arXiv:2302.13103v1 [math.SP] 25 Feb 2023

周期图算子的 Floquet等谱性

WENCAI LIU

ABSTRACT. 设 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$，其中 q_l、$l = 1$、2、$\cdots$、d 均为任意正整数。设 $\Delta_{\text{discrete}} + V$为作用于 $\mathbb{Z}^d$上的离散薛定谔算子，其中 Δ_{discrete} 是作用于 $\mathbb{Z}^d$ 上的离散拉普拉斯算子，且函数 $V\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 是Γ-周期的。我们证明了离散周期薛定谔算子的两个刚性定理:

(1) 若实值 Γ-周期函数 V和 Y满足 $\Delta_{\text{discrete}} + V$且$\Delta_{\text{discrete}} + Y$为Floquet等谱，并且 Y可分离，则 V可分离。(2) 若复值 Γ-周期函数 V和 Y 满足 $\Delta_{\text{discrete}}+V$ 且 $\Delta_{\text{discrete}} + Y$ 为 Floquet 等谱，并且 $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ 和 $Y = \bigoplus_{j=1}^{r} Y_j$ 均为可分离函数，则除一个常数外，低维分解 V_j和 Y_j为 Floquet等谱，其中 $j = 1$、2、$\cdots$、r。

我们的定理推广了 Kappeler 的结果。我们的方法基于作者近期关于费米等谱性的研究，并可用于研究更一般的格。

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

本文首先研究离散周期薛定谔方程

$$(\Delta_{\text{discrete}}u)(n) + V(n)u(n) = \lambda u(n), n \in \mathbb{Z}^d, \tag{1}$$

及其所谓的 Floquet-Bloch 边界条件

$$u(n + q_j\mathbf{e}_j) = e^{2\pi i k_j}u(n), j = 1, 2, \cdots, d, \text{ and } n \in \mathbb{Z}^d, \tag{2}$$

其中，Δ_{discrete} 是 $\mathbb{Z}^d$上的离散拉普拉斯算子，$\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{d}$ 是$\mathbb{R}^d$ 中的标准基，且 V是 Γ-周期的，其中 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$。

带有边界条件 (2) 的方程 (1) 可以实现为矩阵 $D_V(k)$ 的特征方程，其中 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)$。将 $\sigma(D_V(k))$ 记为 $D_V(k)$ 的特征值（按代数重数计）。由于在第5节之前我们只讨论离散周期薛定谔方程 (1) 和 (2)，因此

关键词与短语：Floquet等谱性、等谱性、费米簇、布洛赫簇、费米等谱性、离散周期薛定谔算子、可分离函数、三角格子。2020年数学主题分类：主要分类：47B36。次要分类：35P05、35J10。

为简便起见，记 Δ 为 Δ_{discrete}。如果两个 Γ-周期算子 $\Delta+V$和 $\Delta+Y$（或者说，两个 Γ-周期函数/势 V和 Y）满足以下条件，则称它们是弗洛凯等谱的

$$\sigma(D_V(k))=\sigma(D_Y(k)),\ \text{for any } k\in\mathbb{R}^d. \tag{3}$$

关于何时周期势 V和 Y是弗洛凯等谱的研究，始于约四十年前 [5–7, 12–14, 16–18, 28, 31]。关于背景和最新进展，请参阅两篇综述 [20, 27] 。

本文旨在研究何时周期势与可分离势弗洛凯等谱。我们称定义在 $\mathbb{Z}^d$上的函数 V为 $(d_1,d_2,\cdots,d_r)$ 可分离的（或简称可分离），其中 $\sum_{j=1}^r d_j=d$ 且 $r\geq 2$，如果存在定义在 $\mathbb{Z}^{d_j}$上的函数 V_j、 $j=1,2,\cdots,r$，使得对任意 $(n_1,n_2,\cdots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$，

$$\begin{aligned} V(n_1,n_2,\cdots,n_d)=&V_1(n_1,\cdots,n_{d_1})+V_2(n_{d_1+1},n_{d_1+2},\cdots,n_{d_1+d_2})\\ &+\cdots+V_r(n_{d_1+d_2+\cdots+d_{r-1}+1},\cdots,n_{d_1+d_2+\cdots+d_r}). \end{aligned} \tag{4}$$

我们称 $V\colon\ \mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$为完全可分离的，如果 V是 $(1,1,\cdots,1)$ 可分离的。在没有歧义时，我们将 (4) 写作 $V=\bigoplus_{j=1}^r V_j$。

在 [6, 7, 12], Eskin-Ralston-Trubowitz 和 Gordon-Kappeler 中提出了以下两个问题:

Q1. 若实值函数 Y 和 V 是弗洛凯等谱的，且 Y 是可分离的，那么 V 是否也是可分离的? Q2. 假设 $Y=\bigoplus_{j=1}^r Y_j$ 和 $V=\bigoplus_{j=1}^r V_j$ 都是可分离的。若 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，那么低维分量 V_j 和 Y_j （相差一个常数）是否也是弗洛凯等谱的?

