi$ and $\ell > n_\xi$，则 $\{\eta_\alpha{\restriction}\ell : \alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \cup v^{\mathfrak{d}_1}\}$ 线性无关，因此 $\rho = \mathbf{0}$ and $v^{\mathfrak{d}_0} = v^{\mathfrak{d}_1}$。

若 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\varsigma$ and $\ell \leq n_\xi$，则考虑 $v = \pi^{-1}[v^{\mathfrak{d}_1}] \subseteq w_\xi$ 和 $\mathfrak{d} = (\ell, v, \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1})$。显然，$\mathfrak{d} \in \mathcal{M}_\xi$，我们可以对 p_ξ 使用 $(*)_{10}$，从而得出 $\mathrm{rk}(v) = \mathrm{rk}(v^{\mathfrak{d}_0})$，$\zeta(v) = \zeta(v^{\mathfrak{d}_0})$，$k(v) = k(v^{\mathfrak{d}_0})$；并且若 $\alpha \in v^{\mathfrak{d}_0}, \beta \in v$ 满足$|\alpha \cap v^{\mathfrak{d}_0}| = k(v^{\mathfrak{d}_0}) = k(v) = |\beta \cap v|$，则 $(\eta_\alpha{\restriction}\ell) + \rho = \eta_\beta{\restriction}\ell$。现在我们使用 π 的性质 $(*)_{14}$(b,c)，以 $v^{\mathfrak{d}_1}$ 替代v，得到类似的断言。

若 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\varsigma$ and $\ell > n_\xi$，则考虑 $v = \pi^{-1}[v^{\mathfrak{d}_1}] \subseteq w_\xi$，并利用 $\{\eta_\alpha{\restriction}\ell$ 的线性无关性：$\alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \cup v\}$，得出 $\rho = \mathbf{0}$ 和$v^{\mathfrak{d}_0} = v = \pi^{-1}\big[v^{\mathfrak{d}_1}\big]$。最后，利用 π 的性质（$*$）$_{14}$(b,c)，得到所需的断言。

Case 2: $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w_\varsigma$
与前一种情形相同，只需交换 ξ 和 ς。

Case 3: $v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w_\xi \neq \emptyset \neq v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w_\varsigma$
于是，存在某个 $(\delta,\varepsilon) \in (v^{\mathfrak{d}_0})^{\langle 2\rangle}$，使得对所有 $i<\iota$，都有 $h_i(\delta,\varepsilon) \geq M_\xi$，因此必有 $\ell = n_\circ$ 现在，由于 $\bar\eta$ 的线性无关性，可得 $\rho = \mathbf{0}$ 和 $v^{\mathfrak{d}_0} = v^{\mathfrak{d}_1}$，从而得到所需结论。

关于 $(*)_{11}$：现在证明子句 $(*)_{11}$。假设 $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}, \delta \in v^{\mathfrak{d}_0}, |\delta \cap v^{\mathfrak{d}_0}| = k(v^{\mathfrak{d}_0})$，$\mathrm{rk}(v^{\mathfrak{d}_0}) = -1$，且 $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq v^{\mathfrak{d}_1}$ 和 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}$。为导出矛盾，假设存在一个 $\varepsilon \in v^{\mathfrak{d}_1}$，使得

$(*)_{26}$ $\eta_\varepsilon{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1} \neq \eta_\delta{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}$ but $\eta_\varepsilon{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0} = \eta_\delta{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}$.

不失一般性，$v^{\mathfrak{d}_1} = v^{\mathfrak{d}_0} \cup \{\varepsilon\}$。由于必有 $\ell^{\mathfrak{d}_0} < n$，因此对于任意 $\alpha, \beta \in v^{\mathfrak{d}_0}$，都不可能有 $(\forall i<\iota)(h_i(\alpha,\beta) \geq M_\xi)$。所以，要么 $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w_\xi$，要么 $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w_\varsigma$。根据对称性，我们可以假设 $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w_\xi$。注意，

$(*)_{27}$ if $(\alpha,\beta) \in (v^{\mathfrak{d}_1})^{\langle 2\rangle} \setminus \{(\varepsilon,\delta),(\delta,\varepsilon)\}$ then $h_i(\alpha,\beta) < M_\xi$ for all $i<\iota$.

