arXiv:2302.13031v1 [cs.DM] 25 Feb 2023

余安全支配：困难性结果与算法

Kusum* Arti Pandey†

印度旁遮普邦印度理工学院罗帕尔分校数学系。

摘要

对于一个不含任何孤立顶点的简单图 $G = (V, E)$，其余安全支配集D 满足以下两个性质：(i) S 是 G的支配集；(ii) 对于每个顶点 $v \in S$，存在一个顶点 $u \in V \setminus S$，使得 $uv \in E$，并且$(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ 是 G的支配集。 G 的余安全支配集的最小基数称为 G 的余安全支配数，记作 $\gamma_{cs}(G)$。 Minimum CosecureDomination 问题旨在寻找基数为$\gamma_{cs}(G)$的图 G 的余安全支配集。已知该问题的判定版本在二部图、平面图和分裂图上是NP完全的。此外，已知 Minimum Cosecure Domination问题可在真区间图和余图上高效求解。

本文研究了多种重要的图类，旨在缩小 Minimum Cosecure Domination 问题的复杂性差距。我们证明，该问题的判定版本对于圆图、双弦图、弦二部图、星凸二部图和梳凸二部图仍然是NP完全的。积极的一面是，我们给出了一种计算链图余安全支配数的高效算法，而链图是二部图的一个重要子类。此外，我们证明，对于有界树宽图，该问题可以在线性时间内求解。进一步地，我们证明该问题的计算复杂性不同于支配问题。

关键词：余安全支配．二部图．双弦图．有界树宽图．NP完全性。

1 引言

本文中， $G =$ （V， E）表示一个没有任何孤立顶点的图，其中 V 是顶点集， E 表示 G 中的边集。本文所讨论的图

*2018maz0011@iitrpr.ac.in
†arti@iitrpr.ac.in

均假设为有限、简单、无向且没有任何孤立顶点。若集合 $D \subseteq V$ 满足其闭邻域为图 G 的顶点集 V，即 $N[D] = V$，则称 $D \subseteq V$ 为图 G 的支配集。图 G 的支配数记为 $\gamma(G)$，即 G 的支配集的最小基数。给定图 G， Minimum Domination（MDS）问题是求 G 中基数为 $\gamma(G)$ 的支配集。MDS 问题的判定版本是 Domination Decision 问题，记为 DM 问题；其输入实例为图 G 和正整数 k，问题是判断是否存在基数至多为 k 的支配集。 Minimum Domination 问题及其许多变体已在文献中得到广泛研究，感兴趣的读者可参阅 [7, 8]。

支配的一种重要变体是安全支配，这一概念最早由 Cockayne 等人于 2005 年提出 [5] 。若集合 $S \subseteq V$ 是 G的安全支配集，则 S 是 G 的支配集，并且对每个 $u \in V \setminus S$，都存在 $v \in S$ 使得 $uv \in E$ 且（$S \setminus \{u\}$）$\cup \{v\}$ 构成 G的一个支配集。 G 的安全支配集的最小基数称为 G 的安全支配数，记作γ_s（G）。 Secure Domination 问题旨在求出 G的一个基数为 γ_s（G）的安全支配集。许多研究者对这一问题及其诸多变体进行了研究 [1, 4, 5, 15, 20]。关于这一问题的详细综述，可参阅 [7]。

考虑这样一种情形：目标是使用一组守卫来保护图，同时为每个守卫提供一个备用者或替代者（非守卫），使得最终的配置仍能保护该图。受类似情形的启发，Arumugam 等人于 2014 年提出了另一种有趣的支配变体，即余安全支配 [2], ，随后该概念在 [11, 16, 17, 22]中得到了进一步研究。可以说，这一变体与安全支配部分相关，而余安全支配在某种程度上是安全支配的补充。若集合 $S \subseteq V$ 是 G的余安全支配集（简称 CSDS），则 S 是 G 的支配集，并且对每个 $u \in S$，都存在一个顶点 $v \in V \setminus S$（ u的替代顶点），使得 $uv \in E$ 且（$S \setminus \{u\}$）$\cup \{v\}$ 是 G的一个支配集。在此定义中，我们可以说 v S-替代u。一个简单的观察是， V 永远不可能是 G的余安全支配集。如果图中存在孤立顶点，则不存在余安全支配集，这一点值得注意。此外，我们指出，非连通图G 的余安全支配数就是其连通分量 G的余安全支配数之和。因此，本文仅考虑不含孤立顶点的连通图。

给定一个没有孤立顶点的图 G ， Minimum Cosecure Domination问题（MCSD 问题）是一类优化问题，我们需要计算 G 的一个基数为 γ_{cs}（G）的余安全支配集。给定一个没有孤立顶点的图 G 和一个正整数 k,
Cosecure Domination Decision 问题（简称 CSDD 问题）是要判定是否存在 G 的基数至多为 k的余安全支配集。显然， γ（G） $\leq \gamma_{cs}$（G）。

已知，对于二部图、弦图或平面图，CSDD 问题是 NP完全的[2]。已有研究针对部分图类研究了余安全支配数的界 [2, 11]。对于余安全支配数为 2 或 3 的 Mycielski 图，已有刻画结果，并给出了关于 $\gamma_{cs}(\mu(G))$的紧上界，其中 $\mu(G)$是

图 G的 Mycielski 构造。2021年，Zou 等人证明，真区间图 G 的 $\gamma_{cs}(G)$可以在线性时间内计算 [22]。最近，在 [16], Kusum等人进一步完善了复杂性结果，并证明互补可约图的余安全支配数可以在线性时间内确定。他们还证明，对于分裂图，CSDD 问题仍然是 NP完全的。此外，他们证明，对于有界度图，该问题是 APX困难的，并给出了该问题的不可近似性结果。进一步地，他们证明，对于最大度为 Δ的完美图，该问题可以在近似比为（$\Delta+1$）的范围内得到近似。

本文在现有研究的基础上，考察了 Minimum Cosecure Domination问题在多个重要图类中的复杂性，包括圆图、双弦图、有界树宽图、链图、弦二部图、星凸二部图和梳凸二部图。在图类的层级结构中，弦二部图、星凸二部图、梳凸二部图和链图是二部图的重要子类，而对于二部图，CSDD 问题是 NP完全的。我们通过证明 CSDD 问题在弦二部图、星凸二部图和梳凸二部图中均为 NP完全，缩小了该问题复杂性状态方面的空白。我们还证明，该问题在双弦图和圆图中仍然是 NP完全的。另一方面，我们证明，MCSD 问题在有界树宽图中可在线性时间内求解，并提出了一种用于计算链图的余安全支配数的高效算法。

本文其余部分的结构如下。第 2 节给出一些相关定义和初步结果。第 3 节证明，对于圆图、弦二部图、星凸二部图和梳凸二部图， CosecureDomination Decision 问题仍然是 NP完全的。第 4 节证明，对于双弦图，
Cosecure Domination Decision 问题是 NP完全的。第 5 节证明，对于有界树宽图，该问题可在线性时间内求解。第 6 节给出一种多项式时间算法，用于计算链图的余安全支配数。最后，第 7 节总结全文。

2 预备知识

图论定义和符号参见 [21] 。圆图是弦在圆上的交图。若图 $G=(V,E)$ 满足以下条件，则称其为二部图： V 可划分为 P 和 Q ，使得对于任意 $uv\in E$，要么 $u\in X$ 且 $v\in Y$，要么 $u\in Y$且 $v\in X$。这样的 V划分 (P,Q) 称为 V 的二部划分，集合 X 和 Y 称为 V的部集。我们将带有二部划分 (P,Q) 的二部图 $G=(V,E)$ 记作 $G=(P,Q,E)$，其中 $n_1=|P|$ 且$n_2=|Q|$。若二部图 $G=(P,Q,E)$ 中每个长度至少为六的圈都有一条弦，则称其为弦二部图。若可以定义一棵树（星或梳） $T=(P,F)$，使得对于每个 $u\in Q$， $T[N_G(u)]$ 都是 T [10]的连通诱导子图，则称二部图 $G=(P,Q,E)$ 为树凸（星凸或梳凸）二部图。

