arXiv:2302.13030v1 [math.FA] 25 Feb 2023

分数阶傅里叶变换与黎斯势及图像处理

傅尊伟、林岩、杨大春* 和Shuhui Yang

摘要 借助分数阶傅里叶变换中的啁啾函数，作者引入了与啁啾函数相关的分数阶Riesz势，建立了它们与分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子以及与啁啾函数相关的分数阶Riesz变换之间的关系，并获得了它们在与啁啾函数相关的旋转不变空间上的有界性。最后，作者给出了与啁啾函数相关的分数阶Riesz势的图像数值模拟及其在图像处理中的应用。本文的主要创新在于提出了一种基于与啁啾函数相关的分数阶Riesz势的双相位编码新型图像加密方法。与啁啾函数相关的分数阶Riesz势的符号从根本上提供了更大的自由度，并显著提高了信息的安全性。

1 引言

图像处理一直是信息科学中的一个重要课题，在应用科学中发挥着重要作用，因此备受关注（例如，参见[3, 8, 10, 11, 16, 24, 33, 38, 44, 46]）。

另一方面，众所周知，傅里叶变换是纯数学和应用数学中最基本且重要的工具之一。它也是分析和处理平稳信号的标准而强大的工具，但在处理和分析非平稳信号方面存在局限性。下文中，我们用 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示所有施瓦茨函数构成的集合，该集合配备由可数范数族确定的众所周知的拓扑；并用 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上所有连续线性泛函构成的集合，该集合配备弱−∗ 拓扑。

定义 1.1. 对于任意 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，其傅里叶变换 $\widehat{f}$ 或 $\mathcal{F}(f)$ 定义为：对任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$，

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) := \mathcal{F}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi i \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\boldsymbol{x}$$

and $\widehat{\ }$ 将傅里叶逆变换 $f^\vee$ 定义为：对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，令 $f^\vee(\boldsymbol{x}) := f(-\boldsymbol{x})$。

2020 数学学科分类. 主类 26A33；次类 42B35、42A38、94A08。关键词与短语。 分数阶傅里叶变换、分数阶黎斯势、数值图像仿真、图像加密、图像解密。本项目部分获国家自然科学基金委员会（项目编号：12071197、12071052 和 11971058）及国家重点研发计划（项目编号：2020YF A0712900）资助。*通讯作者，电子邮箱： dcyang@bnu.edu.cn/2023年2月24日/最终版本。

分数阶傅里叶变换（简称分数阶傅里叶变换）旨在分析和处理非平稳信号，并由此提出和发展。目前，分数阶傅里叶变换已应用于许多领域，例如偏微分方程（例如，参见 [22]）、小波分析（例如，参见 [35]）、复传输（例如，参见 [32]）、频率滤波器（例如，参见 [40]）、时频分析（例如，参见 [1, 14, 15, 27]）、光信号处理（例如，参见[2, 29, 30, 31, 36]）以及光学图像处理（例如，参见 [7, 23]）。

分数阶傅里叶变换起源于维纳在 [45]年的工作。1980年，Namias 在[28], 中给出了分数阶傅里叶变换，主要基于特征函数展开法。McBride-Kerr 和 Kerr 分别在 [26] 和 [21], 中给出了分数阶傅里叶变换在 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 上的积分表达式。2021年，Chen 等人在[6]中建立了分数阶傅里叶变换在 $L^p(\mathbb{R})$ 上对任意 $p \in [1,2)$ 的性质。

近年来，多维分数阶傅里叶变换的研究受到了越来越多的关注。在 [18], 中，Kamalakkannan 和 Roopkumar 给出了多维分数阶傅里叶变换的如下定义。

定义 1.2。设 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$。对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$，$f$的多维分数阶傅里叶变换（简称多维分数阶傅里叶变换） $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)$，阶数为 $\boldsymbol{\alpha}$，定义如下：

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) K_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{x},$$

其中，对于任意 $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$，

$$K_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) := \prod_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}(x_k, u_k)$$

并且，对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$K_{\alpha_k}(x_k, u_k) := \begin{cases} c(\alpha_k) e^{2\pi i \{a(\alpha_k)[x_k^2 + u_k^2 - 2b(\alpha_k) x_k u_k]\}} & \text{if } \alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \delta(x_k - u_k) & \text{if } \alpha_k \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \delta(x_k + u_k) & \text{if } \alpha_k \in 2\pi\mathbb{Z} + \pi, \end{cases}$$

其中 $a(\alpha_k) := \cot(\alpha_k)\, 2 := \cos(\alpha_k)\, 2 \sin(\alpha_k)$，$b(\alpha_k) := \sec(\alpha_k) := {}^{1}\cos(\alpha_k)$，$c(\alpha_k) := \sqrt{1 - i\cot(\alpha_k)}$，且 δ为位于 0 处的狄拉克测度。

关于多维分数阶傅里叶变换的一些研究，请参阅 [18, 19, 20, 48, 49, 50] 。

注释 1.3. 设 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$成立。啁啾函数 $e_{\boldsymbol{\alpha}}$ 定义如下：对于任意 $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，

$$e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) := e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} a(\alpha_k) x_k^2},$$

其中，对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a(\alpha_k) := \cot(\alpha_k)\, 2$ 。啁啾函数是最常见的非平稳信号，其频率会随时间升高（上啁啾）或降低（下啁啾）。容易证明，多维分数阶傅里叶变换 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)$ of f可表示为：对于任意$\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}) = c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) \mathcal{F}(e_{\boldsymbol{\alpha}} f)(\widetilde{\boldsymbol{u}}), \tag{1.1}$$

其中 $c(\boldsymbol{\alpha}) := c(\alpha_1) \cdots c(\alpha_n)$，且 $\{c(\alpha_k)\}_{k=1}^n$ 与定义 1.2 中相同；此外，$\tilde{}u := (u_1 \csc(\alpha_1), \ldots, u_n \csc(\alpha_n))$，其中任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 均有 $\csc(\alpha_k) := \frac{1}{\sin(\alpha_k)}$。利用 (1.1)，我们可以轻松证明 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)$ 将 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 映射为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。显然，对于任意 $x := (x_1, \ldots, x_n), u := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$，我们可以将其改写为:

$$K_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) e^{-2\pi i \sum_{k=1}^n x_k u_k \csc(\alpha_k)}.$$

因此，多维分数阶傅里叶变换与啁啾函数密切相关。

注记 1.4. 当 $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + 2k_n\pi)$ 且 $\{k_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{Z}$ 时，多维分数阶傅里叶变换便退化为经典傅里叶变换。

本文借助分数阶傅里叶变换中的啁啾函数，引入了与啁啾函数相关的分数阶黎斯势，建立了它们与分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子以及与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换之间的关系，并得到了它们在与啁啾函数相关的旋转不变空间上的有界性。最后，作者给出了与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的图像数值模拟及其在图像处理中的应用。本文的主要创新之处在于提出了一种基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码新型图像加密方法。与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号本质上提供了更多自由度，从而大大提高了信息的安全性。

本文其余部分安排如下。

第2节基于多维分数阶傅里叶变换，介绍与啁啾函数相关的分数阶黎斯势，并建立多维分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶黎斯势、与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换，以及 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中与啁啾函数相关的拉普拉斯算子之间的关系。我们证明，在旋转不变空间中，分数阶黎斯势的有界性等价于经典黎斯势的有界性。此外，通过分数阶傅里叶变换与和啁啾函数相关的拉普拉斯算子之间的关系，我们介绍与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子；它与分数阶黎斯势共同为图像加密的应用提供理论基础。