我们指出， [6, 7, 12] 中的原始问题（Q1 和 Q2）是在具有完全可分离函数的连续 Schr¨odinger 方程背景下提出的。在具有任意可分离函数的离散情形下提出上述两个问题（例如， [20, 第 5] 节）是很自然的。

在 [18], Kappeler 中对问题 Q1 和 Q2 作了部分回答:

定理1.1。 *[18]* 令 $q_1=q_2=\cdots=q_d$。则以下结论成立:

(1) 若实值 Γ-周期函数 Y 和 V 是弗洛凯等谱的，且Y 是完全可分离的，则 V 完全可分离。(2) 假设复值 Γ-周期函数 $Y=\bigoplus_{j=1}^d Y_j$ 和 $V=\bigoplus_{j=1}^d V_j$ 是完全可分离的。若 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，则除一个常数外，一维函数 V_j 和 Y_j 是弗洛凯等谱的。

定理1.1的证明依赖于离散薛定谔方程的谱不变量。我们将介绍一种不同的方法来研究 Floquet 等谱性，该方法基于作者在 [23] 中提出的思想。

定义1. $\Delta + V$的布洛赫簇 $B(V)$定义为

$$B(V) = \{(k, \lambda) \in \mathbb{C}^{d+1} : \det(D_V(k) - \lambda I) = 0\}.$$

给定 $\lambda \in \mathbb{C}$，费米面（簇） $F_\lambda(V)$ 定义为布洛赫簇的水平集:

$$F_\lambda(V) = \{k \in \mathbb{C}^d : (k, \lambda) \in B(V)\}.$$

费米簇和布洛赫簇（$\det(D_V(k) - \lambda I)$ 的零点集）在研究周期算子所引出的（逆）谱问题及相关问题中发挥着关键作用，例如嵌入特征值问题和积分态密度 [1, 4, 11, 15, 19, 21, 22, 30]。最近，作者发现，费米簇和布洛赫簇的代数性质（在适当坐标下，$\det(D_V(k) - \lambda I)$ 是代数的）与更多谱问题有关，例如量子遍历性 [25, 29], 谱边 [26]和等谱性问题 [23, 24]。

线性代数中的一个基本事实使得我们可以将弗洛凯等谱性重新表述为 $\det(D_V(k) - \lambda I) \equiv \det(D_Y(k) - \lambda I)$。与作者近期的工作 [23, 25, 26],类似，本文将重点研究 $\det(D_V(k) - \lambda I)$。使用 $\det(D_V(k) - \lambda I)$（布洛赫簇/费米簇）的优点之一，是能够运用代数几何/解析几何和复分析中的各种工具。

在 [26], 中，作者证明了布洛赫簇和费米簇的不可约性猜想（关于布洛赫簇和费米簇不可约性的最新研究，参见 [8–10]），而此前这些猜想仅针对 $d = 2, 3$ [2, 3, 11]进行过研究。这意味着，函数 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，当且仅当$B(V) = B(Y)$。在 [23], 中，作者引入了一类新的逆谱问题——费米等谱性。

定义 2. *[23]* 设 V 和 Y 是两个 Γ周期函数。若存在某个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$使得 $F_{\lambda_0}(V) = F_{\lambda_0}(Y)$，则称 V 和 Y是费米等谱的。

从定义可以看出，费米等谱性是弗洛凯等谱性的“超平面”版本（假设较弱）。在 [23], 中，作者证明了以下刚性结论。

定理 1.2. *[23]*假设 $d \geq 3$和 q_j、 $j = 1$、2、$\cdots$、d是分段互素的。则以下陈述成立:

(1) 如果实值 Γ-周期函数 Y和 V具有费米等谱性，且 Y可分离，那么 V可分离。(2) 假设复值 Γ-周期函数 $Y = \bigoplus_{j=1}^{r} Y_j$ 和 $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ 可分离。如果 V 和 Y 具有费米等谱性，那么除一个常数外，低维分解 V_j 和 Y_j 是弗洛凯等谱的， $j = 1$、2、$\cdots$、r。