现在，如果 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\xi$ 且 $\ell^{\mathfrak{d}_1} \leq n_\xi$，那么 $\mathfrak{d}_0$，$\mathfrak{d}_1 \in \mathcal{M}_\xi$，而它们与子句 $(*)_{11}$ 关于 p_ξ 相矛盾。让我们考虑 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\xi$ 但 $\ell^{\mathfrak{d}_1} > n_\xi$ 的可能性。定义 $\mathbf{n} \in \mathbf{M}^n_{\bar t, \bar{\mathcal{O}}^6}$ 如下：

- $\ell_{\mathbf{n}} = n_\xi$，$u_{\mathbf{n}} = \{\eta_\gamma{\restriction}n_\xi : \gamma \in v^{\mathfrak{d}_1}\}$（注意 $\eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi \neq \eta_\delta{\restriction}n_\xi$），$\iota_{\mathbf{n}} = 6$，并且对于 $(\gamma,\gamma') \in (v^{\mathfrak{d}_1})^{\langle 2\rangle}$ 和 $i<6$：
- 如果 $\{\gamma,\gamma'\} \neq \{\varepsilon,\delta\}$，那么

$$g^{\mathbf{n}}_i(\eta_\gamma{\restriction}n_\xi, \eta_{\gamma'}{\restriction}n_\xi) = \{\sigma{\restriction}n_\xi : \sigma \in g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta_\gamma{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}, \eta_{\gamma'}{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1})\}$$

以及 $h^{\mathbf{n}}_i(\eta_\gamma{\restriction}n_\xi, \eta_{\gamma'}{\restriction}n_\xi) = h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta_\gamma{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}, \eta_{\gamma'}{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1})$，并且

- 对于 $\{\gamma,\gamma'\} = \{\delta,\varepsilon\}$，我们任取互不相同的 $\sigma_0,\dots,\sigma_5 \in \bigcup\limits_{j<\iota} g^\xi_j(\delta,\varepsilon)$，并令我们

令 $g^{\mathbf{n}}_i(\eta_\delta{\restriction}n_\xi, \eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi) = g^{\mathbf{n}}_i(\eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi, \eta_\delta{\restriction}n_\xi) = \{\sigma_i\}$ 且 $h^{\mathbf{n}}_i(\eta_\delta{\restriction}n_\xi, \eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi) = h^{\mathbf{n}}_i(\eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi, \eta_\delta{\restriction}n_\xi) = m$ 其中 $(\eta_\delta{\restriction}n_\xi)+\sigma_i$，$(\eta_\varepsilon{\restriction}n_\xi)+\sigma_i \in t^\xi_m$（对于 $i<6$）。

由于 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}$，在 $\{\gamma,\gamma'\} \neq \{\delta,\varepsilon\}$ 的情况下，我们有

$$g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}_i(\eta_\gamma{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}, \eta_{\gamma'}{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}) \prec_{\mathcal{O}^0} g^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_i(\eta_\gamma{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}, \eta_{\gamma'}{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}),$$

因此，只要 $i<j<6$，就有 $g^{\mathbf{n}}_i(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) \cap g^{\mathbf{n}}_j(\eta^p_\gamma, \eta^p_{\gamma'}) = \emptyset$。因此，3.10(c) 成立。其他情形以及 3.10 的其他条件由我们的选择立即得出，因此

$$\mathbf{n} = (\ell^{\mathbf{n}}, 6, u^{\mathbf{n}}, \bar h^{\mathbf{n}}, \bar g^{\mathbf{n}}) \in \mathbf{M}^n_{\bar t, \bar{\mathcal{O}}^6}.$$

此外，$\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathbf{n}$ 且 $\mathfrak{d}_* = (n_\xi, v^{\mathfrak{d}_1}, \mathbf{n}) \in \mathcal{M}_\xi$。然而，这便与 p_ξ 的子句 $(*)_{11}$ 相矛盾：$\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_*$ con- tradict。

因此，$v^{\mathfrak{d}_1} \setminus w_\xi \neq \emptyset$，所以必然有 $\varepsilon \notin w^*$。

设 $|v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w^*| \geq 2$，即 $\alpha_0, \alpha_1 \in v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w^*$。那么，对于所有 $i<\iota$，$h_i(\varepsilon,\alpha_0)$ $h_i(\varepsilon, \alpha_1) \geq M_\xi$。但 $\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0} \sqsubset \mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}$ 意味着，对于 $\alpha \in v^{\mathfrak{d}_0} \setminus \{\delta\}$，我们有

$$h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}_0(\eta_\varepsilon{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}, \eta_\alpha{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}) = h^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}_0(\eta_\delta{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}, \eta_\alpha{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}) < M_\xi,$$

