狄拉克直角三角形的谱不等式

Tuyen Vu

布拉格捷克技术大学核科学与物理工程学院数学系，Trojanova 13, 12000 布拉格 2，
捷克。电子邮箱：thibichtuyen.vu@fjfi.cvut.cz。

2023年2月25日

摘要

我们研究满足无限质量边界条件的直角三角形上的狄拉克算子。我们猜想，在面积约束或周长约束下，最低正特征值均由等腰直角三角形取得最小值。借助 Ph. Briet 和 D. Krejčiřík 针对狄拉克矩形 [2] 提出的一种近期方法，我们在附加几何假设下证明了这一猜想。

arXiv:2302.13040v1 [math.SP] 25 Feb 2023

1 引言

谱几何中最有趣的主题之一，是在各种边界条件和几何约束下，确定微分算子特征值的最优形状。最经典且广为人知的情形，或许是带有狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子：

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \Lambda\psi & \text{in} \quad \Omega\,, \\ \psi = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是一个有限测度的开集。著名的法贝尔-克拉恩不等式表明，在所有给定体积的集合中，最低特征值 $\Lambda_1 = \Lambda_1(\Omega)$ 由球达到最小。根据经典的等周不等式可知，在周长约束下，球同样是使其最小的集合。球的最优性可以推广到排斥性罗宾边界条件，但对于吸引性罗宾边界条件 [14, 4]，这一结论通常并不成立。对于更高阶特征值，球通常也不是最优形状。从数学上看，球的最优性与对称化技术的可用性密切相关。关于这一引人入胜的谱优化主题的最新综述，可参阅专著 [15, 16] 。

通过对称化论证，对于给定面积或周长的所有三角形（分别为四边形），狄利克雷特征值 Λ_1 也在等边三角形（分别为正方形）上取得最小值。一般多边形的类似问题仍未解决，综述及最新进展分别见 [15, 第 3.3 节 3] 和 [12, 17] 。一般而言，罗宾边界条件下的问题也仍未解决，即使对于三角形也是如此 [19]。另一方面，矩形（或更一般地说，长方体）作为四边形的一种特殊情形，得益于变量分离所带来的显式解，可以解决这一问题 [20]。

在二维情形下，Λ_1 的经典物理解释是边缘固定的振动膜的基频平方。或者，Λ_1 也可以表示受硬墙边界约束、局限于形状为 Ω 的半导体纳米结构中的非相对论量子粒子的基态能量。本文关注的是相对论情形下上述谱优化问题的对应问题。

式 (1) 的相对论类比（例如与石墨烯材料相关）是狄拉克算子在无限质量（也称 MIT）边界条件 [10, 6, 21, 7, 8, 5]下的谱问题。更具体地说，给定 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开利普希茨集合 Ω，相对论量子哈密顿量的作用形式为

$$T := \begin{pmatrix} m & -i(\partial_1 - i\partial_2) \\ -i(\partial_1 + i\partial_2) & -m \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)\,, \tag{2}$$

而边界条件则由算子定义域编码

$$\mathsf{D}(T) := \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C}^2) : \ \psi_2 = i(n_1 + in_2)\psi_1 \text{ on } \partial\Omega \right\}. \tag{3}$$

这里，符号 m 和 $n = \binom{n_1}{n_2} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ 分别表示相对论（准）粒子的非负质量和集合 Ω 的外向单位法向量。算子 T 是自伴的，至少当边界 $\partial\Omega$ 是 C^2-光滑的 [10] 或 Ω 是多边形时如此 [21]（对于一般的利普希茨集合，可在 $W^{1/2,\,2}$ 情形下实现自伴性 [9]）。与相对论量子力学中的通常情况一样，T 的谱没有下界。不过，当 Ω 有界时，其谱纯离散，且特征值关于实轴对称分布。因此，T 的最低正特征值$\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ 可通过变分法刻画：

$$\lambda_1(\Omega)^2 = \inf_{\substack{\psi \in \mathsf{D}(T) \\ \psi \neq 0}} \frac{\|T\psi\|^2}{\|\psi\|^2}. \tag{4}$$

需要强调的是，由于边界条件较为特殊、希尔伯特空间具有旋量结构，且缺乏保正性，目前还没有可用的对称化技术。

类比于法贝尔-克拉恩不等式，我们自然会期待在相对论情形下成立以下猜想。

猜想1. 给定任意 $m \geq 0$ 和开利普希茨集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

其中 Ω^* 是与 Ω面积或周长相同的圆盘。

对于无质量粒子（即 $m = 0$），猜想中固定面积的部分已在 [3]中明确提出。当前的一般性表述见 [2]。在 2019 [23], 该猜想的证明被列为谱几何领域的一项棘手公开问题，地点为美国圣何塞的 AIM研讨会。不幸的是，尽管已有一些部分尝试 [11, 22, 3], ，包括数值支持，该问题仍未解决。

由于一般情形下问题十分复杂， [2] 的作者研究了该猜想的矩形版本。更具体地说， [2]猜想：在所有面积或周长固定的矩形中，正方形使 λ_1 达到最小值。令人意外的是，即使这一简化情形也尚未解决， [2] 的作者仅在一些额外假设下（大致而言，即质量较大或矩形偏心时）证明了该猜想。问题在于，无限质量边界条件不允许变量分离。

本文继续这项研究，探讨在面积或周长约束下，等腰直角三角形是否都是所有直角三角形中的最优几何形状。更具体地说，设 $\Omega_{a,\,b}$为 $\mathbb{R}^2$ 中由以下三个顶点 $O := (0,\ 0)$、 $A := (a,\ 0)$和 $B := (0,\ b)$所确定的直角三角形，其中 $a,\ b$为任意正数，见图1。注意，面积和周长分别为 $\frac{1}{2}ab$和 $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$。定义 $\lambda_1(a,\ b) := \lambda_1(\Omega_{a,\,b})$。

猜想 2. 任取 $m \geq 0$,

(i) $\lambda_1(a, b) \geq \lambda_1(k, k)$ 其中 $a, b, k > 0$ 任意，且满足 $ab = k^2$,

(ii) $\lambda_1(a,b) \geq \lambda_1(k, k)$ 其中 $a \in (0, (2+\sqrt{2})k]$且 $b, k > 0$ 任意，满足 $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = (2+\sqrt{2})\,k$.

我们尚未能在完全一般的情形下证明该猜想。为遵循 [2]，得到部分结果，我们首先给出 $\lambda_1(a, b)$ 的普适下界和上界。

定理 1. 对于每个 $m \geq 0$，都有

$$\frac{\arctan^2\left(\frac{a}{b} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\right)}{b^2} + \frac{\arctan^2\left(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\right)}{a^2} \ \leq \ \lambda_1(a,b)^2 - m^2 \ \leq \ \frac{5\pi^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

注意，当 $m \to \infty$ 趋于 $a = b$时，上界变得尖锐。事实上，已知$\lambda_1(\Omega)^2 - m^2$ 收敛到狄利克雷特征值 $\Lambda_1(\Omega)$，当 $m \to \infty$时（例如，参见 [6]），并且 $\Lambda_1(a,\ a) = 5\pi^2/a^2$。与 [2], 中的算子的一维谱不同，本文中的谱并不对称。与 [2], 中一样，上界是通过在 (4) 中使用一个合适的试探函数得到的。下界则利用了区间上一维狄拉克问题的 Poincar´e 型不等式。后者给出一个依赖于m的（隐式）下界，而定理 1 的下界则源自对一维问题中最接近零的特征值的（显式）一致估计。

因此，我们得到以下充分条件，以保证猜想 2 成立。

推论 1. 设 k 如猜想 *2* 中所定义，且 $m \geq 0$。在以下附加假设下，
猜想 *2.(i)* 成立：

$$a \geq 9\,k \quad or \quad a \leq \tfrac{k}{9},$$

在以下附加假设下，猜想 *2.(ii)* 成立：

$$a \geq 3.5\,k \quad or \quad a \leq \tfrac{k}{9}.$$

换言之，对于偏心率足够大的直角三角形，猜想 2 成立。

本文结构如下。第 2 节推导三角形中狄拉克算子平方的期望值公式。该公式为定理 1 的证明奠定基础。第 3 节建立一维 Poincar´e 型不等式。第 4 节证明主要结果。附录 A 给出了将狄拉克算子平方的期望值公式推广到平面多边形的结果。

2 多边形中狄拉克算子的平方

回顾一下，我们的直角三角形 $\Omega_{a,b}$ 是一个特殊的平面多边形，由三个顶点 $O := (0,0)$、$A := (a,0)$ 和 $B := (0,b)$ 确定。