定理 1.2 立即推出

推论1.3。假设 $d \geq 3$、 q_j、 $j = 1$、2、$\cdots$、d 两两互素分段成立。则以下陈述成立:

（1）如果实值 Γ-周期函数 Y 和 V 是弗洛凯等谱的，且Y 是可分离的，那么 V 也是可分离的。（2）假设复值 Γ-周期函数 $Y = \bigoplus_{j=1}^{r} Y_j$ 和 $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ 是可分离的。如果 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，那么除一个常数外，低维分解 V$_j$ 和 Y_j 是弗洛凯等谱的， $j = 1$、2、$\cdots$、r。

本文的目标有两个。首先，对于任意正整数 q_l、 $l = 1$、2、$\cdots$、d 以及任意类型的可分离函数，我们回答了问题 Q1 和 Q2，从而推广了定理1.1和推论1.3。其次，我们基于 [23]中的思想，提出了一种研究Floquet等谱性的简单而新颖的方法。事实证明，我们的方法相当稳健，适用于更一般的格（见第5节）。

本文的主要结果如下:

定理 1.4. 假设实值的 Γ-周期函数 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，且 Y 是 $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ 可分离的，则 V 是 $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ 可分离的。

定理 1.5. 假设复值的 Γ-周期函数 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，且 $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ 和 $Y = \bigoplus_{j=1}^{r} Y_j$ 均为可分离函数。那么，除一个常数外，低维分解 V_j 和 Y_j 是弗洛凯等谱的，其中 $j = 1, 2, \cdots, r$。

定理 1.4 和 1.5 推出

定理1.6. 假设实值函数 V 和 Y 是弗洛凯等谱的，且 $Y = \bigoplus_{j=1}^{r} Y_j$ 可分离。那么 $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ 可分离。此外，除一个常数外， Y_j 和 V_j, $j = 1, 2, \cdots, r$ 是弗洛凯等谱的。

我们的方法显然是在 [23]的基础上发展而来的。不过，技术部分有所不同。下面我们将介绍定理 1.4 的证明思路。为简单起见，以 $r = 2$ 为例。离散傅里叶变换的一个基本事实是，函数 V 是（d_1, d_2）可分离的，当且仅当对任意非平凡（模周期性非零）的$l_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$和$l_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}$，$\hat{V}(l_1, l_2) = 0$，其中 V是 V的离散傅里叶变换。为证明函数的可分离性， [23], 中的作者采用了直接方法来证明 $V(l_1, l_2) = 0$。在本文中，我们采用迂回的方法。首先证明，对于弗洛凯等谱函数V和 Y，有 $\sum_{l_1,l_2} |\hat{V}(l_1, l_2)|^2 = \sum_{l_1,l_2} |\hat{Y}(l_1, l_2)|^2$, $\sum_{l_1} |\hat{V}(l_1, 0)|^2 = \sum_{l_1} |\hat{Y}(l_1, 0)|^2$以及 $\sum_{l_2} |\hat{V}(0, l_2)|^2 = \sum_{l_2} |\hat{Y}(0, l_2)|^2$。因此，对所有非平凡（模周期性非零）的 l_1 和 l_2 ，若有$\hat{Y}(l_1, l_2) = 0$，则对所有非平凡的 l_1 和 l_2，都有$\hat{V}(l_1, l_2) = 0$。

本文的方法具有一般性，可用于研究更一般的格上周期算子的等谱性问题。第5节讨论向三角格子的推广。

本文其余部分安排如下。第2节回顾离散周期薛定谔方程的一些基础知识。第3节和第4节用于证明定理1.4和1.5。第5节讨论三角格子上周期算子的Floquet等谱性。

2. Basics

本节首先回顾关于费米簇的一些基本事实，参见例如 [20, 26, 27]。

设 W 是 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$ 的一个基本域:

$$W = \{n = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \le n_j \le q_j - 1, j = 1, 2, \cdots, d\}.$$

将方程 (1) 写在 $Q = q_1 q_2 \cdots q_d$ 维空间 $\{u(n)\ n \in W\}$ 上，带有边界条件 (2) 的方程 (1) 就转化为关于 $Q \times Q$ 矩阵 $D_V(k)$ 的特征值问题。

设 $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 和 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_d)$。设 $z_j = e^{2\pi i k_j}, j = 1, 2, \cdots, d, \mathcal{D}_V(z) = D_V(k)$ 和 $\mathcal{P}_V(z, \lambda) = \det(\mathcal{D}_V(z) - \lambda I)$。