若二部图 $G=(X,Y,E)$ 存在一种线性

顶点线性序 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$，将部集 X中的顶点排列起来，使得 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \cdots \subseteq N(x_{n_1})$，则称其为链图。若 $G=(X,Y,E)$ 是链图，则部集 Y中的顶点也存在一种线性序，即 $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$，使得 $N(y_1) \supseteq N(y_2) \supseteq \cdots \supseteq N(y_{n_2})$。对于链图 $G=(X,Y,E)$，链序是 $X \cup Y$ 的一种排列 $\alpha=(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$，满足 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \cdots \subseteq N(x_{n_1})$ 且 $N(y_1) \supseteq N(y_2) \supseteq \cdots \supseteq N(y_{n_2})$[9]。

设 $G=(V,E)$ 是一个图。若由 $N[x]$ 诱导的子图是完全图，则称顶点 $x \in V$ 为 G 的单纯顶点 。若对于每个 $z \in N[x]$，$N[z] \subseteq N[y]$，则称顶点 $y \in N[x]$ 为 x 的最大邻点 。若顶点 x 是单纯顶点且有一个最大邻点，则称顶点 $x \in V$ 为双重单纯顶点。图 G 的顶点集 V 的双重完美消去序 ，简称 G 的 DPEO，是 V 的一个序 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$，其中对每个 $i \in [n]$，u_i 都是图 G 中由 $\{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ 诱导的子图的双重单纯顶点。若一个图既是弦图又是对偶弦图，则称其为双弦图 。双弦图的一个刻画是：图 G 是双弦图，当且仅当 G 有一个 DPEO [18]。

文献中已知以下结果 [2]。

引理1. [2] 对于完全二部图 $G=(X,Y,E)$，其中 $|X| \leq |Y|$,

$$\gamma_{cs}(G)=\begin{cases}|Y| & if\ |X|=1;\\ 2 & if\ |X|=2;\\ 3 & if\ |X|=3;\\ 4 & otherwise.\end{cases} \tag{1}$$

引理 2. [2] 令 L_u 表示图 G 中与顶点 u 相邻的悬挂顶点集合。若 $|L_u| \geq 2$，则对于 G 的每个余安全支配集 D，$L_u \subseteq D$ 且 $u \notin D$。

3 NP完全性结果

本节研究圆图和二部图子类中 CSDD 问题的 NP完全性。已知 CSDD 问题对于二部图是 NP完全的；在此，我们通过证明该问题对于弦二部图、星凸二部图和梳凸二部图仍为 NP完全，进一步明确了 CSDD 问题的复杂性。这些图都是二部图的子类。为此，我们将利用有关 DM 问题 NP完全性的已知结果。

定理 1. [13, 19] 对于弦二部图和圆图，*DM* 问题是 *NP*完全的。

3.1 弦二部图和圆图

在本小节中，我们证明，限制在弦二部图和圆图上的 Minimum Cosecure Domination 问题的判定版本是 NP完全的。证明方法是将 DM 问题的一个实例通过多项式时间归约到 CSDD 问题的一个实例。

现在，我们说明如何将 DM 问题的一个实例 G，k 归约为 CSDD 问题的一个实例 G'，k'。给定一个图 $G=(V,\ E)$，其中包含 $V=\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$，我们通过在每个顶点 $v_i \in V$上附加一条路径 $(v_i,\ v_{i1},\ v_{i2})$，由 G 构造一个图 $G'=(V',\ E')$，其中 $V'=V \cup \{v_{i1}, v_{i2} \mid 1 \leq i \leq n\}$ 且 $E'=E \cup \{v_i v_{i1}, v_i v_{i2} \mid 1 \leq i \leq n\}$。显然，上述归约可在多项式时间内完成。以下引理由 Arumungum 等人 [2]的结果得出。

引理 3. [2] G 存在一个基数至多为 k 的支配集，当且仅当 G' 存在一个基数至多为 $k'=k+|V$ 的余安全支配集$(G)|$。

引理 4. [14] 设 G 是一个圆图，G' 是使用上述定义的归约得到的图。那么，G' 也是一个圆图。

引理 5. 设 G 是一个弦二部图，G' 是使用上述定义的归约得到的图。那么，G' 也是一个弦二部图。

以下定理的证明直接由定理 1、引理 3、引理 4 和引理 5 得出。

定理 2. 对于弦二部图和圆图，*CSDD* 问题是 *NP*完全的。

3.2 星凸二分图

在本小节中，我们证明，当限制在连通星凸双部图上时，Minimum Cosecure Domination 问题的判定版本是 NP完全的。其证明是通过将 DM 问题的一个实例归约到 CSDD 问题的一个实例得到的。

定理 3. *CSDD* 问题在星凸二分图上是 *NP*完全的。

证明。显然，CSDD 问题在星凸二分图上属于 NP。为证明其 NP完全性，我们给出从二部图上的 DM 问题到星凸二部图上的 CSDD 问题的一个多项式时间归约。

设给定一个二部图 $G=(X,Y,E)$，其中 $X=\{x_i \mid 1 \leq i \leq n_1\}$和 $Y=\{y_i \mid 1 \leq i \leq n_2\}$。我们按以下方式从 G 构造一个星凸二部图 $G'=(X',Y',E')$:

- $X'=X \cup \{x, x', x'_0, x'_1, x'_2\}$,
- $Y'=Y \cup \{y, y', y'_0, y'_1, y'_2\}$，以及
- $E'=E \cup \{xy_i, x'y_i \mid 1 \leq i \leq n_2\} \cup \{yx_i, y'x_i \mid 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{xy'_i, yx'_i \mid 1 \leq i \leq 2\} \cup \{xy, xy', x'y, x'y', x'y'_0, y'x'_0\}$。

这里，$|X'|=n_1+5$、$|Y'|=n_2+5$ 和 $|E'|=|E|+2n_1+2n_2+10$。显然，可以在多项式时间内由 G 构造出 G'。此外，新构造的图 G'是一个星凸二部图，其星为 $T=(X',F)$，其中 $F=\{xx_i \mid 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{xx', xx'_i \mid 0 \leq i \leq 2\}$，且 x是星 T 的中心。图 1 展示了由 G构造 G' 的过程。

命题 1. G 有一个基数至多为 k 的支配集，当且仅当 G' 有一个基数至多为 $k+6$ 的余安全支配集。

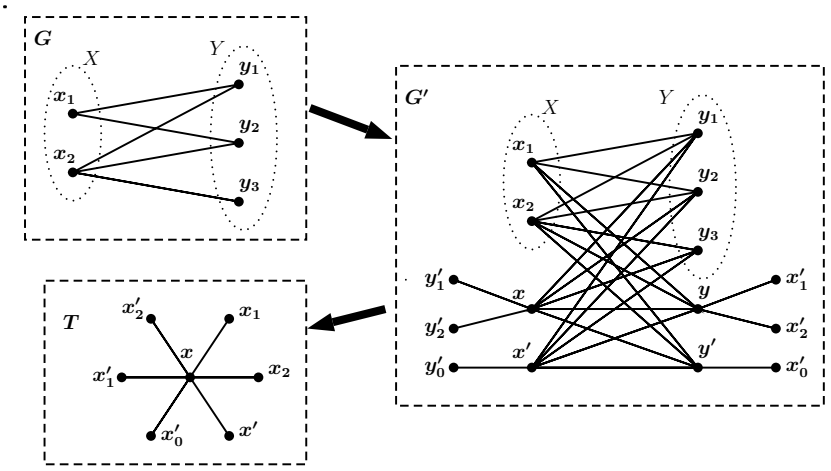

图 1：说明如何根据图 G 构造图 G' 。

证明。设 D 是 G 的一个基数至多为 k的支配集。考虑集合 $S = D \cup \{x'_i, y'_i \mid 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x', y'\}$，其中 $x'_i \in X'$且 y'_i对 $0 \leq i \leq 2$成立。显然， S是 G' 的支配集，且 $|S| = k + 6$。容易看出，对于 S 中的每个顶点，都存在一个替代顶点；例如，对于 $u \in S \cap X' \setminus \{x'\}$， y 是 u的替代顶点，而 x' 的替代顶点是 y'_0。类似地，可以论证每个顶点 $v \in S \cap Y'$都有一个替代顶点。因此， S 是一个基数为 $k + 6$的余安全支配集。于是， G' 有一个基数至多为 $k + 6$ 的余安全支配集。