因此我们得出了矛盾。

如果我们有 $v^{\mathfrak{d}_0} \subseteq w^*$，那么 $v^{\mathfrak{d}_1} \subseteq w_\varsigma$，我们就可以用 ς 替代 ξ，重复先前的论证，从而得到矛盾。因此，剩下的唯一可能是 $|v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w^*| = 1$。令 $\{\alpha\} = v^{\mathfrak{d}_0} \setminus w^*$。如果 $\alpha \neq \delta$，那么 $h_0^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_1}}(\eta_\alpha{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}, \eta_\varepsilon{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_1}) = h_0^{\mathbf{m}^{\mathfrak{d}_0}}(\eta_\alpha{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}, \eta_\varepsilon{\restriction}\ell^{\mathfrak{d}_0}) < M_\xi$，这与之前一样会导致矛盾。因此，$v^{\mathfrak{d}_0} = (v^{\mathfrak{d}_0} \cap w^*) \cup \{\delta\}$。但现在，我们关于 $v^{\mathfrak{d}_0}$、δ 的假设与 $(*)_{16}$ 矛盾。□

断言 4.4.3. 假设 $p = \big(w, n, \iota, M, \bar{\eta}, \bar{t}, \bar{h}, \bar{g}, \mathcal{M}\big) \in \mathbb{P}$。若 $\mathbf{m} \in \mathbf{M}^n_{\bar{t}}$，$\bar{\mathcal{O}}^6$ 满足 $\ell^{\mathbf{m}} = n$ 且 $|u^{\mathbf{m}}| \geq 5$，则存在某个 $\rho \in {}^n 2$ 和 $v \subseteq w$，使得$\big(n, v, (\mathbf{m} + \rho)\big) \in \mathcal{M}$。

断言的证明。令 $\mathbf{m} \in \mathbf{M}^n_{\bar{t}}$，$\bar{\mathcal{O}}^6$ 满足 $\ell^{\mathbf{m}} = n$。假设 $(\eta, \nu) \in \big(u^{\mathbf{m}}\big)^{\langle 2\rangle}$。

令 $g_j^{\mathbf{m}}(\eta, \nu) = \{\sigma_j\}$，其中 $j < 6$。则 σ_j两两不同，且若$\eta + \sigma_i = \nu + \sigma_j$，则

$$\eta + \sigma_k, \nu + \sigma_k \notin \{\eta + \sigma_i, \nu + \sigma_i\} = \{\eta + \sigma_j, \nu + \sigma_j\}$$

每当 $k \notin \{i, j\}$ 时。因此，我们可以选取 $j_0 < j_1 < j_2 < 6$ 使得

$$\eta + \sigma_{j_0}, \nu + \sigma_{j_0}, \eta + \sigma_{j_1}, \nu + \sigma_{j_1}, \eta + \sigma_{j_2}, \nu + \sigma_{j_2}$$

两两均不相同。为简化记号，不妨设 $j_0 = 0$、$j_1 = 1$ 和 $j_2 = 2$。

对于每个 $j < 3$，我们都有 $\eta + \sigma_j$、$\nu + \sigma_j \in \bigcup_{m<M} t_m$。根据子句（$*$）$_7$，存在（$\alpha_j$、$\beta_j$）、（$\alpha'_j$、$\beta'_j$）$\in w^{\langle 2\rangle}$ 以及 $\rho_j \in \bigcup g_i$（α_j、β_j）和 $\rho'_j \in \bigcup g_i$（α'_j、β'_j），使得 $_{i<\iota}$ $_{i<\iota}$ $\eta + \sigma_j = \eta_{\alpha_j} + \rho_j$，并且对于 $j < 3$ 有 $\nu + \sigma_j = \eta_{\alpha'_j} + \rho'_j$。于是，对于所有 $j < 3$，都有 $\eta + \nu = \eta_{\alpha_j} + \eta_{\alpha'_j} + \rho_j + \rho'_j$。我们将考虑 3 种情形，其中前两种将被证明是不可能的。

Case 1: $\eta_{\alpha_j} = \eta_{\alpha'_j}$ 对于某个 $j < 3$。
那么，根据 $(*)_7$ 中所要求的线性无关性，$\eta_{\alpha_j} = \eta_{\alpha'_j}$ 对所有 $j <3$ 和 $\{\rho_0, \rho'_0\} = \{\rho_1, \rho'_1\} = \{\rho_2, \rho'_2\}$ 都成立。但 $g_i(\alpha, \beta)$ 是两两不交的，因此每个$\rho \in \bigcup \big\{g_i(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in w^{\langle 2\rangle} \ \wedge \ i < \iota\big\}$ 唯一确定 α, β，使得 $\eta_\alpha + \rho, \eta_\beta + \rho \in \bigcup t_m$。因此，在当前$_{m<M}$情形下，$|\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}| \leq 2$。由于 $\eta + \sigma_j, \nu + \sigma_j$（对于 $j < 3$）全都两两不同，这立即导致矛盾。