根据线性代数的基本事实，有

命题 2.1. 设 $d \ge 1$。两个复值的 Γ-周期函数 V 和Y是弗洛凯等谱的，当且仅当 $\mathcal{P}_V(z, \lambda) \equiv \mathcal{P}_Y(z, \lambda)$。

$\hat{}$ 定义 V的离散傅里叶变换 $\hat{V}(l)$ $(l \in W)$为

$$\hat{V}(l) = \frac{1}{Q} \sum_{n \in W} V(n) \exp\left\{-2\pi i \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{l_j n_j}{q_j}\right)\right\}.$$

为方便起见，我们将 $\hat{V}(l)$ 周期性地扩展到 $\mathbb{Z}^d$ ，即对于任意满足 $l \equiv m \mod \Gamma$ 的情况,

$$\hat{V}(l) = \hat{V}(m).$$

定义

$$\tilde{\mathcal{D}}_V(z) = \tilde{\mathcal{D}}_V(z_1, z_2, \cdots, z_d) = \mathcal{D}_V(z_1^{q_1}, z_2^{q_2}, \cdots, z_d^{q_d}), \tag{5}$$

and

$$\tilde{\mathcal{P}}_V(z, \lambda) = \det(\tilde{\mathcal{D}}_V(z, \lambda) - \lambda I) = \mathcal{P}_V(z_1^{q_1}, z_2^{q_2}, \cdots, z_d^{q_d}, \lambda). \tag{6}$$

Let

$$\rho_{n_j}^j = e^{2\pi \frac{n_j}{q_j} i},$$

其中 $0 \le n_j \le q_j - 1$、 $j = 1$、2、 $\cdots$、 d。

直接应用离散 Floquet 变换（例如， [9, 20,26]）可得

引理 2.2. 设 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_d)\in W$和 $n'=(n_1',n_2',\cdots,n_d')\in W$.~则 $\mathcal{D}_V(z)$ 与 $A+B_V$ 酉等价，其中 A 是一个对角矩阵，其对角元为

$$A(n;n')=\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\rho_{n_j}^{j}z_j+\frac{1}{\rho_{n_j}^{j}z_j}\right)\right)\delta_{n,n'} \tag{7}$$

and

$$B_V(n;n')=\hat{V}\left(n_1-n_1',n_2-n_2',\cdots,n_d-n_d'\right). \tag{8}$$

特别是,

$$\tilde{\mathcal{P}}_V(z,\lambda)=\det(A+B_V-\lambda I).$$

3. Proof of Theorem 1.4

假设 $\sum_{j=1}^{r}d_j=d$，其中 $r\geq 2$ 且 $d_j\geq 1, j=1,2,\cdots,r$。为方便起见，令 $d_0=0$。对于任意 $l=(l_1,l_2,\cdots,l_d)\in\mathbb{Z}^d$ 和 $j=1,2,\cdots,r$，记为

$$\tilde{l}_j=(l_{1+\sum_{m=0}^{j-1}d_m},l_{2+\sum_{m=0}^{j-1}d_m},\cdots,l_{d_j+\sum_{m=0}^{j-1}d_m})\in\mathbb{Z}^{d_j}. \tag{9}$$

对于 $j=1,2,\cdots,r$，记为

$$W_j=\{n\in\mathbb{Z}^{d_j}:0\leq n_b\leq q_{b+\sum_{m=0}^{j-1}d_m}-1,b=1,2,\cdots,d_j\}.$$

对于任意 $n\in\mathbb{Z}^{d_j}, j=1,2,\cdots,r$，记为

$$n^{j\urcorner}=(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{a_j},n_1,n_2,\cdots,n_{d_j},\overbrace{0,0,\cdots,0}^{b_j})\in\mathbb{Z}^d, \tag{10}$$

其中 $a_j=\sum_{m=0}^{j-1}d_m$当 $j=1$、2、$\cdots$、r，且 $b_j=\sum_{m=j+1}^{r}d_m$当 $j=1$、2、$\cdots$、$r-1$（集合 $b_r=0$）。

引理 3.1。（例如，*[23]*）函数 V 是（d_1、d_2、$\cdots$、d_r）可分离的，当且仅当 ~ ^ 对于任意至少有两个非零 l_j、$j=1$、2、$\cdots$、r、$V(l)=0$.