反之，设 S 是一个基数至多为 $k + 6$ 的余安全支配集。由引理 2 可知， x'_i， $y'_i \in S$，其中 $1 \leq i \leq 2$ 和 x， $y \notin S$。根据余安全支配集的定义，显然 x' 和 y'_0 中恰有一个属于 S。类似地， y' 和 x'_0 中恰有一个属于 S。因此， $|S \setminus (X \cup Y)| \geq 6$。定义集合 $D = S \cap (X \cup Y)$。显然， $|D| \leq k$。现在，我们断言集合 $D = S \cap (X \cup Y)$ 是 G 的支配集。如果 x' 和 y' 都属于 S，则结论成立。注意，当 $x' \in S$ 时， y'_0 是 x' 的替代顶点。这意味着， $S \cap (X \cup Y)$ 支配 X。类似地，当 $y' \in S$ 时，我们得到 $S \cap (X \cup Y)$ 支配 Y。因此，我们可以得出结论，在每种可能的情况下， D 都构成 G 的一个支配集，其基数至多为 k。

□

至此，结果的证明完成。 □

由于树凸二部图是星凸二部图的超类，由定理 3 可直接得出以下推论。

推论 **y 1.** 树凸二部图上的 *CSDD* 问题是 *NP*完全的 *s.*

3.3 梳状凸二部图

在本小节中，我们证明梳状凸二部图上的 Minimum CosecureDomination 问题的判定版本是 NP完全的。证明方法是将 DM 问题的一个实例通过多项式时间归约映射为 CSDD 问题的一个实例。

定理 **4.** 梳凸二部图上的 *CSDD* 问题是 *NP*完全的 *s.*

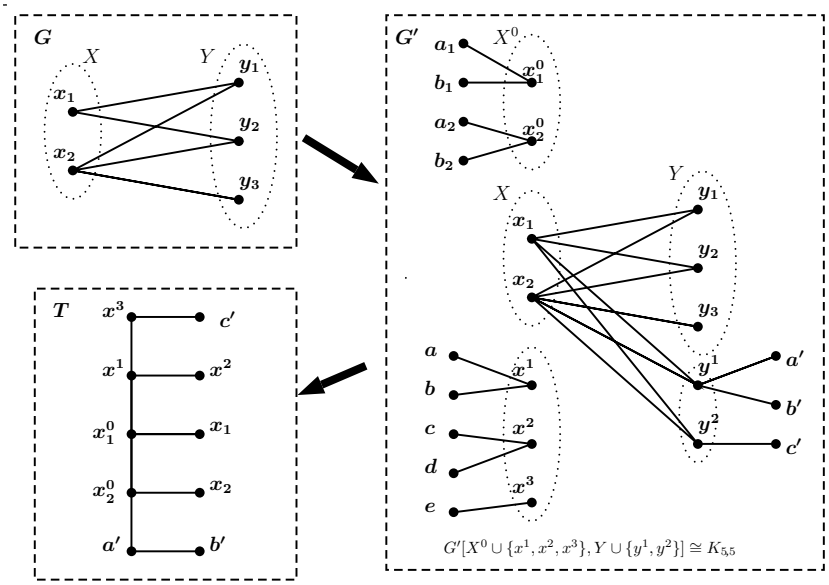

图2：说明如何从图 G构造图 G' 。

证明。 显然，对于梳凸二部图，CSDD 问题属于 NP。为了证明其 NP完全性，我们将二部图上的 DM 问题归约为梳凸二部图上的 CSDD 问题。

给定一个二部图 $G = (X, Y, E)$，其中 $X = \{x_i \mid 1 \le i \le n_1\}$和 $Y = \{y_i \mid 1 \le i \le n_2\}$。我们按以下方式从 G 构造一个梳凸二部图 $G' = (X', Y', E')$:

- $X' = X \cup X^0 \cup \{x^1, x^2, x^3, a', b', c'\}$ 其中 $X^0 = \{x_i^0 \mid 1 \le i \le n_1\}$,
- $Y' = Y \cup \{y^1, y^2, a, b, c, d.e\} \cup \{a_i, b_i \mid 1 \le i \le n_1\}$，并且
- $E' = E \cup \{x_i y^j, x_i^0 y^j \mid 1 \le i \le n_1$和 $1 \le j \le 2\} \cup \{y_i x_j^0 \mid 1 \le i \le n_2$和 $1 \le j \le n_1\} \cup \{x^i y_j \mid 1 \le i \le 3$和 $1 \le j \le n_2\} \cup \{x^i y^j \mid 1 \le i \le 3$和 $1 \le j \le 2\} \cup \{x_i^0 a_i, x_i^0 b_i \mid 1 \le i \le n_1\} \cup \{y^1 a', y^1 b', y^2 c'\} \cup \{x^1 a, x^1 b, x^2 c, x^2 d, x^3 e\}$。

注意， $|X'| = 2n_1 + 6$、 $|Y'| = 2n_1 + n_2 + 7$和 $|E'| = |E| + 6n_1 + 3n_2 + 11$。不难看出， G' 可以在多项式时间内由 G 构造得到。此外， G' 是梳凸二部图，其梳为 $T = (X',\ F)$，其中 $F = \{x_i^0 x_{i+1}^0 \mid 1 \le i \le n_1 - 1\} \cup \{x_i x_i^0 \mid 1 \le i \le n_1\} \cup \{x_{n_1}^0 a', a'b', x^1 x_1^0, x^1 x^2, x^1 x^3, x^2 c'\}$是一个梳，以 $X^0 \cup \{x^1, x^2, a'\}$为主干，以 $X \cup \{x^3, b', c'\}$ 为齿。图2展示了如何由 G构造 G'。

命题 2. *G 有一个基数至多为 k 的支配集，当且仅当 G' 有一个基数至多为 $k + 2(|X| + 4)$ 的余安全支配集。*

证明。 设 D 是 G 的一个基数至多为 k 的支配集。考虑集合 $S = D \cup \{a_i, b_i \mid 1 \le i \le n_1\} \cup \{a, b, c, d, a^1, b^1, y^2, x^3\}$。显然， S是 G'的一个支配集，且$|S| = k + 2(|X| + 4)$。现在，我们证明对于 S中的每个顶点，都存在一个替代顶点。首先，我们考虑集合 $S \cap X' = (D \cap X) \cup \{x^3\}$ 中的顶点，并按如下方式为 $S \cap X'$ 中的每个顶点指定一个替代顶点:

- y^1 是每个顶点 $u \in S \cap X (= D \cap X)$ 的替代顶点,
- e 是 x^3的替代顶点，并且

- y^1 是 a^1 和 b^1的替代顶点。

现在，我们考虑集合 $S \cap Y' = (D \cap Y) \cup \{a, b, c, d, y^2\}$ 中的顶点，并为 $S \cap Y'$ 中的每个顶点指定一个替代顶点，如下所示：

- x^1 是每个顶点 $u \in (S \cap Y) \cup \{a, b\}$ 的替代顶点，
- c' 是 y^2 的替代顶点，
- x^2 是 c 和 d 的替代顶点，

因此，对于 S 中的每个顶点，都存在一个替代顶点。因此，我们可以得出结论：S 是 G' 的一个余安全支配集，其基数为 $k + 2(|X| + 4)$。

反之，设 S 是一个基数至多为 $k + 2(|X| + 4)$ 的余安全支配集。由引理 2 可知，$\{a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{a, b, c, d, a', b'\} \subseteq S$，且 $S \cap (\{x^1, x^2, y^1\} \cup X^0) = \emptyset$。根据余安全支配集的定义，显然 y^2 和 c' 中恰有一个属于 S。类似地，x^3 和 e 中恰有一个属于 S。因此，$|S \setminus (X \cup Y)| \geq 2(|X| + 4)$。定义集合 $D = S \cap (X \cup Y)$。显然，$|D| \leq k$。现在，我们声称集合 $D = S \cap (X \cup Y)$ 是 G 的一个支配集。如果 c' 和 e 都属于 S，则结论成立。注意，当 $x^3 \in S$ 时，e 是 x^3 的替代顶点。这意味着 $S \cap (X \cup Y)$ 支配 Y。类似地，当 $y' \in S$ 时，我们得到 $S \cap (X \cup Y)$ 支配 X。因此，我们可以得出结论：在所有可能的情况下，D 构成 G 的一个支配集，其基数至多为 k。