第3节给出了二维情形下与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的电子图像仿真。

在第4节中，我们提出了一种基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码图像加密方法，该方法主要改变分数阶傅里叶域中的振幅。与基于分数阶傅里叶变换的双相位编码图像加密方法相比，基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码图像加密方法中，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号本质上提供了更多自由度，并大幅提高了信息的安全性。

第5节给出了结论。

分数阶伪微分算子、分数阶广义 Sobolev 空间以及与啁啾函数相关的其他函数空间及其应用，将在即将发表的文章中介绍。

最后，我们对记号作如下约定。设 $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ 以及 $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$。对于任意给定的多重指标 $\boldsymbol{\zeta} := (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{Z}_+^n := (\mathbb{Z}_+)^n$，令

$$|\boldsymbol{\zeta}| := \zeta_1 + \cdots + \zeta_n \text{ and } \partial^{\boldsymbol{\zeta}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\zeta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\zeta_n}.$$

我们用C 表示一个正的常数，它与涉及的主要参数无关，其值可能逐行变化。符号 $g \lesssim h$ 表示$g \le Ch$。对于满足 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 的复数z，令伽马函数为

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

对于任意$p \in (0, \infty)$，勒贝格空间$L^p(\mathbb{R}^n)$定义为所有在 $\mathbb{R}^n$ 上满足下述条件的可测函数f的集合：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} < \infty.$$

此外，在证明定理或类似结果时，我们始终沿用待证定理或类似结果中的相同符号。

2 与啁啾函数相关的分数阶黎斯势

回顾一下，对于任意$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，$f$的希尔伯特变换 $H(f)$定义如下：对任意$x \in \mathbb{R}$,

$$H(f)(x) := \frac{1}{\pi}\, \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y}\, dy,$$

它是 Calder´on–Zygmund 算子的原型，在调和分析中发挥着不可替代的作用。希尔伯特变换也是一种乘子算子，也就是说，对于任意 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和$x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(Hf)(x) = -i \,\mathrm{sgn}\,(x) \mathcal{F}(f)(x). \tag{2.1}$$

由 (2.1) 可见，希尔伯特变换是一种相移转换器，它将原信号的正频率部分乘以 $-i$；换言之，它保持振幅不变，并将相位偏移 $-\pi/2$，而负频率部分则偏移 $\pi/2$。注意，Riesz 变换是希尔伯特变换在n维情形下的一种自然推广，也是一种 Calder´on–Zygmund 算子，其性质与希尔伯特变换在 $\mathbb{R}$ 上的性质类似。对于任意 $j \in \{1, \ldots n\}$ 以及 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$f$的 ***Riesz*** 变换 $R_j(f)$ 定义如下：对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$R_j(f)(\boldsymbol{x}) := c_n\, \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n+1}} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y},$$

其中 $c_n := \Gamma(\frac{n+1}{2})/\pi^{\frac{n+1}{2}}$—Riesz 变换也是一种乘子算子，也就是说，对于任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$、$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(R_j f)(\boldsymbol{x}) = -\frac{i x_j}{|\boldsymbol{x}|} \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{x});$$

因此，Riesz 变换的乘子为 $-ix_j/|\boldsymbol{x}|$，所以 Riesz 变换不仅是相移转换器，也是振幅衰减器。

在 [47], Zayed 最初引入了与啁啾函数相关的分数阶希尔伯特变换，该变换已广泛应用于信号处理（例如，参见 [40, 39, 43]）。在 [6], Chen 等人将分数阶希尔伯特变换视为分数阶傅里叶乘子算子。随着多维分数阶傅里叶变换的发展及其广泛应用，受傅里叶变换、Riesz 变换、多维分数阶傅里叶变换与分数阶希尔伯特变换之间关系的启发，Fu 等人 [9] 引入了以下与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换。

定义 2.1. 对于任意 $j \in \{1,\dots,n\}$ 以及 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k \in \{1,\dots,n\}$成立，与啁啾函数相关的第 j 阶分数阶黎斯变换，即 $R_j^{\boldsymbol{\alpha}}(f)$，作用于 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，定义如下：对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，

$$R_j^{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{x}) := c_n \,\mathrm{p.v.}\, e_{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+1}} f(\boldsymbol{y}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y},$$

其中 $c_n := \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\pi^{\frac{n+1}{2}}$，且 $e_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与注释 1.3 中相同。

与啁啾函数相关的分数阶 Riesz 变换 $R_j^{\boldsymbol{\alpha}}$ 也是一种分数阶乘子算子。也就是说，对于任意 $j \in \{1,\dots,n\}$，$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k \in \{1,\dots,n\}$、$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\boldsymbol{u} := (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ 均成立，有

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(R_j^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)(\boldsymbol{u}) = -i\frac{\widetilde{u}_j}{|\widetilde{\boldsymbol{u}}|}\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}), \tag{2.2}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{u}} := (\widetilde{u}_1,\dots,\widetilde{u}_n) = (u_1 \csc(\alpha_1),\ \dots,\ u_n \csc(\alpha_n))$。

在 [9], 中，Fu 等人还介绍了与啁啾函数相关的分数阶 Riesz 变换在边缘检测中的应用。与经典的 Riesz 变换相比，与啁啾函数相关的分数阶 Riesz 变换可以通过调整其阶数来检测任意方向的信息。

回顾一下，对于任意的 $\beta \in (0,n)$ 和 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，*Riesz*势 定义如下：对于任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，

$$I_\beta(f)(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-\beta}}\, d\boldsymbol{y}, \tag{2.3}$$

其中 $\gamma(\beta) := \pi^{n/2} 2^\beta \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right)$。Riesz势也称为分数阶积分算子，它不仅是傅里叶分析中的一个重要积分算子，在分数阶微分方程中也发挥着非常重要的作用。本文为避免与分数阶算子混淆，始终称其为 Riesz势。众所周知，对于任意的 $\beta \in (0,n)$、$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，根据傅里叶变换的性质，有

$$\mathcal{F}(I_\beta f)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\beta}|\boldsymbol{x}|^{-\beta}\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中。

受 Riesz 势与傅里叶变换之间关系的启发，并结合与啁啾函数相关的多维分数阶傅里叶变换和分数阶黎斯变换的定义，我们引入如下与啁啾函数相关的新型分数阶黎斯势。

定义 2.2. 若 $\beta\in(0,n)$ 且 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_k\notin\pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k\in\{1,\dots,n\}$, 则与啁啾函数相关的分数阶黎斯势 $I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}$ 定义如下：对任意 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{x}):=\frac{1}{\gamma(\beta)}e_{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-\beta}}e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},$$

其中 $e_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与注释 1.3 中的相同，且 $\gamma(\beta)$与（2.3）中的相同。

注记 2.3。当 $\boldsymbol{\alpha}=(\frac{\pi}{2}+k_1\pi、\dots\dots、\frac{\pi}{2}+k_n\pi)$ 且 $\{k_j\}_{j=1}^n\subset\mathbb{Z}$ 时，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势可追溯至经典黎斯势。

Riesz势与拉普拉斯算子、傅里叶变换和 Riesz 变换密切相关。基于此，我们在第2.1小节建立了分数阶黎斯势、多维分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换，以及与啁啾函数相关的拉普拉斯算子之间的关系。在第2.2小节，我们得到了与啁啾函数相关的分数阶黎斯势在旋转不变空间中的有界性。

2.1 分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶黎斯势、与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子，以及与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换之间的关系

首先，我们建立多维分数阶傅里叶变换与和啁啾函数相关的分数阶黎斯势之间的关系。

定义 2.4.（见 [13]）任意缓增广义函数 u 的傅里叶变换 $\widehat{u}$ 定义为$\widehat{}$对任意$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，令 $\langle\widehat{u},f\rangle:=\langle u,f\rangle$。

