arXiv:2302.13171v1 [math.LO] 25 Feb 2023

几乎强紧致性与强紧致性相距多远

游志行与袁嘉辰

摘要。Bagaria 和 Magidor 引入了几乎强紧致性的概念，它与强紧致性的概念非常接近。Boney 和 Brooke-Taylor 问道，最小的几乎强紧致基数是否是强紧致的。Goldberg 在奇异基数假设自下成立且最小的几乎强紧致基数具有不可数余终性的情形下给出了肯定答案。本文对一般情形给出了否定答案。我们的结果还对 Bagaria 和 Magidor 的一个问题给出了肯定回答。

1. 引言

δ-强紧致性和几乎强紧致性的概念（见定义2.1）由 Bagaria 和 Magidor 在 [BM14a、BM14b]中引入。它们是强紧致性的弱版本，并刻画了不同领域中许多值得关注的自然紧致性性质。详见 [BM14a、BM14b、Usu20] 。

与强紧致性一样， δ-强紧致性可以用无穷语言的紧致性性质、初等嵌入、超滤等来刻画。此外，许多由强紧致性推出的有趣性质，也都是 δ-强紧致性的推论。例如，若 κ 是某个不可数基数 δ的最小强紧基数 δ，则在奇异基数假设(SCH)在κ之上成立；并且对于每个正则基数 $\lambda \geq \kappa$，$\mathrm{S}^{\lambda}_{<\delta} = \{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cof}(\alpha) < \delta\}$的每个平稳子集都满足平稳反射。此外，Goldberg 在[Gol21的推论 2 中9]证明，Woodin 的HOD 二分法[1] 是 ω_1-强紧致性的推论。

δ-强紧致性、几乎强紧致性和强紧致性是彼此接近的紧致性原理。Magidor 在 [Mag76] 证明，一致地，最小的强紧基数，记作 κ，就是最小的可测基数。在这种情况下， κ 也是δ对每个不可数基数 $\delta < \kappa$ 而言最小的 [Gol19，命题 8.3。7] 证明了

2010 数学主题分类。03E35, 03E55.关键词与短语。 δ-强紧致性、几乎强紧致性、Suslin 树。第一作者获欧洲研究委员会资助（资助协议编号 ERC-2018-StG 802756）。第二作者获 UKRI 未来领袖奖学金资助，编号为 [MR/T021705/2]。为实现开放获取，作者已对由此产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名（CC BY）许可。[1]假设 κ 是 ω_1-强紧致的。那么，要么所有充分大的正则基数在 HOD 中都是可测基数，要么每个大于 κ 的奇异基数 λ 在 HOD 中都是奇异的，并且 $\lambda^{+N} = \lambda^{+}$。1

在预期所有典范内模型都满足的超幂公理假设下，对于任意不可数基数 δ，最小的 δ-强紧基数是强紧的。

另一方面，Bagaria 和 Magidor 在 [BM14b] 中，通过使用长度为某个可测基数 $\delta < \kappa$的适当 Radin 强迫，将一个超紧致基数 κ变成了最小的 δ-强紧致基数。因此在泛型扩张中，κ 是奇异的，这意味着它不是强紧致的。这区分了 δ-强紧致性与强紧致性。

更微妙的情形是几乎强紧致性与强紧致性之间的关系。显然，如果 κ 是一个强紧基数、某个强紧基数的后继，或几乎强紧致基数的极限，那么它就是几乎强紧致的。对于反方向，Menas 基本上证明了：如果一个几乎强紧致基数是可测的，那么它就是强紧致的（见 [Kan94，定理 22。19]）。最近，Goldberg 在 [Gol20，定理 5。7] 中证明，假设 奇异基数假设 成立，则每个余终性不可数的几乎强紧致基数 κ 都是平凡的，即属于上述三种情形之一。特别地，注意到在最小几乎强紧致基数以上，奇异基数假设 成立，Goldberg 在 [Gol20，定理 5。8] 中证明，对于每个序数 $\alpha > 0$，如果 $(\alpha + 1)$-阶几乎强紧致极限基数的余终性不可数，那么它就是强紧致的。

但 Boney 和 Brooke-Taylor 提出的以下问题仍未解决：

问题 1.1 ([Gol20])。 最小的几乎强紧致基数是否必然是强紧基数？

我们将证明，第 [Gol20] 节中的定理 5.7 和定理 5.8，在第 4 节中删去余终性假设后可能不再成立。原因在于，Fodor 引理对最小无限基数 ω并不成立。这对问题 1.1 给出了否定的答案。

为此，我们需要对 Bagaria 和 Magidor 提出的以下问题给出肯定答案：

问题 1.2 (Bagaria，Magidor)。 是否存在一个类（可能是适当类） $\mathcal{K}$，满足 $|\mathcal{K}| \geq 2$，并且对每个 $\kappa \in \mathcal{K}$ 都存在一个 $\delta_\kappa < \kappa$，使得对每个 $\kappa \in \mathcal{K}$，κ 都是恰好 δ_κ-强紧致的最小基数？

例如，如果我们能对上述问题在 $\mathcal{K}$ 的序型为 ω 且 $\delta_\kappa < \kappa$ 是大于每个 $\mathcal{K} \cap \kappa$ 的可测基数时给出肯定答案，那么 sup($\mathcal{K}$) 可能就是最小的几乎强紧致基数。

我们将在第1.2 节4中对问题给出肯定回答。为此，我们回顾 Gitik 在[Git20定理 31]中的一种新构造。他发展了 Kunen 关于构造一个具有 κ-饱和理想的模型的基本思路 κ （见 [Kun78]）。经过一些准备后，他在一个超紧致基数 δ上添加了一棵 κ-上升-Suslin 树 κ。这使得 κ成为最小的 δ-强紧致基数。进一步分析表明，κ 并非 δ^+-强紧致，这意味着我们可以控制 κ的紧致性。此外，该强迫

用于添加一棵 δ-上升 κ-Suslin 树的强迫具有良好的闭性，即 $<\kappa$-战略闭且 $<\delta$-有向闭。因此，我们可以同时应用此方法以及同时产生真类多个非超紧致强紧致基数的著名方法，从而得到不同 δ下的-强紧致基数层级 δ 。由此，我们可以对问题 1.2给出肯定回答。

本文的结构。 本文第 2 节介绍一些技术性预备资料和基本定义。第 3节给出 Gitik 构造的一些变体。第 4节在上一节结果的基础上，构造对于不同 δ同时成立的 δ -强紧致基数层级，并给出几乎强紧致基数的非平凡例子，特别地回答问题 1.1 和问题 1.2。