至此，结果的证明完成。 □

4 支配与余安全支配之间的复杂性差异

本节将说明，对于某些图类，Minimum Domination问题的复杂性可能与 Minimum Cosecure Domination 问题的复杂性不同，并找出两个这样的图类。

4.1 GY4 图上的支配问题的 NP完全性

在本小节中，我们定义一种称为 GY4-图的图类，并证明对于 GY4-图，MCSD 问题可在多项式时间内求解，而 MDS 问题的判定版本是 NP完全的。

设 S^4 表示一个有 4 个顶点的星图。对于 $1 \leq i \leq n$，设 $\{S_i^4 \mid 1 \leq i \leq n\}$ 是一组阶为 4 的 n 星图，满足 v_i^1，v_i^2，v_i^3表示悬挂顶点，v_i^4表示中心顶点。现在，我们正式定义图类 GY4-图如下：

定义 1. *GY4* 图 若一个图 $G^Y == (V^Y, E^Y)$ 可以由满足 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 的图 $G = (V, E)$ 构造而成：对每个 $1 \leq i \leq n$，将星图 S_i^4 的悬挂顶点 v_i^1 与顶点 $v_i \in V$ 相连，则称该图为 *GY4* 图。

注意，$|V^Y| = 4n$ 和 $|E^Y| = 4n + |E|$。因此，$n = |V^Y|/4$。首先，我们证明，对于 GY4 图，可以在线性时间内计算余安全支配数。

定理 5. 对于 *GY4*-图 $G^Y = (V^Y, E^Y)$，$\gamma_{cs}(G^Y) = \frac{3}{4}|V^Y|$。 -

证明。设 G 是一个具有 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 的图，且 G^Y 是图 G 的 GY4-图。假设 D_{cs} 是 G^Y 的任意一个余安全支配集。根据引理 2，可得 $\{v_i^2,v_i^3 \mid 1\le i\le n\}\subseteq D_{cs}$ 和 $v_i^1\notin D_{cs}$。此外，注意到要支配 v_i^1， D_{cs} 中必须至少包含 v_i 或 v_i^1。综合以上论证可知，对每个 $1\le i\le n$，都有 $|\{v_i,v_i^1,v_i^2,v_i^3\}\cap D_{cs}|\ge 3$。因此， $|D_{cs}|\ge 3n$。现在，利用 D_{cs} 是 G^Y 的任意一个余安全支配集这一事实以及 $n=|V^Y|/4$，可得 $\gamma_{cs}(G^Y)\ge \frac{3}{4}|V^Y|$。反过来，容易看出集合 $D=\{v_i^1,v_i^2,v_i^3 \mid 1\le i\le n\}$ 构成了 G^Y 的余安全支配集。因此， $\gamma_{cs}(G^Y)\le 3n$。由于 $n=|V^Y|/4$，可得 $\gamma_{cs}(G^Y)\le \frac{3}{4}|V^Y|$。 □

接下来，我们证明 GY-4 图上的支配问题的判定版本是 NP完全的。为此，我们证明：一般图 G 的 Minimum Domination 问题可高效求解，当且仅当相应的 GY4-图 G^Y 上的问题可高效求解。

引理6. 设 $G^Y=(V^Y,E^Y)$ 是与图 $G=(V,E)$ 对应的 *GY4*-图，其阶为 n，且 $k\le n$。那么，G 有一个基数至多为 k 的支配集，当且仅当 G^Y 有一个基数至多为 $k+n$ 的支配集。

证明。设 D^* 是 G 的一个支配集，且满足 $|D^*|\le k$。容易看出， $D^*\cup\{v_1^4,v_2^4,\ldots,v_n^4\}$ 构成 G^Y 的一个基数至多为 $k+n$ 的支配集。反过来，设D_Y^*是 G^Y 的一个基数至多为 $k+n$ 的支配集。显然， $|D_Y\cap\{v_i^1,v_i^2,v_i^3,v_i^4\}|\ge 1$。对于每个满足 $v_i^1\in D_Y$ 的 $1\le i\le n$，我们可以将支配集 D_Y 更新为$D_Y\setminus\{v_i^1\}\cup\{v_i\}$。假设 D_Y^* 是 G^Y 的更新后支配集。现在，集合 $D_Y^*\cap V$ 构成 G 的一个基数至多为 k 的支配集。□

由于一般图上的 Domination Decision 问题是NP完全的 [3]。因此，Domination Decision 问题的NP完全性可直接由引理6推出。

定理6。 *GY4* 图上的*DM*问题是*NP*完全的。

4.2 双弦图上余安全支配的NP完全性

本节研究双弦图上CSDD问题的NP完全性。为证明这一点，我们将 Set Cover Decision 问题的一个实例归约为 Cosecure Domination Decision 问题的一个实例。

在此之前，我们首先形式化定义 Set Cover Decision 问题。给定一对$(A,\ S)$和一个正整数 k，其中 A 是一个包含 p 个元素的集合， S 是 A的 q 个子集组成的集族，Set Cover Decision 问题询问是否存在 C 的一个子集S'，使得 $\cup_{B\in S'}B=A$。双弦图上的 Set Cover Decision问题的NP完全性已为人所知。

定理7。 [12] 双弦图上的集合覆盖决策问题是*NP*完全的。

定理8。 对于双弦图，*CSDD* 问题是*NP*完全的。

证明。 显然，对于双弦图，CSDD 问题属于NP。现在，我们将从以下实例的 Set Cover Decision 问题进行归约：(A, S, k)，其中 A是一个包含 p 个元素的集合， S 是 A 的 q 个子集组成的集合， k 是一个正整数；将其归约为CSDD 问题的实例(G, k')，具体如下：

假设给定一个元素集合 $A = \{a_i \mid 1 \leq i \leq p\}$、由 $S = \{S_i \mid 1 \leq i \leq q\}$ 的子集组成的集族以及一个正整数 k 。现在我们按如下方式构造一个图 $G = (V, E)$：

- 对于每个元素 $a_i \in A$，我们在 V 中取一个顶点 a_i ，
- 对于每个子集 $S_i \in S$，我们在 V 中取一个顶点 s_i ，
- $V = \{a_i \mid 1 \leq i \leq p\} \cup \{s_i \mid 1 \leq i \leq q\} \cup \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2\}$，并且
- $E = \{s_i s_j \mid 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{a_i s_j \mid a_i \in S_j$ 和 $S_j \in S$，其中 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq j \leq q\} \cup \{a_i x_1, s_j x_1, s_j y_1, s_j z_1 \mid 1 \leq i \leq p$ ，并且 $1 \leq j \leq q\} \cup \{x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 y_1, x_1 z_1, y_1 z_1, y_1 y_2, z_1 z_2\}$。

新构造的图 G 是一个具有 DPEO$\{x_2, x_3, y_2, z_2, a_1, a_2, \ldots, a_p, s_1, s_2, \ldots, s_q, y_1, z_1, x_1\}$ 的双弦图。显然，上述构造可在多项式时间内完成。

断言3. (A, S) 具有基数至多为 k 的集合覆盖，当且仅当 G 具有基数至多为 $k+4$ 的余安全支配集。

证明。 假设 S' 是 (A, S) 的一个基数至多为 k 的集合覆盖。考虑 $D' = \{u \mid U \in S'\}$。定义一个集合 $D = D' \cup \{x_2, x_3, y_1, z_1\}$。显然， D 是 G 的一个基数至多为 $k+4$ 的余安全支配集。

反过来，假设 D 是 G 的一个基数为 $k+4$的余安全支配集。由引理 2可知， x_2、$x_3 \in D$ 和 $x_1 \notin D$。此外， y_1 和 y_2中恰有一个属于 D，而 z_1和 z_2中也恰有一个属于 D。假设 $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ 且$J = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$。由上述论证可得 $|D \cap (I \cup J)| \leq k$。现在，我们声称存在 G 的一个余安全支配集 D'，使得 $|D' \cap I| = \emptyset$。若 D 满足$|D \cap I| = \emptyset$，则结论成立。接下来，假设 $D \cap I = \{u^1, u^2, \ldots, u^r\}$。若对每个$u^j \in D \cap I$，都存在一个顶点 $w^j \in J$，使得 $u^j w^j \in E$ 且 $w^j \notin D$，那么从 D中移除 u^j 并加入 w^j，即可得到所需的集合。若对于某个 $u^{j'} \in D \cap I$，不存在任何顶点 $w^{j'} \in J$ 使得 $u^j w^{j'} \in E$ 且 $w^{j'} \notin D$，那么只需移除这样的 $u^{j'}$，并对每个这样的 $u^{j'} \in D \cap I$重复此操作，即可得到所需的集合。因此，存在 G 的一个余安全支配集 D'，使得 $|D' \cap I| = \emptyset$。现在，构造子集集合 S'，其中包含与 $D' \cap J$中的顶点相对应的子集。由于 D' 构成了 G的一个支配集，因此子集族 S' 构成了(A, S)的一个集合覆盖，其基数至多为 k。