定义 2.5. 令 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k\notin\pi\mathbb{Z}$ 对任意$k\in\{1,\dots,n\}$成立。任意缓增广义函数u 的多维 分数阶傅里叶变换 $\widehat{u}$ 定义为：对任意$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\langle\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}u,f\rangle:=\langle u,\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}f\rangle$。

令 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_k\notin\pi\mathbb{Z}$，对任意 $k\in\{1,\dots,n\}$均成立。利用定义 2.4、定义 2.5、(1.1) 以及傅里叶变换的性质，我们可以轻易得出，对于任意$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$，(1.1) 也成立。

定义 2.6。（见 [13]）设$f、g\in L^1(\mathbb{R}^n)$。卷积 $f*g$ 定义为：对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(f*g)(\boldsymbol{x}):=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dy.$$

引理 2.7。（见 [13]）对任意 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\mathcal{F}(f*u)=f\widehat{}\,u$。

引理 2.8. (见 [37]) 对于任意 $\beta\in(0,n)$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n$，恒等式

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-\beta}}\right)(\boldsymbol{\xi})=\gamma(\beta)(2\pi)^{-\beta}|\boldsymbol{\xi}|^{-\beta}$$

在分布意义下成立，也就是说，对于任意 $\varphi \in \mathscr{S}$（$\mathbb{R}^n$），

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-\beta}}\right) \widehat{\varphi}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \gamma(\beta) \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\beta} |\boldsymbol{x}|^{-\beta} \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

其中 $\gamma(\beta)$ 与(2.3)中的相同。

定理 2.9。 对于任意 $\beta \in (0, n)$, $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)(\boldsymbol{u}) = (2\pi)^{-\beta} |\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta} \mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}) \text{ in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{u}} := (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n) = (u_1 \csc(\alpha_1), \ldots, u_n \csc(\alpha_n))$。$|\cdot|^{-\beta}$ 的 $(2\pi)^{-\beta}|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta}$ 称为与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号 。

证明。 取一个 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$。由 (1.1) 和定义 2.2 可知，对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)(\boldsymbol{u}) &= c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) \mathcal{F}(e_{\boldsymbol{\alpha}} I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}} f)(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \\
&= \frac{1}{\gamma(\beta)} c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) \mathcal{F}\left(e_{\boldsymbol{\alpha}} f * \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\beta}}\right)\right)(\widetilde{\boldsymbol{u}}).
\end{aligned}$$

由引理 2.7 和引理 2.8 可得，对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{\gamma(\beta)} c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) \mathcal{F}(e_{\boldsymbol{\alpha}} f)(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \mathcal{F}\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\beta}}\right)(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \\
&= \frac{1}{\gamma(\beta)} c(\boldsymbol{\alpha}) e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}) \mathcal{F}(e_{\boldsymbol{\alpha}} f)(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \gamma(\beta) (2\pi)^{-\beta} |\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta} \\
&= (2\pi)^{-\beta} |\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta} \mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}),
\end{aligned}$$

这就完成了定理 2.9 的证明。 □

注 2.10. 根据定理 2.9，我们很容易观察到，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势具有半群性质，即对于任意 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, β_1, $\beta_2 \in (0, n)$，以及 $\beta_1 + \beta_2 \in (0, n)$, $I_{\beta_1}^{\boldsymbol{\alpha}} I_{\beta_2}^{\boldsymbol{\alpha}} = I_{\beta_1+\beta_2}^{\boldsymbol{\alpha}}$。

引理 2.11. （分数阶傅里叶变换反演定理）（见 [18]）对于任意 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 以及 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{u}) K_{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{u},$$

其中，$K_{-\alpha}$ 与定义 *1.2* 中相同，只需将 $\boldsymbol{\alpha}$ 替换为 $-\boldsymbol{\alpha}$。

由定义 2.5 和引理 2.11 可知，对于任意 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ with $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$，以及任意 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}_{-\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} f = f$。由定理 2.9 和引理 2.11 可得，对于任意 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ with $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in (0, n)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 以及 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势可改写为

$$(I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}} f)(\boldsymbol{x}) = \mathcal{F}_{-\boldsymbol{\alpha}} \left((2\pi)^{-\beta} |\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta} (\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} f)(\boldsymbol{u})\right)(\boldsymbol{x})$$

在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中，其中 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ 与定理 2.9 中的定义相同。接下来，令

$$m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u}) := (2\pi)^{-\beta}|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^{-\beta},$$

这称为符号 I_β^α。

容易证明，对于任意$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势$I_\beta^\alpha f$可以分解为以下运算的复合：阶数为 $\boldsymbol{\alpha}$的多维分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号$m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u})$，以及阶数为 $-\boldsymbol{\alpha}$的多维分数阶傅里叶变换，如下图1所示：

(i) 阶数为 $\boldsymbol{\alpha}$的多维分数阶傅里叶变换，即对于任意$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$，$g^\alpha(\boldsymbol{u}) := (\mathcal{F}_\alpha f)(\boldsymbol{u})$；

(ii) 乘以与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号$m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u})$，即

$$h_\beta^\alpha(\boldsymbol{u}) := m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u})g^\alpha(\boldsymbol{u}) \text{ for any } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n;$$

(iii) 阶数为 $-\boldsymbol{\alpha}$的多维分数阶傅里叶变换，即对于任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$(I_\beta^\alpha f)(\boldsymbol{x}) := (\mathcal{F}_{-\alpha} h_\beta^\alpha)(\boldsymbol{x})$.

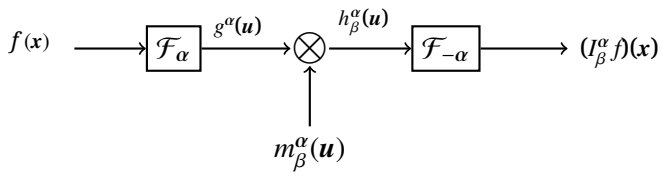


图1：$I_\beta^\alpha(f)$的分解

注记 2.12. 与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号$m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u})$不含$i$，因此不存在相移效应。它只能改变幅度，因此与啁啾函数相关的分数阶黎斯势$m_\beta^\alpha(\boldsymbol{u})$仅是一个幅度调制器。

在 [9], 中，多维分数阶傅里叶变换的导数公式建立如下。

引理2.13。（见 [9]）（多维分数阶傅里叶变换导数公式）设 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，且 e_α 与注释 *1.3* 中相同。若 $k \in \{1, \ldots, n\}$，且 $e_\alpha f$ 关于第 k 个变量在 $\mathbb{R}^n$ 上绝对连续，则对任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}_\alpha\left(e_{-\alpha}(\boldsymbol{y})\frac{\partial[e_\alpha(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})]}{\partial y_k}\right)(\boldsymbol{x}) = 2\pi i x_k \csc(\alpha_k)\mathcal{F}_\alpha(f)(\boldsymbol{x}).$$

于是，可以建立与啁啾函数相关的分数阶 Riesz 势、多维分数阶傅里叶变换以及与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换之间的关系，如下所示。

定理 2.14. 对于任意 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$，满足 $\alpha_k\notin\pi\mathbb{Z}$ 对任意 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 均成立，且对于 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，有

$$f=I_1^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}R_j^{\alpha}\left(e_{-\alpha}\partial_j(e_{\alpha}f)\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}I_1^{\alpha}\left(R_j^{\alpha}\left(e_{-\alpha}\partial_j(e_{\alpha}f)\right)\right)$$

在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中，其中 e_{α} 与注释 *1.3* 中相同，R_j^{α}对任意 $j\in\{1,\ldots,n\}$ 表示第 j 个分数阶黎斯变换，而 I_1^{α} 表示分数阶黎斯势 I_{β}^{α}，其中 $\beta=1$。