2. 预备知识

2.1. **大基数**。 我们假设读者熟悉 Mahlo性、可测性、强性、强紧致性和超紧致性等大基数概念（详见[Jec03] 或 [Kan94] ）。

我们首先回顾 δ-强紧致基数和几乎强紧致基数的定义及基本性质。

定义 2.1。 （[BM14a，BM14b]）设 $\kappa \geq \delta$ 是两个不可数基数 ，

(1) 对任意 $\theta \geq \kappa, \kappa$ ，若存在初等嵌入$j: V \to M$，其中 M 是传递的，且 crit(j) $\geq \delta$，并且存在一个 $D \in M$ 使得 $j''\theta \subseteq D$ 且 $M \models |D| < j(\kappa)$，则称其为$(\delta, \theta)$-强紧致。(2) 若对任意 $\theta \geq \kappa$， κ 都是(δ, θ)-强紧致的，则称 κ 为 δ-强紧致；若 κ 是 δ-强紧致的，但不是 δ^+-强紧致的，则称 κ 为恰好δ-强紧致。(3) 若对每个不可数基数 $\delta < \kappa$， κ 都是 δ-强紧致的，则称 κ 为几乎强紧致。

根据上述定义，很容易看出， κ 是 κ-强紧致的当且仅当 κ是强紧致的；对于以下命题，前者蕴含后者： κ 是强紧致的， κ 是几乎强紧致的， κ 是 δ'-强紧致性且 $\delta < \delta' < \kappa$，以及$\kappa$ 是 δ-强紧致的。

Usuba 以 δ-完备一致超滤刻画了 δ-强紧致性，从而推广了 Ketonen结果。

定理 2.2 （[Usu20]）：设 $\kappa \geq \delta$ 是两个不可数基数。那么 κ 是 δ-强紧致的，当且仅当对于每个正则 $\lambda \geq \kappa$，存在一个 δ-完备的一致超滤，其定义在 λ上，即存在一个 δ-完备超滤 U 定义在 λ 上，使得每个 $A \in U$ 的基数为 λ。

接下来，我们列出两个有用的引理（详见 [AC01，引理 2.1、引理 2。4] ）。

引理 2.3。 设 κ 是 2^κ-超紧且强的。假设 $j: V \to M$ 是 κ的一个 2^κ-超紧嵌入。那么 κ 是 M中的强基数的强基数极限。

引理 2.4。 假设对于某个余终性大于 κ 的强极限基数 λ， κ 是 λ-超紧的。设 $j: V \to M$ 是一个 λ- 超紧嵌入，且满足 $M \vDash$ “κ 不是 λ- 超紧的 ”。那么在 M 中，区间 $(\kappa, \lambda]$ 内不存在强基数。

2.2. **强迫与大基数**。 本小节回顾提升初等嵌入的一些著名基本技巧。详情请参阅其他资料。

对于偏序 $\mathbb{P}$ 和序数 κ，我们称 $\mathbb{P}$ 为 κ-策略闭，当且仅当在一个双人博弈中，双方构造 $\mathbb{P}$ 中条件的递减序列 $\langle p_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$，奇数玩家在奇数阶段行动，偶数玩家在偶数阶段和极限阶段行动（在第 0 阶段选择平凡条件），且偶数玩家有一种策略，确保博弈总能继续进行。$\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的，当且仅当对于任意 $\alpha < \kappa$，该博弈都是 α-策略闭的。我们称 $\mathbb{P}$ 为 $<\kappa$-有向闭，当且仅当任何大小小于 κ 的有向子集 $D \subseteq \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中都有下界。这里，若 D 中任意两个元素在 $\mathbb{P}$ 中都有下界，则称 D 是有向的。我们称 $\mathbb{P}$ 为 $<\kappa$-闭，当且仅当任何大小小于 κ 的递减子集 $D \subseteq \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中都有下界。

我们用 $\mathrm{Add}(\kappa, 1) = \{f \subseteq \kappa \mid |f| < \kappa\}$ 表示添加 κ的一个子集的科恩强迫。以下是伊斯顿引理，详见 [Jec03，引理 15。19] 。

引理 2.5。 假设 $G \times H$ 是关于 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$的 V-泛型，其中 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-闭的，且 $\mathbb{Q}$满足 κ-可数链条件。那么，在 $V[H]$中， $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-分配的。换言之，$\mathrm{Ord}^{<\kappa} \cap V[G][H] \subseteq V[H]$。

定理 2.6 ([Lav78])。 假设 κ 是超紧的。那么存在一个强迫 $\mathbb{P}$，使得在 $V^{\mathbb{P}}$中， κ 在任意 $<\kappa$-有向闭强迫下都不可毁。换言之， κ 是超紧的，并且在任意 $<\kappa$-有向闭强迫之后仍保持超紧。

2.3. **Gitik构造**。 本小节中，我们回顾 [Git20]中的一些定义和结果。

假设 T 是 ${}^{<\theta}2$ 的子树。这意味着对于每个 $t \in T$ 和 $\alpha <$ ，$\mathrm{dom}(t)$ 中的 $t \restriction \alpha \in T$，以及所有 s、$t \in T$、$s <_T t$，当且仅当 $s \subseteq t$。对于任意 $t \in T$，我们用 $\mathrm{ht}(t)$ 表示 t 的定义域，并用 $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ 表示 T 的第 α^{th} 层，即 $\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \{t \in T \mid \mathrm{ht}(t) = \alpha\}$。令 $\mathrm{ht}(T)$ 表示 T 的高度。

定义 2.7. 假设 $T \subseteq {}^{<\theta}2$ 是高度为 θ 的树，且 $\delta < \theta$ 是正则基数。

(1) T是一个 θ-*Suslin* 树，如果 T的每个极大反链的大小都小于 θ。(2) 如果对于任意 $t \in T$ 以及任意 $\mathrm{ht}(t) < \alpha < \theta$，都存在一个 $s >_T t$ 使得 $\mathrm{ht}(s) = \alpha$，那么称 T 是正规。(3) 如果对于同一层中的每个 s_0和 $s_1 \in T$，都有 $T_{s_0} = T_{s_1}$，其中$T_s = \{t \restriction (\theta \setminus |s|) \mid t \in T$，且对于每个 $s \in T$都有 $t \geq_T s\}$，那么称 T 是齐性。

(4) 如果存在一个函数序列 $\vec{f} = \langle f_\alpha \mid \alpha < \theta, f_\alpha : \delta \to \mathrm{Lev}_\alpha(T)\rangle$，使得对于每个 $\alpha < \beta < \theta$，集合 $\{\upsilon < \delta \mid f_\alpha(\upsilon) <_T f_\beta(\upsilon)\}$在 δ中是共尾的，那么称 T 具有 δ-上升路径 。