□

至此，该结果的证明完成。 □

5 有界树宽图

在本节中，我们证明 Minimum Cosecure Domination 问题可以在线性时间内求解。首先，我们正式定义图的参数树宽。对于图 $G = (V, E)$，其树分解是一个二元组 (T, S)，其中 $T = (U, F)$ 是一棵树，而 $S = \{S_u \mid u \in U\}$ 是 V的一个子集集合，使得

- $\cup_{u\in U} S_u = V$,
- 对于每个 $xy \in E$，都存在 $u \in U$，使得 x，$y \in S_u$，并且
- 对于所有 $x \in V$，集合 $\{u \in U \mid x \in S_u\}$ 中的顶点构成 T的一棵子树。

图 G 的树分解（T，S）的宽度定义为 $\max\{|S_u| \mid u \in U\} - 1$。图 G 的树宽是其任意树分解的最小宽度。若一个图的树宽有界，则称其为有界树宽图。现在，我们证明余安全支配问题可以用 CMSOL 表述。

定理9。 对于图 $G = (V, E)$ 和正整数 k，*CSDD* 问题可以用 *CMSOL* 表述。

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 k 是一个正整数。表示存在一个基数至多为 k 的 G 的支配集 D 的 CMSOL 公式为:

$\text{Dom}(D) = (D \subseteq V) \wedge (|D| \leq k) \wedge ((\forall x \in V)(\exists y \in V)((y \in D) \wedge (x \in N[y]))$ 利用上述基数至多为 k的支配集的 CMSOL 公式 D，我们给出基数至多为 k 的 G 余安全支配集的 CMSOL 公式如下,

$$\text{CSDM}(D) = \text{支配}(D) \wedge ((\forall x \in \text{支配}(D))(\exists y \in V \setminus D)((y \in N(x)) \wedge \text{支配}((D \setminus \{x\}) \cup \{y\})))$$

因此，结论得证。 □

著名的 Courcelle定理 [6] 指出，任何能够表示为 CMSOL 公式的问题，都可以在线性时间内求解，前提是图具有有界树宽。由 Courcelle定理和上述定理可直接得出以下结果。

定理10。 对于有界树宽图，*CSDM*问题可以在线性时间内求解。

6 链图算法

本节介绍一种用于计算链图余安全支配数的高效算法。回顾一下，二部图 $G = (X, Y, E)$ 是一个链图，如果存在 $X \cup Y$ 的链序，例如 $\alpha = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n_2})$，使得$N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \cdots \subseteq N(x_{n_1})$ 且 $N(y_1) \supseteq N(y_2) \supseteq \cdots \supseteq N(y_{n_2})$。给定一个链图，其链序可以在线性时间内计算得到 [9]。

现在，我们定义 X 上的关系 R 如下：如果 $N(x_i) = N(x_j)$，则 x_i 和 x_j 相关。注意，R 是一个等价关系。假设 X_1、X_2、……、X_k 是基于关系 R 对 X 的划分。定义 $Y_1 = N(X_1)$，并且对于 $i = 2$、3、$\ldots k$，有 $Y_i = N(X_i) \setminus \cup_{j=1}^{i-1} N(X_j)$。于是，$Y_1$、$Y_2$、……、$Y_k$ 构成 Y 的一个划分。$X \cup Y$ 的这种划分 X_1、X_2、……、X_k、Y_1、Y_2、……、Y_k 称为 $X \cup Y$ 的适当有序链划分。注意，X（或 Y）的划分中集合的个数为 k。接下来，我们指出，G 的悬挂顶点集合包含于 $X_1 \cup Y_k$ 中。

在本节中，我们考虑一个链图 G，其具有 X_1、X_2、……、X_k 和 Y_1、Y_2、……、Y_k 的适当有序链划分，分别对应于 X 和 Y。对于 $i \in [k]$，令 $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}\}$和 $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ir}\}$。注意，当且仅当 G 是完全二部图时，$k = 1$。从现在起，我们假设 G 是一个满足 $k \geq 2$ 的链图。

在下面的引理中，我们证明：如果从X 中存在多个悬挂顶点，那么这些悬挂顶点必属于每个余安全支配集，而相应的支撑顶点不属于任何余安全支配集。注意，当从 Y 中存在多个悬挂顶点时，也有类似结论。当从 X 和Y中都存在多个悬挂顶点时，该结论也可以推广。

引理 7. 如果从 X 延伸出的悬挂顶点多于一个，那么每个 *CSDS* S 都包含 X_1，且不包含 y_{11}。

证明。 这一结论可由引理 2 直接推出。 □

现在，假设链图 G 中从 X 延伸出的悬挂顶点多于一个。在引理 8 中，我们证明 G 的余安全支配数等于 $G[X_1 \cup Y_1]$ 的余安全支配数与剩余图的余安全支配数之和。换言之，我们将证明 $G[X_1 \cup Y_1]$ 和剩余图的余安全支配数可以分别计算，二者之和即为 G 的余安全支配数。从 Y 延伸出的悬挂顶点多于一个时，也有类似的结果。

引理 8. 设 G 为一个链图，且从 X 延伸出的悬挂顶点多于一个。定义 $G_1 = G[X_1 \cup Y_1]$, $G_2 = G[\cup_{i=2}^{k} (X_i \cup Y_i)]$。那么， $\gamma_{cs}(G) = \gamma_{cs}(G_1) + \gamma_{cs}(G_2)$。

证明。 考虑一个链图 G，使得 $|X_1| \geq 2$ 和 $|Y_1| = 1$。假设 $G_1 = G[X_1 \cup Y_1]$, $G_2 = G[\cup_{i=2}^{k}(X_i \cup Y_i)]$。设 S_1 和 S_2 分别是 G_1 和 G_2 的最优余安全支配集。注意到 $S = S_1 \cup S_2$ 是 G的余安全支配集。因此， $\gamma_{cs}(G) \leq \gamma_{cs}(G_1) + \gamma_{cs}(G_2)$。

接下来，假设 S 是 G的最优余安全支配集。由于 y_{11} 是一个支撑顶点，且与 y_{11}相邻的悬挂顶点不止一个。根据引理 7， G 的每个余安全支配集都包含 X_1。因此， $X_1 \subseteq S$。注意到 $S_1 = X_1$构成 G_1的一个最优余安全支配集，因此， $\gamma_{cs}(G_1) = |X_1|$。设 $S_2 = S \setminus S_1$。显然， S_2 是 G_2的一个支配集。现在，若存在一个顶点 $v \in X \setminus X_1$，使得 y_{11} $S-$替换 v。我们声称，存在 $u \neq y_{11}$，使得 u $S-$替换 v。注意到$\cup_{i=2}^{j} Y_i \nsubseteq S$。为说明这一点，设 $\cup_{i=2}^{j} Y_j \subseteq S$，则 $S \setminus \{v\}$ 是 G的一个基数为 $|S| - 1$的 CSDS，这与矛盾。因此，存在 $u \in \cup_{i=2}^{j} Y_i$，使得 $u \neq y_{11}$ 且 $uS-$替换 v。注意到 u S_2-也替换 v。因此，S_2 是 G_2的余安全支配集。因此， $\gamma_{cs}(G) \geq \gamma_{cs}(G_1) + \gamma_{cs}(G_2)$。由此得证。

□

在链图 G中，如果 X 和 Y两者均有多于一个悬挂顶点，则根据引理 8，可直接得到， G 的余安全支配数等于 $G[X_1 \cup Y_1]$的余安全支配数、 $G[X_k \cup Y_k]$ 的余安全支配数与剩余图的余安全支配数之和。也就是说，令$G_1 = G[X_1 \cup Y_1]$、 $G_2 = G[\cup_{i=2}^{k-1}(X_i \cup Y_i)]$ 和 $G_3 = G[X_k \cup Y_k]$，则 $\gamma_{cs}(G) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{cs}(G_i)$。

现在，我们考虑一个具有 $|X| \geq 4$ 和 $|Y| \geq 4$的链图 G。在引理9中，我们给出了 G的余安全支配数的一个下界。

引理9。 设 G 是一个链图，满足 $|X| \geq 4$ 和 $|Y| \geq 4$。则， $\gamma_{cs}(G) \geq$ 4.