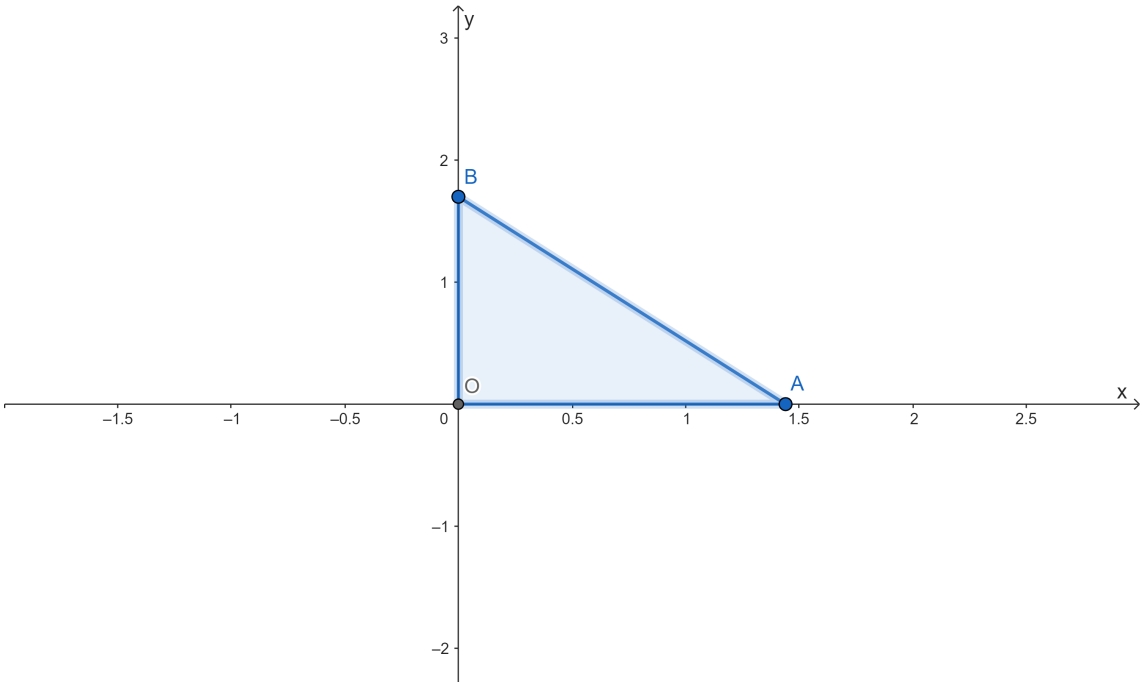

图1：直角三角形 OAB。

设 $T_{a,b}$ 表示三角形 $\Omega_{a,b}$情形下的算子 (2)–(3)。该算子是自伴的，且具有紧预解式。特征值问题 $T_{a,b}u = \lambda u$ 等价于以下系统

$$\begin{cases} -i(\partial_1 - i\partial_2)u_2 = (\lambda - m)u_1 & \text{in} \quad \Omega_{a,b}\,, \\ -i(\partial_1 + i\partial_2)u_1 = (\lambda + m)u_2 & \text{in} \quad \Omega_{a,b}\,, \\ u_2 = u_1 & \text{on} \quad OA\,, \\ u_2 = -iu_1 & \text{on} \quad OB\,, \\ u_2 = \left(\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) u_1 & \text{on} \quad AB\,. \end{cases} \tag{5}$$

$T_{a,b}$ 的谱关于零对称。事实上，当且仅当 $\left(\begin{smallmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{u}_1\end{smallmatrix}\right)$ 是 $T_{a,b}$ 对应于特征值 $-\lambda$ 的特征函数时，$u = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\ u_2\end{smallmatrix}\right)$ 才是 $T_{a,b}$ 对应于特征值 λ 的特征函数（电荷共轭对称性）。稍后将会 स्पष्ट地看到，方程（5）的任何解都必然满足 $|\lambda| \geq m$。我们的目标是研究方程（5）的最小正解，即 $\lambda_1(a,\ b)$。

由于矩形的类似情形无法通过变量分离求解 [2], ，因此似乎没有希望得到方程（5）的显式解。作为一种替代方法，我们着重研究变分刻画（4）。为此，我们需要关于平方范数 $\|T_{a,b}u\|^2 = (u,\ T_{a,b}^2 u)$ 的一个更合适的公式。如果 Ω 是一个光滑有界区域，则有（参见 例如， [6]）

$$\|Tu\|^2 = \|\nabla u\|^2 + m^2\|u\|^2 + m\,\|\gamma u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \kappa\,|\gamma u|^2 ds \tag{6}$$

对于每个 $u \in \mathsf{D}(T)$，其中 κ 是边界 $\partial\Omega$ 的有向曲率（约定 $\kappa < 0$若 Ω 为凸集），而 $\gamma\colon\ W^{1,2}(\Omega;\ \mathbb{C}^2) \to L^2(\partial\Omega;\ \mathbb{C}^2)$ 是边界迹算子。从形式上看，只需展开 $\|(\partial_1 + i\partial_2)u_1\|^2$ 和 $\|(\partial_1 - i\partial_2)u_2\|^2$ 并进行分部积分即可轻易得到这一点。为了证明这种方法的合理性，需要 u 具有额外的正则性。这显然并非易事，因为对于三角形而言，曲率分片为零，但在顶点处没有定义。

要为三角形证明有用公式 (6) 的类似结果，我们的主要工具是以下稠密性结果。其思想和证明归功于 D. Krejčiřík [18]。

引理 1. 设 Ω 为任意一个顶点集为 V 的二维多边形。那么

$$\mathcal{D} := \mathsf{D}(T) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{V\})$$

是 T 的核心。

证明. 显然，只需考虑无质量情形 $m = 0$。此外，由单位分解可知，只需考虑扇形区域 $\Omega := \{(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\colon\ r \in (0,\ \infty)\ \ \theta \in (0,\ \alpha)\}$ with $\alpha \in (0,\ 2\pi)$。记 $\partial_\theta\Omega := \{(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\colon\ r \in (0,\ \infty)\}$。考虑狄拉克算子 (2)–(3)（其中 $m = 0$），它包含无限质量边界条件

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \qquad \text{on} \quad \partial_0\Omega\,, \\ u_2 &= e^{-i\alpha}u_1 \quad \text{on} \quad \partial_\alpha\Omega\,, \end{aligned} \tag{7}$$

在 $W^{1,2}(\Omega;\ \mathbb{C}^2) \ni u = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\ u_2\end{smallmatrix}\right)$ 中以迹的意义成立。更具体地说，$\mathsf{D}(T) = \left\{u \in W^{1,2}(\Omega;\ \mathbb{C}^2)\colon (7)\ \text{holds}\right\}$。关键的观察是，函数

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= u_2 - u_1\,, \\ \psi_2 &:= u_2 - e^{-i\alpha}u_1\,, \end{aligned}$$

分别在 $\partial_\beta\Omega$ 和 $\partial_\alpha\Omega$ 上满足狄利克雷边界条件。逆公式为

$$\begin{aligned} u_1 &:= \frac{1}{e^{-i\alpha}-1}\,(\psi_1 - \psi_2)\,, \\ u_2 &:= \frac{1}{e^{-i\alpha}-1}\,(e^{-i\alpha}\psi_1 - \psi_2)\,. \end{aligned}$$

步骤 1：有界函数逼近

对于任意函数 $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$，定义垂直截断

$$\phi^N(x) := \begin{cases} N & \text{if} \quad \phi(x) > N\,, \\ \phi(x) & \text{if} \quad |\phi(x)| \le N\,, \\ -N & \text{if} \quad \phi(x) < -N\,. \end{cases}$$

根据定义，$\|\phi^N\|_{L^\infty(\Omega)} \le N$。如果 $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$，则有

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi^N\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} &= \int_\Omega |\phi - \phi^N|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\phi - \nabla\phi^N|^2\,dx \\ &= \int_{\{|\phi|>N\}} |\phi - N|^2\,dx + \int_{\{|\phi|>N\}} |\nabla\phi|^2\,dx \\ &\le \int_{\{|\phi|>N\}} 4\,|\phi(x)|^2\,dx + \int_{\{|\phi|>N\}} |\nabla\phi(x)|^2\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

因此，$\phi^N \to \phi$ 属于 $W^{1,2}(\Omega)$，且 $N \to \infty$。

在我们的情形中，如果 $u \in \mathsf{D}(T)$，我们令

$$\psi^N := \begin{pmatrix} (\Re\psi_1)^N + i(\Im\psi_1)^N \\ (\Re\psi_2)^N + i(\Im\psi_2)^N \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad u^N := \frac{1}{e^{-i\alpha}-1}\begin{pmatrix} \psi_1^N - \psi_2^N \\ e^{-i\alpha}\psi_1^N - \psi_2^N \end{pmatrix}.$$

那么 $u^N \in \mathsf{D}(T) \cap L^\infty(\Omega;\ \mathbb{C}^2)$，并且

$$\begin{aligned} \|u^N - u\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^2)} &= \frac{1}{|e^{-i\alpha}-1|^2}\|\psi_1 - \psi_1^N + \psi_2 - \psi_2^N\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{|e^{-i\alpha}-1|^2}\|e^{-i\alpha}(\psi_1 - \psi_1^N) + \psi_2 - \psi_2^N\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\le \frac{2}{|e^{-i\alpha}-1|^2}(\|\psi_1 - \psi_1^N\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\psi_2 - \psi_2^N\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

因此，$u^N \to u$ 属于 $W^{1,2}(\Omega;\ \mathbb{C}^2)$，且 $N \to \infty$。于是，

$$\mathcal{D}_1 := \mathsf{D}(T) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{C}^2) \text{ is a core of } T.$$

