arXiv:2302.12997v1 [math.CA] 18 Feb 2023

Walsh-Fourier级数的Fejér平均在空间 $H_{1/2}$ 上的若干受限极大算子

DAVIT BARAMIDZE、LARS-ERIK PERSSON 和 GEORGE TEPHNADZE

摘要。本文推导出自然数的极大子空间 $\{n_k: k \geq 0\}$，使得在该子空间上，由 Fejér平均的 Walsh-Fourier级数所定义的受限极大算子 $\sup_{k\in\mathbb{N}} |\sigma_{n_k} F|$，从鞅Hardy空间 $H_{1/2}$ 到 Lebesgue空间 $L_{1/2}$. 是有界的。本文还证明了该结果的锐性。

2020年数学主题分类。26015, 42C10, 42B30。**关键词与短语：** Walsh系统、Fejér平均、鞅Hardy空间、极大算子、受限极大算子。

1. 引言

本引言中使用的所有符号均可在第2节中找到。

在一维情形下，关于 Walsh系统的 Fejér 均值最大算子 σ^* σ_n 的弱 (1,1) 型不等式，定义如下：

$$\sigma^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n f|$$

Schipp [19] 以及 Pál、Simon [12] 研究了这一问题（另见 [1], [10] 和[16]）。Fujii [3]和 Simon [21] 证明了 σ^* 是从 H_1 到 L_1的有界算子。Weisz [32] 推广了这一结果，并证明了 σ^* 从鞅空间 H_p 到 Lebesgue空间 L_p 的有界性，其中 $p > 1/2$。Simon [20]给出了一个反例，表明对$0 < p < 1/2$. 有界性并不成立。Goginava [5]给出了 $p = 1/2$ 的一个反例。此外，在 [6] 中（另见 [23]），他证明存在一个鞅$F \in H_p$ （$0 < p \leq 1/2$），使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n F\|_p = +\infty.$$

Weisz [35] 证明，Fejér 均值的极大算子 σ^* 是从 Hardy空间 $H_{1/2}$ 到空间 $weak - L_{1/2}$的有界算子。

在 [24],[25]中研究了加权极大算子的有界性。关于Walsh-Fourier级数的Fejér均值可和性的结果可见于 [2], [9], [11], [14], [28], [32]。

本研究由 Shota Rustaveli国家科学基金会资助，资助编号为 PHDF-21-1702。

为了研究当 $0 < p \leq 1/2$时，鞅Hardy空间 $H_p(G)$上Fejér均值的子列及其受限极大算子的收敛性，以下事实起着核心作用：任意自然数 $n \in \mathbb{N}$ 都可以唯一地表示为

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_j 2^j, \quad n_j \in Z_2 \ (j \in \mathbb{N}),$$

其中只有有限个n_j 不为零，其重要特征 $[n]$、 $|n|$、 $\rho(n)$和 $V(n)$定义如下

$$[n] := \min\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\}, \quad |n| := \max\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\}, \quad \rho(n) = |n| - [n]$$

以及

$$V(n) := n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|, \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weisz [34]（另见 [33]）还证明，对于任意 $F \in H_p(G)$（$p > 0$），极大算子

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_{2^n} F|$$

从 Hardy空间 H_p 到 Lebesgue空间 L_p是有界的，但（详情见 [17]）它并非从 Hardy空间 H_p 到空间H_p. 有界。Persson 和Tephnadze [15] 推广了这一结果，并证明：如果$0 < p \leq 1/2$ 且 $\{n_k : k \geq 0\}$ 是一个满足下列条件的正数列

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \rho(n_k) \leq c < \infty, \tag{1}$$

那么极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$，定义为

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla} F = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\sigma_{n_k} F|, \tag{2}$$

从 Hardy空间 H_p 到 Lebesgue空间 L_p. 是有界的。此外，如果$0 < p < 1/2$ 且 $\{n_k : k \geq 0\}$ 是一个满足下列条件的正数列

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \rho(n_k) = \infty,$$

那么存在一个鞅 $F \in H_p$ 使得

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{n_k} F\|_p = \infty.$$

由此可知，若 $0 < p < 1/2$, $f \in H_p$ 和 $\{n_k : k \geq 0\}$ 是任意正数列，则由 (2) 定义的极大算子从 Hardy 空间 H_p 到空间 L_p 有界，当且仅当条件 (1) 成立。此外，若 $0 < p < 1/2$, $f \in H_p$ 和 $\{n_k : k \geq 0\}$是任意正数列，则 $\sigma_{n_k} f$ 从 Hardy空间 H_p 到 Lebesgue空间 L_p 一致有界，当且仅当条件 (1) 成立。此外，条件 (1) 是子序列 $\sigma_{n_k} f$ 从 Hardy空间 H_p 到 Hardy空间 H_p.有界的充要条件

容易证明，条件 (1) 也意味着极大算子 (2) 从 Hardy空间 $H_{1/2}$ 到 Lebesgue空间 $L_{1/2}$.有界。此外，对于子序列 $\{n_k = 2^k + 1\}$，我们有

$$\rho\left(2^k + 1\right) = k \to \infty, \text{ as } k \to \infty,$$

但该极大算子

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sigma_{2^k+1} F\right|$$

是从 Hardy空间 $H_{1/2}$ 到 Lebesgue空间 $L_{1/2}$.的有界算子

在 [30] 中已证明，若 $F \in H_{1/2}$，则存在一个绝对常数 c，使得

$$\|\sigma_n F\|_{H_{1/2}} \leq cV^2(n) \|F\|_{H_{1/2}}.$$

此外，若 $\{n_k : k \geq 0\}$ 是正整数 $\mathbb{N}_+$的一个子序列，且满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V(n_k) = \infty,$$

并且 Φ_n 是任意一个满足条件$\Phi_n \uparrow \infty$ 且

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V^2(n_k)}{\Phi_{n_k}} = \infty,$$

那么存在一个鞅 $F \in H_{1/2}$，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{n_k} F}{\Phi_{n_k}} \right\|_{1/2} = \infty.$$

由此可知，对于任意正数列 $f \in H_{1/2}$ 和 $\{n_k : k \geq 0\}$， $\sigma_{n_k} f$ 从 Hardy空间 $H_{1/2}$ 到空间$H_{1/2}$ 有界，当且仅当存在某个 c,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V(n_k) < c < \infty.$$

关于 Walsh-Fourier级数部分和及 Fejér 均值子列的收敛性，可参见 [13], [26], [27] 和 [31]。

本文通过研究极限情形 $p = 1/2.$ ，补充了上述已有研究。具体而言，我们推导出自然数的极大子空间 $\{n_k : k \geq 0\}$，使得在该子空间上定义的 Walsh-Fourier级数 Fejér 均值受限极大算子 $\sup_{k\in\mathbb{N}} |\sigma_{n_k} F|$，从鞅 Hardy空间 $H_{1/2}$ 到 Lebesgue空间 $L_{1/2}$.有界

本文结构安排如下：为避免影响后续讨论，第2节给出一些定义与记号。主要结果及其若干推论见第3节。证明主要结果需要一些辅助命题，其中一些是新的，且本身也具有研究价值（见命题1和命题2）。这些结果在第4节中给出。详细证明见第5节。

2. 定义与记号

令 $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集合， $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. 记 Z_2 为阶为2的离散循环群，即 $Z_2 := \{0,1\}$，其中群运算为模2加法，且每个子集都是开集。 Z_2 上的哈尔测度定义为单点的测度为1/2。

定义群 G 为群 Z_2 的完全直积，其拓扑为 Z_2 的离散拓扑之积。 G 的元素表示为序列 $x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...)$，其中 $x_k = 0 \vee 1$.