证明。考虑一个链图 G，满足 $|X| \geq 4$ 和 $|Y| \geq 4$。注意，$|S| \geq 3$，因为 $V(G)$ 的任意基数为二的子集都不能构成 G 的余安全支配集。现在，假设 S 是 G 的一个余安全支配集，满足 $|S| = 3$。不失一般性，假设 $|S \cap X| = 2$ 且 $|S \cap Y| = 1$。令 $S \cap Y = \{y\}$ 和 $x \in X$，使得 x 替换 y。这意味着 $S' = (S \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ 是 G 的一个支配集。现在，令 $x' \in X$，使得 $x' \neq x$ 和 $x' \notin S$。注意，集合 S' 中没有任何顶点支配 x'，这与假设矛盾。因此，不存在满足 $|S| = 3$ 的余安全支配集 S。所以，$|S| \geq 4$。结论得证。

□

在下一个引理中，我们考虑 G 是一个具有 $k = 2$ 的链图的情形，并确定所有可能情形下的余安全支配数。

引理10。设 G 是一个满足 $k = 2$的链图。那么，以下情形之一成立。

1. 如果 G 和 $|X| = 3$ 或 $|Y| = 3$中不存在悬挂顶点，则$\gamma_{cs}(G) = 3$；否则，$\gamma_{cs}(G) = 4$。*2.* 如果 X 或 Y 中存在多个悬挂顶点，或两者中均存在多个悬挂顶点。定义 $G_1 = G[X_1 \cup Y_1]$ 和 $G_2 = G[X_2 \cup Y_2]$。那么，$\gamma_{cs}(G) = \gamma_{cs}(G_1) + \gamma_{cs}(G_2)$。*3.* 如果 X 和 Y 中各自至多存在一个悬挂顶点。如果 $|X| = 2$ 或 $|Y| = 2$，则 $\gamma_{cs}(G) = 2$。如果 $|X| = 3$ 或 $|Y| = 3$，则 $\gamma_{cs}(G) = 3$；否则，$\gamma_{cs}(G) = 4$。

证明。考虑一个链图 G，使得 $k = 2$。

1. 假设 G 中不存在任何悬挂顶点。也就是说，$|X_2| \geq 2$ 和$|Y_1| \geq 2$。令 S 为 G的一个余安全支配集。注意到 $|S| \geq 3$。现在，令 $|X| = 3$ 或 $|Y| = 3$。不失一般性，我们可以假设 $|X| = 3$，这意味着 $|X_2| = 2$ 和 $|X_1| = 1$。考虑 $S' = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}\}$，那么显然$S'$ 是 G的一个支配集。由于 y_{11} 替换了 S'中的每个顶点，因此，S' 是 G 的一个余安全支配集，且 $|S'| = 3$。因此，$\gamma_{cs}(G) = 3$。接下来，假设 $|X| \geq 4$ 或 $|Y| \geq 4$。根据引理9，我们有 $|S| \geq 4$。考虑集合$S' = \{y_{11}, y_{12}, x_{21}, x_{22}\}$，那么显然，$S'$是 G的一个支配集。由于 x_{11}同时替换了 y_{11} 和 y_{12}；且 y_{21} 同时替换了 x_{21} 和 x_{22}。因此，S' 是 G 的一个余安全支配集，使得 $|S'| = 4$。因此，$\gamma_{cs}(G) = 4$。

2. 不失一般性，假设 G来自 X的悬挂顶点不止一个。也就是说，有 $|X_1| \geq 2$、$|Y_1| = 1$ 和 $|X_2| \geq 2$。设 $G_1 = G[X_1 \cup Y_1]$ 和$G_2 = G[X_2 \cup Y_2]$。那么，根据引理 8，$\gamma_{cs}(G) = \gamma_{cs}(G_1) + \gamma_{cs}(G_2)$。

3. 假设来自 X 和 Y 的悬挂顶点至多各有一个。首先，设来自 X 和 Y 的悬挂顶点各有一个。这意味着 $|X_1| = |Y_1| = |X_2| = |Y_2| = 1$ 和 $|X| = |Y| = 2$。那么，$S = Y$构成G的一个余安全支配集。由于 G 不是完全二部图，因此，S 是最优的，且 $\gamma_{cs}(G) = 2$。

现在，考虑 G中只有一个悬挂顶点 u 的情形。不失一般性，设 $u \in X$。这里，$|Y_1| = 1$、$|X_1| = 1$和 $|X_2| \geq 2$。若 $|Y| = 2$，则$S = Y$ 构成 G的一个余安全支配集。事实上，S 是 G 的一个最优余安全支配集，且 $\gamma_{cs}(G) = 2$。现在，若 $|X| = 3$ 或 $|Y| = 3$。首先，假设 $|X| = 3$。这意味着 $|X_2| = 2$。设 $S = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}\}$，那么显然，$S$ 是 G的一个支配集。由于 y_{11} 替代了 S的每个顶点，因此 S 是一个余安全

G 和 $|S|=3$的余安全支配集。因此， γ_{cs}（G） $=3$。 $|Y|=3$ 的情形可类似证明。现在，若 $|X|\geq 4$ 且 $|Y|\geq 4$。那么，利用引理9可得 $|S|\geq 4$。设 $S=\{y_{11},y_{21},x_{21},x_{22}\}$。显然， S是 G的一个支配集。由于 x_{11} 替代了y_{11}， x_{23} 替代了 y_{21}；且 y_{22} 同时替代了 x_{21} 和 x_{22}。因此， S 是 G的一个余安全支配集，此处 $|S|=4$。所以， γ_{cs}（G） $=4$。

接下来，假设 X 和 Y都没有悬挂顶点，即 $|Y_1|\geq 2$和 $|X_2|\geq 2$。因此， $|X|\geq 3$ 和 $|Y|\geq 3$。如果 $|X|=3$ 或 $|Y|=3$。不失一般性，假设 $|X|=3$。然后，利用前一种情况中的相同论证可得 $\gamma_{cs}(G)=3$。如果 $|X|\geq 4$ 和 $|Y|\geq 4$。那么，再次利用前一种情况中的相同论证可得 $\gamma_{cs}(G)=4$。

引理的证明至此完成。 □

从现在起，假设 G 是一个连通链图，且 $k\geq 3$。在下面的引理中，我们将考虑链图 G 没有悬挂顶点的情形，并给出 G的余安全支配数的精确值。

引理 11. 如果 G 是一个没有悬挂顶点的链图，那么 $\gamma_{cs}(G)=4$。

证明。考虑一个链图 G，使得 $|Y_1|\geq 2$ 和 $|X_k|\geq 2$。令 S 为一个最优余安全支配集。注意到 $|S|\geq 3$。由于 $|X|\geq 4$， $|Y|\geq 4$。因此，根据引理9，我们有 $|S|\geq 4$。现在，我们声称存在一个集合 S，使得 $|S|=4$。考虑集合 $S=\{y_{11},y_{12},x_{k1},x_{k2}\}$。注意到 S' 是 G的一个支配集。由于x_{11} 同时替代了 y_{11} 和 y_{12}；而 y_{k1} 同时替代了 x_{k1} 和 x_{k2}。因此， S' 是 G的一个余安全支配集，其中， $|S'|=4$。所以， $\gamma_{cs}(G)=4$。结论得证。 □

现在，我们假设在链图 G 中，从 X 和Y 各自引出的悬挂顶点至多有一个。在引理12中，我们给出了所有可能情况下 G 的余安全支配数的确切值。

引理12。 设 G 为链图， X 和 Y 中至多各有一个悬挂顶点。若 $|X|=3$ 或 $|Y|=3$，则 $\gamma_{cs}(G)=3$；否则， $\gamma_{cs}(G)=4$。