定义 2.8 ([Git20]). 设 κ 是一个 2-马洛基数，且 $\delta < \kappa$ 是一个正则基数。定义强迫概念 $Q_{\kappa,\delta}$ 如下：$\langle T, \vec{f}\rangle \in Q_{\kappa,\delta}$ 当且仅当

(1) $T \subseteq {}^{<\kappa}2$ 是一个后继高度的正规齐次树。(2) f 是穿过 T的一个 δ-上升路径。

$Q_{\kappa,\delta}$ 上的序由端延拓定义。

对于任意 $Q_{\kappa,\delta}$-泛型滤子 G，我们将 $\vec{f}^G = \bigcup_{\langle t,\vec{f}'\rangle\in G} \vec{f}'$记为 $\langle f^G_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$，并令$T(G)$ 为由 G添加的 κ-树。

定义 2.9 ([Git20]). 设 G 是 $Q_{\kappa,\delta}$上的一个泛型滤子。在 $V[G]$中，定义与 G相关联的强迫 $F_{\kappa,\delta}$，其中 $g \in F_{\kappa,\delta}$ 当且仅当存在一个 $\xi_g < \delta$ 使得对某个 $\alpha < \kappa$，有 $g = f^G_\alpha \restriction (\delta \setminus \xi_g)$。当且仅当 $\xi_{g_0} = \xi_{g_1}$ 且对于每个满足$\xi_{g_0} \le \upsilon < \delta$的 υ，都有 $g_0(\upsilon) \ge_{T(G)} g_1(\upsilon)$ 时，令 $g_0 \le_{F_{\kappa,\delta}} g_1$ 。我们也将 $F_{\kappa,\delta}$视为由有序对 $g = \langle f^G_\alpha, \xi_g\rangle$构成的集合。

事实 2.10 ([Git20])。 设 κ 是一个2-*Mahlo* 基数，且 $\delta < \kappa$ 是一个正则基数。设 G 在 V上是$Q_{\kappa,\delta}$-泛型的。则有如下结论：

(1) $Q_{\kappa,\delta}$ 是 $<\kappa$-策略闭的且 $<\delta$-定向闭的。*(2)* $T(G)$ 是一个 δ-上升 κ-*Suslin* 树。*(3)* 在 $V[G]$中，$\langle F_{\kappa,\delta}, \le_{F_{\kappa,\delta}}\rangle$ 满足 κ-可数链条件。

(4) $\mathrm{Add}(\kappa,1)$ 与两步迭代$Q_{\kappa,\delta} * F_{\kappa,\delta}$强迫等价。

证明。 （1）、（2）和（3）的证明见 [Git20]。为完整起见，我们给出（4）的证明。

由于每个大小为 κ 的 $<\kappa$-闭偏序集都与 Add(κ, 1) 强迫等价，因此我们只需证明 $Q_{\kappa,\delta} * F_{\kappa,\delta}$ 有一个大小为 κ的 $<\kappa$-闭稠密子集。考虑偏序集 R_0，其中 $\langle t, f, g\rangle \in R_0$当且仅当 $\langle t, f\rangle \in Q_{\kappa,\delta}$，且存在一个 $\xi_g < \delta$使得 $g = \langle f_{\mathrm{ht}(t)-1}, \xi_g\rangle$。对于每个 $\langle t^1, \vec{f}^1, g^1\rangle, \langle t^2, \vec{f}^2, g^2\rangle \in R_0$, $\langle t^1, \vec{f}^1, g^1\rangle \le_{R_0} \langle t^2, \vec{f}^2, g^2\rangle$，当且仅当 $\langle t^1, \vec{f}^1\rangle \le_{Q_{\kappa,\delta}} \langle t^2, \vec{f}^2\rangle$, $\xi_{g^1} = \xi_{g^2}$，并且对每个满足 $\xi_{g^1} \le \upsilon < \delta$的 υ，都有 $g^1(\upsilon) >_{t^1} g^2(\upsilon)$。我们可以将 R_0 视为$Q_{\kappa,\delta} * \dot{F}_{\kappa,\delta}$的子集。对于每个 $\langle t^1, \vec{f}^1, \dot{g}\rangle \in Q_{\kappa,\delta} * \dot{F}_{\kappa,\delta}$，将 $\langle t^1, \vec{f}^1\rangle$加强为一个条件$\langle t, \vec{f}\rangle$，使得 $\langle t, \vec{f}\rangle$判定 $\dot{g}$是 $g = \langle f_\alpha, \xi_g\rangle$，且其高度为 ht($t$)。我们可以将 $\langle t, \vec{f}\rangle$延伸为一个条件 $\langle t', f'\rangle$，使得对于每个满足 $\xi_g \le \upsilon < \delta$的 υ，都有$f'_{\mathrm{ht}(t')-1}(\upsilon) \ge_{t'} f_\alpha(\upsilon)$。令$g' = \langle f'_{\mathrm{ht}(t')-1}, \xi_g\rangle$。于是 $\langle t', \vec{f}', g'\rangle$ 扩张 $\langle t^1, \vec{f}^1, \dot{g}\rangle$。因此，$R_0$在$Q_{\kappa,\delta} * \dot{F}_{\kappa,\delta}$中稠密。

现在我们证明 R_0 是 $<\kappa$-闭的。任取一个极限 $\gamma < \kappa$ 以及一个由 R_0 中条件组成的 γ-向下序列 $\langle\langle t^\alpha, \vec{f}^\alpha, g^\alpha\rangle \mid \alpha < \gamma\rangle$。对于每个 $\alpha < \gamma$，都有 $\xi_{g^\alpha} = \xi_{g^0}$；并且对于每个 $\alpha_0 < \alpha_1 < \gamma$, $g^{\alpha_1}(\upsilon) >_{t^{\alpha_1}} g^{\alpha_0}(\upsilon)$，对于每个满足 $\xi_{g^0} \le \upsilon < \delta$ 的 υ 都成立。因此$t = \bigcup_{i<\gamma} t^i$ 有一个共尾分支。所以我们可以通过将t的所有共尾分支加入到层 ht(t)，把 t 扩展为一棵树 t^γ。令 $\vec{f} = \bigcup_{\alpha<\gamma} \vec{f}^\alpha := \langle f_\alpha \mid \alpha < \mathrm{ht}(t)\rangle$，并令