将 V 的平均值记为 $[V]$：

$$[V]=\frac{1}{Q}\sum_{n\in W}V(n).$$

引理 3.2. 假设实值的 Γ-周期函数 V和 Y是弗洛凯等谱的。那么

$$[V]=[Y] \tag{11}$$

and

$$\sum_{\substack{n\in W\\ n'\in W}}\frac{|\hat{V}(n-n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^{d}\rho_{n_j}^{j}z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^{d}\rho_{n_j'}^{j}z_j)}\equiv\sum_{\substack{n\in W\\ n'\in W}}\frac{|\hat{Y}(n-n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^{d}\rho_{n_j}^{j}z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^{d}\rho_{n_j'}^{j}z_j)}. \tag{12}$$

引理 3.2 的证明与定理 4.1 [23] 的证明类似。为方便读者，我们在附录中给出证明。

定理 3.3. 假设实值 Γ-周期函数 V 和 Y 是 Floquet 等谱的。那么我们有

$$\sum_{l\in W}|\hat{V}(l)|^2=\sum_{l\in W}|\hat{Y}(l)|^2, \tag{13}$$

并且对于任意 $j=1,2,\cdots,r$,

$$\sum_{l\in W_j}|\hat{V}(l^{j\neg})|^2=\sum_{l\in W_j}|\hat{Y}(l^{j\neg})|^2. \tag{14}$$

证明。将 $z=0$ 代入 (12)，可得 (13)。不失一般性，我们只证明 $j=1$的 (14)。将 (12) 重写为

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in W,l\in W}\frac{|\hat{V}(l)|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j+l_j}^j z_j)}\\ &\equiv\sum_{n\in W,l\in W}\frac{|\hat{Y}(l)|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j+l_j}^j z_j)}.\end{aligned} \tag{15}$$

令 $z_1=z_2=\cdots=z_{d_1}=0$并考虑平面 $-\lambda+\sum_{j=d_1+1}^d z_j=0$。由于对于任意满足 $(n_{d_1+1},n_{d_1+2},\cdots,n_d)\neq 0$（模周期性）的 $(n_{d_1+1},n_{d_1+2},\cdots,n_d)$，平面 $-\lambda+\sum_{j=d_1+1}^d z_j=0$和 $-\lambda+\sum_{j=d_1+1}^d\rho_{n_j}^j z_j=0$不平行。这意味着 (15) 的和中的首项（分母中的二重零点）由 $\frac{1}{(-\lambda+\sum_{j=d_1+1}^d\rho_{n_j}^j z_j)\ (-\lambda+\sum_{j=d_1+1}^d\rho_{n_j+l_j}^j z_j)}$ 组成，其中 $n_{d_1+1}=n_{d_1+2}=\cdots=n_d=0$和 $l_{d_1+1}=l_{d_1+2}=\cdots=l_d=0$。因此，有

$$\sum_{\substack{l\in W\\ l_m=0,d_1+1\le m\le d}}|\hat{V}(l)|^2=\sum_{\substack{l\in W\\ l_m=0,d_1+1\le m\le d}}|\hat{Y}(l)|^2. \tag{16}$$

这就推出了（14）。 □

˜定理 1.4 的证明。令 $S\subset W$ 由所有至少有两个 l_j、$j=1$、2、$\cdots$、r 非零的 l 组成。

根据引理 3.1，有

$$\sum_{l\in S}|\hat{Y}(l)|^2=0. \tag{17}$$

由定理 3.3 和 (17) 可得

$$\sum_{l\in S}|\hat{V}(l)|^2=0. \tag{18}$$

再次由引理 3.1 可知， V 是可分离的。

□

4. Proof of Theorem 1.5

定理 1.5 的证明。由归纳法，只需证明 $r = 2$ 的情形。回忆式 (11)。不失一般性，假设 $[V_1] = [V_2] = [Y_1] = [Y_2] = 0$ ，因此 $[V] = [Y] = 0$。任取 y。令

$$\lambda = \lambda(z_1, z_2, \cdots, z_{d_1}, y) = y + \sum_{j=1}^{d_1} \left(z_j + \frac{1}{z_j} \right). \tag{19}$$

于是，对任意 $n \in W_1 \backslash \{(0, 0, \cdots, 0)\}$,

$$-\lambda + \sum_{j=1}^{d_1} \left(\rho_{n_j}^j z_j + \frac{1}{\rho_{n_j}^j z_j} \right) = -y + \sum_{j=1}^{d_1} (-1 + \rho_{-n_j}^j) \frac{1}{z_j} + \sum_{j=1}^{d_1} (-1 + \rho_{n_j}^j) z_j. \tag{20}$$