Case 2: $\eta_{\alpha_j} \neq \eta_{\alpha'_j}$ 且对于某个（等价地：所有）$j < 3$，有 $\rho_j \neq \rho'_j$。于是 $\{\eta_{\alpha_0}, \eta_{\alpha'_0}\} = \{\eta_{\alpha_1}, \eta_{\alpha'_1}\} = \{\eta_{\alpha_2}, \eta_{\alpha'_2}\}$且 $\{\rho_0, \rho'_0\} = \{\rho_1, \rho'_1\} = \{\rho_2, \rho'_2\}$。然而，这再次与 $\eta + \sigma_j$、$\nu + \sigma_j$两两不同相矛盾。

因此，唯一可能的情形如下：对于所有 $j < 3$，
有Case 3: $\eta_{\alpha_j} \neq \eta_{\alpha'_j}$ 且 $\rho_j = \rho'_j$。于是
$\eta + \nu = \eta_{\alpha_0} + \eta_{\alpha'_0}$。
因此我们已经证明

$$u^{\mathbf{m}} + u^{\mathbf{m}} \subseteq \{\eta_\alpha + \eta_\beta : \alpha, \beta \in w\}.$$

由引理 4.3，对于某个 ρ，我们有 $u^{\mathbf{m}}+\rho\subseteq\{\eta_\alpha\colon\ \alpha\in w\}$。令 $v=\{\alpha\in w\colon\ \eta_\alpha\in u^{\mathbf{m}}+\rho\}$。下面说明，$\big(n,v,(\mathbf{m}+\rho)\big)\in\mathcal{M}$: 这些要求（$*)^{\rm a}_9$–（$*)^{\rm c}_9$是我们上述选择的直接结果。下面验证（$*)^{\rm d}_9$。

假设 $\{\alpha,\beta\}\subseteq v$ 并且 $i<6$。令 $\eta=\eta_\alpha+\rho,\nu=\eta_\beta+\rho$（因此它们属于 $u^{\mathbf{m}}$），并令 $\{\sigma_i\}=g_i^{\mathbf{m}}(\eta,\nu)$。那么 $\eta+\sigma_i,\nu+\sigma_i\in\bigcup_{m<M}t_m$，所以我们可以选取 (α',β')、$(\alpha'',\beta'')\in w^{\langle2\rangle}$ 以及 $j',j''<\iota$ 和 $\rho'\in g_{j'}(\alpha',\beta')$，并且 $\rho''\in g_{j''}(\alpha'',\beta'')$，使得 $\eta+\sigma_i=\eta_{\alpha'}+\rho'$ 并且 $\nu+\sigma_i=\eta_{\alpha''}+\rho''$。那么

$$\eta_\alpha+\eta_\beta=\eta+\nu=\eta_{\alpha'}+\eta_{\alpha''}+\rho'+\rho''.$$

根据 $(*)_8$ 中所述的线性无关性，我们得到 $\rho'=\rho''$ 并且 $\{\eta_{\alpha'},\eta_{\alpha''}\}=\{\eta_\alpha,\eta_\beta\}$。因此还有 $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha',\alpha''\}$ 并且 $\{\alpha',\beta'\}=\{\alpha'',\beta''\}$ 和 $j'=j''$。由于 $\alpha\neq\beta$，我们得到 $\alpha'\neq\alpha''$，从而 $\alpha'=\beta''$, $\alpha''=\beta'$。因此，$\{\alpha'',\beta''\}=\{\alpha',\beta'\}=\{\alpha',\alpha''\}=\{\alpha,\beta\}$。于是 $\eta+\sigma_i=\eta_{\alpha'}+\rho'\in t_{h_{j'}(\alpha,\beta)}=t_{h_{j'}(\beta,\alpha)}$ 和 $\nu+\sigma_i=\eta_{\alpha''}+\rho'\in t_{h_{j'}(\alpha,\beta)}=t_{h_{j'}(\beta,\alpha)}$。因此，$h_i^{\mathbf{m}+\rho}(\eta_\alpha,\eta_\beta)=h_i^{\mathbf{m}}(\eta,\nu)=h_{j'}(\alpha,\beta)=h_{j'}(\beta,\alpha)$。□

定义 $\mathbb{P}$–名称 $\underset{\sim}{T}_m$ 和 η_α（针对 $m<\omega$ 和 $\alpha<\lambda$），如下：