$f_{\mathrm{ht}(t)}$：$\delta \to \mathrm{Lev}^{\mathrm{ht}(t)}(t^\gamma)$，使得对于每个满足 $\xi_{g^0} \leq \upsilon < \delta$ 的 υ，$f_{\mathrm{ht}(t)}(\upsilon)$ 都是 $\bigcup_{\alpha<\mathrm{ht}(t)} f_\alpha(\upsilon)$ 的延续。令 $\vec{f}^\gamma = \vec{f} \cup \{\langle \mathrm{ht}(t), f_{\mathrm{ht}(t)}\rangle\}$，并令 $g^\gamma = \langle f_{\mathrm{ht}(t)}, \xi_{g^0}\rangle$。那么，对于每个 $\alpha < \gamma$，$\vec{}$ $\vec{}\langle t^\gamma, f^\gamma, g^\gamma\rangle$ 都扩展了 $\langle t^\alpha, f^\alpha, g^\alpha\rangle$。□

在上述事实中，如果 κ 是超紧的，且 $\delta < \kappa$ 是可测的，那么经过某种预备后，$Q_{\kappa,\,\delta}$ 可能保留 κ 的 δ-强紧致性。其思路是，在由 δ上的正规测度 U 给出的一个小超幂映射 $i_U: V \to M_U$ 之后，我们可以通过传递论证将 i_U 提升为i_U: $V[G] \to M_U[G^*]$，其中某个 G^*。然后，$i''_U\vec{f}^G$可能生成一个与 $M_U[G^*]$上的 $i_U(T(G))$相关联的$i_U(F_{\kappa,\,\delta})$-泛对象，从而恢复 κ的超紧致性。

众所周知，如果存在一棵 κ-Suslin 树，那么 κ 就不可测。我们给出一个关于 δ-上升 κ-Suslin 树的类似结果（实际上，一棵 δ-上升 κ-Aronszajn 树就足够了）。

引理 2.11。设 $\kappa > \delta$ 为两个正则基数。若 T 是一个 δ-上升 κ-*Suslin* 树，则 κ 不携带 δ^+-完备的一致超滤。特别地，κ 不是 δ^+-强紧致的。

证明。这由 [LHR22，引理 3.7 和 3.38], 得出，但我们在此给出一个直接证明。

反设不然，则存在一个定义在 κ上的 δ^+-完备一致超滤。因此我们有一个超幂映射 $j: V \to M$，使得 $\mathrm{crit}(j) > \delta$ 且 $\sup(j''\kappa) < j(\kappa)$。令 $\beta = \vec{}\sup(j''\kappa)$。设 $f = \langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$为穿过 T 的一条 δ-上升路径，并将 $j(f)$记为 $\langle f^*_\alpha \mid \alpha < j(\kappa)\rangle$。根据初等等价性以及 $\mathrm{crit}(j) > \delta$这一事实，对于任意 $\alpha_1 < \alpha_2 < j(\kappa)$，集合 $\{\upsilon < \delta \mid f^*_{\alpha_1}(\upsilon) <_{j(T)} f^*_{\alpha_2}(\upsilon)\}$在 δ中是余有界的。因此，对每个 $\alpha < \kappa$，存在一个 $\theta_\alpha < \delta$，使得对于所有满足 $\theta_\alpha \leq \upsilon < \delta$ 的 υ，都有 $f^*_\beta(\upsilon) >_{j(T)} f^*_{j(\alpha)}(\upsilon) = j(f_\alpha(\upsilon))$。由于 $\mathrm{cof}(\beta) = \kappa > \delta$，可知存在一个无界子集 $A \subseteq \kappa$ 和一个 $\theta < \delta$，使得对每个 $\alpha \in A$，都有 $\theta = \theta_\alpha$。于是，对于 A 中的每个 $\alpha_1 > \alpha_2$，都有 $j(f_{\alpha_1}(\upsilon)) >_{j(T)} j(f_{\alpha_2}(\upsilon))$，对所有满足 $\theta \leq \upsilon < \delta$的 υ均如此；因此，由初等等价性，对于所有满足 $\theta \leq \upsilon < \delta$ 的 υ，都有 $f_{\alpha_1}(\upsilon) >_T f_{\alpha_2}(\upsilon)$。所以，$\{s \in T \mid \exists \alpha \in A(s \leq_T f_\alpha(\theta))\}$ 是穿过 T 的一条共尾分支，这与 T 是一个 κ-Suslin 树相矛盾。

因此，κ 不携带 δ^+-完备的一致超滤。这意味着，κ 不是 δ^+-强紧致的，根据定理 2.2。□

根据事实 2.10，如果 κ 是一个 2-马洛基数，那么 $Q_{\kappa,\,\delta}$ 会添加一棵 δ-上升的 κ-Suslin 树。因此，κ 在 $V^{Q_{\kappa,\,\delta}}$ 中不是 δ^+- 强紧致的。

推论 2.12。假设 κ 是一个2-马洛基数，且 $\delta < \kappa$ 是一个正则基数。那么，小于或等于 κ 的每个基数在 $V^{Q_{\kappa,\,\delta}}$中都不是 δ^+-强紧致的。

3. 一个基数的证明

Gitik 在 [Git20、定理 3.9 及该定理下方的评论中]给出了一种构造非强紧致 δ-强紧致基数的新方法。

定理 3.1 （[Git20]）。 假设 广义连续统假设。设 κ 是一个超紧致基数，并设 $\delta < \kappa$是一个可测基数。那么存在一个保持余终的泛型扩张，使其满足以下条件：

(1) 广义连续统假设，*(2)* κ 不是可测基数，
(3) κ 是最小的 δ-强紧基数。

看来，Gitik 只给出了不存在位于超紧致基数之上的不可达基数这一情形的证明 κ，尽管将这一证明推广到一般情形的技术是标准的。为完整起见，我们首先在命题 3.2 中给出一般情形证明的一些细节。然后给出它的一些变体。

命题 3.2。 设 κ 是一个超紧致基数，且 $\delta < \kappa$ 是一个可测基数。那么对于每个正则 $\eta < \delta$，存在一个 $<\eta$-有向闭强迫 $\mathbb{P}$，使得 κ 是 $V^{\mathbb{P}}$ 中恰好为 δ-强紧的最小基数。此外，如果 广义连续统假设 在 V 中成立，那么它在 $V^{\mathbb{P}}$ 中也成立。

证明。 令 $A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha > \delta$ 是强基数的强基数极限$\}$，并令 $B = \{\alpha < \kappa \mid \alpha > \delta$ 是位于某个序数之上的最小不可达强基数极限$\}$。则根据引理 A 和 B，它们均非空2.3，且 $A \cap B = \emptyset$。