比较 $\mathcal{P}_V(z, \lambda)$ 和 $\mathcal{P}_Y(z, \lambda)$ 中关于 $(z_1, z_2, \cdots, z_{d_1})$ 的最高次数项的系数（最高次数为 $Q - \sim \quad \lrcorner |W_2|$），其中 λ 由式 (19) 给出，可得

$$\tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}(z_{d_1+1}, z_{d_1+2}, \cdots, z_d, y) \equiv \tilde{\mathcal{P}}_{V_2}(z_{d_1+1}, z_{d_1+2}, \cdots, z_d, y).$$

这意味着 V_2 和 Y_2 是弗洛凯等谱的。交换 V_1 和 V_2、Y_1 和 Y_2，可得 V_1 和 Y_1 是弗洛凯等谱的。证毕。

□

5. Floquet isospectrality for periodic Schrödinger operators on the triangular lattice

我们考虑三角格子上的离散周期薛定谔方程，

$$(\Delta_{\mathrm{Tri}} u)(n) + V(n)u(n) = \lambda u(n), n \in \mathbb{Z}^2, \tag{21}$$

其边界条件为

$$u(n + q_j \mathbf{e}_j) = e^{2\pi i k_j} u(n), j = 1, 2 \text{ and } n \in \mathbb{Z}^2, \tag{22}$$

其中 $\{\mathbf{e}_1 = (0, 1), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的标准基， V 是 Γ-周期的，且 Δ_{Tri} 是三角格子上的离散拉普拉斯算子，即

$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathrm{Tri}} u)(n_1, n_2) =& u(n_1 + 1, n_2) + u(n_1 - 1, n_2) + u(n_1, n_2 + 1) + u(n_1, n_2 - 1) \\ &+ u(n_1 + 1, n_2 - 1) + u(n_1 - 1, n_2 + 1).\end{aligned}$$

若对于任意 $k \in \mathbb{R}^2$、$\Delta_{\mathrm{Tri}} + V$ 和 $\Delta_{\mathrm{Tri}} + Y$，在边界条件 (22) 下都具有相同的特征值，则称 $\Delta_{\mathrm{Tri}} + V$ 和 $\Delta_{\mathrm{Tri}} + Y$ 弗洛凯等谱。

定理 5.1. 假设 V 和 Y 是定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的实值函数，且 $\Delta_{\mathrm{Tri}} + V$ 和 $\Delta_{\mathrm{Tri}} + Y$ 弗洛凯等谱；若 Y 可分离，则 V 可分离。

我们可以将格点上离散周期 Schr¨odinger 方程的所有概念转移到三角格子上。例如，我们将用 $D_{\mathrm{Tri},\ V}(k)$ 表示带有边界条件 (22) 的方程 (21)。类似地，我们将˜使用记号 $\mathcal{D}_{\mathrm{Tri},\ V}$, $\mathcal{P}_{\mathrm{Tri},\ V}(z,\lambda)$, A_{Tri} 以及 $B_{\mathrm{Tri},\ V}$。

由标准的离散 Floquet 变换（例如 [9, 20]），可得

˜引理 5.2. 矩阵 $\mathcal{D}_{\mathrm{Tri},\ V}(z)$ 与 $A_{\mathrm{Tri}} + B_{\mathrm{Tri},\ V}$ 酉等价，其中A_{Tri} 是一个对角矩阵，其元素为

$$A_{\mathrm{Tri}}(n;n') = \left(\rho^1_{n_1} z_1 + \frac{1}{\rho^1_{n_1} z_1} + \rho^2_{n_2} z_2 + \frac{1}{\rho^2_{n_2} z_2} + \frac{\rho^2_{n_2} z_2}{\rho^1_{n_1} z_1} + \frac{\rho^1_{n_1} z_1}{\rho^2_{n_2} z_2}\right) \delta_{n,n'} \tag{23}$$

and

$$B_{\mathrm{Tri},V}(n;n') = \hat{V}\left(n_1 - n'_1, n_2 - n'_2\right). \tag{24}$$

特别地,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{Tri},V}(z,\lambda) = \det(A_{\mathrm{Tri}} + B_{\mathrm{Tri},V} - \lambda I).$$

定理 5.1 的证明。根据引理 5.2，我们首先可以通过附录中的类似论证证明 (11) 和 (12) 成立。可以看出，定理 1.4 的证明只用到了 (11) 和 (12)。因此，定理 5.1 得证。