容易给出 $x \in G$ 的邻域基:

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

记 $I_n := I_n(0)$ $\overline{I_n} := G \setminus I_n$ 以及 $e_n := (0, ..., 0, x_n = 1, 0, ...) \in G$，其中 $n \in \mathbb{N}$。则易证

$$\overline{I_M} = \bigcup_{i=0}^{M-1} I_i \backslash I_{i+1} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1}(e_k + e_l) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M(e_k) \right). \tag{3}$$

若 $n \in \mathbb{N}$，则每个 n 都可以唯一表示为 $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j$，其中 $n_j \in Z_2$ $(j \in \mathbb{N})$，且只有有限个 n_j 不为零。

Let

$$[n] := \min\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\} \quad \text{and} \quad |n| := \max\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\},$$

即 $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$. 置

$$d(n) = |n| - [n], \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

定义具有二进制系数（n_k, $k \in \mathbb{N}$）的 $n \in \mathbb{N}$ 的变差 $V(n)$，如下:

$$V(n) := n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|.$$

每个 $n \in \mathbb{N}$ 也可以表示为 $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{n_i}, n_1 > n_2 > ...n_r \geq 0$.对于 $n \in \mathbb{N}$ 的这种表示，我们记数

$$n^{(i)} = 2^{n_{i+1}} + ... + 2^{n_r}, i = 1, ..., r.$$

令 $2^s \leq n_{s_1} \leq n_{s_2} \leq ... \leq n_{s_r} \leq 2^{s+1}$, $s \in \mathbb{N}$. 对于这类 n_{s_j}，可将其写为

$$n_{s_j} = \sum_{i=1}^{r_{s_j}} \sum_{k=l_i^{s_j}}^{t_i^{s_j}} 2^k,$$

其中 $0 \le l_1^{s_j} \le t_1^{s_j} \le l_2^{s_j} - 2 < l_2^{s_j} \le t_2^{s_j} \le ... \le l_{r_j}^{s_j} - 2 < l_{r_{s_j}}^{s_j} \le t_{r_{s_j}}^{s_j}$，我们定义

$$
\begin{aligned}
A_s &:= \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ l_1^{s_j}, t_1^{s_j}, l_2^{s_j}, t_2^{s_j}, ..., l_{r_{s_j}}^{s_j}, t_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ l_1^{s_j}, l_2^{s_j}, ..., l_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \bigcup_{j=1}^{r} \left\{ t_1^{s_j}, t_2^{s_j}, ..., t_{r_{s_j}}^{s_j} \right\} \\
&= \left\{ l_1^{s}, l_2^{s}, ..., l_{r_s^1}^{s} \right\} \bigcup \left\{ t_1^{s}, t_2^{s}, ..., t_{r_s^2}^{s} \right\} \\
&= \left\{ u_1^{s}, u_2^{s}, ..., u_{r_s^3}^{s} \right\},
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中 $u_1^s < u_2^s < ... < u_{r_s^3}^s$. 我们注意到，对于 $j = 1$、2、...、$r.$，有 $t_{r_{s_j}}^{s_j} = s \in A_s$。我们将集合 A_s 的基数记为 $|A_s|$，即

$$card(A_s) := |A_s|.$$

显然

$$|A_s| = r_s^3 \le r_s^1 + r_s^2.$$

此外，$r_3^s = card(A_s) < \infty$ 当且仅当 $r_s^1 < \infty$ 且 $r_s^2 < \infty.$

我们注意到，若 $|A_s| < \infty$，则每个 n_{s_j} 都具有有界变差

$$V(n_{s_j}) < c < \infty, \quad \text{for each} \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

且 $r_s^1 < \infty$、$r_s^2 < \infty$ 和 $r_s^3 < \infty.$

因此，如果我们考虑块（区间）

$$
\begin{aligned}
&[u_1^s, u_1^s], [u_1^s, u_2^s], ..., [u_1^s, u_{r_s^3}^s] \\
&[u_2^s, u_2^s], [u_2^s, u_3^s], ..., [u_2^s, u_{r_s^3}^s] \\
&\ldots \\
&[u_{r_s^3}^s, u_{r_s^3}^s],
\end{aligned} \tag{6}
$$

那么很容易看出，它包含 $r_s^3(r_s^3+1)\ 2$ 个不同的块。因此，包含来自 (6) 的块的不同自然数的二进制表示最多为 $2^{\frac{r_s^3(r_s^3+1)}{2}} - 1$，这是一个有限数，并且对于所有 $s \in \mathbb{N}_+$，集合$\{n_{s_1}, n_{s_2}, ...n_{s_r}\}$都是有限的，由此可得

$$s_r < \infty, \quad \text{for all} \quad s \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

综上，我们可以得出结论：当且仅当对于所有 $s \in \mathbb{N}_+$，集合$\{n_{s_1}, n_{s_2}, ..., n_{s_r}\}$都是有限的，并且每个 n_{s_j}都具有有界变差时，$\sup_{s\in\mathbb{N}} |A_s| < \infty$ 成立，也就是说，条件 (5) 和 (7) 得到满足。

空间 $L_p(G)$ 和 $L_{p,\ \infty}(G)$、$(0 < p < \infty)$ 的范数（或拟范数）分别定义为

$$\|f\|_p^p := \int_G |f|^p \, d\mu \quad \text{and} \quad \|f\|_{L_{p,\infty}(G)}^p := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(f > \lambda\right) < +\infty,$$

第 k 个拉德马赫函数定义为

$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \qquad (x \in G,\ k \in \mathbb{N}).$$

现在，定义 G 上的 Walsh 系统 $w := (w_n :\ n \in \mathbb{N})$:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Walsh 系统在 $L_2(G)$ 中是正交归一且完备的（见 [18]）。

若 $f \in L_1(G)$，则可按通常方式定义傅里叶系数、傅里叶级数部分和、Fejér 均值、Dirichlet 核和 Fejér核:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &:= \int_G f w_n d\mu,\ (n \in \mathbb{N}),\\
S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k,\ \ (n \in \mathbb{N}_+, S_0 f := 0),\\
\sigma_n f &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f,\\
D_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} w_k\ ,\\
K_n &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k\ ,\quad (n \in \mathbb{N}_+).
\end{aligned}$$

回忆一下（见 [18]）

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & \text{if } x \in I_n \\ 0 & \text{if } x \notin I_n. \end{cases} \tag{8}$$

令 $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{n_i},\quad n_1 > n_2 > \ldots > n_r \geq 0.$ 则（参见 [8] 和 [18]）

$$nK_n = \sum_{A=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{A-1} w_{2^{n_j}} \right) \left(2^{n_A} K_{2^{n_A}} + n^{(A)} D_{2^{n_A}} \right). \tag{9}$$

由区间 $\{I_n(x) :\ x \in G\}$ 生成的 σ-代数记为 $\zeta_n (n \in \mathbb{N})$。记 $F = (F_n,\ n \in \mathbb{N})$ 为关于 $\zeta_n (n \in \mathbb{N})$ 的一个鞅（详情参见例如 [33]）。鞅F 的极大函数 F^* 定义为

$$F^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_n|.$$

在 $f \in L_1(G)$ 的情况下，极大函数 f^* 也由下式给出

$$f^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int_{I_n(x)} f(u)\, d\mu(u) \right| \right).$$