$\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\underset{\sim}{T}_m=\bigcup\{t^p_m\colon\ p\in\underset{\sim}{G}_{\mathbb{P}}\ \wedge\ m<M^p\}$ ”，以及 $\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\eta_\alpha=\bigcup\{\eta^p_\alpha\colon\ p\in\underset{\sim}{G}_{\mathbb{P}}\ \wedge\ \alpha\in w^p\}$ ”。

命题 4.4.4. (1) 对每个 $m<\omega$ 和 $\alpha<\lambda$,

$\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\eta_\alpha\in{}^\omega2$ 和 $\underset{\sim}{T}_m\subseteq{}^{\omega>}2$ 是一棵没有终端节点的树”。

(2) 对所有 $\alpha<\beta<\lambda$，我们有

$$\Vdash_{\mathbb{P}}\text{“ }\Big(\eta_\alpha+\bigcup_{m<\omega}\lim(\underset{\sim}{T}_m)\Big)\cap\Big(\eta_\beta+\bigcup_{m<\omega}\lim(\underset{\sim}{T}_m)\Big)\ \textit{is }\bar{\mathcal{O}}\textit{–large }\text{”}.$$

(3) $\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\bigcup_{m<\omega}\lim(\underset{\sim}{T}_m)$ 是一个 $\bar{\mathcal{O}}^6$–npots 集”。

断言的证明。(1, 2) 根据命题 4.4.1（以及 $\mathbb{P}$ 中序的定义）。

(3) 令 $G\subseteq\mathbb{P}$ 是 V 上的一个泛滤子，并在 $\mathbf{V}[G]$ 中进行讨论。令 $\bar{T}=\langle(\underset{\sim}{T}_m)^G\colon\ m<\omega\rangle$。

反设 $B=\bigcup\lim\big((\underset{\sim}{T}_m)^G\big)$ 是一个 $\bar{\mathcal{O}}^6$–pots$^-$ 集。那么，由命题 3.16，$\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(T)=\infty$。利用引理 3.15(5)，对 $j<\omega$ 作归纳法，我们选取 $\mathbf{m}_j$、$\mathbf{m}^*_j\in\mathbf{M}^{\bar{T},\bar{\mathcal{O}}^6}$ 和 $p_j\in G$，使得

(i) $\mathrm{ndrk}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(\mathbf{m}_j)\geq\omega_1$，$|u^{\mathbf{m}_j}|>5$ 且 $\mathbf{m}_j\sqsubset\mathbf{m}^*_j\sqsubset\mathbf{m}_{j+1}$；(ii) 对每个 $\nu\in u^{\mathbf{m}^*_j}$，集合 $\{\eta\in u^{\mathbf{m}_{j+1}}\colon\ \nu\lhd\eta\}$ 至少有两个元素；(iii) $p_j\leq p_{j+1}$、$\ell^{\mathbf{m}_j}<\ell^{\mathbf{m}^*_j}=n^{p_j}<\ell^{\mathbf{m}_{j+1}}$ 和 $\mathrm{rng}(h_i^{\mathbf{m}_j})\subseteq M^{p_j}$ 对所有 $i<6$ 均成立；以及 (iv) $|\{\eta{\restriction}n^{p_j}\colon\ \eta\in u^{\mathbf{m}_{j+1}}\}|=|u^{\mathbf{m}_j}|=|u^{\mathbf{m}^*_j}|$。

为完成这一构造，我们按如下步骤进行。假设我们已确定 $\mathbf{m}_j$，使得 $\mathrm{ndrk}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(\mathbf{m}_j)\geq\omega_1$。利用命题 4.4.1 中给出的稠密性，我们找到 $p_j\in G$，使得 $n^{p_j}>\ell^{\mathbf{m}_j}$ 且 $\mathrm{rng}(h_i^{\mathbf{m}_j})\subseteq M^{p_j}$（对于 $i<6$）。接下来，我们选择 $\mathbf{n}$，使得 $\mathbf{m}_j\sqsubset\mathbf{n}$、$\mathrm{ndrk}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(\mathbf{n})\geq\omega_1$，且 $\ell^{\mathbf{n}}>n^{p_j}$。利用引理

3.15(8)（对于满足 $\{\eta\restriction\ell^{\mathbf{m}_j}$ 的某个 $u'\subseteq u^{\mathbf{n}}:\ \eta\in u'\}=u^{\mathbf{m}_j}$、$|u'|=|u^{\mathbf{m}_j}|\rangle$，我们还可以要求 $|u^{\mathbf{n}}|=|u^{\mathbf{m}_j}|$。现在令