□

Appendix A. Proof of Lemma 3.2

对于 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$和 $z^a = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_d^{a_d}$，记 $|a| = a_1 + a_2 + \cdots + a_d$ z^a 的次数。

证明。由命题 2.1 可得

$$\mathcal{P}_V(z,\lambda) \equiv \mathcal{P}_Y(z,\lambda), \tag{25}$$

因此

$$\tilde{\mathcal{P}}_V(z,\lambda) \equiv \tilde{\mathcal{P}}_Y(z,\lambda). \tag{26}$$

对于任意 $n = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in W$，令

$$t_n(z,x) = x + \sum_{j=1}^{d} \left(\rho^j_{n_j} z_j + \frac{1}{\rho^j_{n_j} z_j}\right). \tag{27}$$

显然， $t_n(z,[V]-\lambda)$ 是矩阵 $A+B_V$ 的第 n 个对角元。由引理 2.2，直接计算可得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}_V(z,\lambda) =& \det(A+B_V-\lambda I)\\ =& \prod_{n\in W} t_n(z,[V]-\lambda) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n\in W, n'\in W\\ n\neq n'}} \frac{\prod_{n\in W} t_n(z,[V]-\lambda)}{t_{n'}(z,[V]-\lambda)t_n(z,[V]-\lambda)}|B_V(n;n')|^2\\ &+\text{中至多包含 } q_1q_2\cdots q_d-3 \text{ 个 } t_n(z,[V]-\lambda) \text{ 的乘积。}\end{aligned} \tag{28}$$

Let

$$h(z,\lambda)=\prod_{n\in W}\left(-\lambda+\sum_{j=1}^{d}\rho_{n_j}^j z_j\right),$$

以及 $h_V^1(z,\lambda)$ 是 $\tilde{\mathcal{P}}_V(z,\lambda)$ 中所有由 $z^a\lambda^b$ 组成且满足 $|a|+b=q_1q_2\cdots q_d-1$ 的项。

由 (28) 可知， $h_V^1(z,\lambda)$ 必须来自 $\prod_{n\in W} t_n(z,[V]-\lambda)$，因此

$$h_V^1(z,\lambda)=[V]\left(\sum_{n\in W}\frac{h(z,\lambda)}{-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j}\right). \tag{29}$$

由 (26) 和 (29) 可得

$$\sum_{n\in W}\frac{[V]}{-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j}\equiv\sum_{n\in W}\frac{[Y]}{-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j}. \tag{30}$$

这意味着 $[V]=[Y]$。

令 $h_V^2(z,\lambda)$（$\bar{h}_V^2(z,\lambda)$）表示 $\tilde{\mathcal{P}}_V(z,\lambda)$（$\prod_{n\in W} t_n(z,[V]-\lambda)$）中所有由 $z^a\lambda^b$ 与 $|a|+b=q_1q_2\cdots q_d-2$ 组成的项。

由 $h_V^2(z,\lambda)-\bar{h}_V^2(z,\lambda)$ 的定义，再由 (26) 可知，因此，一直类似可得

$$h_V^2(z,\lambda)-\bar{h}_V^2(z,\lambda)\equiv h_Y^2(z,\lambda)-\bar{h}_Y^2(z,\lambda). \tag{31}$$

由（28）可得,

$$h_V^2(z,\lambda)-\bar{h}_V^2(z,\lambda)=\frac{h(z,\lambda)}{2}\sum_{\substack{n\in W,n'\in W\\ n\neq n'}}\frac{-|B_V(n;n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d\rho_{n'_j}^j z_j)}. \tag{32}$$

由（31）和（32）可得,

$$\sum_{\substack{n\in W,n'\in W\\ n\neq n'}} \frac{|B_V(n;n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n'_j}^j z_j)}$$
$$\equiv \sum_{\substack{n\in W,n'\in W\\ n\neq n'}} \frac{|B_Y(n;n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n'_j}^j z_j)},$$

因此

$$\sum_{\substack{n\in W,n'\in W\\ n\neq n'}} \frac{|\hat{V}(n-n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n'_j}^j z_j)}$$
$$\equiv \sum_{\substack{n\in W,n'\in W\\ n\neq n'}} \frac{|\hat{Y}(n-n')|^2}{(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n_j}^j z_j)(-\lambda+\sum_{j=1}^d \rho_{n'_j}^j z_j)}. \tag{33}$$