步骤 2：用紧支撑函数逼近

考虑截断序列 $\xi_n\colon\ [0,\infty) \to [0,1]$，对每个 $n \ge 2$ 定义如下：

$$\xi_n(r) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad r \in [0, n^{-2})\,, \\ \dfrac{\log(n^2 r)}{\log(n)} & \text{if} \quad r \in [n^{-2}, n^{-1})\,, \\ 1 & \text{if} \quad r \in [n^{-1}, n)\,, \\ \dfrac{\log(n^{-2} r)}{\log(n^{-1})} & \text{if} \quad r \in [n, n^2)\,, \\ 0 & \text{if} \quad r \in [n^2, \infty)\,. \end{cases}$$

对每个 $u \in \mathcal{D}_1$，定义 $u_n(x) := \xi_n(|x|)u(x)$。显然，$u_n \in L^\infty_0(\Omega;\mathbb{C}^2)$，这意味着 u_n有界，并且在 0 的某个邻域以及无穷远处的某个邻域内均为零。此外，$u_n \in \mathsf{D}(H)$。

由于当 $n \to \infty$ 时 $\xi_n \to 1$ 逐点成立，根据控制收敛定理，易见当 $n \to \infty$ 时，$u_n \to u$ 在 $L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)$ 中成立。记

$$\int_{\Omega\cap\{|x|\ge 1\}} |\nabla(u_n - u)|^2 \le 2\int_{\Omega\cap\{|x|\ge 1\}} (\xi_n - 1)^2\,|\nabla u|^2 + 2\int_{\Omega\cap\{|x|\ge 1\}} |\nabla\xi_n|^2\,|u|^2\,,$$

我们看到，右侧第一项如上所述，由于控制收敛定理，当 $n \to \infty$ 时趋于零。对于第二项，我们估计

$$\int_{\Omega\cap\{|x|\geq 1\}} |\nabla \xi_n|^2 \, |u|^2 \leq \|u\|^2_{L^\infty(\Omega;\mathbb{C}^2)} \int_{\Omega\cap\{|x|\geq 1\}} |\nabla \xi_n|^2$$

并使用极坐标控制最后一个积分，如下所示：

$$\int_{\Omega\cap\{|x|\geq 1\}} |\nabla \xi_n|^2 = 2\pi \int_n^{n^2} \frac{1}{r^2 \log^2(n)} \, r \, \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{\log(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, .$$

以类似的方式，我们验证

$$\int_{\Omega\cap\{|x|\leq 1\}} |\nabla (u_n - u)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, .$$

因此，

$$\mathcal{D}_2 := \mathsf{D}(T) \cap L^\infty_0(\Omega;\mathbb{C}^2) \text{ is a core of } T.$$

步骤 3：光滑函数逼近

设 $u \in \mathcal{D}_2$。那么函数 $\psi := u_2 - e^{-i\theta} u_1$ 是良定义的，其中 $\theta(x)$ 是$[0,\alpha]$ 中的唯一数，满足 $x_1 = |x|\cos[\theta(x)]$ 且 $x_2 = |x| \sin[\theta(x)]$，对每个 $x \in \Omega$ 均成立。由于 ψ 在 $\partial\Omega$ 上消失，存在一个序列 $\{\psi^j\} \subset C^\infty_0(\Omega)$，使得当 $j \to \infty$ 时，$\psi^j \to \psi$ 在 $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^2)$ 中。

由于 Ω 满足线段条件，还存在一个序列 $\{u_1^j\} \subset C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$，使得当 $j \to \infty$ 时，$u_1^j \to u_1$在 $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^2)$ 中。由于 u_1 在零点的某个邻域内消失，因此可以选择该序列使其属于 $C^\infty_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$。

定义 $u_2^j := \psi^j + e^{-i\theta} u_1^j \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$。于是 $u_2^j \to u_2$属于 $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}^2)$，其中 $j \to \infty$。此外 u^j 满足 r, (7)。因此，

$$\mathcal{D} = \mathsf{D}(T) \cap L^\infty_0(\Omega;\mathbb{C}^2) \cap C^\infty_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \text{ is a core of } T. \tag{8}$$

引理的证明至此完成。 □

作为一个特殊推论，可以通过分部积分显式计算$T_{a,b}u$ 的范数。形式上，对于具有 $\kappa = 0$ 的光滑区域，该结果与公式 (6) 一致。

定理 2。对于每个 $u \in \mathsf{D}(T_{a,b})$，

$$\|T_{a,b}u\|^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})} + m^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})} + m \, \|\gamma u\|^2_{L^2(\partial\Omega_{a,b})}. \tag{9}$$

证明。 根据引理 (1)，对于 $\mathsf{D}(H_{a,b})$ 中的每个 $u = \binom{u_1}{u_2}$，存在一个序列

$\{u_n = \binom{u_{1n}}{u_{2n}}\}$ 属于 $\mathcal{D}$，使得 $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ 属于 $H^1(\Omega_{a,b})$。利用分部积分，我们计算得：

$$
\begin{aligned}
&\|T_{a,b}u_n\|^2 \\
&= \|mu_{1n} - i(\partial_1 - i\partial_2)u_{2n}\|^2 + \|mu_{2n} + i(\partial_1 + i\partial_2)u_{1n}\|^2 \\
&= m^2\|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 - 2m\Re(u_{1n}, i(\partial_1 - i\partial_2)u_{2n}) \\
&\quad + 2m\Re(u_{2n}, i(\partial_1 + i\partial_2)u_{1n}) - 2\Re(\partial_1 u_{2n}, i\partial_2 u_{2n}) + 2\Re(\partial_1 u_{1n}, i\partial_2 u_{1n}) \\
&= m^2\|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 + 2m\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(0,x_2)u_{2n}(0,x_2)\,dx_2 \\
&\quad - 2m\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)u_{2n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)\,dx_2 \\
&\quad + 2m\Re\int_0^a \bar{u}_{1n}(x_1,0)u_{2n}(x_1,0)\,dx_1 \\
&\quad - 2m\Re\int_0^a \bar{u}_{1n}(x_1, -\frac{b}{a}x_1 + b)u_{2n}(x_1, -\frac{b}{a}x_1 + b)\,dx_1 \\
&\quad - 2\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(0,x_2)\partial_2 u_{1n}(0,x_2)\,dx_2 + 2\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)\partial_2 u_{1n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)\,dx_2 \\
&\quad + 2\Re\int_0^a i\bar{u}_{1n}(x_1,0)\partial_2 u_{1n}(x_1,0)\,dx_1 - 2\Re\int_0^a i\bar{u}_{1n}(-\frac{b}{a}x_1 + b, x_1)\partial_2 u_{1n}(x_1, -\frac{b}{a}x_1 + b)\,dx_1 \\
&\quad + 2\Re\int_0^b i\bar{u}_{2n}(0,x_2)\partial_2 u_{2n}(0,x_2)\,dx_2 - 2\Re\int_0^b i\bar{u}_{2n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)\partial_2 u_{2n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)\,dx_2 \\
&\quad - 2\Re\int_0^a i\bar{u}_{2n}(x_1,0)\partial_2 u_{2n}(x_1,0)\,dx_1 + 2\Re\int_0^a i\bar{u}_{2n}(-\frac{b}{a}x_1 + b, x_1)\partial_2 u_{2n}(x_1, -\frac{b}{a}x_1 + b)\,dx_1.
\end{aligned}
$$

代入边界条件后，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^b i\bar{u}_{1n}(0,x_2)u_{2n}(0,x_2)dx_2 &= \int_0^b |u_{1n}(0,x_2)|^2 dx_2 = \|u_{1n}\|_{OB}^2 = \frac{1}{2}\|u_n\|_{OB}^2\,, \\
\int_0^a \bar{u}_{1n}(x_1,0)u_{2n}(x_1,0)dx_1 &= \int_0^b |u_{1n}(x_1,0)|^2 dx_1 = \|u_{1n}\|_{OA}^2 = \frac{1}{2}\|u_n\|_{OA}^2\,, \\
\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)u_{2n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)dx_2 &= \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^b |u_{1n}(-\frac{a}{b}x_2 + a, x_2)|^2 dx_2 \\
&= \frac{-b^2}{a^2+b^2}\|u_{1n}\|_{AB}^2 = \frac{1}{2}\frac{-b^2}{a^2+b^2}\|u_n\|_{AB}^2\,, \\
\Re\int_0^a i\bar{u}_{1n}(-\frac{b}{a}x_1 + b, x_1)u_{2n}(-\frac{b}{a}x_1 + b, x_1)dx_1 &= \frac{-a^2}{a^2+b^2}\|u_{1n}\|_{AB}^2 = \frac{1}{2}\frac{-a^2}{a^2+b^2}\|u_n\|_{AB}^2\,.
\end{aligned}
$$

此外，利用边界条件，在三角形的边上进行分部积分，并结合逼近序列在顶点附近为零这一事实，可得

$$
\begin{aligned}
&\Re\int_0^b i\bar{u}_{2n}(0,x_2)\partial_2 u_{2n}(0,x_2)dx_2 \\
&= \Re\int_0^b -\bar{u}_{1n}(0,x_2)\partial_2 u_{2n}(0,x_2)dx_2 \\
&= \Re\int_0^b \partial_2\bar{u}_{1n}(0,x_2)u_{2n}(0,x_2)dx_2 + \bar{u}_{1n}(0,0)u_{2n}(0,0) - \bar{u}_{1n}(0,b)u_{2n}(0,b) \\
&= \Re\int_0^b \partial_2\bar{u}_{1n}(0,x_2)u_{2n}(0,x_2)dx_2 \\
&= \Re\int_0^b -i\partial_2\bar{u}_{1n}(0,x_2)u_{1n}(0,x_2)dx_2 \\
&= \Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(0,x_2)\partial_2 u_{1n}(0,x_2)dx_2\,.
\end{aligned}
$$