证明。首先，考虑图 G中不存在悬挂顶点的情形。然后，根据引理11，有 $\gamma_{cs}(G)=4$。现在，假设 X 和Y 中均有一个悬挂顶点。这意味着 $|X_1|=|Y_1|=|X_k|=|Y_k|=1$。若 $|X|=3$ 或 $|Y|=3$。不失一般性，设 $|X|=3$。令 $S=\{x_{11},x_{21},x_{31}\}$。显然， S 是 G 的支配集。由于 y_{31} 替换 x_{31}； y_{11} 替换 x_{11} 和 x_{21}。因此， S 是 G 的余安全支配集，且 $|S|=3$。所以， $\gamma_{cs}(G)=3$。若 $|X|\geq 4$ 和 $|Y|\geq 4$。则根据引理9，有 $|S|\geq 4$。考虑集合 $S=\{y_{11},y_{21},x_{(k-1)1},x_{k1}\}$，则 S 是 G的支配集。注意，若 $k=3$，则 $|X_2|\geq 2$ 和 $|Y_2|\geq 2$。若 $k=3$，则 x_{11} 替换 y_{11}， x_{22} 替换y_{21}， y_{22} 替换 x_{21}；且 y_{31} 替换 x_{31}。现在，假设 $k\geq 4$，则 x_{11} 同时替换 y_{11}， x_{21} 替换 y_{21}， $y_{(k-1)1}$ 替换$x_{(k-1)1}$；且 y_{k1} 替换 x_{k1}。因此， S 是 G 的余安全支配集，且 $|S|=4$。所以， $\gamma_{cs}(G)=4$。

接下来，假设 G 中只有一个悬挂顶点 u。不失一般性，令 $u\in X$。这里， $|Y_1|=1$、 $|X_1|=1$ 和 $|X_k|\geq 2$。如果 $|Y|=3$，那么， $S=\{y_{11},y_{21},y_{31}\}$ 构成一个余安全支配集。为说明这一点，首先注意到 S 是 G 的支配集。此外，由于 x_{11} 替代了 y_{11}，而 x_{k1} 替代了 y_{21} 和 y_{31}，因此， S 是一个余安全支配

集，它是 G 和 $|S|=3$ 的余安全支配集。因此，$\gamma_{cs}(G)=3$。现在，如果 $|Y|\geq 4$，那么利用引理9，我们有 $|S|\geq 4$。考虑集合 $S=\{y_{11},y_{21},x_{k1},x_{k2}\}$。显然，$S$ 是 G 的支配集。由于 x_{11} 同时替代了 y_{11}，x_{21} 同时替代了 y_{21}；并且 y_{k1} 同时替代了 x_{k1} 和 x_{k2}，因此，S 是 G 和 $|S|=4$ 的余安全支配集。因此，$\gamma_{cs}(G)=4$。由此，结果的证明完成。□

最后，我们假设 G 是一个链图，且从 X 或 Y（或两者）出发至少有两个悬挂顶点。在引理13中，我们给出一个表达式，用于确定所有可能情况下 G 的余安全支配数。

引理13。设 G 是一个具有 $k\geq 3$ 的链图。那么，

1. 如果从 X 出发的悬挂顶点多于一个，且从 Y 出发的悬挂顶点至多一个。定义 $G'=G[\cup_{i=2}^{k}(X_i\cup Y_i)]$。那么，$\gamma_{cs}(G)=|X_1|+\gamma_{cs}(G')$。*2.* 如果从 Y 出发的悬挂顶点多于一个，且从 X 出发的悬挂顶点至多一个。定义 $G'=G[\cup_{i=1}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$。那么，$\gamma_{cs}(G)=|Y_k|+\gamma_{cs}(G')$。*3.* 如果从 X 和 Y 两者出发的悬挂顶点都多于一个。$G'=G[\cup_{i=2}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$。那么，$\gamma_{cs}(G)=|X_1|+|Y_k|+\gamma_{cs}(G')$。

证明。考虑一个链图 G，使得 $k\geq 3$。

1. 令 $|X_1|\geq 2$ 和 $|Y_1|=1$。定义 $G_1=G[X_1\cup Y_1)]$ 和 $G'=G[\cup_{i=2}^{k}(X_i\cup Y_i)]$。根据引理 8，$\gamma_{cs}(G)=\gamma_{cs}(G_1)+\gamma_{cs}(G')$。由于 G_1 构成一个完全二部图，因此根据引理1可得 $\gamma_{cs}(G_1)=|X_1|$。因此，$\gamma_{cs}(G)=|X_1|+\gamma_{cs}(G')$。2. 假设 $|Y_k|\geq 2$ 和 $|X_k|=1$。定义 $G_1=G[X_k\cup Y_k)]$ 和 $G'=G[\cup_{i=1}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$。于是，根据引理 8，$\gamma_{cs}(G)=\gamma_{cs}(G_1)+\gamma_{cs}(G')$。由于 G_1 是一个完全二部图，因此根据引理1可得 $\gamma_{cs}(G_1)=|Y_k|$。因此，$\gamma_{cs}(G)=|Y_k|+\gamma_{cs}(G')$。3. 令 $|X_1|\geq 2$、$|Y_k|\geq 2$ 和 $|X_k|=|Y_1|=1$。定义 $G_1=G[X_1\cup Y_1)]$ 和$G_2=G[\cup_{i=2}^{k}(X_i\cup Y_i)]$。由于 $|X_1|\geq 2$ 和 $|Y_1|=1$，根据引理 8，$\gamma_{cs}(G)=\gamma_{cs}(G_1)+\gamma_{cs}(G_2)$。由于 G_1 构成一个完全二部图，因此根据引理1可得 $\gamma_{cs}(G_1)=|X_1|$。于是，$\gamma_{cs}(G)=|X_1|+\gamma_{cs}(G_2)$。现在，考虑链图 G_2，并定义 $G_3=G[X_k\cup Y_k)]$ 和 $G'=G[\cup_{i=2}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$。现在，$|Y_k|\geq 2$ 和 $|X_k|=1$，根据引理 8，$\gamma_{cs}(G_2)=\gamma_{cs}(G_3)+\gamma_{cs}(G')$。由于$G_3$ 是一个完全二部图，根据引理1可得 $\gamma_{cs}(G_3)=|Y_k|$。于是，$\gamma_{cs}(G_2)=|Y_k|+\gamma_{cs}(G')$。因此，$\gamma_{cs}(G)=|X_1|+\gamma_{cs}(G_2)$ 意味着 $\gamma_{cs}(G)=|X_1|+|Y_k|+\gamma_{cs}(G')$。

至此，结果的证明完成。□

在为连通链图设计算法之前，我们首先给出一个简单的算法，即**CSDN CB(**G，p，q**)**，用于计算完全二部图的余安全支配数。该算法基于引理1设计。算法**CSDN CB(**G，p，q**)**以一个完全二部图及其部集的基数，即满足 $p\leq q$ 的 p，q 作为输入，并返回 $\gamma_{cs}(G)$作为输出。

现在，基于上述引理，我们设计了一种递归算法，即**CSDN Chain(**G，k**)**，用于求链图的余安全支配数。该算法以具有适当有序链划分X_1，X_2，...，X_k和Y_1，Y_2，...，Y_k的连通链图 $G=(V,E)$作为输入，其中划分对应于 X和 Y。在执行该算法时，

Alg算法1: CSDN CB输入：完全二部图 $G = (X, Y, E)$，其中包含 $|X| \leq |Y|$ 以及两个整数 p, q，其中 $p = |X|$ 且 $q = |Y|$。输出：余安全支配数 $\gamma_{cs}(G)$。如果$(p = 1)$，则$\gamma_{cs}(G) = q$；返回 $\gamma_{cs}(G)$；如果$(p = 2)$，则$\gamma_{cs}(G) = 2$；返回 $\gamma_{cs}(G)$；如果$(p = 3)$，则$\gamma_{cs}(G) = 3$；返回 $\gamma_{cs}(G)$；如果$(p \geq 4)$，则$\gamma_{cs}(G) = 4$；返回 $\gamma_{cs}(G)$；