- $\ell=n^{p_j}$, $u=\{\eta\restriction\ell:\eta\in u^{\mathbf{n}}\}$,
- $\bar h=\langle h_i:i<6\rangle$, where for $i<6$ and $(\eta,\nu)\in\left(u^{\mathbf{n}}\right)^{\langle 2\rangle}$ $h_i(\eta\restriction\ell,\nu\restriction\ell)=h_i^{\mathbf{n}}(\eta,\nu)=h_i^{\mathbf{m}_j}(\eta\restriction\ell^{\mathbf{m}_j},\nu\restriction\ell^{\mathbf{m}_j})$,
- $\bar g=\langle g_i:i<6\rangle$, where for $i<6$ and $(\eta,\nu)\in\left(u^{\mathbf{n}}\right)^{\langle 2\rangle}$ $g_i(\eta\restriction\ell,\nu\restriction\ell)=\left\{\rho\restriction\ell:\rho\in g_i^{\mathbf{n}}(\eta,\nu)\right\}$.

显然，$\mathbf{m}_j^*=(\ell,6,u,h,\bar g)\in\mathbf{M}_{\bar\tau,\bar\sigma^6}$且 $\mathbf{m}_j\sqsubset\mathbf{m}_j^*$。最后，利用引理 3.15(5) 选取 $\mathbf{m}_{j+1}\supset\mathbf{n}$，使得 $\mathbf{ndrk}(\mathbf{m}_{j+1})\geq\omega_1$，并满足条件 (ii)。注意，$\mathbf{m}_j^*\sqsubset\mathbf{m}_{j+1}$。

于是，由 (iii)+(iv)，$\mathbf{m}_j$、$\mathbf{m}_j^*\in\mathbf{M}^{n^{p_j}}_{\bar\tau^{p_j},\bar\sigma^6}$。由断言 4.4.3 可知，存在 $w_j\subseteq w^{p_j}$ 和 $\rho_j\in{}^{n^{p_j}}2$，使得 $(n^{p_j},w_j,\mathbf{m}_j^*+\rho_j)\in\mathcal{M}^{p_j}$。

暂且固定 j，并考虑 $(n^{p_j},w_j,\mathbf{m}_j^*+\rho_j)\in\mathcal{M}^{p_j}\subseteq\mathcal{M}^{p_{j+1}}$ 和 $(n^{p_{j+1}},w_{j+1},\mathbf{m}_{j+1}^*+\rho_{j+1})\in\mathcal{M}^{p_{j+1}}$。（注意，由于 $(n^{p_j},w_j,\mathbf{m}_j^*+\rho_j)\in\mathcal{M}^{p_j}$，我们知道，对于所有 $i<6$，$(\eta,\nu)\leq n^{p_j}{}^{r}{}_{h_i^{\mathbf{m}_j^*}}$，$(\eta,\nu)\in u^{\mathbf{m}_j^*}$。）由于 $(\mathbf{m}_j^*+(\rho_{j+1}\restriction n^{p_j}))\sqsubset(\mathbf{m}_{j+1}^*+\rho_{j+1})$，我们可以选取 $w_j^*\subseteq w_{j+1}$，使得 $(n^{p_j},w_j^*,\mathbf{m}_j^*+(\rho_{j+1}\restriction n^{p_j}))\in\mathcal{M}^{p_{j+1}}$。由于 $(\mathbf{m}_j^*+\rho_j)+(\rho_j+\rho_{j+1}\restriction n^{p_j})=\mathbf{m}_j^*+(\rho_{j+1}\restriction n^{p_j})$，我们可以对 p_{j+1} 使用子句 $(*)_{10}$，从而得出 $\mathbf{rk}(w_j^*)=\mathbf{rk}(w_j)$。

选择 $\mathbf{m}_{j+1}$ 的条件 (ii) 意味着

$$(\forall\gamma\in w_j^*)(\exists\delta\in w_{j+1}\setminus w_j^*)(\eta_\gamma^{p_{j+1}}\restriction n^{p_j}=\eta_\delta^{p_{j+1}}\restriction n^{p_j}).$$

令 $\delta(\gamma)$ 为满足上述性质的最小 $\delta\in w_{j+1}\setminus w_j^*$，并令$w_j^*(\gamma)=(w_j^*\setminus\{\gamma\})\cup\{\delta(\gamma)\}$。那么，对于 $\gamma\in w_j^*$，$(n^{p_j},w_j^*(\gamma),\mathbf{m}_j^*+(\rho_{j+1}\restriction n^{p_j}))\in\mathcal{M}^{p_{j+1}}$，因此，根据子句 $(*)_{10}$，对于 p_{j+1}，我们得到，对每个 $\gamma\in w_j$:

$$\mathrm{rk}(w_j^*(\gamma))=\mathrm{rk}(w_j^*),\quad \zeta(w_j^*(\gamma))=\zeta(w_j^*),\quad\text{and}\quad k(w_j^*(\gamma))=k(w_j^*).$$