通过类似的处理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Re\int_0^b i\bar{u}_{1n}(-\frac{a}{b}x_2+a,x_2)\partial_2 u_{1n}(-\frac{a}{b}x_2+a,x_2)\,dx_2\\
&\qquad\qquad=\Re\int_0^b i\bar{u}_{2n}(-\frac{a}{b}x_2+a,x_2)\partial_2 u_{2n}(-\frac{a}{b}x_2+a,x_2)\,dx_2\,,\\
&\Re\int_0^a i\bar{u}_{1n}(x_1,0)\partial_2 u_{1n}(x_1,0)\,dx_1\\
&\qquad\qquad=\Re\int_0^a i\bar{u}_{2n}(x_1,0)\partial_2 u_{2n}(x_1,0)\,dx_1\,,\\
&\Re\int_0^a i\bar{u}_{1n}(-\frac{b}{a}x_1+b,x_1)\partial_2 u_{1n}(x_1,-\frac{b}{a}x_1+b)\,dx_1\\
&\qquad\qquad=\Re\int_0^a i\bar{u}_{2n}(-\frac{b}{a}x_1+b,x_1)\partial_2 u_{2n}(x_1,-\frac{b}{a}x_1+b)\,dx_1\,,
\end{aligned}$$

将这些恒等式合并起来，我们得到公式

$$\|T_{a,b}u_n\|^2=\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})}+m^2\|u_n\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})}+m\,\|\gamma u_n\|^2_{L^2(\partial\Omega_{a,b})}$$

对所有 $u_n\in\mathcal{D}$ 均成立。取 $n\to\infty$，即可得到所需结果。 □

注记 1 . 应用类似的论证，我们可以证明公式（9）对任意平面多边形均成立（见附录 A）。

3 一维狄拉克算子s

为后续讨论，给定任意 $m\geq 0$ 以及任意正数 a， b 和 L，我们来考虑一维狄拉克算子

$$\begin{aligned}
H_{Lm}&:=\begin{pmatrix}-i\partial & -m\\ -m & i\partial\end{pmatrix}\qquad\text{in}\qquad L^2\left((0,L);\mathbb{C}^2\right),\\
\mathsf{D}(H_{Lm})&:=\left\{\varphi\in W^{1,2}\left((0,L);\mathbb{C}^2\right),\ \varphi_2(L)=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\varphi_1(L)\,,\varphi_2(0)=\varphi_1(0)\right\}.
\end{aligned}\tag{10}$$

命题 1. 算子 H_{Lm} 是自伴的。

证明. 我们遵循 [13, 附录 A]。由于乘以 $\left(\begin{smallmatrix}0 & -m\\ -m & 0\end{smallmatrix}\right)$ 在 $L^2((0,\ L);\mathbb{C}^2)$ 上生成一个有界自伴算子，因此只需证明 H_{L0} 的自伴性。为此，我们从伴随算子的定义开始

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(H^*_{L0})=\Big\{u\in L^2\big((0,L);\mathbb{C}^2\big):\exists w\in L^2\big((0,L);\mathbb{C}^2\big)\text{ such that }\forall v\in\mathsf{D}(H_{L0}),\\
(u,H_{L0}v)_{L^2((0,L);\mathbb{C}^2)}=(w,v)_{L^2((0,L);\mathbb{C}^2)}\Big\}.
\end{aligned}$$

对于每个 $v\in C_0^\infty\big((0,L);\mathbb{C}^2\big)$ 以及 $u\in\mathsf{D}(H^*_{L0})$，均有

$$\begin{aligned}
(H^*_{L0}u,v)_{L^2((0,L);\mathbb{C}^2)}=(u,H_{L0}v)_{L^2((0,L);\mathbb{C}^2)}&=(u_1,-iv_1')_{L^2((0,L);\mathbb{C})}+(u_2,iv_2')_{L^2((0,L);\mathbb{C})}\\
&=\left\langle\left(\begin{smallmatrix}u_1\\ u_2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-iv_1'\\ iv_2'\end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\
&=\left\langle\left(\begin{smallmatrix}-iu_1'\\ iu_2'\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}v_1\\ v_2\end{smallmatrix}\right)\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},
\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ 是分布的对偶配对。特别地，我们知道 $H_{L0}^*u = \begin{pmatrix} -iu_1' \\ iu_2' \end{pmatrix} \in L^2\big((0,L);\mathbb{C}^2\big)$，因此得到 $u \in H^1\big((0,L);\mathbb{C}^2\big)$。此外，若 $v \in \mathsf{D}(H_{L0})$，则有

$$\begin{aligned}(H_{L0}^*u, v)_{L^2((0,L);\mathbb{C}^2)} &= (u_1, -iv_1')_{L^2((0,L);\mathbb{C})} + (u_2, iv_2')_{L^2((0,L);\mathbb{C})} \\ &= (-iu_1', v_1)_{L^2((0,L);\mathbb{C})} + (iu_2, v_2')_{L^2((0,L);\mathbb{C})} + i\overline{u_2}v_2|_0^L - i\overline{u_1}v_1|_0^L \\ &= (-iu_1', v_1)_{L^2((0,L);\mathbb{C})} + (iu_2, v_2')_{L^2((0,L);\mathbb{C})} \\ &\quad + iv_1(L)[\overline{u_2}(L)\left(\frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \overline{u_1(L)}] + iv_1(0)[\overline{u_1(0)} - \overline{u_2(0)}].\end{aligned}$$

由于这对任意的 $v \in \mathsf{D}(H_{L0})$ 都成立，我们得到 $u \in \mathsf{D}(H_{L0})$，也就是说 $\mathsf{D}(H_{L0}) = \mathsf{D}(H_{L0}^*)$。 □

借助紧嵌入 $H^1((0,L);\mathbb{C}^2)$ 到 $L^2((0,L);\mathbb{C}^2)$，并且由于 $\mathsf{D}(H_{Lm})$ 连续嵌入于 $H^1((0,L);\mathbb{C}^2)$，我们由此推得自伴算子 H_{Lm} 的谱 $\mathsf{Sp}(H_{Lm})$ 是纯离散的。下面我们计算其特征值。

首先，我们注意到任意特征值 $\lambda \in \mathsf{Sp}(H_{Lm})$ 必然满足 $\lambda^2 > m^2$。事实上，通过计算算子的平方范数

$$\begin{aligned}\|H_{Lm}u\|^2 &= \|iu_1' + mu_2\|^2 + \|iu_2' - mu_1\|^2 \\ &= \|u'\|^2 + 2\Re m(iu_1', u_2) - 2\Re m(u_1, iu_2') + m^2\|u\|^2 \\ &= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 + 2\Re m\int_0^L \overline{iu_1'}u_2 - 2\Re m\int_0^L \overline{u_1}iu_2' \\ &= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 - 2\Re mi\overline{u_1}u_2|_0^L \\ &= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 + m\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}|u(L)|^2 \geq m^2\|u\|^2,\end{aligned} \tag{11}$$

我们立即得到 $\lambda^2 \geq m^2$。这个不等式实际上是严格的，因为 $\lambda^2 = m^2$ 会意味着 u 是常数，这不可能，除非 $u = 0$。

L令 $\lambda \in \mathsf{Sp}(H_{Lm})$，并令 $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathsf{D}(H_{Lm})$ 为相应的特征函数。它满足 s

$$\left\{\begin{array}{rcl} -iu_1' - mu_2 &=& \lambda u_1\,, \\ iu_2' - mu_1 &=& \lambda u_2\,, \end{array}\right. \tag{12}$$

或者等价地

$$\left\{\begin{array}{rcl} -mu_2 &=& iu_1' + \lambda u_1\,, \\ mu_1 &=& iu_2' - \lambda u_2\,. \end{array}\right. \tag{13}$$

求导方程 对方程 (12) 两边求导，并与方程 (13) 联立，可得微分 r-
各分量必须分别满足

$$-u_1'' = (\lambda^2 - m^2)u_1\,, \qquad -u_2'' = (\lambda^2 - m^2)u_2\,.$$

令 $E := \lambda^2 - m^2 > 0$，通解为

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1(x) &=& C_1\cos\sqrt{E}x + C_2\sin\sqrt{E}x\,, \\ u_2(x) &=& \tilde{C}_1\cos\sqrt{E}x + \tilde{C}_2\sin\sqrt{E}x\,, \end{array}\right. \tag{14}$$

˜ ˜其中 C_1, C_2, C_1, C_2 均为复常数。边界条件 $u_2(0) = u_1(0)$ 直接推出 $C_1 = C_1$。将 u 的这一表达式代入（12），得

$$\begin{aligned}&-iC_1\sqrt{E}\sin\sqrt{E}x + iC_2\sqrt{E}\cos\sqrt{E}x + mC_1\cos\sqrt{E}x + m\tilde{C}_2\sin\sqrt{E}x = -\lambda(C_1\cos\sqrt{E}x + C_2\sin\sqrt{E}x), \\ &-iC_1\sqrt{E}\sin\sqrt{E}x + i\tilde{C}_2\sqrt{E}\cos\sqrt{E}x - mC_1\cos\sqrt{E}x - mC_2\sin\sqrt{E}x = \lambda(C_1\cos\sqrt{E}x + \tilde{C}_2\sin\sqrt{E}x).\end{aligned}$$