对于 $0<p<\infty$，Hardy 鞅空间 H_p (*G*) 由所有满足下列条件的鞅组成

$$\|F\|_{H_p}:=\|F^*\|_p<\infty.$$

有界可测函数 a 是一个 p-原子，当且仅当存在一个区间I，使得

$$\operatorname{supp}(a)\subset I,\quad \int_I a d\mu=0,\quad \|a\|_\infty\leq \mu(I)^{-1/p}.$$

容易验证，对于任意鞅 $F=(F_n,n\in\mathbb{N})$ 以及任意$k\in\mathbb{N}$，极限

$$\widehat{F}(k):=\lim_{n\to\infty}\int_G F_n(x)\,w_k(x)\,d\mu(x)$$

存在，称为 $F.$的第 k 个 Walsh-Fourier 系数

$f\in L_1(G)$ 的 Walsh-Fourier 系数与由 f 得到的鞅 $(S_{2^n}f,n\in\mathbb{N})$ 的 Walsh-Fourier 系数相同。

3. The Main Result and its Consequences

我们的主要结果如下:

定理 1. ***a)*** 设 $f\in H_{1/2}(G)$ 和 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 为正数列，并设 $\{n_{s_i}:\ 1\leq i\leq r\}\subset\{n_k:\ k\geq 0\}$ 为满足 $2^s\leq n_{s_1}\leq n_{s_2}\leq ...\leq n_{s_r}\leq 2^{s+1},\ s\in\mathbb{N}.$ 的数。若由(4)定义的集合 A_s, 对所有 $s\in\mathbb{N},$ 均为有限集，也就是说，集合 A_s 的基数有限:

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|<c<\infty,$$

则由下式定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}$

$$\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F=\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sigma_{n_k}F|,\tag{10}$$

是从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$的有界算子。

b)（锐性）设

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|=\infty.\tag{11}$$

则存在一个鞅 $f\in H_{1/2}(G),,$ 使得由(10)定义的极大算子不是从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$.的有界算子

特别地，定理 1 蕴含以下最优刻画:

推论1。 设 $F\in H_{1/2}(G)$ 和 $\{n_k:\ k\geq 0\}$ 为正数列。那么，由(10)定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\nabla},$ 从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$ 有界，当且仅当对于每个 $s\in\mathbb{N}_+$ 以及每个满足 $n_k\in[2^s,2^{s+1}),$的正数列 $\{n_k:\ k\geq 0\}$，$\{n_k:k\geq 0\}$ 都有界变差，即

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}V(n_k)<c<\infty.$$

为了能够与文献中的其他一些结果进行比较（见注 1），我们还陈述如下结论：

推论 2. 设 $F \in H_{1/2}(G)$。则由下式定义的受限极大算子$\widetilde{\sigma}^{*,\ {}_i}{}^{\nabla}$， $i=1,2,3$,

$$\widetilde{\sigma}_1^{*,\nabla}F=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{2^k}F\right|,$$

$$\widetilde{\sigma}_2^{*,\nabla}F=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{2^k+1}F\right|, \tag{12}$$

$$\widetilde{\sigma}_3^{*,\nabla}F=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{2^k+2^{[k/2]}}F\right|, \tag{13}$$

其中， $[n]$ 表示 n的整数部分，均从*Hardy*空间$H_{1/2}$ 到*Lebesgue*空间 $L_{1/2}$ 有界。

注 1. 在 [15] 中证明了，若 $0<p<1/2$, 则由 (12) 和 (13)定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\ {}_2}{}^{\nabla}$ 和 $\widetilde{\sigma}^{*,\ {}_3}{}^{\nabla}$， 从 *Hardy*空间 H_p 到 *Lebesgue*空间 $weak-L_p$不是有界的。

另一方面，在 [15] 中证明了，若 $0<p\leq 1/2$, 则由 $\widetilde{\sigma}^{*,\ {}_1}{}^{\nabla}$ 定义的受限极大算子从*Hardy*空间H_p 到*Lebesgue*空间 L_p.有界

我们还有以下定理 1 的相关推论：

推论 3。 令 $f\in H_{1/2}(G)$ 以及 $\{A_k^s:\ 0\leq k\leq s-1\}$ 为由下式定义的正数列

$$\alpha_0^s=2^s+2^0,\quad \alpha_1^s=2^s+2^0+2^1,...,\alpha_{s-1}^s=2^s+2^0+2^1+...+2^{s-1},\quad s\in\mathbb{N}.$$

则由下式定义的受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*,\ {}_4}{}^{\nabla}$，

$$\widetilde{\sigma}_4^{*,\nabla}F=\sup_{s\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq k\leq s-1}\left|\sigma_{\alpha_k^s}F\right|,$$

不是从 *Hardy*空间 $H_{1/2}$ 到 *Lebesgue*空间 $L_{1/2}$.的有界算子

注 2。 我们注意到，在这种情况下，对于任意 $0\leq k\leq s-1$ 和$s\in\mathbb{N}$，都有 $V(\alpha_k^s)\leq 6$

$$\left\{l_1^s,l_2^s,...,l_{r_s^1}^s\right\}=\{0,s\}$$

也就是说，它只包含两个元素，即集合

$$\left\{t_1^s,t_2^s,...,t_{r_s^2}^s\right\}=\{0,1,2,3,...,s\}$$

and

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}|A_s|=\sup_{s\in\mathbb{N}}(s+1)=\infty.$$

最后，我们陈述以下相关结果，该结果与 [30] 中的研究有关（见注 4）：

推论 4. 令 $f \in H_{1/2}(G)$ 和 $\{A_k^s \colon 0 \leq k \leq s-1\}$ 为正数列，定义如下：

$$\beta_{s-1}^s = 2^s + 2^{s-1}, \quad \beta_{s-2}^s = 2^s + 2^{s-1} + 2^{s-2}, ..., \beta_0^s = 2^s + 2^{s-1} + ... + 2^0.$$

则受限极大算子 $\widetilde{\sigma}^{*}_{,5}{}^{\nabla}$,定义如下：

$$\widetilde{\sigma}_5^{*,\nabla} F = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{0\leq k\leq s-1} \left|\sigma_{\beta_k^s} F\right|,$$

不能从 ***Hardy***空间 $H_{1/2}$ 到 ***Lebesgue***空间 $L_{1/2}$.有界

注 3. 注意，现在 $V(\beta_k^s) \leq 4$, 对于任意 $0 \leq k \leq s-1$ 和 $s \in \mathbb{N}$,

$$\left\{t_1^s, t_2^s, ..., t_{r_s^2}^s\right\} = \{0, s\}, \qquad \left\{l_1^s, l_2^s, ..., l_{r_s^1}^s\right\} = \{0, 1, 2, 3, ..., s\}$$

and

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} |A_s| = \sup_{s\in\mathbb{N}} (s+1) = \infty.$$

注 4. 令 $f \in H_{1/2}(G)$ 和 $\{\alpha_k^s \colon 0 \leq k \leq s-1\}$ 以及 $\{\beta_k^s \colon 0 \leq k \leq s-1\}$为正数列，如推论 *3* 和 *4* 中所定义。则存在绝对常数 c_1 和 c_2 使得

$$\left\|\sigma_{\alpha_k^s} F\right\|_{H_{1/2}} \leq c_1 \|F\|_{H_{1/2}}$$

and

$$\left\|\sigma_{\beta_k^s} F\right\|_{H_{1/2}} \leq c_2 \|F\|_{H_{1/2}}$$

对于任意 $0 \leq k \leq s-1$ 和 $s \in \mathbb{N}$.