令 $n=|w_j^*|$, $\zeta=\zeta(w_j^*)$, $k=k(w_j^*)$，并令 $w_j^*=\{\alpha_0,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_{n-1}\}$ 为递增枚举。令 $\alpha_k^*=\delta(\alpha_k)$。那么，子句 $(*)_{10}$ 还给出，$w_j^*(\alpha_k)=\{\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k^*,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_{n-1}\}$ 是递增枚举。现在，

$$\mathbb{M}\models R_{n,\zeta}[\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_{n-1}]\qquad\text{and}$$
$$\mathbb{M}\models R_{n,\zeta}[\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k^*,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_{n-1}],$$

因此，如果 $\mathbf{rk}(w_j^*)\geq 0$，那么

$$\mathrm{rk}(w_{j+1})\leq\mathrm{rk}(w_j^*\cup\{\alpha_k^*\})<\mathrm{rk}(w_j^*)=\mathrm{rk}(w_j)$$

（请记住，从定理证明的一开始就有 $(\circledast)_{\mathrm{d}}$。）

现在，解除对 j 的固定，根据上述考察，我们必定有某个$j_0<\omega$ 满足:

(a) $\mathbf{rk}(w_{j_0}^*)=-1$，且 (b) $(n^{p_{j_0}},w_{j_0}^*,\mathbf{m}_{j_0}^*+(\rho_{j_0+1}\restriction n^{p_{j_0}}))$、$(n^{p_{j_0+1}},w_{j_0+1},\mathbf{m}_{j_0+1}^*+\rho_{j_0+1})\in\mathcal{M}^{p_{j_0+1}}$，(c) 对每个 $\nu\in u^{\mathbf{m}_{j_0}^*}$，集合 $\{\eta\in u^{\mathbf{m}_{j_0+1}^*}:\nu\lhd\eta\}$ 至少有两个元素。

然而，这与子句 $(*)_{11}$ (for p_{j_0+1}) 相矛盾。 □

□

5. Conclusions and Questions

推论 5.1. 假设 $\mathrm{NPr}_{\omega_1}(\lambda)$ 且 $\lambda = \lambda^{\aleph_0} < \mu = \mu^{\aleph_0}$。

(1) 令 $\mathcal{O}$ 为一个良好指标基。那么存在一个大小为 μ 的 ccc 强迫概念 $\mathbb{Q}$，它强迫：

- $2^{\aleph_0} = \mu$ 并且存在一个 Σ^0_2 集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，它有 λ多个两两$\mathcal{O}$–不相交的平移，但没有 λ^+ 多个两两$\bar{\mathcal{O}}^6$–不相交的平移。(2) 特别地，存在一个大小为 μ 的 ccc 强迫概念 $\mathbb{Q}'$，它强迫：
  - $2^{\aleph_0} = \mu$ 并且对于某个 Σ^0_2 集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，存在两两不同的$\langle \eta_\xi : \xi < \lambda \rangle$，使得 $(B + \eta_\xi) \cap (B + \eta_\zeta)$ 对每个 $\xi, \zeta < \lambda$ 都是不可数的，但是
  - 对于任意大小为 λ^+ 的集合 $A \subseteq {}^{\omega}2$，都存在 $x, y \in A$，使得$|(B + x) \cap (B + y)| < 6$。

证明。(1) 令 $\mathbb{P}$ 为定理 4.4 给出的强迫概念，并令 $\mathbb{Q} = \mathbb{P} * \mathbb{C}_\mu$。由 $\mathbb{P}$ 添加的集合 B 是 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 中的一个 $\bar{\mathcal{O}}^6$–npots–集，因此根据命题 3.16，我们得到 $\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(\bar{T}) = \infty$。秩 $\mathrm{ndrk}^{\bar{T}}_{\bar{\mathcal{O}}^6}$ 具有绝对性，因此在 $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ 中我们仍有 $\mathrm{NDRK}_{\bar{\mathcal{O}}^6}(\bar{T}) = \infty$，从而 B 是 $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ 中的一个 $\bar{\mathcal{O}}^6$–npots–集。根据 3.5(3)，此集合不可能有 λ^+ 个两两 $\bar{\mathcal{O}}^6$–不相交的平移，但它确实有λ 个两两 $\mathcal{O}$–不相交的平移（由绝对性可知）。□