每当遇到完全二部图时，我们就调用算法 **CSDN CB**$(G,\ p,\ q)$。

设 G 是一个连通链图，X_1，X_2，$\ldots$，X_k 和 Y_1，Y_2，$\ldots$，Y_k 分别是 X 和 Y 的适当有序链划分。当 $k = 2$ 时，它构成了我们算法的基例。基例的正确性由引理10得出。接着，引理13帮助我们使用递归方法设计算法，并证明算法的正确性。现在，我们陈述本节的主要结果。以下定理的证明可直接由引理11、引理12和引理13结合得出。由于我们的算法 **CSDN Chain**$(G,\ k)$ 的运行时间为多项式，因此可以在多项式时间内计算连通链图的余安全支配数。

定理11. 设连通链图 $G = (X, Y, E)$ 具有适当有序链划分 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$，分别对应 X 和 Y。那么，G 的余安全支配数可在多项式时间内计算。

算法 2：CSDN Chain$(G,\ k)$

输入： 具有适当有序链划分的连通链图 $G=(V,\ E)$ $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ 的 X 和 Y。

输出： G 的余安全支配数，即 $\gamma_{cs}(G)$。

如果 $(k=2)$，**则**

- **如果** $(|Y_1|>1$ 和 $|X_2|>1)$，**则**
  - $X=X_1\cup X_2,\ \ Y=Y_1\cup Y_2$;
  - **如果** $(|X|=3$ 或 $|Y|=3)$ **则**
    - $\gamma_{cs}(G)=3$;
  - **else**
    - $\gamma_{cs}(G)=4$;
- **否则，如果** （（$|X_1|>1$ 且 $|Y_1|=1$）或 （$|X_2|=1$ 且 $|Y_2|>1$））**则**
  - 令 $G_1=G[X_1\cup Y_1]$ 且 $G_2=G[X_2\cup Y_2]$;
  - 令 $p_1=\min\{|X_1|,|Y_1|\}$, $q_1=\max\{|X_1|,|Y_1|\}$, $p_2=\min\{|X_2|,|Y_2|\}$ 和 $q_2=\max\{|X_2|,|Y_2|\}$;
  - $\gamma_{cs}(G)=$**CSDN_CB**$(G_1,\ p_1,\ q_1)+$**CSDN_CB**$(G_2,\ p_2,\ q_2)$；
- **否则，如果** （（$|X_1|=|Y_1|=1$）或 （$|X_2|=|Y_2|=1$））**则**
  - **如果** $(|X|=2$ 或 $|Y|=2)$ **则**
    - $\gamma_{cs}(G)=2$;
  - **否则如果** $(|X|=3$ 或 $|Y|=3)$ **则**
    - $\gamma_{cs}(G)=3$;
  - **否则如果** $(|X|\geq 4$ 且 $|Y|\geq 4)$ **则**
    - $\gamma_{cs}(G)=4$;

如果 $(k\geq 3)$ **则**

- **如果** $(|Y_1|>1$ 且 $|X_k|>1)$ **则**
  - $\gamma_{cs}(G)=4$;
- **否则，如果** $((|X_1|>1$ 且 $|Y_1|=1)$ 且 $(|Y_k|>1$ 且 $|X_k|=1))$ **则**
  - 令 $G'=G[\cup_{i=2}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$;
  - $\gamma_{cs}(G)=|X_1|+|Y_k|+$CSDN_Chain$(G',\ k-2)$;
- **否则，如果** $(|X_1|>1$ 且 $|Y_1|=1)$ **则**
  - 令 $G'=G[\cup_{i=2}^{k}(X_i\cup Y_i)]$;
  - $\gamma_{cs}(G)=|X_1|+$CSDN_Chain$(G',\ k-1)$;
- **否则，如果** $(|Y_k|>1$ 且 $|X_k|=1)$ **则**
  - 令 $G'=G[\cup_{i=1}^{k-1}(X_i\cup Y_i)]$;
  - $\gamma_{cs}(G)=|Y_k|+$CSDN_Chain$(G', k-1)$;
- **else**
  - **如果** $(|X|=3$ 或 $|Y|=3)$ **则**
    - $\gamma_{cs}(G)=3$;
  - **else**
    - $\gamma_{cs}(G)=4$;

返回 $\gamma_{cs}(G)$;

7 结论

我们确定了 Minimum Cosecure Domination 问题在若干重要图类上的复杂性，包括链图、弦二部图、星凸二部图、梳凸二部图和有界树宽图。已知 Cosecure Domination Decision 问题在二部图上是 NP 完全的。在此基础上，我们证明，即使将问题限制在星凸二部图、梳凸二部图和弦二部图上，它仍然是 NP 完全的，而这些图类都是二部图的子类。此外，我们证明了该问题在双弦图上是 NP 完全的。另一方面，我们证明了 Minimum Cosecure Domination 问题在链图和有界树宽图上可以高效求解。自然地，研究 Minimum Cosecure Domination 问题在其他许多重要图类上的复杂性也很有意义；目前，该问题在这些图类上的复杂性仍未解决。

参考文献

[1] Toru Araki 和 Ryo Yamanaka。余图中的安全支配。离散应用数学，262:179–184，2019年。[2] S. Arumugam、Karam Ebadi 和 Mart´ín Manrique。图中的共安全支配与安全支配。实用数学，94:167–182，2014年。[3] Alan A. Bertossi。分裂图和二部图的支配集。信息处理快报，19(1):37–40，1984年。[4] Houcine Boumediene Merouane 和 Mustapha Chellali。关于图中的安全支配。信息处理快报，115(10):786–790，2015年。[5] E. J. Cockayne、P. J. P. Grobler、W. R. Gr¨undlingh、J. Munganga 和 J. H. van Vuuren。图的保护。实用数学，67:19–32，2005年。[6] Bruno Courcelle。图的单子二阶逻辑。I. 有限图的可识别集合。信息与计算，85(1):12–75，1990年。[7] Teresa W. Haynes、Stephen T. Hedetniemi 和 Michael A. Henning，编。图支配专题，《数学发展》第64卷。施普林格，查姆，2020年。[8] Teresa W. Haynes、Stephen T. Hedetniemi 和 Michael A. Henning，编。图支配结构，《数学发展》第66卷。施普林格，查姆，2021年。[9] Pinar Heggernes 和 Dieter Kratsch。线性时间认证识别算法与禁诱导子图。北欧计算机杂志，14(1-2):87–108（2008），2007年。[10] Wei Jiang、Tian Liu、Tienan Ren 和 Ke Xu。关于反馈顶点集的两个困难性结果。载于*FAW-AAIM*，第233–243页。施普林格，2011年。

[11] Aleena Joseph 和 V Sangeetha。图中共安全支配的界。数学趋势与技术国际期刊，55(2):158–164，2018年。[12] Richard M. Karp。组合问题之间的可约性。载于计算机计算的复杂性（研讨会论文集，*IBM Thomas J. Watson* 研究中心，约克镇高地，纽约州，*1972*年），第85–103页。普伦，纽约，1972年。[13] J. Mark Keil。圆图中支配问题的复杂性。离散应用数学，42(1):51–63，1993年。[14] Ton Kloks 和 Arti Pandey。AT-自由图和圆图上的半全支配。载于算法与离散应用数学，计算机科学讲义第12601卷，第55–65页。施普林格，查姆， [2021] ©2021年。[15] William F. Klostermeyer 和 Christina M. Mynhardt。图中的安全支配与安全全支配。离散数学：图论，28(2):267–284，2008年。[16] Kusum 和 Arti Pandey。图中余安全支配的复杂性结果。载于算法与离散应用数学会议，第335–347页。施普林格，2023年。[17] P. Manjusha 和 M. R. Chithra。Mycielski 图中的共安全支配。组合数学与组合计算杂志，113:289–297，2020年。[18] M. Moscarini。双弦图、施泰纳树与连通支配。《网络》，23(1):59–69，1993年。[19] Haiko M¨uller 和 Andreas Brandst¨adt。弦二部图上的施泰纳树和支配集问题的NP完全性。理论计算机科学，53(2-3):257–265，1987年。[20] Haichao Wang、Yancai Zhao 和 Yunping Deng。图中安全支配问题的复杂性。离散数学：图论，38(2):385–396，2018年。[21] Douglas Brent West 等。《图论导论》，第2卷。普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河镇，2001年。[22] Yun-Hao Zou、Jia-Jie Liu、Shun-Chieh Chang 和 Chiun-Chieh Hsu。真区间图中的共安全支配。离散应用数学，311:68–71，2022年。