我们注意到，这些结果已在 [30]中得到证明，并且它们分别由以下事实推出：

$$V(\alpha_k^s) \leq 6 \quad \textit{and} \quad V(\beta_k^s) \leq 4, \quad \textit{for any} \quad 0 \leq k \leq s-1 \ \textit{and} \ s \in \mathbb{N}.$$

4. Auxiliary Lemmas and Propositions

引理 1 (**Weisz** [34] **(另见 Simon** [22]**)**)。 鞅 $F = (F_n,\ n \in \mathbb{N})$属于 H_p ($0 < p \leq 1$) 当且仅当存在一个由 ***p***-原子构成的序列$(a_k, k \in \mathbb{N})$ 以及一个由实数组成的序列$(\mu_k, k \in \mathbb{N})$ ，使得对每个$n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n} a_k = F_n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty. \tag{14}$$

此外，

$$\|F\|_{H_p} \backsim \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p \right)^{1/p},$$

其中下确界取遍所有形如（***14***）的 F 分解。

引理 2（**Weisz** [33]）。设算子 T 是 σ-线性的，且

$$\int_{\overline{I}} |Ta|^p \, d\mu \leq c_p < \infty, \quad (0 < p \leq 1)$$

对于每个 p-原子 a，其中 I 表示该原子的支集。如果 T 从 L_∞ 到 L_∞有界，则

$$\|TF\|_p \leq c_p \|F\|_{H_p}.$$

引理 3（例如参见 [4]）。设 t、$n \in \mathbb{N}$. 则

$$K_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^{t-1}, \ if \quad x \in I_n(e_t), \ n > t, \ x \in I_t \backslash I_{t+1}, \\ (2^n + 1)/2, \ if \quad x \in I_n, \\ 0, \ otherwise. \end{cases}$$

引理 4（例如参见 [7], [25]）。设 $n \geq 2^M$ 且

$$x \in I_M^{k,l}, \quad k = 0, ..., M-1, \quad l = k+1, ..., M.$$

Then

$$\int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t) \leq cn 2^{k+l-M}.$$

引理 5（参见 [29]）。设

$$n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{t_i} 2^k, \ where \ \ t_1 \geq l_1 > l_1 - 2 \geq t_2 \geq l_2 > l_2 - 2 > ... > t_s \geq l_s \geq 0.$$

那么，对于任意 $i = 1, \ 2, \ ....., \ s,$

$$n |K_n(x)| \geq 2^{2l_i - 4}, \quad for \quad x \in E_{l_i} := I_{l_i+1}(e_{l_i-1} + e_{l_i}),$$

其中 $I_1(e_{-1} + e_0) = I_2(e_0 + e_1)$。

我们还需要以下具有独立意义的新结论：

命题 1。设

$$n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{t_i} 2^k, \quad where \ \ t_1 \geq l_1 > l_1 - 2 \geq t_2 \geq l_2 > l_2 - 2 > ... > t_s \geq l_s \geq 0.$$

那么，对于任意 $i = 1, \ 2, \ ....., \ s,$

$$n |K_n(x)| \geq 2^{2t_i - 2}, \quad for \quad x \in E_{t_i} := I_{t_i+1}(e_{t_i+1} + e_{t_i+2}).$$

证明。显然，我们始终有 $t_i + 2 \leq l_{i+1}$. 如果 $t_i + 2 = l_{i+1}$，那么 $E_{t_i} = I_{t_i+3}(e_{t_i+1} + e_{t_i+2}) = I_{l_{i+1}+1}\left(e_{l_{i+1}-1} + e_{l_{i+1}}\right) = E_{l_{i+1}}$；若应用引理 5，则可得

$$n |K_n(x)| \geq 2^{2l_{i+1} - 4} = 2^{2t_i}, \quad \text{for} \quad x \in E_{l_{i+1}} = E_{t_i}.$$

令 $t_i + 2 < l_{i+1}$. 结合 (8) 和引理 3，对于任意 $n \geq t_i + 3$，我们得到

$$D_{2^n}(x) = K_{2^n}(x) = 0, \quad \text{for} \quad x \in E_{t_i}.$$

由 (9) 可知，对于 $x \in E_{t_i}$，我们可以得出

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad & nK_n \\
= & \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=l_r}^{t_r}\left(\prod_{j=i+1}^{s}\prod_{q=l_j}^{t_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{t_i}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{q=l_j}^{t_j}2^q+\sum_{q=l_i}^{k-1}2^q\right)D_{2^k}\right) \\
= & \sum_{r=1}^{i}\sum_{k=l_r}^{t_r}\left(\prod_{j=i+1}^{s}\prod_{q=l_j}^{t_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{t_i}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{q=l_j}^{t_j}2^q+\sum_{q=l_i}^{k-1}2^q\right)D_{2^k}\right).
\end{aligned}
$$

假设 $l_i < t_i$. 由于

$$\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{q=l_j}^{t_j}2^q+\sum_{q=l_i}^{t_i-1}2^q \geq 2^{t_i-1}$$

对于 $x \in E_{t_i}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
(16) \quad n\left|K_n\right| &\geq \left|2^{t_i}K_{2^{t_i}}+2^{t_i-1}D_{2^{t_i}}\right|-\sum_{k=1}^{t_i-1}\left|2^kK_{2^k}\right|-\sum_{k=1}^{t_i-1}\left|2^kD_{2^k}\right| \\
&:= I-II-III.
\end{aligned}
$$

此外，结合 (8) 和引理 3，我们得到

$$(17) \quad I \geq 2^{t_i}K_{2^{t_i}}(x)+2^{t_i-1}D_{2^{t_i}}=\frac{2^{2t_i}}{2}+2^{t_i-1}+\frac{2^{t_i}}{2}=2^{2t_i}+2^{t_i-1}.$$

对于 II，我们有

$$(18) \quad II \leq \sum_{k=0}^{t_i-1}2^k\frac{\left(2^k+1\right)}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{2^{2t_i}-1}{4-1}+\frac{1}{2}\frac{2^{t_i}-1}{2-1} \leq \frac{2^{2t_i}}{6}+2^{t_i-1}.$$

此外，III 可以估计如下

$$(19) \qquad III \leq \sum_{k=0}^{l_i-1}4^k=\frac{2^{2t_i}}{3}.$$

将 (17)-(19) 合并并代入 (16)，可得

$$(20) \qquad n\left|K_n(x)\right| \geq I-II-III \geq \frac{2^{2l_i}}{2}.$$

若 $t_i = l_i$，则可得 $t_{i-1} \leq l_i - 2 = t_i - 2$。因此，利用 (15) 可得

$$(21) \quad n\left|K_n\right| \geq \left|2^{t_i}K_{2^{t_i}}\right|-\sum_{k=1}^{t_i-2}\left|2^kK_{2^k}\right|-\sum_{k=1}^{t_i-2}\left|2^kD_{2^k}\right| := I-II-III.$$

通过简单计算可得

$$(22) \qquad I \geq 2^{t_i}K_{2^{t_i}}(x) \quad = \quad \frac{2^{2t_i}}{2}+\frac{2^{t_i}}{2},$$

$$II \leq \sum_{k=0}^{t_i-2} 2^k \frac{\left(2^k+1\right)}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{2^{2t_i-2}-1}{4-1} + \frac{1}{2}\frac{2^{t_i-1}-1}{2-1} \leq \frac{2^{2t_i}}{24} + 2^{t_i-2} \tag{23}$$

and

$$III \leq \sum_{k=0}^{l_i-2} 4^k = \frac{2^{2t_i}}{12}. \tag{24}$$

将（22）—（24）代入（21），可得

$$n\left|K_n\left(x\right)\right| \geq I - II - III \geq \frac{2^{2l_i}}{4}. \tag{25}$$