证明。 由定理 2.9、(2.2) 和引理2.13可推出，对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha}\left(I_1^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}R_j^{\alpha}\left(e_{-\alpha}\partial_j(e_{\alpha}f)\right)\right)\right)(\boldsymbol{x})\\
&\quad=(2\pi)^{-1}|\widetilde{\boldsymbol{x}}|^{-1}\,\mathcal{F}_{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}R_j^{\alpha}\left(e_{-\alpha}\partial_j(e_{\alpha}f)\right)\right)(\boldsymbol{x})\\
&\quad=(2\pi)^{-1}|\widetilde{\boldsymbol{x}}|^{-1}\sum_{j=1}^{n}-i\frac{\widetilde{x}_j}{|\widetilde{\boldsymbol{x}}|}\mathcal{F}_{\alpha}\left(e_{-\alpha}\partial_j(e_{\alpha}f)\right)(\boldsymbol{x})\\
&\quad=(2\pi)^{-1}|\widetilde{\boldsymbol{x}}|^{-1}\sum_{j=1}^{n}-i\frac{\widetilde{x}_j}{|\widetilde{\boldsymbol{x}}|}2\pi i\widetilde{x}_j\mathcal{F}_{\alpha}(f)(\boldsymbol{x})=\mathcal{F}_{\alpha}(f)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

然后，对其进行阶数为 $-\boldsymbol{\alpha}$ 的多维分数阶傅里叶变换，并应用引理 2.11，即可得到所需恒等式，从而完成定理2.14的证明。□

注记 2.15。 当 $\boldsymbol{\alpha}=(\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ldots,\frac{\pi}{2}+k_n\pi)$ 且 $\{k_j\}_{j=1}^n\subset\mathbb{Z}$ 时，此时定理 2.9 可还原为 [25, 第 124] 页的 (2.4)，而定理 2.14 可还原为 [25, 第 124] 页的 (3.0.3)。

由引理2.13，我们可以很容易地推导出以下定理；细节从略。

定理2.16。 设 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$，其中对于任意 $k\in\{1,\ldots\ldots,n\}$，$\boldsymbol{\varsigma}\in\mathbb{Z}_+^n$，且 e_{α} 为啁啾函数。对于任意 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\boldsymbol{x}:=(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，有

$$\mathcal{F}_{\alpha}\left(e_{-\alpha}(\boldsymbol{y})\partial^{\boldsymbol{\varsigma}}[e_{\alpha}(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})]\right)(\boldsymbol{x})=(2\pi i\widetilde{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{\varsigma}}\mathcal{F}_{\alpha}(f)(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{x}}:=(\widetilde{x}_1,\ldots\ldots,\widetilde{x}_n):=(x_1\csc(\alpha_1),\ldots\ldots,x_n\csc(\alpha_n))$。

由引理2.13可知，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$，其中对于任意$k\in\{1,\ldots\ldots,n\}$，$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，以及$\boldsymbol{x}:=(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}_{\alpha}\left(-e_{-\alpha}\Delta[e_{\alpha}f]\right)(\boldsymbol{x})=4\pi^2|\widetilde{\boldsymbol{x}}|^2\mathcal{F}_{\alpha}(f)(\boldsymbol{x}),\tag{2.5}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{x}}:=(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n):=(x_1\csc(\alpha_1),\ldots,x_n\csc(\alpha_n))$, e_{α} 与注释 1.3 中相同，而 Δ 是拉普拉斯算子 $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$。 —

受 (2.5) 的启发，我们将 (2.5) 中的指数 2 替换为一个正实数，以引入与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子。

定义 2.17。 设 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$，其中对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$， $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$； $e_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与注释 1.3 中相同， $z \in \mathbb{R}$，且 $z \in (0, \infty)$。与啁啾函数相关的 分数阶拉普拉斯算子 Δ_z 定义如下：对任意 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$， 令

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\left[-e_{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{y}) \Delta_z [e_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})] \right]^{\frac{z}{2}} \right) (\boldsymbol{x}) := (2\pi)^z |\widetilde{\boldsymbol{x}}|^z \mathcal{F}_{\alpha}(f)(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{x}} := (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = (x_1 \csc(\alpha_1), \dots, x_n \csc(\alpha_n))$ 。$(2\pi)^z |\widetilde{\boldsymbol{x}}|^z$ 称为与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子的符号， Δ_z。

显然，与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子 Δ_z 可视为与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的逆算子，并在第4节的图像加密解密过程中发挥关键作用。

2.2 与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的有界性

本小节将建立与啁啾函数相关的分数阶黎斯势在与啁啾函数相关的旋转不变空间上的有界性，这等价于经典黎斯势在同一与啁啾函数相关的旋转不变空间上的有界性。

定义 2.18. 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是一个巴拿赫空间。若对于任意 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$， 满足对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$， 以及任意 $f \in X$,

$$\|e_{\boldsymbol{\alpha}} f\|_X = \|f\|_X,$$

其中 $e_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与注释 1.3 中相同。

注记 2.19. 众所周知，旋转不变空间包括勒贝格空间、莫雷空间和赫尔兹空间。

定理 2.20. 若 X, Y 是两个与啁啾函数相关的旋转不变空间， $\beta \in (0, n)$， 且 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ 满足对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$， 则 I_β 从 X 到 Y 有界， 当且仅当 $I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}$ 从 X 到 Y 有界。

Pro。 令 $\|I_\beta\|_{X \to Y} < \infty$。根据定义 2.2 和定义 2.18，我们可以得出，对于任意 $f \in X$ ，

$$\|I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}(f)\|_Y = \|I_\beta(e_{\boldsymbol{\alpha}} f)\|_Y \lesssim \|e_{\boldsymbol{\alpha}} f\|_X = \|f\|_X.$$

反过来， 若 $\|I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}\|_{X \to Y} < \infty$， 则对于任意 $f \in X$， 我们有：

$$\|I_\beta(f)\|_Y = \|e_{-\boldsymbol{\alpha}} I_\beta(f)\|_Y = \|I_\beta^{\boldsymbol{\alpha}}(e_{-\boldsymbol{\alpha}} f)\|_Y \lesssim \|e_{-\boldsymbol{\alpha}} f\|_X = \|f\|_X.$$

定理 2.20 的证明至此完成。 □

由定理 2.20，我们可以很容易地推出以下推论；细节从略。

推论 2.21。 （哈代–利特尔伍德–索博列夫定理） 设 $\beta \in (0, n)$， $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_k \notin \pi\mathbb{Z}$ 对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$， $p \in [1, \frac{n}{\beta})$， 且 $\frac{1}{q} := \frac{1}{p} - \frac{\beta}{n}$。

(i) 若 $p \in (1, n/\beta)$，则存在一个正常数 C，使得对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，

$$\|I_\beta^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 存在一个正常数 C，使得对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及任意 $\lambda \in (0, \infty)$，

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\beta^\alpha f(\boldsymbol{x})| > \lambda\}| \le C\left[\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right]^{\frac{n}{n-\beta}}.$$

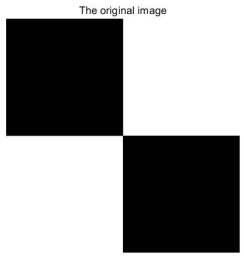
3 与啁啾函数相关的分数阶黎斯势仿真

本节中，我们借助分数阶傅里叶变换离散算法（例如，参见 [4, 5, 41]），将与啁啾函数相关的分数阶黎斯势应用于一幅图像。

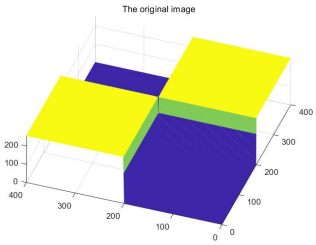
在下图 2 中，我们给出了 $I_\beta^{(\pi/4,\pi/4)}$ 的数值模拟。在连续情形下，下图 2(a) 可视为函数