由这些等式可得

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_2 &=& \frac{i(\lambda+m)}{\sqrt{E}}C_1\,, \\ \tilde{C}_2 &=& \frac{i(-\lambda-m)}{\sqrt{E}}C_1 \end{array}\right.$$

令 $M := \frac{\lambda+m}{\sqrt{E}} \neq 0$，则可得

$$\begin{cases} u_1(x) &= C_1 \cos\sqrt{E}x + iMC_1 \sin\sqrt{E}x\,, \\ u_2(x) &= C_1 \cos\sqrt{E}x - iMC_1 \sin\sqrt{E}x\,, \end{cases} \tag{15}$$

为非零复常数。边界条件 $u_2(L) = \left(\frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) u_1(L)$ 要求

其中 C_1 b s

$$\frac{C_1 \cos\sqrt{E}L - iMC_1 \sin\sqrt{E}L}{C_1 \cos\sqrt{E}L + iMC_1 \sin\sqrt{E}L} = \frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

这等价于

$$\frac{\cos^2\sqrt{E}L - M^2\sin^2\sqrt{E}L - iM\sin 2\sqrt{E}L}{\cos^2\sqrt{E}L + M^2\sin^2\sqrt{E}L} = \frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

分别考虑实部和虚部，可得等价的方程组

$$\begin{cases} \frac{\cos^2\sqrt{E}L - M^2\sin^2\sqrt{E}L}{\cos^2\sqrt{E}L + M^2\sin^2\sqrt{E}L} &= \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \\ \frac{M\sin 2\sqrt{E}L}{\cos^2\sqrt{E}L + M^2\sin^2\sqrt{E}L} &= \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases}$$

由第二个方程可推知 $M\sin 2\sqrt{E}L < 0$，因此 $\cos\sqrt{E}L$ 不可能等于零。令 $z := M\tan\sqrt{E}L < 0$，并将这些方程左侧分式的分子和分母同时除以 $\cos^2\sqrt{E}L$，得到

$$\begin{cases} \frac{1-z^2}{1+z^2} &= \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \\ \frac{2z}{1+z^2} &= \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases}$$

因此，z 满足方程

$$\frac{1-z^2}{2z} = \frac{a}{b}\,.$$

由于 z 是二次方程 $z^2 + 2\frac{a}{b}z - 1 = 0$ 的负解，因此有

$$z = z_0 := -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} \leq 0.$$

总之，λ 的特征值 H_{Lm} 满足隐式方程

$$\frac{\lambda+m}{\sqrt{\lambda^2-m^2}}\tan\sqrt{\lambda^2-m^2}L - z_0 = 0. \tag{16}$$

由公式 (11) 可得

$$\|H_{Lm}u\|^2 - m^2\|u\|^2 \geq \|u'\|^2 = \|H_{L0}u\|^2$$

对于所有 $u \in \mathrm{D}(H_{Lm}) = \mathrm{D}(H_{L0})$。令 $\lambda_1 = \lambda_1(m)$ 为 H_{Lm} 最接近零的特征值，并设 $E_1(m) := \lambda_1(m)^2 - m^2$。因此，

$$E_1(m) = \lambda_1(m)^2 - m^2 \geq \lambda_1(0)^2 = E_1(0)$$

对于每个 $m \geq 0$。当 $m = 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &-\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} = -\tan\sqrt{E_1(0)}L \\ &\iff \tan\sqrt{E_1(0)}L = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} > 1 \\ &\implies \sqrt{E_1(0)}L = \arctan(-z_0) > \frac{\pi}{4} \\ &\implies \lambda_1^2(m) - m^2 \geq \lambda_1^2(0) = \frac{\arctan|z_0|^2}{L^2} > \frac{\pi^2}{16L^2}\,. \end{aligned}$$

应用与 (4) 类似的变分表述以及一个酉等价，我们刚刚证明了以下 Poincaŕe 型不等式。

引理 2. 对于每个 $\phi \in \mathsf{D}(H_{Lm})$,

$$\|\phi'\|^2 + m\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}|\phi(L)|^2 \geq (\lambda_1^2 - m^2)\|\phi\|^2 \geq \frac{\arctan^2(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1})}{L^2}\|\phi\|^2 .$$

与 H_{Lm} 同时，我们也考虑算子 G_{Lm}，其作用方式为 H_{Lm}，但定义域不同:

$$\mathsf{D}(G_{Lm}) := \left\{ \varphi \in W^{1,2}\left((0,L);\mathbb{C}^2\right),\ \varphi_2(L) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\varphi_1(L)\,, \varphi_2(0) = -i\varphi_1(0) \right\} .$$

采用类似的方法，我们得到 G_{Lm} 是自伴的，且其谱是纯离散的。我们计算该算子的平方范数

$$\begin{aligned}
\|G_{Lm}u\|^2 &= \|iu_1' + mu_2\|^2 + \|iu_2' - mu_1\|^2 \\
&= \|u'\|^2 + 2\Re m(iu_1', u_2) - 2\Re m(u_1, iu_2') + m^2\|u\|^2 \\
&= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 + 2\Re m\int_0^L \overline{iu_1'}u_2 - 2\Re m\int_0^L \overline{u_1}iu_2' \\
&= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 - 2\Re m i\,\overline{u_1}u_2|_0^L \\
&= \|u'\|^2 + m^2\|u\|^2 + m\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}|u(L)|^2 + m|u(0)|^2 \geq m^2\|u\|^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

因此，若 $\eta \in \in \mathsf{Sp}(G_{Lm})$，则对每个 $m \geq 0$，都有 $|\eta| > m$。令 $v = (v_1,\ v_2)^\top \in \mathsf{D}(G_{Lm})$ 为对应的特征函数。于是

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -iv_1' - mv_2 &=& \eta v_1\,, \\ iv_2' - mv_1 &=& \eta v_2\,, \end{array} \right. \tag{18}$$

或者等价地

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -mv_2 &=& iv_1' + \eta v_1\,, \\ mv_1 &=& iv_2' - \eta v_2\,. \end{array} \right. \tag{19}$$

微分对方程（18）两边求导，并结合方程（19），我们得到

$$-v_1'' = (\eta^2 - m^2)v_1\,, \qquad -v_2'' = (\eta^2 - m^2)v_2\,.$$

令 $F := \eta^2 - m^2 > 0$，通解为

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1(x) &=& D_1\cos\sqrt{F}x + D_2\sin\sqrt{F}x\,, \\ v_2(x) &=& \tilde{D}_1\cos\sqrt{F}x + \tilde{D}_2\sin\sqrt{F}x\,. \end{array} \right. \tag{20}$$

˜边界条件 $u_2(0) = -iu_1(0)$ 直接推出 $D_1 = -iD_1$。将 u 的这一表达式代入 (18)，得到

$$\begin{aligned}
&-iD_1\sqrt{F}\sin\sqrt{F}x + iD_2\sqrt{F}\cos\sqrt{F}x + m(-iD_1\cos\sqrt{F}x + \tilde{D}_2\sin\sqrt{F}x) = -\eta(D_1\cos\sqrt{F}x + D_2\sin\sqrt{F}x), \\
&-D_1\sqrt{F}\sin\sqrt{F}x \mp i\tilde{D}_2\sqrt{F}\cos\sqrt{F}x = mD_1\cos\sqrt{F}x = mD_2\sin\sqrt{F}x \equiv \eta(-iD_1\cos\sqrt{F}x \mp \tilde{D}_2\sin\sqrt{F}x).
\end{aligned}$$

由这些等式可得

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_2 &=& \frac{(i\eta+m)}{\sqrt{F}}D_1\,, \\ \tilde{D}_2 &=& \frac{-(\eta+im)}{\sqrt{F}}D_1\,. \end{array} \right.$$

因此

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1(x) &=& D_1\cos\sqrt{F}x + \frac{(i\eta+m)}{\sqrt{F}}D_1\sin\sqrt{F}x\,, \\ v_2(x) &=& -iD_1\cos\sqrt{F}x + \frac{-(\eta+im)}{\sqrt{F}}D_1\sin\sqrt{F}x\,, \end{array} \right. \tag{21}$$

其中 D_1 是一个非零复常数。由边界条件 $u_2(L) = \left(\frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)u_1(L)$，我们推得 $v_1(L) \neq 0$ 和

$$\frac{\cos\sqrt{F}L + \frac{(-i\eta+m)}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L}{\cos\sqrt{F}L + \frac{(i\eta+m)}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L} = i\frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

这等价于

$$\frac{\cos\sqrt{F}L+\frac{m}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L-\frac{i\eta}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L}{\cos\sqrt{F}L+\frac{i\eta}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L}=\frac{-ai-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

令 $A:=\cos\sqrt{F}L+\frac{m}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L$ 且 $B:=\frac{\eta}{\sqrt{F}}\sin\sqrt{F}L$, 则它等价于以下方程组

$$\begin{cases}\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} &= \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\\ \frac{2AB}{A^2+B^2} &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>0\,.\end{cases}$$