令 $\mathbb{P}_{\kappa+1} = \langle\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{R}_\alpha\rangle \mid \alpha \leq \kappa\rangle$ 为长度为 $\kappa + 1$ 的 Easton 支持迭代，其中$\mathbb{R}_\alpha$ 是

- 一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，若 $\alpha \in A$，则为 $\mathrm{Add}(\alpha, 1)_{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$，
- 一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，若 $\alpha \in B$，则为 $(Q_{\alpha,\eta})_{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$，
- 一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，若 $\alpha = \kappa$，则为 $(Q_{\kappa,\delta})_{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$，
- 否则为平凡强迫。

令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$。 令 G_κ 为 V 上的 $\mathbb{P}_\kappa$-泛型滤子，令 g 为$V[G_\kappa]$上的 $\mathbb{R}_\kappa$-泛型滤子，并令 $G = G_\kappa * g \subseteq \mathbb{P}$。对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $G_\alpha = \{p \restriction \alpha \mid p \in G_\kappa\}$，并令$\mathbb{P}_{\alpha,\kappa+1}$ 命名长度为 $\kappa + 1 - \alpha$ 的规范迭代，使得 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{P}_\alpha * \mathbb{P}_{\alpha,\kappa+1}$强迫等价。于是 $\mathbb{P}$ 是 $<\eta$-定向闭的，因为对于每个 $\alpha < \kappa$，$\mathbb{P}_\alpha$ 强迫 $\mathbb{R}_\alpha$是 $<\eta$-定向闭的。此外，如果 GCH 在 V 中成立，那么它在 $V^{\mathbb{P}}$ 中也成立。

任取 $\alpha \in B$。在 $V[G_\alpha]$ 中，强迫 $\mathbb{R}_\alpha = Q_{\alpha,\eta}$ 添加一棵 η-上升 α-Suslin 树。因此，根据引理 2.11， α 不携带 η^+-完备一致超滤。与此同时，$\mathbb{P}_{\alpha+1,\kappa+1}$ 在 $V[G_{\alpha+1}]$ 中是 $(2^\alpha)^+$-策略闭的。因此， $V[G]$ 中 α 上的任何超滤实际上都属于 $V[G_{\alpha+1}]$。于是， $V[G]$ 中不存在 α 上的 η^+-完备一致超滤。根据定理 2.2，这意味着 $V[G]$ 中不存在低于 α 的 η^+-强紧基数。注意到 B 在 κ 中无界，因此低于 κ 不存在 η^+-强紧基数。

现在我们准备证明， κ 恰好是 δ-强紧致的。由推论2.12可知，基数 κ 不是 δ^+-强紧致的。

设 W 是 δ上的一个正规测度，并设 $i_W\colon V \to M_W$ 为相应的超幂映射。注意到 $\mathbb{P}$ 是 $<\delta^+$-策略闭的，我们可通过传递论证将 i_W 提升为 $i_W\colon V[G] \to M_W[G^*]$。这里 $G^* := G^*_\kappa * g^* \subseteq i_W(\mathbb{P})$是由$i''_W G$生成的滤子。

接下来，我们证明在 $V[G]$中，存在一个关于 $M_W[G^*]$的 $i_W(F_{\kappa,\delta})$-泛对象。在 $M_W[G^*]$中，序列 $\vec{f}^{g^*} = \langle f^{g^*}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle := i_W(\vec{f}^{g})$ 是穿过 κ-Suslin 树 $T(g^*)$ 的一条 $i_W(\delta)$-上升路径。并且对于每个满足 $\delta \leq \upsilon < i_W(\delta)$ 的 υ，$\{f^{g^*}_{i_W(\alpha)}(\upsilon) \mid \alpha < \kappa\}$ 生成一条穿过 $T(g^*)$ 的共尾分支 $\{t \in T(g^*) \mid \exists \alpha < \kappa (t <_{T(g^*)} f^{g^*}_{i_W(\alpha)}(\upsilon)\}$。

我们声称，集合 $\{\langle f^{g^*}_{i_W(\alpha)}\ \delta\rangle \mid \alpha < \kappa\}$ 生成一个关于 $M_W[G^*]$的 $i_W(F_{\kappa,\delta})$-泛型滤子 F^*。换言之，令

$$F^* = \{\langle f^{g^*}_\gamma, \delta\rangle \mid \gamma < \kappa, \exists \gamma < \alpha < \kappa (\forall \delta \leq \upsilon < i_W(\delta)(f^{g^*}_\gamma(\upsilon) <_{T(g^*)} f^{g^*}_{i_W(\alpha)}(\upsilon)))\}.$$

那么，F^*是与树 $T(g^*)$ 相关联的强迫 $i_W(F_{\kappa,\delta})$ 的 $M_W[G^*]$-泛型集。我们只需证明，对于 $i_W(F_{\kappa,\delta})$ 的每个极大反链 A，F^* 中都有一个元素扩展了 A 中的某个元素。在 $M_W[G^*]$中，注意到 $i_W(F_{\kappa,\delta})$ 具有 κ-c.c.，因此对于 $i_W(F_{\kappa,\delta})$ 的每个极大反链 A，我们都可以找到一个序数 $\alpha < \kappa$，使得 A 中的每个函数都在层 $T(g^*)$ 的某个低于 α 的层上作用。现在取 $V[G]$中的一个不可达基数$\alpha < \beta < \kappa$。那么$\langle f^{g^*}_\beta, \delta\rangle \in F^*$ 扩展了 A 中的某个元素。因此，$M_W[G^*, F^*]$ 是 M_W 的一个 $i_W(\mathbb{P}_\kappa * \dot{\text{Add}}(\kappa, 1))$-泛型扩张。

现在在 M_W 中工作。令 $\lambda > \kappa$ 为一个余终性大于 κ 的任意奇异强极限基数。令 U 为 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度，使得嵌入$j := j^{M_W}_U\colon M_W \to N \cong$超幂$(M_W, U)$ 满足 $N \vDash$“κ 不是 λ- 超紧”。令 $\pi = j \circ i_W$。

在 $M_W[G^*, F^*]$中工作，它是 M_W 的一个 $i_W(\mathbb{P}_\kappa * \dot{\text{Add}}(\kappa, 1))$-泛型扩张。注意，根据引理 2.3，$\kappa \in \pi(A)$，并且在 N 中，根据引理 2.4，$(\kappa, \lambda]$ 中不存在强基数。一个标准论证表明，我们可以提升 j 并得到一个嵌入 $j\colon M_W[G^*] \to N[G^*, F^*, H]$。这里 H 是在 $M_W[G^*, F^*]$中构造的一个 $\pi(\mathbb{P})/(G^* * F^*)$- 泛型滤子（详见[Cum10] 或 [AC01，引理 4]）。