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0, & \forall\, (x_1, x_2) \in [0, 200]^2 \cup [200, 400]^2, \\ 255, & \text{otherwise} \end{cases}$$

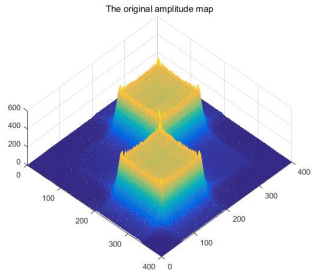
在 $\mathbb{R}^2$ 上。



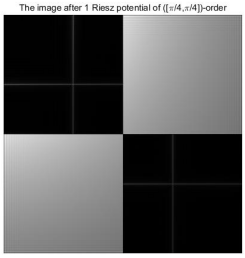
(a)



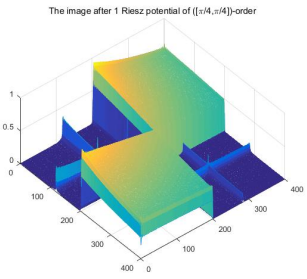
(b)



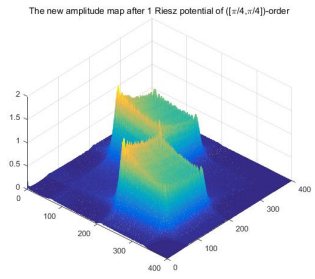
(c)



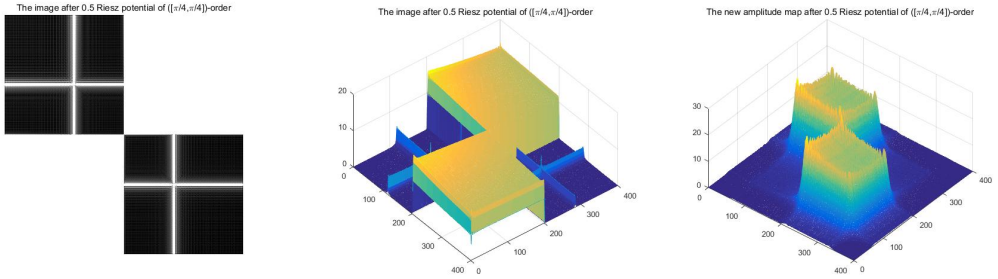
(d)



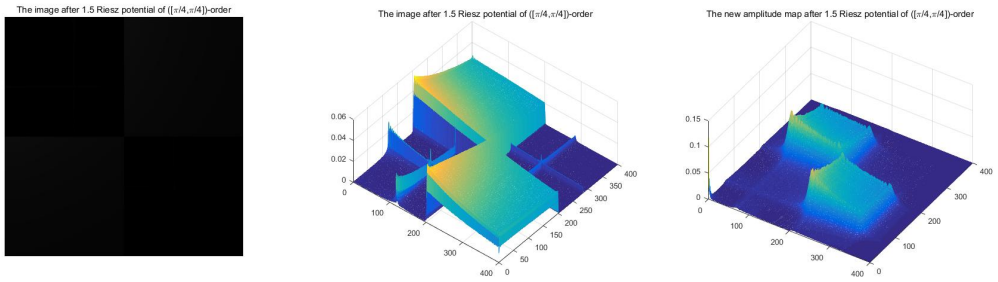
(e)



(f)



(g) (h) (i)

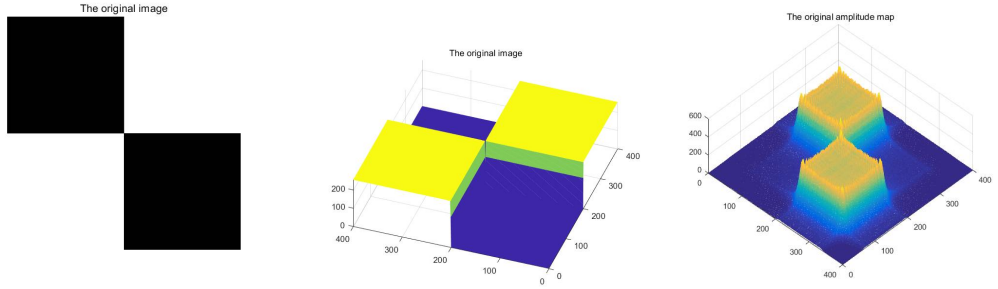


(j) (k) (l)

图2：$I_{\beta}^{(\pi/4,\pi/4)}$ 的数值模拟

如上图 2 所示，(a) 是原始二维灰度图像，包含 400 个像素 × 400 像素；(d)、(g) 和 (k) 分别是经过 $I_1^{(\pi/4,\pi/4)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$ 和 $I_{1.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$ 处理后的二维灰度图像。图 2 中的图 (b)、(e)、(h) 和 (k) 分别是f、$I_1^{(\pi/4,\pi/4)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$和$I_{1.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$的三维彩色图。图 2 中的图 (c) 、 (f) 、 (i) 和 (l) 分别是 f、$I_1^{(\pi/4,\pi/4)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$和 $I_{1.5}^{(\pi/4,\pi/4)}f$在阶数为 $\boldsymbol{\alpha}=(\pi/4,\pi/4)$ 的分数阶傅里叶域中的幅度图像。

下图3给出了$I_{\beta}^{(\pi/8,3\pi/8)}$ 的数值模拟。



(a) (b) (c)