由（11）和（33），可得（12）。 □

Acknowledgments

W. Liu 获得了美国国家科学基金会 DMS-2000345 和 DMS-2052572 项目的资助。

References

[1] K. Ando、H. Isozaki 和 H. Morioka。受扰晶格上薛定谔算子的谱性质。《亨利·庞加莱年鉴》，17(8):2103–2171，2016年。[2]D. B¨attig。二维布洛赫流形的环面紧化。博士论文，苏黎世联邦理工学院，1988年。[3] D. B¨attig。离散薛定谔算子的费米面的环面紧化。《赫尔维数学评论》，67(1):1–16，1992年。[4] D. B¨attig、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复费米面的方向紧化。《组合数学》，79(2):205–229，1991年。[5] G. Eskin。具有周期向量势的薛定谔方程的逆谱问题。《数学物理通讯》，125(2):263–300，1989年。[6] G. Eskin、J. Ralston 和 E. Trubowitz。关于 R^n 上的等谱周期势。《纯粹与应用数学通讯》，37(5):647–676，1984 年。[7] G. Eskin、J. Ralston 和 E. Trubowitz。关于 R^n 上的等谱周期势。II。《纯粹与应用数学通讯》，37(6):715–753，1984年。[8] M. Faust 和 J. Lopez。周期图色散关系的不可约性。arXiv 预印本 arXiv:2302.11534，2023年。

[9]J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。有限程薛定谔算子的布洛赫簇的不可约性。《泛函分析杂志》，283(10):论文编号 109670，22页，2022年。[10] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。多顶点模型的费米簇的不可约性。预印本，2023年。[11]D. Gieseker、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。代数费米曲线的几何，数学展望丛书第14卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1993年。[12]C. S. Gordon 和 T. Kappeler。关于环面上的等谱势。《杜克数学杂志》，63(1):217–233，1991年。[13] C. S. Gordon 和 T. Kappeler。关于平坦环面上的等谱势。II。《偏微分方程》，20(3-4):709–728，1995年。[14] V. Guillemin。二维环面上的逆谱结果。《美国数学会杂志》，3(2):375–387，1990年。[15] H. Isozaki 和 H. Morioka。离散薛定谔算子的 Rellich 型定理。《逆问题与成像》，8(2):475–489，2014年。[16] T. Kappeler。关于离散格点上的等谱周期势。I。《杜克数学杂志》，57(1):135–150，1988年。[17]T. Kappeler。关于离散格点上的等谱势。II。《应用数学进展》，9(4):428–438，1988年。[18] T. Kappeler。离散格点上的等谱势。III。《美国数学会汇刊》，314(2):815–824，1989年。[19] H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复布洛赫簇的方向紧化。《赫尔维数学评论》，65(1):114–149，1990年。[20] P. Kuchment。周期椭圆算子概述。《美国数学会通报》（新系列），53(3):343–414，2016年。[21]P. Kuchment 和 B. Vainberg。受扰周期势薛定谔算子不存在嵌入特征值。《偏微分方程》，25(9-10):1809–1826，2000年。[22]P. Kuchment 和 B. Vainberg。局部扰动周期图算子的嵌入特征值所对应特征函数的结构。《数学物理通讯》，268(3):673–686，2006年。[23]W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米等谱性。《纯粹与应用数学通讯》，即将发表。[24] W. Liu。具有可分离势的离散周期薛定谔算子的费米等谱性，定义于 $\mathbb{Z}^2$ 上。《数学物理通讯》，即将发表。[25] W. Liu。周期图算子的布洛赫簇与量子遍历性。arXiv 预印本 arXiv:2210.10532，2022年。[26] W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米簇的不可约性与嵌入特征值。《几何与泛函分析》，32(1):1–30，2022年。[27] W. Liu。离散周期薛定谔算子费米簇专题。《数学物理杂志》，63(2):论文编号 023503，13页，2022年。

[28] H. P. McKean 和 E. Trubowitz。《无限多个分支点情形下的 Hill算子与超椭圆函数理论》。《纯粹与应用数学通讯》，29(2):143–226，1976年。[29] T. Mckenzie 和 M. Sabri。周期图的量子遍历性。arXiv 预印本 arXiv:2208.12685，2022年。[30] S. P. Shipman。局部扰动周期图算子的嵌入特征值对应的无界支撑特征函数。《数学物理通讯》，332(2):605–626，2014年。[31] A. Waters。二维等谱周期环面。Ann. Inst. H. P. Carpar´eAnal. Non Lin´eaire，32(6):1173–1188，2015年。（W. Liu）

Department of Mathematics, Texas A&M University, College Sta-tion, TX 77843-3368, USA电子邮箱：liuwencai1226@gmail.com；wencail@tamu.edu