设 $D = j''\lambda \in N[G^*, F^*, H]$，则 $\pi''\lambda = D$和 $N[G^*, F^*, H] \vDash |D| < \pi(\kappa)$。因此在 $V[G]$中，π 见证了 κ 是 (δ, λ)-强紧致的。由于 λ 是一个余终性大于 κ的任意强极限基数，因此 κ 是 δ-强紧致的。

这就完成了命题3.2的证明。 □

注 3.3。取任意满足 $\delta < \theta < \kappa$ 的不可达基数 θ。对于任意 $<\theta$-策略闭强迫 $\mathbb{Q}_0 \in V_\kappa$ 以及任意满足以下条件的强迫 $\mathbb{Q}_1 \in V_\theta$：$i_W$ 可以提升为某个定义域为 $V^{\mathbb{Q}_1}$ 的嵌入，κ 是 $V^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}_0\times\mathbb{Q}_1}$ 中恰好 δ-强紧致的最小基数。

I容易看出，κ 是上述命题中的最小 η^+-强紧致基数 e.

如果我们在高于 κ 的最小 2-马洛基数处添加一棵 δ-上升 Suslin 树，而不是 κ，那么 κ 可能是可测的。因此，最小的 δ-强紧致基数可能既非强紧致，又是可测的。我们可以将此与 Menas定理作比较：每个可测的几乎强紧致基数都必须是强紧致的。

命题 3.4。 假设 κ 是一个超紧致基数， κ' 是高于 κ 的最小 *2*-马洛基数，且 $\delta < \kappa$ 是一个可测基数。那么，对于任意 $\eta < \delta$，存在一个 $<\eta$-有向闭强迫 $\mathbb{P}$，使得在 $V^{\mathbb{P}}$ 中， κ 是最小的恰好 δ-强紧致基数，且 κ 是可测的。

证明。不失一般性，我们可以假设 $2^{\kappa} = \kappa^{+}$。取命题 3.2 中的 Easton 支集强迫 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$， 但令 $A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha > \delta$ 为某个强基数的强基数极限之上的第一个 2-Mahlo 基数 $\}$，并令 $\mathbb{R}_{\kappa}$ 的名称为 $(Q_{\kappa'},_{\delta})_{V^{\mathbb{P}_{\kappa}}}$， 而非 $(Q_{\kappa},_{\delta})_{V^{\mathbb{P}_{\kappa}\circ}}$ 那么在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，根据命题 3.2 中的论证， κ 是最小的恰好 δ-强紧致基数；根据标准提升论证，它也是可测基数（见 [Cum10，定理 11.1]）。□

在上述命题中，注意到 $A \cup B$ 是稀疏的，并且 $A \cup B$ 中的每个元素都不可测。不难看出，若 广义连续统假设 成立，那么通过标准提升论证，每个可测基数都得以保留（见 [Cum10，定理 11.1]）。

推论 3.5。 假设 κ 是超紧且在任意 $<\kappa$-有向强迫下不可毁，而 $\delta < \kappa$ 是一个可测基数。那么 κ 在 $V^{Q_{\kappa,\ \delta}}$中恰为 δ-强紧致。此外，若 κ' 是 κ以上最小的2-*Mahlo* 基数，那么 κ 在 $V^{Q_{\kappa',\ \delta}}$中恰为 δ-强紧致且可测。

4. 主要定理

本节中，根据 [Apt96 的定理 2], 的证明，对于给定的超紧基数类 $\mathcal{K}$，我们可以假设 $V \vDash$ “ZFC $+$广义连续统假设 $+\ \mathcal{K}$ 是超紧基数类 $+$ 每个超紧基数 κ 在任意 $<\kappa$-有向闭强迫下均为 Laver 不可破坏，且该强迫不会破坏 广义连续统假设 $+$ 强紧基数与超紧基数恰好重合，可能的例外仅在可测极限点处”。

定理 4.1。 假设 $\mathcal{A}$ 是超紧基数类 $\mathcal{K}$ 的一个子类，且不包含该类的任何极限点；δ_{κ} 是一个可测基数，并且对于每个 $\kappa \in \mathcal{A}$，都有 $\sup(\mathcal{A} \cap \kappa) < \delta_{\kappa} < \kappa$。那么存在一个强迫扩张，其中对于每个 $\kappa \in \mathcal{A}$， κ 都是最小的、恰为 δ_{κ}-强紧基数。此外，不会产生新的强紧基数，并且满足广义连续统假设 。

证明。对于每个 $\kappa \in \mathcal{A}$，令 $\eta_{\kappa} = (2^{\sup(\mathcal{A} \cap \kappa)})^{+}$，其中 $\eta_{\kappa} = \omega_1$ 对 κ 而言是 $\mathcal{A}$的最小元素。令 $\mathbb{P}_{\kappa}$ 为一个强迫，它通过先取 $\eta = \eta_{\kappa}$ 和 $\delta = \delta_{\kappa}$， 然后使用命题 3.2 给出的任意 $<\eta$-有向闭强迫，来强迫 κ 成为恰好 δ_{κ}-强紧致的最小基数。令 $\mathbb{P}$ 为 Easton 支集积 $\Pi_{\kappa \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_{\kappa}\circ$ 注意，该强迫是一个积，且 $\mathbb{P}_{\kappa}$ 的域包含于 $(\delta_{\kappa}, \kappa]$ 中，而其中不含 $\mathcal{A}$的元素，因此强迫 $\mathbb{P}_{\kappa}$ 的域出现在不同的区块中。尽管 $\mathbb{P}$ 是类强迫，标准的 Easton 论证表明 $V^{\mathbb{P}} \vDash$ ZFC $+$ 广义连续统假设。

引理 4.2. 若 $\kappa \in \mathcal{A}$，则 $V^{\mathbb{P}} \vDash$ “κ 是恰好 δ_{κ}-强紧致的最小基数”。

证明。 我们可以将 V中的强迫分解为 $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_\kappa \times \mathbb{Q}_{<\kappa}$， 其中 $\mathbb{Q}^\kappa = \Pi_{\alpha>\kappa}\mathbb{P}_\alpha$ 且$\mathbb{Q}_{<\kappa} = \Pi_{\alpha<\kappa}\mathbb{P}_\alpha$。