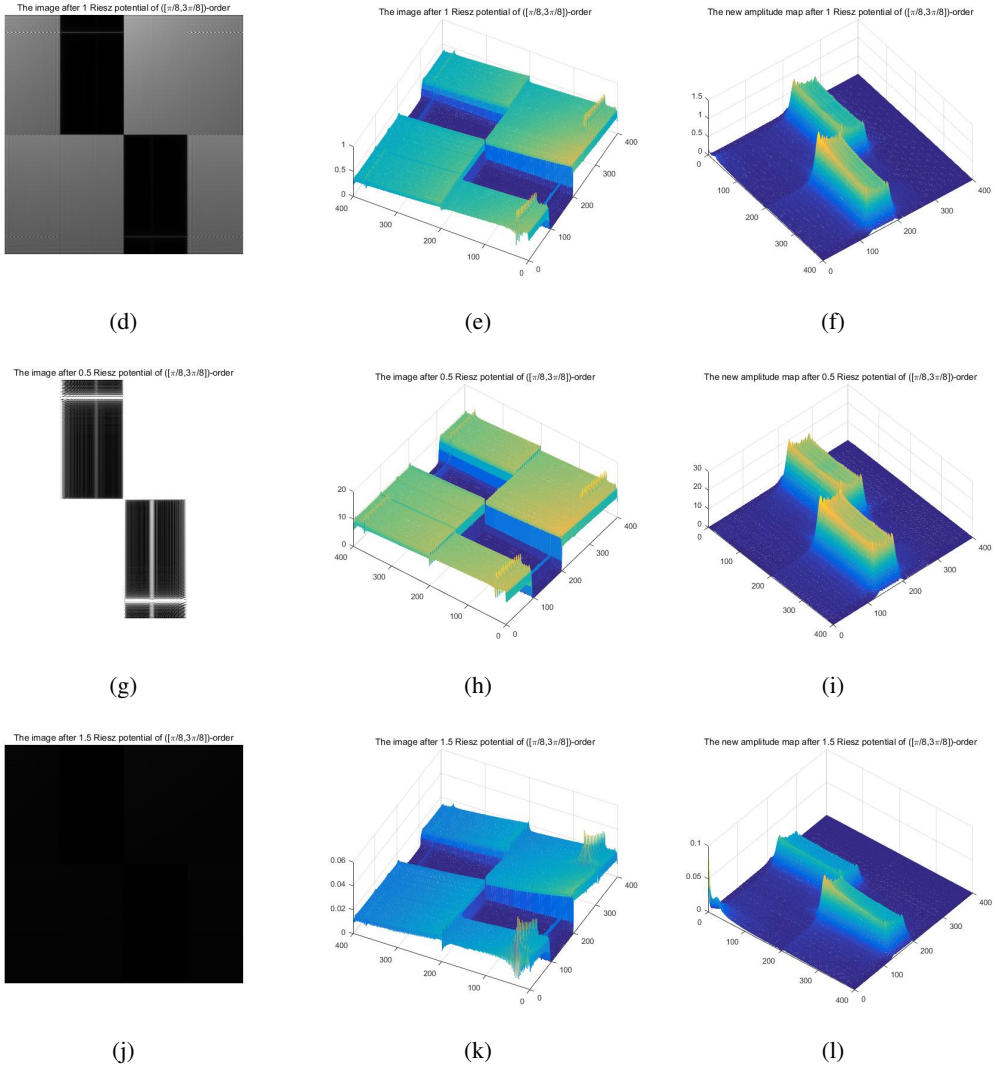


图3：$I_{\beta}^{(\pi/8,3\pi/8)}$ 的数值模拟

如上图3所示，(a)为原始二维灰度图像，包含400个像素 × 400 像素；(d)、(g)和(k)分别为经过$I_{1}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$和$I_{1.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$处理后的二维灰度图像。图3中的(b)、(e)、(h)和(k)分别为f、$I_{1}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$和$I_{1.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$的三维彩色图。图3中的(c)、(f)、(i)和(l)分别为f、$I_{1}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$、$I_{0.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$和$I_{1.5}^{(\pi/8,3\pi/8)}f$在阶数为 $\boldsymbol{\alpha}=(\pi/8,3\pi/8)$的分数阶傅里叶域中的幅度图像。

比较图 2(i) 与图 3(i)、图 2(f) 与图 3(f)，以及图 2(l) 与图 3(l)，我们发现，当 $\boldsymbol{\alpha}$ 变化而 β 保持不变时，图像幅度会发生显著变化。比较图 2 和图 3 中的 (f)、(i) 和 (l)，我们得出结论：当 β 变化而 $\boldsymbol{\alpha}$保持不变时，图像幅度也会发生显著变化。图 2 和图 3 中的 (c)、(f)、(i) 和 (l)

表明，通过调节参数 α 和 β，分数阶黎斯势的符号可以相应地显著改变分数阶傅里叶域中的幅度。总之，图 2 和图 3 表明，分数阶黎斯势是一种幅度调制器。这与分数阶黎斯变换的分数阶乘子截然不同，后者不仅是相移转换器，也是振幅衰减器。

总之，我们了解到，与啁啾函数相关的分数阶希尔伯特变换在分数阶傅里叶域中具有相移效应。然而，与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换不仅在分数阶傅里叶域中具有相移效应，还能够衰减幅度。此外，与啁啾函数相关的分数阶Riesz势能够改变分数阶傅里叶域中的幅度。由于这三种变换因其不同的乘子或符号而表现出显著差异，我们预测，这三种变换将在信号处理中发挥截然不同的重要作用。

4 基于与啁啾函数相关的分数阶Riesz势的双相位编码图像加密

随着宽带网络和多媒体技术的发展，图像数据的采集、传输和处理已遍布数字时代的各个角落。安全性问题也日益严重。许多图像数据需要以保密方式传输和存储，例如卫星拍摄的照片、金融机构的建筑图纸，以及远程医疗系统中的患者记录和医学图像。

在 [12, 42], Goudail 等人和 Unnikrishnan 等人提出了一种基于分数阶傅里叶变换的双相位编码图像加密方法。与 [17, 34], 中基于傅里叶变换的双相位编码图像加密方法相比，改进后的双相位编码加密密钥除了相位掩模外，还将分数阶傅里叶变换的阶数增加了两倍，从而扩展了密钥空间。当阶数未知时，通常无法解密。现在，我们提出一种新的图像加密方法，该方法结合双相位编码，基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势。也就是说，我们通过与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号来改变分数阶傅里叶变换域的振幅；该符号与分数阶傅里叶变换的阶数共同提供了更多自由度，扩展了密钥空间，并提高了受保护信息的安全性。下图 4 对这一加密过程作了具体说明。

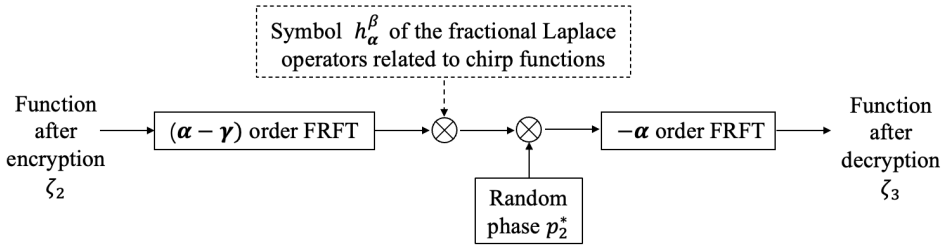


图 4：基于 I_β^α 的双相位编码加密过程

如图 4 所示，输入函数 $\zeta_1(x)$ 表示经过归一化后待加密的图像，

像素值范围为 $[0,1]$。加密后的函数 $\zeta_2(\boldsymbol{x})$ 表示加密图像。随机相位 p_1 和 p_2 分别定义为：对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，$p_1(\boldsymbol{x}) := e^{2\pi i n_1(\boldsymbol{x})}$ 和 $p_2(\boldsymbol{x}) := e^{2\pi i n_2(\boldsymbol{x})}$，它们称为随机相位掩模。其中，$n_1(\boldsymbol{x})$ 和 $n_2(\boldsymbol{x})$ 是两个在 $[0,1]$ 上均匀分布的统计独立白序列。如果在上述加密处理中不加入与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号，则该图像加密处理将退化为基于分数阶傅里叶变换的双相位编码图像加密。

相反，接下来我们给出一种基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码解密处理。

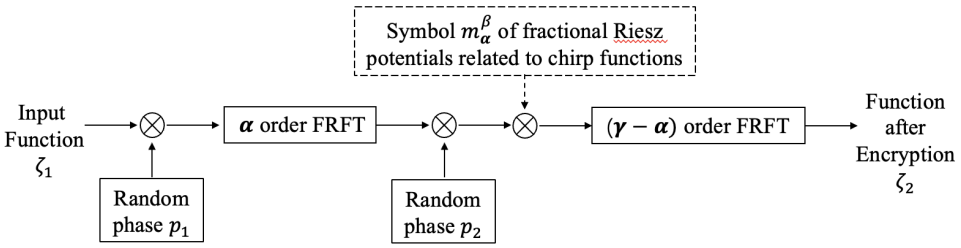
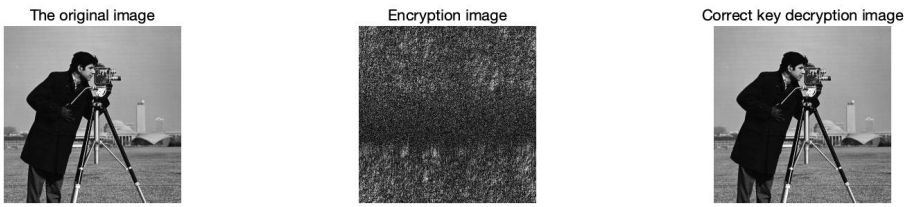