这意味着 $\frac{A}{B}=\frac{-b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}$, 因此

$$\frac{\sqrt{F}}{\eta}\cot\sqrt{F}L+\frac{m}{\eta}=\frac{-b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}:=\alpha_0>0.$$

或者，等价地,

$$f(\eta):=\sqrt{F}\cot\sqrt{F}L+m-\alpha_0\eta=0, \tag{22}$$

其中 f定义在 $(-\infty,-m)\cup(m,\infty)$ 上。我们计算极限

$$\lim_{\eta\to-m}f(\eta)=\frac{1}{L}+m+\alpha_0 m>0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{\eta\to-\sqrt{m^2+\frac{\pi^2}{L^2}}}f(\eta)=-\infty.$$

根据方程 (22) 左侧的连续性，我们得到当$\sqrt{F}L\in(0,\pi)$ 时它总有解，因此我们将研究范围限制在此区间内，以考察最接近零的特征值 η_1的性质。若 $\eta<0$，则 $\sqrt{F}\cot\sqrt{F}L+m<0$，从而 $\cot\sqrt{F}L<0$ 且 $\sqrt{F}L\in(\frac{\pi}{2},\pi)$。由方程 (22)，我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt{F}\cot\sqrt{F}L+m=\alpha_0\eta\\ &\Longrightarrow -\alpha_0\eta=-\sqrt{F}\cot\sqrt{F}L-m<\frac{F}{\pi-\sqrt{F}L}-m\\ &\Longrightarrow \alpha_0<\frac{-\eta}{m}\alpha_0<\frac{F}{(\pi-\sqrt{F}L)m}-1\\ &\Longrightarrow m(\alpha_0+1)<\frac{F}{\pi-\sqrt{F}L}\\ &\Longrightarrow \sqrt{F}>\frac{\pi}{(m\alpha_0+m)^{-1}+L}\,.\end{aligned}$$

若 $\eta\geq 0$，根据隐式方程，我们还可得到

$$\eta'(m)=\frac{m(\sin 2\sqrt{F}L-2L\sqrt{F})-2\sqrt{F}\sin^2\sqrt{F}L}{\eta(\sin 2\sqrt{F}L-2L\sqrt{F})-2\alpha_0^2\sqrt{F}\sin^2\sqrt{F}L}>0\,,$$

$$(\eta^2-m^2)'=\frac{4(\eta-m\alpha_0)\sqrt{F}\sin^2\sqrt{F}L}{\eta(-\sin 2\sqrt{E}L+2\sqrt{F}L)+2\alpha_0^2\sqrt{F}\sin^2\sqrt{F}L}>0.$$

这表明 η^2-m^2 关于 m 是严格递增函数，但由于 G_{Lm} 的谱不对称，我们无法给出 $\eta_1^2-m^2$ 的依赖于 m 的下界。

由算子 (17) 的平方范数可推出， $\eta_1^2-m^2$ 是非递减函数，且取值范围为 $(\frac{\pi^2}{16L^2},\ \frac{\pi^2}{L^2})$，因此，$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{|\eta_1|}=1$。我们有 $\{\eta_1^2-m^2\}_{m\geq 0}$ 是非递减数列，且一致有界，因此存在

$$\lim_{m\to\infty}\eta_1^2-m^2\leq\frac{\pi^2}{L^2}.$$

将极限$\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{F}}{\eta_1}=0$，$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\eta_1}$为有限值的条件代入隐式方程 (22)，可得 $\sqrt{F}L\in(\frac{\pi}{4},\ \pi)$。这意味着 $\lim_{m\to\infty}\cot\sqrt{F}L$ 必须等于负无穷，因此我们有 $\sqrt{F}L\longrightarrow\pi$。由此，$m\to\infty$

$\eta_1^2 - m^2 \to \frac{\pi^2}{L^2}$，即狄利克雷拉普拉斯算子的第一个特征值。综上，我们得到了下界

$$\lambda_1^2(m) - m^2 \geq \lambda^2(0) = \frac{\arctan^2(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}})}{L^2} > \frac{\pi^2}{16L^2}\,.$$

由此得到以下 Poincar´e 型不等式。

引理 3. 对于每个 $\phi \in \mathsf{D}(G_{Lm})$，都有

$$\|\phi'\|^2 + m\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}|\phi(L)|^2 + m|u(0)|^2 \geq (\lambda_1^2 - m^2)\|\phi\|^2 \geq \frac{\arctan^2(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}})}{L^2}\|\phi\|^2 > \frac{\pi^2}{16L^2}\|\phi\|^2\,.$$

注 2. 当 $\sqrt{F_1}L = \frac{\pi}{2}$ 关于 $m = m_0$ 时，隐式方程 (22) 变为

$$0 + m_0 = \eta\alpha_0,$$

因此 $\eta_1^2 = \frac{m_0^2}{\alpha_0^2}$ 且 $\eta_1^2 - m_0^2 = (\frac{1}{\alpha_0^2} - 1)m_0^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}$。这意味着 $m_0 = \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}}$。对于每个 $m \leq m_0$，则 $\sqrt{F_1}L \leq \frac{\pi}{2}$ 且 $\cot\sqrt{F_1}L \geq 0$。结合方程 (22)，我们推得 $\eta_1\alpha_0 - m \geq 0$，从而得到另一个下界

$$F_1 = \eta_1^2 - m^2 \geq (\frac{1}{\alpha_0^2} - 1)m^2.$$

注 3. 我们可以用酉等价算子 $\tilde{H}_{Lm}$ 替换 H_{Lm}：$= v^*\tilde{G}_{Lm}v$，其中 v：$= \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，˜，其中 G_{Lm} 的作用与 G_{Lm} 相同，但定义域不同：

$$\mathsf{D}(\tilde{G}_{Lm}) := \left\{\varphi \in W^{1,2}\left((0,L);\mathbb{C}^2\right),\ \varphi_2(L) = \left(\frac{ai}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\varphi_1(L)\,, \varphi_2(0) = -i\varphi_1(0)\right\}.$$

˜因此，$\mathsf{D}(H_{Lm})$ =$\mathsf{D}(H_{Lm})$ 和 H_{Lm} 与 G_{Lm}具有相同的谱，后者由以下方程定义

$$\sqrt{F}\cot\sqrt{F}L + m = \eta(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) = \eta|z_0|.$$

4 谱等周不等式

现在我们可以证明定理 1。

定理 *1* 的证明。回顾公式(4)，算子 $T_{a,b}$ 的第一个正平方特征值可通过以下方式计算

$$\lambda_1(a,b)^2 = \inf_{\substack{\psi \in \mathsf{D}(T_{a,b}) \\ \psi \neq 0}} \frac{\|\hat{T}_{a,b}\psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

with

$$\|T_{a,b}\psi\|^2 = \|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})} + m^2\|\psi\|^2_{L^2(\Omega_{a,b})} + m\,\|\gamma\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega_{a,b})}$$

由定理 (2) 得到。因此我们有

$$\lambda_{a,b}^2 - m^2 = \inf_{\substack{\psi \in \mathsf{D}(T_{a,b}) \\ \psi \neq 0}} \frac{\|\partial_1\psi\|^2 + \|\partial_2\psi\|^2 + m\|\gamma u\|^2_{OA} + m\|\gamma u\|^2_{OB} + m\|\gamma u\|^2_{AB}}{\|\psi\|^2}. \tag{23}$$

结合 Fubini定理和引理 2，我们有

$$\begin{aligned}
&\|\partial_1\psi\|^2+\|\partial_2\psi\|^2+m\|\gamma u\|_{OA}^2+m\|\gamma u\|_{OB}^2+m\|\gamma u\|_{AB}^2\\
&\qquad=\int_0^a\int_0^{\frac{-bx}{a}+b}|\partial_2\psi(x,y)|^2+m|u(x,0)|^2+m|u(x,\frac{-bx}{a}+b)|^2dy\,dx\\
&\qquad\quad+\int_0^b\int_0^{\frac{-ay}{b}+a}|\partial_1\psi(x,y)|^2+m|u(0,y)|^2+m|u(\frac{-ay}{b}+a,y)|^2dx\,dy\\
&\qquad\geq\int_0^a\int_0^{\frac{-bx}{a}+b}\frac{\arctan^2(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}})}{(\frac{-bx}{a}+b)^2}|\psi(x,y)|^2dy\,dx\\
&\qquad\quad+\int_0^b\int_0^{\frac{-ay}{b}+a}\frac{\arctan^2(\frac{a}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}})}{(\frac{-ay}{b}+a)^2}|\psi(x,y)|^2dx\,dy\,,\\
&\qquad\geq\Big(\frac{\arctan^2(\frac{a}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}})}{b^2}+\frac{\arctan^2(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}})}{a^2}\Big)\|\psi\|^2.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\lambda_1(a,b)^2-m^2\geq\Big(\frac{\arctan^2(\frac{a}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}})}{b^2}+\frac{\arctan^2(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}})}{a^2}\Big)>\frac{\pi^2}{16a^2}+\frac{\pi^2}{16b^2}.$$