只需结合估计式 (20) 和 (25)，即可完成证明。 □

推论 5。设

$$n = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{t_i} 2^k, \ \textit{where} \ \ t_1 \geq l_1 > l_1 - 2 \geq t_2 \geq l_2 > l_2 - 2 > ... > t_s \geq l_s \geq 0.$$

那么，对于任意 $i = 1, \ 2, \ ..., \ s,$

$$n\left|K_n\left(x\right)\right| \geq 2^{2t_i-5}, \quad \textit{for} \quad x \in E_{t_i} := I_{t_i+1}\left(e_{t_i+1} + e_{t_i+2}\right).$$

and

$$n\left|K_n\left(x\right)\right| \geq 2^{2l_i-5}, \ \ \textit{for} \ \ x \in E_{l_i} := I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1} + e_{l_i}\right),$$

其中 $I_1\left(e_{-1}+e_0\right) = I_2\left(e_0+e_1\right)$。

我们的第二个具有独立研究价值的辅助结果如下:

命题 2. 设

$$n = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{t_i} 2^k, \ \ \textit{where} \ \ t_1 \geq l_1 > l_1 - 2 \geq t_2 \geq l_2 > l_2 - 2 > ... > t_s \geq l_s \geq 0.$$

Then

$$\left|nK_n\right| \ \leq \ c\sum_{A=1}^{s}\left(2^{l_A}K_{2^{l_A}} + 2^{t_A}K_{2^{t_A}} + 2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{t_A} D_{2^k}\right).$$

证明。 设 $n = \sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}, \quad n_1 > n_2 > ... > n_r \geq 0.$ 利用 (9) 可得

$$\begin{aligned} nK_n \ &= \ \sum_{A=1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{A-1} w_{2^{n_j}}\right)\left(\left(2^{n_A}K_{2^{n_A}} + \left(2^{n_A}-1\right)D_{2^{n_A}}\right)\right) \\ &- \ \sum_{A=1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{A-1} w_{2^{n_j}}\right)\left(\left(2^{n_A}-1\right) - n^{(A)}\right)D_{2^{n_A}} \\ &= \ I_1 - I_2. \end{aligned} \tag{26}$$

对于 I_1，我们有

$$I_1=\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=l_v}^{t_v}\left(\prod_{j=k+1}^{t_v}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{t_v}-\sum_{k=0}^{l_v-1}\right)\left(\prod_{j=k+1}^{t_v}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{t_v}\left(\prod_{j=k+1}^{t_v}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)\right)$$

$$-\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{l_v-1}\left(\prod_{j=k+1}^{l_v-1}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)\right).$$

由于 $2^n-1=\sum_{k=0}^{n-1}2^k$ 且

$$\left(2^n-1\right)K_{2^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}+\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right),$$

我们得到

$$I_1=\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(2^{t_v+1}-1\right)K_{2^{t_v+1}-1}$$

$$-\sum_{v=1}^{s}\left(\prod_{j=v+1}^{s}\prod_{i=l_j}^{t_j}w_{2^i}\right)\left(2^{l_v}-1\right)K_{2^{l_v}-1}.$$

因此，利用这些估计

$$\left|K_{2^n}\right|\leq c\left|K_{2^{n-1}}\right|\qquad\text{and}\qquad\left|K_{2^n-1}\right|\leq c\left|K_{2^n}\right|,$$

我们可以得出

$$\left|I_1\right|\leq c\sum_{v=1}^{s}\left(2^{l_v}\left|K_{2^{l_v}}\right|+2^{t_v}\left|K_{2^{t_v}}\right|\right). \tag{27}$$

设 $l_j<n_A\leq t_j$，其中某个 $j=1,\ ...,\ s.$。那么

$$n^{(A)}\geq\sum_{v=l_j}^{n_A-1}2^v\geq 2^{n_A}-2^{l_j}\qquad\text{and}\qquad 2^{n_A}-1-n^{(A)}\leq 2^{l_j}.$$

如果 $l_j=n_A$，其中某个 $j=1,\ ...,\ s,$ 那么

$$n^{(A)}\leq 2^{t_{j-1}+1}<2^{l_j}.$$

因此，

$$\left|I_2\right|\leq c\sum_{v=1}^{s}2^{l_v}\sum_{k=l_v}^{t_v}D_{2^k}. \tag{28}$$

最后，将估计式 (27)–(28) 代入 (26)，证明完毕。 □

5. 定理 1 的证明

证明。由于 σ_n 从 L_∞ 到 L_∞有界，根据引理 2，只需证明

$$\int_{\overline{I_M}} \left(\sup_{s_k \in \mathbb{N}} \left| \sigma_{n_{s_k}} a(x) \right| \right)^{1/2} d\mu(x) \leq c < \infty, \tag{29}$$

对每个 1/2-原子 $a.$。我们可以假设 a 是一个任意的 $1/2$-原子，其支集为 I、$\mu\ (I)\ = 2^{-M}$且 $I = I_M.$。容易看出

$$\sigma_n(a) = 0, \quad \text{when} \quad n < 2^M.$$

因此，我们可以假设 $n_{s_k} \geq 2^M$.

令 $x \in I_M$和 $2^s \leq n_{s_k} < 2^{s+1}$，其中某个 $n_{s_k} \geq 2^M.$。由于

$$\|a\|_\infty \leq 2^{2M},$$

利用命题 2，我们得到

$$\begin{aligned}
\left| \sigma_{n_{s_k}} a(x) \right| &\leq \int_{I_M} |a(t)| \left| K_{n_{s_k}}(x+t) \right| d\mu(t) \\
&\leq \|a\|_\infty \int_{I_M} \left| K_{n_{s_k}}(x+t) \right| d\mu(t) \\
&\leq 2^{2M} \int_{I_M} \left| K_{n_{s_k}}(x+t) \right| d\mu(t) \\
&\leq \frac{2^{2M}}{n_{s_k}} \sum_{A=1}^{r_{s_k}} \int_{I_M} 2^{l_A^{s_k}} \left| K_{2^{l_A^{s_k}}}(x+t) \right| d\mu(t) \\
&+ \frac{2^{2M}}{n_{s_k}} \sum_{A=1}^{r_{s_k}} \int_{I_M} 2^{t_A^{s_k}} \left| K_{2^{t_A^{s_k}}}(x+t) \right| d\mu(t) \\
&+ \frac{2^{2M}}{n_{s_k}} \sum_{A=1}^{r_{s_k}} \int_{I_M} 2^{l_A^{s_k}} \sum_{k=l_A^{s_k}}^{\infty} D_{2^k}(x+t)\, d\mu(t) \\
&\leq \frac{2^M}{2^s} \left(2^M \sum_{A=1}^{r_s^1} \int_{I_M} 2^{l_A^s} \left| K_{2^{l_A^s}}(x+t) \right| d\mu(t) \right) \\
&+ \frac{2^M}{2^s} \left(2^M \sum_{A=1}^{r_s^2} \int_{I_M} 2^{t_A^s} \left| K_{2^{t_A^s}}(x+t) \right| d\mu(t) \right) \\
&+ \frac{2^M}{2^s} \left(2^M \sum_{A=1}^{r_s^1} \int_{I_M} 2^{l_j^s} \sum_{k=l_j^s}^{\infty} D_{2^k}(x+t)\, d\mu(t) \right).
\end{aligned} \tag{30}$$

若记

$$\begin{aligned} II^1_{\alpha^s_A}(x) &:= 2^M \int_{I_M} 2^{\alpha^s_A} \left| K_{2^{\alpha^s_A}}(x+t) \right| d\mu(t), \ \alpha = l, \text{ or } \alpha = t \\ II^2_{l^s_A}(x) &:= 2^M \int_{I_M} 2^{l^s_A} \sum_{k=l^s_A}^{\infty} D_{2^k}(x+t)\, d\mu(t), \end{aligned}$$