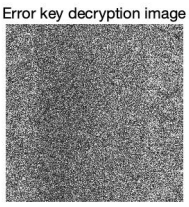
图5：基于I_{β}^{α}的双相位编码解密处理

如图5所示，解密处理也是加密过程的逆过程。从第2节可知，与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子的符号与与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号相乘等于1，也就是说，与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子可视为与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的逆运算。随机相位p_2^* 定义为对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，令$p_2^*(\boldsymbol{x}) := e^{-2\pi i n_2(\boldsymbol{x})}$；它是图4中随机相位掩模$p_2$的共轭，而解密后的函数 $\zeta_3(\boldsymbol{x})$表示解密后的图像。

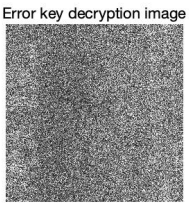
现在，我们研究图像加密和图像解密的仿真。下面的图6展示了使用经典图像进行加密和解密的数字仿真。



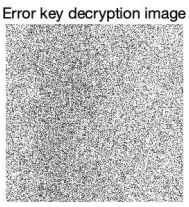
(a) (b) (c)



(d)



(e)



(f)

图6：图像加密与图像解密的仿真

如图6所示，(a)是用于图像加密的测试图像，包含256个像素 × 256 pixels；(b)是加密后的图像；(c)是使用正确密钥解密后的图像；(d)、(e)和(f)分别是使用错误密钥解密后的图像。图像加密和图像解密的仿真密码、参数和图像见下表1。

密码	**参数：** $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, β, $\gamma=(\theta_1,\theta_2)$	**图像**
正确密码	$\alpha=(\frac{7\pi}{8},\frac{5\pi}{8})$, $\beta=0.75$, $\gamma=(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$	图6中的(c)
错误密码	$\alpha=(\frac{7\pi}{8},\frac{5\pi}{8})$, $\beta=0.75$, $\gamma=(\frac{(1+0.05)\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$	图6中的(d)
错误密码	$\alpha=(\frac{(7+0.1)\pi}{8},\frac{5\pi}{8})$, $\beta=0.75$, $\gamma=(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$	（e）见图6
错误密码	$\alpha=(\frac{7\pi}{8},\frac{5\pi}{8})$, $\beta=0.85$, $\gamma=(\frac{(1+0.05)\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$	（f）见图6

表1：不同密钥对应的解密图像

如图6和表1所示，即使知道使用的是基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码图像加密方法，即使只更改图6中（c）和（d）所用正确密钥中的一个参数，也无法获得加密原始图像，更何况我们有五个参数。换言之，我们的参数和符号提供了更多自由度，使信息更加安全。

下图7分别展示了基于FRFT的双相位编码图像加密，以及基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码图像加密中，当密钥存在不同偏差时，解密图像与原始图像的均方误差（简称MSE）曲线。

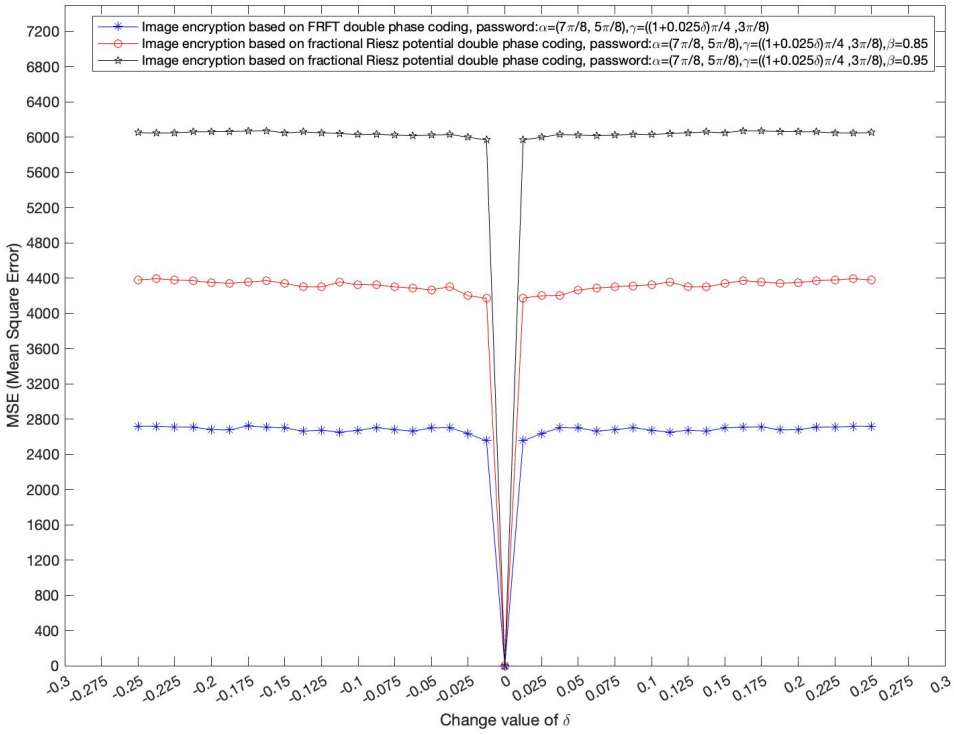


图 7：密钥错误时，基于分数阶傅里叶变换以及基于I_β^α的双相位编码图像解密结果与原始图像相比的均方误差曲线。

基于FRFT的双相位编码图像加密的正确密码为 $\alpha = (7\pi/8, 5\pi/8)$和 $\gamma = (\pi/4, 3\pi/8)$；基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的双相位编码图像加密的正确密码为 $\alpha = (7\pi/8, 5\pi/8)$、$\gamma = (\pi/4, 3\pi/8)$和 $\beta = 0.75$。从图7可以推断，与基于FRFT的双相位编码图像加密相比，基于与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换的双相位编码图像加密中的参数 β 极大地提高了安全性；我们还推断，在盲解密时，密钥的安全性要高得多。

总而言之，上述讨论表明，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势可应用于图像加密，且加密效果显著。

5 结论

本文介绍了与啁啾函数相关的分数阶黎斯势，并建立了它们与分数阶傅里叶变换、与啁啾函数相关的分数阶拉普拉斯算子，以及与啁啾函数相关的分数阶黎斯变换之间的关系。我们将与啁啾函数相关的分数阶黎斯势应用于图像加密。实验表明，与啁啾函数相关的分数阶黎斯势的符号本质上扩大了密钥空间，并大幅提升了