这就完成了定理 1 下界的证明。

上　　界可通过使用直角三角形上狄利克雷拉普拉斯算子的特征函数得到
n- gle Ω[1,(第 4 节3]

$$\psi_o(x,y):=[\sin(2\pi x)\sin(\pi y)+\sin(2\pi y)\sin(\pi x)]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

将其作为式 (23) 中的试探函数。计算瑞利商的值后，得到

$$\lambda_1(a,b)^2-m^2\leq\frac{5\pi^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

定理 1 的证明至此完成。 □

最后，我们证明推论 1。

推论 *1* 的证明。通过缩放，不妨设面积的两倍等于 1，且周长等于 $2+\sqrt{2}$。这些值分别对应于情形 $k=1$ 中等腰直角三角形的面积和周长。

对于面积约束 $ab=1$，我们取 $b:=1/a$。利用定理 1，我们有 $\lambda_{1,\,1}-m^2\leq 5\pi^2$。如果一条边长 a 恰好满足条件

$$\frac{1}{a^2}+a^2\geq 80,$$

那么在所有直角三角形 $\Omega_{a,\,b}$中，猜想 2 都成立。不难看出，当 $a\geq 9$ 或$a\leq\frac{1}{9}$ 时，该条件成立。由此证明了猜想 2 (i)。

对于周长约束，我们取 $b:=2+\sqrt{2}-a$ 并将范围限制在 $a\in(0,2+\sqrt{2})$。按照与上述类似的论证，我们得到充分条件

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2+\sqrt{2}-a)^2}\geq 80$$

得到所需的不等式 $\lambda_1(a,\ b)\geq\lambda_1(1,\ 1)$。不难看出，只要满足 $a\geq 3.5$ 或 $a\leq\frac{1}{9}$，该不等式就成立。这就证明了猜想 2（ii）。

Mo此外，不借助缩放，我们可以推得 when

$$\frac{\arctan^2(\frac{a}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}})}{b^2}+\frac{\arctan^2(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}})}{a^2}\geq\frac{5\pi^2}{k^2}$$

此时，猜想 2 的 (i) 和 (ii) 成立。 □

注记 4. 考虑到注记 (2)，我们选择

$$m=m_0(L=a)=\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}}$$

于是 $\lambda_1^2(a,b)-m_0^2\geq\frac{\pi^2}{4a^2}+\frac{\pi^2}{16b^2}$。由 $F_1(m)$ 的单调不减性质，我们得到

$$\lambda_1^2(a,b)-m^2\geq\frac{\pi^2}{4a^2}+\frac{\pi^2}{16b^2}$$

对所有 $m\geq\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}}$ 均成立。这给出了更好的下界估计。

由注记 (4) 可直接得到以下推论，它扩展了猜想 2 成立时边长 a 的取值范围。

推论 2. 设 k 如猜想 *2* 中所定义，且 $m\geq\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}}$。

猜想 *2.(i)* 在以下附加假设下成立：

$$a\geq 9\,k\quad or\quad a\leq\tfrac{k}{5},$$

猜想 *2.(ii)* 在以下附加假设下成立：

$$a\geq 3.5\,k\quad or\quad a\leq\tfrac{k}{5}.$$

注记 1 的证明

本节给出注记 1 的证明，将公式（9）的适用范围扩展到多边形。我们考虑一个坐标为 $A:=(a,0)$ $B:=(b,c)$ $C:=(c_1,c_2)$ $D:=(d_1,d_2)$ 的多边形 $OBCDA$，见图 2。不失一般性，我们可以假设 $0<b<a<c_1<d_1$。一般多边形的证明与此情形相同。将多边形划分为三角形是完成证明的关键步骤。

定理 3。

$$\|Tu\|^2=\|\nabla u\|^2_{L^2(OBCDA)}+m^2\|u\|^2_{L^2(OBCDA)}+m\,\|\gamma u\|^2_{L^2(\partial(OBCDA))}.$$

证明。 利用分部积分以及定理 2 中描述的稠密性论证，我们计算每个划分后三角形上的范数 $\|Tu\|^2$。首先，我们在三角形 OAB 上应用

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^2&=\|mu_1-i(\partial_1-i\partial_2)u_2\|^2+\|i(\partial_1+i\partial_2)u_1+mu_2\|^2\\
&=m^2\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-2\Re(\partial_1u_2,i\partial_2u_2)+2\Re(\partial_1u_1,i\partial_2u_1)\\
&\quad-2m\Re(u_1,i(\partial_1-i\partial_2)u_2)-2mi\Re((\partial_1+i\partial_2)u_1,u_2)\\
&=m^2\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-2\Re(\partial_1u_2,i\partial_2u_2)+2\Re(\partial_1u_1,i\partial_2u_1)\\
&\quad-2\Re mi\int_0^c\overline{u_1}u_2|_{x=\frac{b}{c}y}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a}dy-2\Re m\int_0^b\overline{u_1}u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx}{b}}dx-2\Re m\int_b^a\overline{u_1}u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx-ac}{b-a}}dx\\
&=m^2\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-2\Re(\partial_1u_2,i\partial_2u_2)+2\Re(\partial_1u_1,i\partial_2u_1)+m\|u\|^2_{OA}+m\|u\|^2_{OB}\\
&\quad-2\Re mi\int_0^c\overline{u_1}u_2|_{x=\frac{y(b-a)}{c}+a}dy-2\Re m\int_b^a\overline{u_1}u_2|_{y=\frac{cx-ac}{b-a}}dx\\
&=m^2\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-2\Re(\partial_1u_2,i\partial_2u_2)+2\Re(\partial_1u_1,i\partial_2u_1)+m\|u\|^2_{OA}+m\|u\|^2_{OB}\\
&\quad+\int_{AB}-2m\Re i\,n_{1_{AB}}\overline{u_1}u_2-2m\Re\,n_{2_{AB}}\overline{u_1}u_2.
\end{aligned}$$

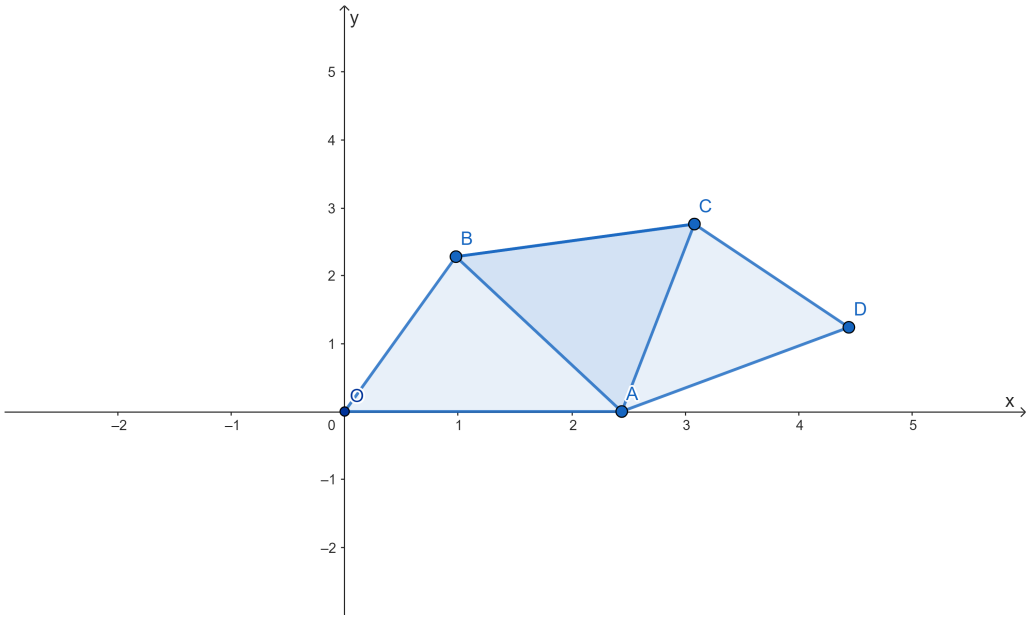

图 2：五边形 $OBCDA$。

令 $I_1 := -2\Re(\partial_1 u_2,\ i\partial_2 u_2)$ 和 $I_2 := 2\Re(\partial_1 u_1,\ i\partial_2 u_1)$，我们得到

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\Re(u_2, i\partial_1\partial_2 u_2) - 2\Re\int_0^c \overline{u_2} i\partial_2 u_2|_{x=\frac{by}{c}}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dy \\
&= -2\Re(\partial_2 u_2, i\partial_1 u_2) - 2\Re\int_0^c \overline{u_2} i\partial_2 u_2|_{x=\frac{by}{c}}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dx \\
&\quad + 2\Re\int_0^b \overline{u_2} i\partial_1 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx}{b}} dx + 2\Re\int_b^a \overline{u_2} i\partial_2 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx-ac}{b-a}} dx \\
&= -I_1 - 2\Re\int_0^c \overline{u_2} i\partial_2 u_2|_{x=\frac{by}{c}}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dx \\
&\quad + 2\Re\int_0^b \overline{u_2} i\partial_1 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx}{b}} dx + 2\Re\int_b^a \overline{u_2} i\partial_2 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx-ac}{b-a}} dx.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$I_1 = -\Re i\int_0^c \overline{u_2}\partial_2 u_2|_{x=\frac{by}{c}}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dy + \Re i\int_0^b \overline{u_2}\partial_1 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx}{b}} dx + \Re i\int_b^a \overline{u_2}\partial_2 u_2|_{y=0}^{y=\frac{cx-ac}{b-a}} dx.$$