由（30）可得

$$\left|\sigma_{n_{s_k}} a(x)\right| \leq \frac{2^M}{2^s} \left(\sum_{A=1}^{r^1_s} II^1_{l^s_A}(x) + \sum_{A=1}^{r^2_s} II^1_{t^s_A}(x) + \sum_{A=1}^{r^1_s} II^2_{l^s_A}(x) \right)$$

and

$$\sup_{2^s \leq n_{s_k} < 2^{s+1}} \left|\sigma_{n_{s_k}} a(x)\right| \leq \frac{2^M}{2^s} \left(\sum_{A=1}^{r^1_s} II^1_{l^s_A}(x) + \sum_{A=1}^{r^2_s} II^1_{t^s_A}(x) + \sum_{A=1}^{r^1_s} II^2_{l^s_A}(x) \right).$$

因此,

$$\begin{aligned} (31) \qquad & \int_{\overline{I_M}} \left(\sup_{2^s \leq n_{s_k} < 2^{s+1}} \left|\sigma_{n_{s_k}} a(x)\right| \right)^{1/2} d\mu(x) \\ \leq\ & \frac{2^{M/2}}{2^{s/2}} \left(\sum_{A=1}^{r^1_s} \int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{l^s_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) + \sum_{A=1}^{r^2_s} \int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{t^s_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \right. \\ & \left. + \sum_{A=1}^{r^1_s} \int_{\overline{I_M}} \left| II^2_{l^s_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \right). \end{aligned}$$

由于 $\sup_{s\in\mathbb{N}} r^1_s < r < \infty$、$\sup_{s\in\mathbb{N}} r^2_s < r < \infty$，我们得到（29）成立，因此，只要证明下式，定理 1 a) 即得证

$$(32) \qquad \int_{\overline{I_M}} \left| II^2_{l^s_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \leq c < \infty, \quad A = 1, ..., r^1_s$$

and

$$(33) \qquad \int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{\alpha^s_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \leq c < \infty,$$

对于所有 $\alpha^s_A = l^s_A, \quad A = 1, ..., r^1_s$ 和 $\alpha^s_A = t^s_A, \quad A = 1, ..., r^2_s$。事实上，若 (32) 和 (33) 成立，则由 (31) 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{I_M}} \left(\sup_{n_{s_k} \geq 2^M} \left|\sigma_{n_{s_k}} a(x)\right| \right)^{1/2} d\mu(x) \\ \leq\ & \sum_{s=M}^{\infty} \int_{\overline{I_M}} \left(\sup_{2^s \leq n_{s_k} < 2^{s+1}} \left|\sigma_{n_{s_k}} a(x)\right| \right)^{1/2} \leq \sum_{s=M}^{\infty} \frac{c 2^{M/2}}{2^{s/2}} < C < \infty. \end{aligned}$$

剩下要证明 (32) 和 (33)。令

$$t \in I_M \quad \text{and} \quad x \in I_{l+1}\left(e_k + e_l\right).$$

若 $0 \leq k < l < \alpha_A^s \leq M$ 或 $0 \leq k < l < M < \alpha_A^s$，则 $x+t \in I_{l+1}(e_k + e_l)$，并且若应用引理 3，我们得到

$$K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right) = 0 \quad \text{and} \quad II_{\alpha_A^s}^1\left(x\right) = 0. \tag{34}$$

令 $0 \leq k < \alpha_A^s \leq l < M.$。则 $x + t \in I_{l+1}(e_k + e_l)$，并且若使用引理 3，我们得到

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right)\right| \leq 2^{\alpha_A^s + k}$$

因此

$$II_{\alpha_A^s}^1\left(x\right) \leq 2^{\alpha_A^s + k}. \tag{35}$$

类似于 (35)，我们可以证明，若 $0 \leq \alpha_A^s \leq k < l < M$，则

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right)\right| \leq 2^{2\alpha_A^s},\ t \in I_M,\ x \in I_{l+1}\left(e_k + e_l\right)$$

因此

$$II_{\alpha_A^s}^1\left(x\right) \leq 2^{2\alpha_A^s},\ t \in I_M,\ x \in I_{l+1}\left(e_k + e_l\right), \tag{36}$$

Let

$$t \in I_M \quad \text{and} \quad x \in I_M(e_k).$$

设 $0 \leq k < \alpha_A^s \leq M$ 或 $0 \leq k < M \leq \alpha_A^s.$。由于 $x + t \in x \in I_M(e_k)$，应用引理 3 可得

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right)\right| \leq 2^{\alpha_A^s + k}$$

and

$$II_{\alpha_A^s}^1\left(x\right) \leq 2^{\alpha_A^s + k}. \tag{37}$$

令 $0 \leq \alpha_A^s \leq k < M.$ 由于 $x + t \in x \in I_M(e_k)$，若应用引理 3，则可得

$$2^{\alpha_A^s}\left|K_{2^{\alpha_A^s}}\left(x+t\right)\right| \leq 2^{2\alpha_A^s}$$

and

$$II_{\alpha_A^s}^1\left(x\right) \leq 2^{2\alpha_A^s}. \tag{38}$$

令 $0\leq\alpha_A^s<M.$ 结合 (3) 与 (34)-(38)，对任意 $A=1,...,s$ ，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II_{\alpha_A^s}^1(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
=&\sum_{k=0}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}\left|II_{\alpha_A^s}^1(x)\right|^{1/2}d\mu(x)+\sum_{k=0}^{M-1}\int_{I_M(e_k)}\left|II_{\alpha_A^s}^1(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
\leq&\ c\sum_{k=0}^{\alpha_A^s-1}\sum_{l=\alpha_A^s}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}2^{(\alpha_A^s+k)/2}d\mu(x)+c\sum_{k=\alpha_A^s}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}2^{\alpha_A^s}d\mu(x)\\
+&\ c\sum_{k=0}^{\alpha_A^s-1}\int_{I_M(e_k)}2^{(\alpha_A^s+k)/2}d\mu(x)+c\sum_{k=\alpha_A^s}^{M-1}\int_{I_M(e_k)}2^{\alpha_A^s}d\mu(x)\\
\leq&\ c\sum_{k=0}^{\alpha_A^s-1}\sum_{l=\alpha_A^s+1}^{M-1}\frac{2^{(\alpha_A^s+k)/2}}{2^l}+c\sum_{k=\alpha_A^s}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\frac{2^{\alpha_A^s}}{2^l}\\
+&\ c\sum_{k=0}^{\alpha_A^s-1}\frac{2^{(\alpha_A^s+k)/2}}{2^M}+c\sum_{k=\alpha_A^s}^{M-1}\frac{2^{\alpha_A^s}}{2^M}\leq C<\infty.
\end{aligned}$$

同理可证明，在 $\alpha_A^s\geq M.$ 的情况下（33）也成立。因此，（33）成立，接下来只需证明（32）。

令 $t\in I_M$ 和 $x\in I_i\backslash I_{i+1}.$。若 $i\leq l_A^s-1$，由于 $x+t\in I_i\backslash I_{i+1}$，利用（8）可得

$$II_{l_A^s}^2(x)=0. \tag{39}$$

若 $l_A^s\leq i<M$，则利用（8）可得

$$II_{l_A^s}^2(x)\leq 2^M\int_{I_M}2^{l_A^s}\sum_{k=l_A^s}^{i}D_{2^k}(x+t)\,d\mu(t)\leq c2^{l_A^s+i}. \tag{40}$$