推论 5.2. 假设马丁公理以及 $\aleph_\alpha < \mathfrak{c}$、$\alpha < \omega_1$。

(1) 令 $\bar{\mathcal{O}}$ 为一个良好指标基。则存在一个 Σ^0_2 $\bar{\mathcal{O}}^6$–npots–集$B \subseteq {}^{\omega}2$，它具有 $\aleph_\alpha$ 个两两 $\mathcal{O}$– 非不相交平移。(2) 特别地，存在一个 Σ^0_2 集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，使得

- 对于某些两两不同的 $\langle \eta_\xi : \xi < \aleph_\alpha \rangle \subseteq {}^{\omega}2$ 交集 $(B + \eta_\xi) \cap (B + \eta_\zeta)$ 对每个 ξ、$\zeta < \aleph_\alpha$ 都是不可数的，但是
- 对于每个完美集 $P \subseteq {}^{\omega}2$，都存在 x、$y \in P$，使得 $|(B + x) \cap (B + y)| < 6$。

证明。定理 4.4 的证明给出了标准结论，这里使用了“B 是一个 $\bar{\mathcal{O}}^6$–npots–集”由命题 3.16 可知具有足够的绝对性这一事实。□

问题 5.3。（1）在我们的结果背景下，能否区分不同的良好 $\mathcal{O}$？特别是：

（2）对于某个良好 $\mathcal{O}$ 是否可能存在一个 Σ^0_2 $\mathcal{O}$–npots–集，它有 $\aleph_\alpha$ 个两两 $\mathcal{O}$–非不相交平移，但对于另一个良好的 $\bar{\mathcal{O}}^*$，每个有 $\aleph_\alpha$ 个两两 $\bar{\mathcal{O}}^*$–非不相交平移的 Σ^0_2 集是否都会自动成为 $\mathcal{O}^*$–pots？（3）是否可能存在一个 Σ^0_2 集 $B \subseteq {}^{\omega}2$，它拥有 $\aleph_\alpha$ 个两两 $\mathcal{O}^{\mathrm{per}}$–非不相交平移，是 $\mathcal{O}^{\mathrm{per}}$–npots，但同时也是$\bar{\mathcal{O}}^6$–pots？

问题 5.4。(1) 考虑定理 4.4 给出的强迫概念。在由其得到的强迫扩张中，秩 $\mathrm{NDRK}(T)$ 和

NDRK (T) 都是可数的。它们相等吗？它们的值分别是多少？(2) 是否存在一个树的序列（如假设 3.1 所述），使得秩 NDRK (T) 和 NDRK (T) 不同（对某些/所有 ι）？(3) 将构造推广到任意良好 $\mathcal{O}$。(4) 将本文的结果推广到任意完美阿贝尔波兰群的情形。

References

[1] Tomek Bartoszy´nski 和 Haim Judah。《集合论：实数线的结构》。A K Peters, 韦尔斯利，马萨诸塞州，1995年。[2] Thomas Jech。《集合论》。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003年。第三千年版，修订并扩充。[3] Andrzej Roslanowski 和 Vyacheslav V. Rykov。非不相交平移并没有那么多。《美国数学会会刊》，B辑，5:73–84，2018年。arXiv:1711.04058。[4] Andrzej Roslanowski和Saharon Shelah。没有完美多重重叠平移的博雷尔集。《数理逻辑报告》，54:3–43，2019年。arXiv:1806.06283。[5] Andrzej Roslanowski 和 Saharon Shelah。没有完美多重重叠平移的博雷尔集 II。载于 Melvin Fitting、Massoud Pourmahdian、Adrian Rezus 和 Ali Sadegh Daghigh 编，《当代逻辑研究趋势》，页码待定。College Publications（伦敦）。arXiv:1909.00937。[6] Andrzej Roslanowski 和 Saharon Shelah。没有完美多重重叠平移的博雷尔集 III。已投稿。arXiv:2009.03471。[7] Saharon Shelah。含有大平方的博雷尔集。《Fundamenta Mathematicae》，159:1–50，1999年。arxiv:math/9802134。

Department of Mathematics, University of Nebraska at Omaha, Omaha, NE 68182-0243, USA电子邮箱地址：aroslanowski@unomaha.edu

Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, 91904Jerusalem, Israel, and Department of Mathematics, Rutgers University,New Brunswick, NJ 08854, USA电子邮箱地址：shelah@math.huji.ac.il 网址：http://shelah.logic.at