类似的计算给出

$$I_2 = \Re i\int_0^c \overline{u_1}\partial_2 u_1|_{x=\frac{by}{c}}^{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dx - \Re i\int_0^b \overline{u_1}\partial_1 u_1|_{y=0}^{y=\frac{cx}{b}} dx - \Re i\int_b^a \overline{u_1}\partial_2 u_1|_{y=0}^{y=\frac{cx-ac}{b-a}} dx.$$

此外，在边 OB 上，我们有 $u_2 = \frac{-b-ci}{\sqrt{b^2+c^2}} u_1$ 和

$$\begin{aligned}
\int_0^b \overline{u_2}\partial_1 u_2|_{y=\frac{cx}{b}} dx &= \int_0^b \frac{-b+ci}{\sqrt{b^2+c^2}}\overline{u_1}\partial_1 u_2|_{y=\frac{cx}{b}} dx = -\int_0^b \frac{-b+ci}{\sqrt{b^2+c^2}}\overline{\partial_1 u_1}\frac{-b-ci}{\sqrt{b^2+c^2}} u_1|_{y=\frac{cx}{b}} dx \\
&= -\int_0^b \overline{\partial_1 u_1 u_1}|_{y=\frac{cx}{b}} dx.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\Re i\int_0^b (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1)|_{y=\frac{cx}{b}} dx = 0.$$

类似地，我们还有

$$\Re i \int_0^c (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1)|_{x=\frac{by}{c}} dx = 0$$

and

$$\Re i \int_0^a (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1)|_{y=0} dx = 0.$$

因此，

$$I_1 + I_2 = -\Re i \int_0^c (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1)|_{x=\frac{y(b-a)}{c}+a} dy + \Re i \int_b^a (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1)|_{y=\frac{cx-ac}{b-a}},$$

这等价于

$$I_1 + I_2 = -\Re i n_{1_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1) + \Re i n_{2_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1).$$

总之，在三角形 OAB 上计算的范数为

$$\begin{aligned}\|Tu\|^2_{L^2(OAB)} = m^2\|u\|^2_{L^2(OAB)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(OAB)} + m\|\gamma u\|^2_{OA} + m\|\gamma u\|^2_{OB} + \int_{AB} (-2m\Re i\, n_{1_{AB}} \overline{u_1} u_2 \\ - 2m\Re\, n_{2_{AB}} \overline{u_1} u_2) - \Re i n_{1_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1) + \Re i n_{2_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1).\end{aligned}$$

我们假设 n 是每个划分后得到的三角形的外向单位向量。符号记法相同，但其含义因三角形而异。通过类似的计算，我们得到定义在其他三角形上的算子的平方如下，

$$\begin{aligned}\|Tu\|^2_{L^2(ABC)} = m^2\|u\|^2_{L^2(ABC)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(ABC)} + m\|\gamma u\|^2_{BC} + \int_{AB} (-2m\Re i\, n_{1_{AB}} \overline{u_1} u_2 - 2m\Re\, n_{2_{AB}} \overline{u_1} u_2) \\ - \Re i n_{1_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1) + \Re i n_{2_{AB}} \int_{AB} (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1) \\ + \int_{AC} (-2m\Re i\, n_{1_{AC}} \overline{u_1} u_2 - 2m\Re\, n_{2_{AC}} \overline{u_1} u_2) - \Re i n_{1_{AC}} \int_{AC} (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1) \\ + \Re i n_{2_{AC}} \int_{AC} (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|Tu\|^2_{L^2(ADC)} = m^2\|u\|^2_{L^2(ADC)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(ADC)} + m\|\gamma u\|^2_{DC} + m\|\gamma u\|^2_{DA} + \int_{AC} (-2m\Re i\, n_{1_{AC}} \overline{u_1} u_2 \\ - 2m\Re\, n_{2_{AC}} \overline{u_1} u_2) - \Re i n_{1_{AC}} \int_{AC} (\overline{u_2}\partial_2 u_2 - \overline{u_1}\partial_2 u_1) + \Re i n_{2_{AC}} \int_{AC} (\overline{u_2}\partial_1 u_2 - \overline{u_1}\partial_1 u_1).\end{aligned}$$

将多边形划分为三角形后，我们推知，相邻三角形在内部边上的外法向量方向相反，因此在这些边上计算的积分会相互抵消。总结这些计算，我们得到以下公式:

$$\begin{aligned}\|Tu\|^2_{L^2(OBCDA)} = m^2\|u\|^2_{L^2(OBCDA)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(OBCDA)} + m\|\gamma u\|^2_{OA} + m\|\gamma u\|^2_{OB} \\ + m\|\gamma u\|^2_{DA} + m\|\gamma u\|^2_{CB} + +m\|\gamma u\|^2_{CD}.\end{aligned}$$

因此，算子平方的证明完成。

□

致谢

我们感谢 David Krejčiřík 的有益讨论。作者获得了捷克科学基金会 EXPRO 资助项目（编号: 20-17749X）的支持。

参考文献

[1] Anil Damle 和 Geoffrey Colin Peterson, 《理解各种三角形的特征结构》, SIAM 本科生研究在线 3（2010）, 187-208。[2] Ph. Briet 和 D. Krejčiřík, 《狄拉克矩形的谱优化》, 《数学物理杂志》63（2022）, 013502。[3] P. R. S. Antunes、R. Benguria、V. Lotoreichik 和 T. Ourmières-Bonafos, 《有界区域中狄拉克算子的变分表述：在谱几何不等式中的应用》, 《数学物理通讯》386（2021）, 781–818。[4] P. R. S. Antunes、P. Freitas 和 D. Krejčiřík, 《负边界参数下罗宾特征值的界与极值区域》, 《微积分与变分进展》10（2017）, 357–380。[5] N. Arrizibalaga、L. Le Treust、A. Mas 和 N. Raymond, 《MIT 袋模型作为无限质量极限》, 《J. ´Ec. Polytech. Math.》6（2019年）（2019）, 329–365。[6] N. Arrizibalaga、L. Le Treust 和 N. Raymond, 《关于非相对论极限下的 MIT 袋模型》, 《数学物理通讯》354（2017）, 641–669。[7] N. Arrizibalaga、L. Le Treust 和 N. Raymond, 《MIT 袋模型的延拓算子》, 《图卢兹数学学院科学年刊》29（2020）, 135–147。[8] J.-M. Barbaroux、H. D. Cornean、L. Le Treust 和 E. Stockmeyer, 《平面区域上狄拉克算子的预解算子收敛》, 《亨利·庞加莱年刊》20（2019）, 1877–1891。[9] J. Behrndt、M. Holzmann、Ch. Stelzer 和 G. Stenzel, 《一类狄拉克算子的奇异扰动：边界三元组与韦伊函数》, 15–35；载于《数学与统计学贡献：献给 Seppo Hassi 的论文集》, H.S.V. de Snoo 和 H.L. Wietsma（编）, Acta Wasaensia 462, 瓦萨大学, 2021年。[10]R. D. Benguria、S. Fournais、E. Stockmeyer 和 H. Van Den Bosch, 《区域上二维狄拉克算子的自伴性》, 《亨利·庞加莱年刊》18（2017）, 1371–1383。[11] , 《描述石墨烯量子点的狄拉克算子的谱隙》, 《数学物理分析与几何》20（2017）, 11。[12] B. Bogosel 和 D. Bucur, 《关于多边形法贝尔-克拉恩不等式》, arXiv:2203.16409 [math.OC]（2022）。[13] W. Borrelli、Ph. Briet、Krejčiřík 和 T. Ourmières-Bonafos, 《相对论量子波导的谱性质》, 《亨利·庞加莱年刊》23（2022）, 4069–4114。[14] P. Freitas 和 D. Krejčiřík, 《负边界参数下的第一罗宾特征值》, 《数学进展》280（2015）, 322–339。[15] A. Henrot, 《椭圆算子特征值的极值问题》, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2006年。[16] , 《形状优化与谱理论》, De Gruyter, 华沙, 2017年。[17] E. Indrei, 《关于多边形拉普拉斯算子的第一特征值》, arXiv:2210.14806 [math.AP]（2022）。[18] D. Krejčiřík, 私人通信, 2022年11月。[19] D. Krejčiřík、V. Lotoreichik 和 T. Vu, 《三角形最低罗宾特征值的反向等周不等式》, arXiv:2204.03235 [math.OC]（2022）。[20] R. S. Laugesen, 《罗宾拉普拉斯算子——谱猜想与矩形定理》, 《数学物理杂志》60（2019）, 121507。[21] L. Le Treust 和 T. Ourmières-Bonafos, 《扇形区域上具有无限质量边界条件的狄拉克算子的自伴性》, 《亨利·庞加莱年刊》19（2018）, 1465–1487。

[22] V. Lotoreichik 和 T. Ourmi`eres-Bonafos, 《石墨烯量子点谱隙的一个尖锐上界》, 《数学物理分析与几何》**22** (2019年), 13。[23] AIM研讨会问题列表（D. Krejˇciˇr´ık、S. Larson 和 V. Lotoreichik 编）, 《表面相互作用下的形状优化》, http://aimpl.org/shapesurface/, 2019年, 美国圣何塞。