令 $0\leq l_A^s<M.$。结合（3）、（39）和（40），可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II_{l_A^s}^2(x)\right|^{1/2}d\mu(x)=\left(\sum_{i=0}^{l_A^s-1}+\sum_{i=l_A^s+1}^{M-1}\right)\int_{I_i\backslash I_{i+1}}\left|II_{l_A^s}^2(x)\right|^{1/2}d\mu(x) \qquad (41)\\
\leq&\ c\sum_{i=l_A^s}^{M-1}\int_{I_i\backslash I_{i+1}}2^{(l_A^s+i)/2}d\mu(x)\leq c\sum_{i=l_A^s}^{M-1}2^{(l_A^s+i)/2}\frac{1}{2^i}\leq C<\infty.
\end{aligned}$$

若 $M\leq l_A^s$，则 $i<M\leq l_A^s$ 并应用 (39)，我们得到

$$\int_{\overline{I_M}}\left|II_{l_A^s}^2(x)\right|^{1/2}d\mu(x)=0, \tag{42}$$

此外，(32) 只需结合 (41) 和 (42) 即可证明，因此 a) 部分已完备，下面转而证明 b)。

在条件 (11) 下，存在一个递增的正整数序列 $\{\alpha_k: \ k\geq 0\}\subset\{n_k: k\geq 0\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}1/|A^2_{|\alpha_k|}\leq c<\infty. \tag{43}$$

Let

$$F_A:=\sum_{\{k;\ |\alpha_k|<A\}}\lambda_k a_k,$$

其中

$$\lambda_k:=\frac{1}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|}\ \text{ and }\ a_k:=2^{|\alpha_k|}\left(D_{2^{|\alpha_k|+1}}-D_{2^{|\alpha_k|}}\right).$$

由于 $\text{supp}(a_k)\ =I_{|\alpha_k|}$，$\ \|a_k\|_\infty\leq 2^{2|\alpha_k|}=\mu(\text{supp}\ \ a_k)^{-2}$ 且

$$S_{2^A}a_k=\begin{cases} a_k & |\alpha_k|<A,\\ 0 & |\alpha_k|\geq A,\end{cases}$$

如果我们应用引理 1 和 (43)，便可得出 $F=(F_1,F_2,...)\in H_{1/2}$。容易证明

$$\widehat{F}(j)=\begin{cases} 2^{|\alpha_k|}/\left|A_{|\alpha_k|}\right|, & j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k=0,1,...\\ 0, & j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases} \tag{44}$$

令 $2^{|\alpha_k|}<j<\alpha_k$. 利用（44），我们得到

$$S_jF=S_{2^{|\alpha_k|}}F+\sum_{v=2^{|\alpha_k|}}^{j-1}\widehat{F}(v)w_v=S_{2^{|\alpha_k|}}F+\frac{\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|} \tag{45}$$

令 $2^{|\alpha_k|}\leq\alpha_{s_n}\leq 2^{|\alpha_k|+1}$. 那么，利用（45），我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha_{s_n}}F&=\frac{1}{\alpha_{s_n}}\sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}}S_jF+\frac{1}{\alpha_{s_n}}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_{s_n}}S_jF \qquad (46)\\ &=\frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}}F}{\alpha_{s_n}}+\frac{\left(\alpha_k-2^{|\alpha_k|}\right)S_{2^{|\alpha_k|}}F}{\alpha_{s_n}}+\frac{2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_{s_n}}\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)\\ &:=III_1+III_2+III_3.\end{aligned}$$

由于

$$D_{j+2^m}=D_{2^m}+w_{2^m}D_j,\ \text{ when }\ j<2^m$$

我们得到

$$(47)\qquad |III_3| = \frac{2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\left(D_{j+2^{|\alpha_k|}}-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)\right|$$

$$= \frac{2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}} D_j\right| = \frac{2^{|\alpha_k|}}{\left|A_{|\alpha_k|}\right|\alpha_{s_n}}\left(\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\right|$$

$$\geq \frac{1}{2\left|A_{|\alpha_k|}\right|}\left(\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_{s_n}-2^{|\alpha_k|}}\right|.$$

通过结合众所周知的估计（见 [17]）

$$\left\|S_{2^k}F\right\|_{H_{1/2}} \leq c_1\left\|F\right\|_{H_{1/2}} \quad \text{and} \quad \left\|\sigma_{2^k}F\right\|_{H_{1/2}} \leq c_2\left\|F\right\|_{H_{1/2}}, \quad k\in\mathbb{N},$$

我们得到

$$\left\|III_1\right\|_{1/2} \leq C \quad \text{and} \quad \left\|III_2\right\|_{1/2} \leq C.$$

设 $2^{|\alpha_k|} \leq \alpha_{s_1} \leq \alpha_{s_2} \leq ... \leq \alpha_{s_r} \leq 2^{|\alpha_k|+1}$ b 是生成该集合的自然数

$$A_{|\alpha_k|} = \left\{l_1^{|\alpha_k|}, l_2^{|\alpha_k|}, ..., l_{r^1_{|\alpha_k|}}^{|\alpha_k|}\right\}\bigcup\left\{t_1^{|\alpha_k|}, t_2^{|\alpha_k|}, ..., t_{r^2_{|\alpha_k|}}^{|\alpha_k|}\right\}$$

并选取数 $\alpha_{s_n} = \sum_{i=1}^{r_n}\sum_{k=l_i^n}^{t_i^n} 2^k$，其中

$$t_1^{|\alpha_k|} \geq l_1^{|\alpha_k|} > l_1^{|\alpha_k|}-2 \geq t_2^{|\alpha_k|} \geq l_2^{|\alpha_k|} > l_2^{|\alpha_k|}-2 \geq ... \geq t_{|\alpha_k|}^{|\alpha_k|} \geq l_{|\alpha_k|}^{|\alpha_k|} \geq 0,$$

对于某个 $1\leq n\leq r$，使得 $l_u^{|\alpha_k|} = l_i$；对于某个$1\leq u\leq r^1_{|\alpha_k|}, 1\leq i\leq r^1_{|\alpha_k|}$。由于 $\mu\left\{E_{l_i}\right\} \geq 1/2^{l_i+1}$，利用推论 5，我们得到

$$(48)\quad \int_{E_{l_i}}\left|\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F\right|^{1/2}d\mu\left(x\right) \geq \int_{E_{l_i}}\left|\sigma_{\alpha_{s_n}}F(x)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)$$

$$\geq \frac{2^{(2l_i-6)/2}}{\sqrt{2}\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}\frac{1}{2^{l_i+1}} \geq \frac{1}{2^5\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}.$$

另一方面，对于某个 $1\leq n\leq r$，我们也可以选择数 α_{s_n}，使得 $t_u^{|\alpha_k|} = t_i$，对于某个 $1\leq u\leq r^2_{|\alpha_k|}$，$1\leq i\leq r^2_{|\alpha_k|}$. 根据 $\mu\left\{E_{t_i}\right\}\geq 1/2^{t_i+3}$ 这一事实，再次对某个 α_k和$1\leq i\leq r_s^2$ 使用推论 5，我们还可以得到

$$(49)\qquad \int_{E_{t_i}}\left|\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F\right|^{1/2}d\mu\left(x\right) \geq \int_{E_{t_i}}\left|\sigma_{\alpha_{s_n}}F(x)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}2^{(2t_i-6)/2}\frac{1}{2^{t_i+3}} \geq \frac{1}{2^7\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}.$$