图像的安全性。

参考文献

[1] S. A. Abbas、Q. Sun 和 H. Foroosh，极坐标网格与球面网格上的离散傅里叶变换的精确快速计算，《IEEE信号处理汇刊》65 (2017年)，2033-2048。[2] L. M. Bernardo 和 O. D. D. Soares，分数阶傅里叶变换与成像，《美国光学学会杂志A辑》110 (1994)，2622-2626。[3] K. Bui、F. Park、Y. Lou 和 J. Xin，用于松弛 Mumford–Shah 彩色图像和多相图像分割的各向异性与各向同性全变分加权差，《SIAM成像科学杂志》14 (2021年)，1078-1113。[4] A. Bultheel 和 H. Mart´ınez Sulbaran，分数阶傅里叶变换的计算，《应用计算调和分析》16 (2004)，182-202。[5] A. Bultheel 和 H. Mart´ınez Sulbaran，frft22d：二维分数阶傅里叶变换的 MATLAB 文件，2004 年。https://nalag.cs.kuleuven.be/research/software/ FRFT/frft 22d.m。[6] W. Chen、Z. Fu、L. Grafakos 和 Y. Wu，L^p 上的分数阶傅里叶变换及其应用，《应用计算调和分析》55 (2021年)，71-96。[7] I. Djurovic、S. Stankovic 和 I. Pitas，分数阶傅里叶变换域中的数字水印，《网络与计算机应用杂志》24 (2001)，167-173。[8] E. Esser、Y. Lou 和 J. Xin，一种寻找非负最小二乘问题结构化稀疏解的方法及其应用，《SIAM成像科学杂志》6 (2013)，2010-2046。[9] Z. Fu、L. Grafakos、Y. Lin、Y. Wu 和 S. Yang，与分数阶傅里叶变换相关的 Riesz 变换及其在图像边缘检测中的应用，arXiv：2111.04027。[10] H. Ge、W. Chen 和 M. K. Ng，$\ell_1 - \ell_2$ 最小化方法的新受限等距性质分析，《SIAM成像科学杂志》14 (2021年)，530-557。[11] H. Ge、W. Chen 和 M. K. Ng，利用加权 ℓ_p最小化方法恢复具有先验支撑信息的稀疏信号，《IEEE信息论汇刊》67 (2021年)，7579-7595。[12] F. Goudail、F. Bollaro、B. Javidi 和 P. Refregier，扰动对双随机相位编码系统的影响，《美国光学学会杂志A辑》15 (1998)，2629-2638。[13] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第3版，数学研究生教材第249卷，施普林格出版社，纽约，2014年。[14] Y. Han 和 W. Sun，利用黎曼和求窗化线性正则变换的逆变换，《数学方法与应用科学》45 (2022)，6717-6738。[15] Y. Han 和 W. Sun，窗化线性正则变换的反演公式，《应用分析》101 (2022)，5156-5170。[16] L. Huo、W. Chen、H. Ge 和 M. K. Ng，利用变换全变分最小化实现稳定的图像重建，《SIAM成像科学杂志》15 (2022)，1104-1139。[17] B. Javidi、A. Sergent、G. Zhang 和 L. Guibert，双相位编码加密技术的容错特性，《光学工程》36 (1997)，992-998。[18] R. Kamalakkannan 和 R. Roopkumar，多维分数阶傅里叶变换与广义分数阶卷积，《积分变换与特殊函数》31 (2020)，152-165。[19] R. Kamalakkannan、R. Roopkumar 和 A. Zayed、Ahmed，短时耦合分数阶傅里叶变换与不确定性原理，《分数阶微积分与应用分析》24 (2021)，667-688。

[20] R. Kamalakkannan、R. Roopkumar 和 A. Zayed，耦合分数阶傅里叶变换的扩展及其性质，《积分变换与特殊函数》33 (2022)，65-80。[21] F. H. Kerr，Namias分数阶傅里叶变换在L^2上的理论及其在微分方程中的应用，《数学分析与应用杂志》136 (1988)，404-418。[22] A. W. Lohmann，图像旋转、Wigner旋转与分数阶傅里叶变换，《美国光学学会杂志A辑》10 (1993)，2181-2186。[23] Z. Liu、S. Li、W. Liu、Y. Wang 和 S. Liu，基于双随机相位编码，利用分数阶傅里叶变换和像素置乱操作的图像加密算法，《工程光学与激光》51 (2013)，8-14。[24] Y. Lou、T. Zeng、S. Osher 和 J. Xin，一种用于图像处理的各向异性与各向同性全变分加权差模型，《SIAM成像科学杂志》8 (2015)，1798-1823。[25] S. Lu、Y. Ding 和 D. Yan，《奇异积分及相关主题》，世界科学出版社有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2007年。[26] A. C. McBride 和 F. H. Kerr，论 Namias 的分数阶傅里叶变换，《IMA应用数学杂志》39 (1987)，159-175。[27] T. Musha、H. Uchida 和 M. Nagashima，带内置加速度计的自监测声呐换能器阵列，《IEEE海洋工程汇刊》27 (2002)，28-34。[28] V. Namias，分数阶傅里叶变换及其在量子力学中的应用，《IMA应用数学杂志》25 (1980)，241-265。[29] V. A. Narayanan 和 K. Prabhu，分数阶傅里叶变换：理论、实现与误差分析，《微处理器与微系统》27 (2003)，511-521。[30] H. M. Ozaktas 和 O. Ayt¨ur，分数阶傅里叶域，《信号处理》46 (1995)，119-124。[31] H. M. Ozaktas、Z. Zalevsky 和 M. Kutay Alper，《分数阶傅里叶变换：光学与信号处理中的应用》，威利出版社，纽约，2001年。[32] M. G. Raymer、M. Beck 和 D. McAlister，利用相空间层析成像重建复波场，《物理评论快报》72 (1994)，1137-1140。[33] Y. Rahimi、C. Wang、H. Dong 和 Y. Lou，一种用于稀疏信号恢复的尺度不变方法，《SIAM科学计算杂志》41 (2019)，A3649-A3672。[34] P. Refregier 和 B. Javidi，基于输入平面与傅里叶平面随机编码的光学图像加密，《光学快报》20 (1995)，767-769。[35] I. Yetik 和 A. Nehorai，利用分数阶傅里叶变换进行波束形成，《IEEE信号处理汇刊》51 (2003)，1663-1668。[36] E. Sejdi´c、I. Djurovi´c 和 L. Stankovi´c，分数阶傅里叶变换作为信号处理工具：最新进展综述，《信号处理》91 (2011)，1351-1369。[37] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。[38] Q. Sun，信号处理中的局部化非线性函数方程与两个采样问题，《计算数学进展》40 (2014)，415-458。[39] R. Tao、X. Li 和 Y. Wang，分数阶希尔伯特变换的推广，《IEEE信号处理快报》15 (2008)，365-368。[40] R. Tao、Y. Li 和 Y. Wang，短时分数阶傅里叶变换及其应用，《IEEE信号处理汇刊》58 (2010)，2568–2580。

[41] R. Tao、G. Liang和X. Zhao，基于FPGA的高效分数阶傅里叶变换算法实现，《信号处理系统期刊》60（2010），47-58。[42] G. Unnikrishnan、J. Joseph和K. Singh，在分数阶傅里叶域中采用双随机相位编码进行光学加密，《光学快报》25（2000），887-889。[43] A. Venkitaraman和S. C. Seelamantula，分数阶希尔伯特变换的扩展及相关解析信号构造，《信号处理》94（2014），359-372。[44] W. Wang和M. K. Ng，向量丛上基于饱和值全变分正则化的彩色图像复原，《SIAM成像科学杂志》14（2021年），178-197。[45] N. Wiener，厄米多项式与傅里叶分析，《数学与物理杂志》8（1929），70-73。[46] Y. Wu、J.Sun、W. Chen和J. Yin，利用低秩先验和深度图像先验改进图像压缩感知重建，《信号处理》205（2023），论文编号108896，共10页。[47] A. Zayed，与分数阶傅里叶变换相关的希尔伯特变换，《IEEE信号处理快报》5（1998），206-208。[48] A. Zayed，二维分数阶傅里叶变换及其若干性质，《积分变换与特殊函数》29（2018），553-570。[49] A. Zayed，关于二维分数阶傅里叶变换及其与维格纳分布关系的新视角，《傅里叶分析与应用杂志》25（2019），460-487。[50] Y. Zhang和W. Li， $\mathbb{R}^2$ 上的分数阶傅里叶变换及其应用，《中国数学前沿》17（2022），1181-1200。

傅尊伟
临沂大学数学与统计学院，中国临沂 276000；水原大学信息技术学院，韩国华城市 18323

电子邮箱：zwfu@suwon.ac.kr

林岩和 Shuhui Yang
中国矿业大学（北京）理学院，中国北京 100083

电子邮箱：linyan@cumtb.edu.cn（Y. Lin）
yangshuhui@student.cumtb.edu.cn（S. Yang）

杨大春（通讯作者） 中华人民共和国中国教育部数学与复杂系统实验室，北京师范大学数学科学学院，北京 100875电子邮箱： dcyang@bnu.edu.cn