根据不可破坏性以及 $\mathbb{Q}^\kappa$ 是一个 $<\kappa$-有向闭强迫，且不会破坏广义连续统假设这一事实，可知 κ 在 $V^{\mathbb{Q}^\kappa}$中是超紧的。注意， κ 以下的强基数在 $V^{\mathbb{Q}^\kappa}$ 和 V中相同，因为 $\mathbb{Q}^\kappa$ 是 $<\kappa$-有向闭的，并且 κ 在 $V^{\mathbb{Q}^\kappa}$中是超紧的。因此，强迫 $\mathbb{P}_\kappa$ 在 V或 $V^{\mathbb{Q}^\kappa}$ 中满足相同的定义。所以 κ 是δ_κ-强紧基数中最小的一个$V^{\mathbb{Q}^\kappa\times\mathbb{P}_\kappa}$， 由命题3.2可知。

注意， $\delta_\kappa > \sup(\mathcal{A}\cap\kappa)$ 是一个可测基数，因此可知 $|\mathbb{Q}_{<\kappa}| < \delta_\kappa$。所以，$V^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{Q}^\kappa\times\mathbb{P}_\kappa\times\mathbb{Q}_{<\kappa}} \vDash$ “κ 是最小的恰好 δ_κ-强紧基数”。□

现在我们只需证明不会产生新的强紧基数。换言之，若 θ 在 $V^{\mathbb{P}}$ 中是强紧的，那么 $\theta \in \mathcal{K}$，或者它是 V 中 $\mathcal{K}$ 的一个可测极限点。反设不然。若 $\sup(\mathcal{A}) < \theta$，则 $|\mathbb{P}| < \theta$。这意味着 θ 在 V 中也强紧，这与我们的假设矛盾。因此我们可以假设 $\theta \leq \sup(\mathcal{A})$。接下来分两种情况讨论：

▶ θ 不是 $\mathcal{A}$的极限点。令 $\kappa = \min(\mathcal{A}\setminus(\theta+1))$。则 $\theta \in (\eta_\kappa, \kappa)$。我们可以将 $\mathbb{P}$ 分解为 $\mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_\kappa \times \mathbb{Q}_{<\kappa}$。于是，在$V^{\mathbb{P}_\kappa}$中， θ 是强紧致的，这意味着 θ是 η_κ^+-强紧致的。然而，根据命题3.2， κ 是 η_κ^+中最小的 $V^{\mathbb{P}_\kappa}$-强紧基数，矛盾。

▶ θ 是 $\mathcal{A}$的极限。为完整起见，我们在此给出证明概要（详见 [Apt96，引理 8] ）。

注意到 θ 在 $V^{\mathbb{P}}$中是可测的，容易看出 θ 在 $V^{\mathbb{Q}_{<\theta}}$ 中是可测的：$=V^{\Pi_{\alpha<\theta}\mathbb{P}_\alpha}$。此外， $\mathbb{Q}_{<\theta}$ 在 $V^{\mathbb{Q}_{<\theta}}$中满足 θ-c.c.。

在 $V^{\mathbb{Q}_{<\theta}}$中工作。令 μ 为 θ上的一个正规测度。我们可以证明，存在一个 $q \in \mathbb{Q}_{<\theta}$，使得对于 V中的每个 $X \subseteq \theta$，都有 q 决定 $X \in \dot{\mu}$，即 $q \Vdash$ “$X \in \dot{\mu}$”或 $q \Vdash$ “$X \notin \dot{\mu}$”。否则，我们可以构造一棵 θ-树 $T = \{\langle r_s, X_s\rangle \mid s \in {}^{<\theta}2, r_s \in \mathbb{Q}_{<\theta}, X_s \subseteq \theta\}$，使得

(1) $r_s \Vdash$“$X_s \in \dot{\mu}$”，(2) 若 $s' \subseteq s$，则 $r_s \leq_{\mathbb{Q}_{<\theta}} r_{s'}$，

(3) $X_s = X_{s^\frown\langle 0\rangle} \cup X_{s^\frown\langle 1\rangle}$ 且 $X_{s^\frown\langle 0\rangle} \cap X_{s^\frown\langle 1\rangle} = \emptyset$。

(4) 若 $\mathrm{dom}(s)$ 是一个极限序数，则 $X_s = \cap_{s'\subsetneq s} X_{s'}$。

注意到 θ 在 $V^{\mathbb{Q}_{<\theta}}$ 中是弱紧的，因此 T 有一条共尾分支 $\langle\langle r_s, X_s\rangle \mid s \in {}^{<\theta}2, s \subseteq f\rangle$，其中某个函数 $f\colon \theta \to 2$。于是 $\{r_{s^\frown\langle i\rangle} \mid i = 0 \vee i = 1, s \in {}^{<\theta}2, s \subseteq f, s^\frown\langle i\rangle \nsubseteq f\}$ 是 $\mathbb{Q}_{<\theta}$ 的一个反链，其大小为 θ。然而， $\mathbb{Q}_{<\theta}$ 具有 θ-c.c.，矛盾。因此，存在一个 $q \in \mathbb{Q}_{<\theta}$，使得 q 对 V 中的每个 $X \subseteq \theta$ 都决定 $X \in \dot{\mu}$，即 θ 在 V 中是可测的。

定理4.1的证明至此完成。 □

在上述证明中，如果我们令 $\mathbb{P}_\kappa$ 充当命题 3.4 中的偏序集，而不是命题 3.2中的偏序集，那么 κ 在 $V^{\mathbb{P}}$中仍然是可测的。

如果 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$不存在可测极限点，那么 $V^{\mathbb{P}}$中不存在强紧基数。

推论 4.3。 设 $\mathcal{K}$ 是没有可测极限点的超紧致基数类，且 δ_κ 是可测的，并且对任意 $\kappa \in \mathcal{K}$，$\sup(\mathcal{K} \cap \kappa) < \delta_\kappa < \kappa$ 。那么存在一个强迫扩张，其中 κ 是对任意 $\kappa \in \mathcal{K}$而言最小的恰好 δ_κ-强紧基数，并且不存在强紧基数。

注意，在上述推论的强迫扩张中， $\mathcal{K}$ 的每个极限点都是几乎强紧的；因此，我们可能得到一个模型，其中最小的几乎强紧致基数并非强紧基数。

定理 4.4。 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 是超紧致基数的递增序列。令 $\kappa = \lim_{n<\omega} \kappa_n$。那么存在一个强迫扩张，其中 κ 是最小的几乎强紧致基数。