将 (46)-(49) 与命题 1 结合，对于充分大的 α_k，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_G \left|\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F\right|^{1/2} d\mu\left(x\right) \geq \|III_3\|_{1/2}^{1/2} - \|III_2\|_{1/2}^{1/2} - \|III_1\|_{1/2}^{1/2} \\
\geq &\sum_{i=1}^{r_{|\alpha_k|}^1-1} \int_{E_{l_i}} \left|\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F\right|^{1/2} d\mu\left(x\right) + \sum_{i=1}^{r_{|\alpha_k|}^2-1} \int_{E_{t_i}} \left|\widetilde{\sigma}^{*,\nabla}F\right|^{1/2} d\mu\left(x\right) - 2C \\
\geq &\frac{1}{2^7\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}(r_{|\alpha_k|}^1 + r_{|\alpha_k|}^2) - 2C \geq \frac{\left(\left|A_{|\alpha_k|}\right|\right)^{1/2}}{2^8} \to \infty, \quad \text{as} \quad k \to \infty,
\end{aligned}$$

因此，b）部分也得到了证明，证明完毕。 □

参考文献

[1] D. Baramidze、N. Nadirashvili、L.-E. Persson 和 G. Tephnadze，《Vilenkin-Nörlund 均值的若干弱型不等式及几乎处处收敛》，《不等式及其应用》，2022年（即将发表）。[2] I. Blahota、G. Tephnadze，《Vilenkin-Fejér 均值的强收敛定理》，《德布勒森数学出版物》85 (1-2)（2014年），181-196。[3] N. J. Fujii，《广义沃尔什-帕利群上 H_1 函数的一个极大不等式》，《美国数学会会刊》77（1979年），111-116。[4] G. Gát，《关于 Vilenkin 系统中某些算子的研究》，《匈牙利数学学报》61（1993年），131-149。[5] U. Goginava，《二重 Walsh-Fourier 级数的费耶均值极大算子》，《匈牙利数学学报》115（2007年），333–340。[6] U. Goginava，《二维共轭沃尔什-傅里叶级数马尔钦凯维奇-费耶均值的鞅型哈代不等式》，《数学学报》27（2011年），1949-1958。[7] U. Goginava，《费耶-沃尔什均值的极大算子》，《塞格德数学科学学报》74（2008年），615–624。[8] B. Golubov、A. Efimov 和 V. Skvortsov，《Walsh 级数与变换》，多德雷赫特、波士顿、伦敦，1991年。克吕维尔学术出版社，1991年。[9] F. Móricz、A. Siddiqi，《Walsh-Fourier 级数的诺尔隆德均值逼近》，《逼近理论杂志》70（1992年），375-389。[10] N. Nadirashvili、G. Tephnadze 和 G. Tutberidze，《三角系统和 Vilenkin 系统的近似恒等算子及费耶均值的几乎处处收敛与范数收敛》，《A. Raz madze 数学研究所学报》（即将发表），2023年。[11] K. Nagy，《二重 Walsh-Kaczmarz-Fourier 级数的负阶切萨罗均值逼近》，《东北数学杂志》64（2012年），317-331。[12] J. Pál 和 P. Simon，《导数概念的一种推广》，《匈牙利数学学报》29（1977年），155-164。[13] L. E. Persson、G. Tephnadze 和 G. Tutberidze，《鞅 Hardy 空间上 Vilenkin-Fejér 均值子列的有界性》，《算子与矩阵》14，1（2020年），283-294。[14] L.-E. Persson、F. Schipp、G. Tephnadze 和 F. Weisz，《关于 Vilenkin 系统的 Carleson-Hunt 定理的一个类比》，《傅里叶分析与应用杂志》2022年，第48号论文，共29页。[15] L. E. Persson 和 G. Tephnadze，《关于 Vilenkin-Fejér 均值若干极大算子的一个尖锐有界性结果》，《地中海数学杂志》13，4（2016年），1841-1853。[16] L. E. Persson、G. Tephnadze 和 P. Wall，《关于 Vilenkin-Nörlund 均值的极大算子》，《傅里叶分析与应用杂志》21，1（2015年），76-94。

[17] L. E. Persson、G. Tephnadze 和 F. Weisz，《鞅 Hardy 空间与 Vilenkin-Fourier 级数的可和性》，Birkhäuser/Springer，2022年。[18] F. Schipp、W. Wade、P. Simon 和 J. Pál，《Walsh 级数：二元调和分析导论》，Akademiai Kiadó，布达佩斯-AdamHilger，1990年。[19] F. Schipp，《Walsh 级数中级数的某些重排》，《数学札记》18（1975年），193-201。[20] P. Simon，《关于二参数 Walsh 系统的 Cesáro 可和性》，《数学月刊》131，4（2000年），321–334。[21] P. Simon，《关于 Vilenkin 系统的研究》，《布达佩斯厄特沃什大学科学学报数学辑》27（1984年），87-101。[22] P. Simon，《关于 Vilenkin 系统中 Sunouchi 算子的一个注记》，《厄特沃什大学科学学报数学辑》43（2000年），101-116。[23] G. Tephnadze，《Vilenkin-Fourier 级数的费耶均值》，《匈牙利数学科学研究》49（2012年），79-90。[24] G. Tephnadze，《关于 Vilenkin-Fejér 均值的极大算子》，《土耳其数学杂志》37（2013年），308-318。[25] G. Tephnadze，《关于 Hardy 空间上 Vilenkin-Fejér 均值的极大算子》，《不等式及其应用》16，1（2013年），301-312。[26] G. Tephnadze，《关于 Walsh-Fourier 级数的部分和》，《数学讨论》141，2（2015年），227-242。[27] G. Tephnadze，《关于 Vilenkin-Fourier 级数的部分和》，《当代数学分析杂志》49，1（2014年），23-32。[28] G. Tephnadze，《关于 Vilenkin-Fejér 均值范数收敛的注记》，《格鲁吉亚数学杂志》21，4（2014年），511-517。[29] G. Tephnadze，《Walsh-Fejér 均值的强收敛定理》，《匈牙利数学学报》142，1（2014年），244–259。[30] G. Tephnadze，《关于空间H_p中 Walsh-Fourier 级数费耶均值的收敛性》，《当代数学分析杂志》51，2（2016年），90-102。[31] G. Tutberidze，《连续模与鞅 Hardy 空间中 Vilenkin-Fejér 均值子列的有界性》，《格鲁吉亚数学杂志》29，1（2022年），153-162。[32] F. Weisz，《一维和二维 Walsh-Fourier 级数的切萨罗均值》，《数学分析》22（1996年），229-242。[33] F. Weisz，《鞅 Hardy 空间及其在傅里叶分析中的应用》，Springer，柏林-海德堡-纽约，1994年。[34] F. Weisz，《多维傅里叶级数的可和性与 Hardy 空间》，Kluwer Academic，多德雷赫特，2002年。[35] F. Weisz，《Walsh 系统与有界 Ciesielski 系统的弱型不等式》，《数学分析》30，2（2004年），147-160。

D. Baramidze，佐治亚大学科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚；以及挪威北极大学计算机科学与计算工程系，邮政信箱385号，N-8505纳尔维克，挪威。

电子邮箱：davit.baramidze@ug.edu.ge

L.-E. Persson，挪威北极大学，邮政信箱385号，N-8505纳尔维克，挪威；以及卡尔斯塔德大学数学与计算机科学系，65188卡尔斯塔德，瑞典。

电子邮箱：larserik6pers@gmail.com

G. Tephnadze，佐治亚大学科学与技术学院，梅拉布·科斯塔瓦街77a号，第比利斯0128，格鲁吉亚。电子邮箱：g.tephnadze@ug.edu.ge