证明。 为简便起见，令 $\kappa_{-1} = \omega_1$ 。令 δ_n 为大于κ_{n-1}的最小可测基数，对每个 $n < \omega$均如此。根据定理 4.1，存在一个强迫扩张，记作 $V^{\mathbb{P}}$，其中κ_n 是对每个 δ_n 而言最小的恰好 $n < \omega$-强紧基数。因此 κ 对每个 δ_n都是 $n < \omega$-强紧基数。还要注意， $\kappa = \lim_{n<\omega} \delta_n$，我们有 κ 是几乎强紧的。

任取 $n < \omega$。那么在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，存在无界多个小于 κ_n 的 α，使得在 α 上不存在 $(2^{\kappa_{n-1}})^{++}$-完备的一致超滤。因此，在 (κ_{n-1}, κ_n) 中不存在几乎强紧致基数。由于 $n < \omega$ 是任意的，可知 κ 以下不存在几乎强紧致基数。因此， κ 是最小的几乎强紧致基数。□

这对问题 1.1 给出了否定的回答。

如果存在真类的超紧致基数，那么我们可以得到一个模型，其中存在真类的几乎强紧基数，但不存在强紧基数。

推论 4.5。 假设存在一个真类的超紧致基数，且没有可测极限点。那么存在一个强迫扩张，其中有真类的几乎强紧基数，但不存在强紧致基数。

接下来，我们讨论另一种情况。

定理 4.6。 设 $\mathcal{K}$ 是一个超紧致基数集，其序型小于或等于 $\min(\mathcal{K}) + 1$，且 $\langle \delta_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K} \rangle$ 是一个递增的可测基数序列，满足 $\sup_{\kappa\in\mathcal{K}} \delta_\kappa \leq \min(\mathcal{K})$。那么存在一个强迫扩张，在其中，对于任意 $\kappa \in \mathcal{K}$， κ 恰好是 δ_κ-强紧的。此外，如果 $\kappa = \min(\mathcal{K})$，那么 κ 是恰好 δ_κ-强紧基数中的最小者。另外，不存在强紧基数，且广义连续统假设 成立。

证明。对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}$，令 κ' 为大于 κ 的最小 2-马洛基数，若 $\kappa < \sup(\mathcal{K})$；否则令其为 κ。令 $\kappa_0 = \min(\mathcal{K})$。令 $\mathbb{P}_\kappa$ 为命题 3.4 给出的强迫：若$\kappa = \kappa_0$，则取 $\eta = \omega_1$；若 $\kappa \in \mathcal{K} \setminus (\kappa_0 + 1)$，则取$Q_{\kappa', \delta_\kappa}$。令 $\mathbb{P}$ 为 Easton 积强迫 $\Pi_{\kappa \in \mathcal{K}} \mathbb{P}_\kappa$。于是$V^{\mathbb{P}} \vDash \mathrm{ZFC} +$ 广义连续统假设。注意到广义连续统假设在 V中成立，因此根据命题 3.4 下方的注释，δ_κ 在$V^{\mathbb{P}}$ 中仍然是可测基数。

对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}$，我们可以将 $\mathbb{P}$ 在 V 中分解为 $\mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_\kappa \times \mathbb{Q}_{<\kappa}$，其中 $\mathbb{Q}^\kappa = \Pi_{\alpha > \kappa} \mathbb{P}_\alpha$ 且 $\mathbb{Q}_{<\kappa} = \Pi_{\alpha < \kappa} \mathbb{P}_\alpha$。任取一个 $\kappa \in \mathcal{K}$，并令 $\lambda_\kappa =$ 为 $\min(\mathcal{K} \setminus (\kappa + 1))$（若 $\kappa = \max(\mathcal{K})$），则令 $\lambda_\kappa = \infty$）。由此很容易看出，$\mathbb{Q}^\kappa$ 是 $<\lambda_\kappa$-策略闭的。另请注意，κ 是超紧的，并且在任何不破坏广义连续统假设的 $<\kappa$-有向闭强迫下不可毁；我们有 $V^{\mathbb{Q}^\kappa} \vDash$ “κ 是 $<\lambda_\kappa$-超紧的，并且在任何不破坏广义连续统假设的 $<\lambda_\kappa$-有向闭强迫下不可毁”。

我们可以将 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 分解为 $\mathbb{P}_{\kappa_0}$ 与一个 $<\lambda_{\kappa_0}$-策略闭强迫在V_κ中的乘积。另请注意，若 $i_W :\ V^{\mathbb{Q}^\kappa} \to M$ 是由正规测度给出的超幂映射W，定义在 δ_κ 上，且 κ 在 M中不可测，则我们可以将 i_W 提升为定义域为$V^{\mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_{\kappa_0}}$的嵌入。因此不难看出，$\kappa$ 在$(\delta_\kappa,\ \lambda_\kappa)$-强紧致于 $V^{\mathbb{P}}$，论证见命题3.2 和注3.3。

由于 $\kappa \in \mathcal{K}$ 是任意的，因此可得 κ 恰好是 δ_κ中的 $V^{\mathbb{P}}$ -强紧致基数，这由定理2.2得出。此外，κ_0 是 δ_{κ_0}中的最小 $V^{\mathbb{P}}$-强紧致基数。另外，在$(\delta_\kappa, \kappa]$ 对每个 $\kappa \in \mathcal{K}$而言，都不存在强紧致基数。这意味着不存在强紧致基数 $\leq \sup(\mathcal{K})$。因此，根据本节开头的假设，在 $V^{\mathbb{P}}$中不存在强紧致基数。□

在上述定理中，$\kappa \in \mathcal{K}$ 不一定是 δ_κ-强紧致基数中最小的一个，如果 $\kappa \neq \kappa_0$。对于 $\kappa = \kappa_0$，我们使用命题3.4 给出的强迫，而不是命题3.2 给出的强迫，因为如果 $\kappa_0 = \delta_{\max(\mathcal{K})}$，我们需要保留 κ_0 的可测性。

接下来，我们结合定理4.1 和定理4.6。

定理 4.7。假设 $\mathcal{A}$ 是超紧致基数类 $\mathcal{K}$ 的一个子类，且不包含其任何极限点；$\langle \delta_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K} \rangle$ 是一个递增的可测基数序列，使得对于任意 $\kappa \in \mathcal{A}$，都有 $\delta_\kappa < \kappa$。那么在某个泛型扩张中，对于任意 $\kappa \in \mathcal{A}$，κ 恰好是 δ_κ-强紧致的。此外，如果 $\delta_\kappa > \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$，那么 κ 是最小的恰好 δ_κ-强紧致基数。

证明。对于每个 $\kappa \in \mathcal{A}$，令 $\eta_\kappa = (2^{\sup(\mathcal{A} \cap \kappa)})^+$；如果 $\kappa < \sup(\mathcal{K})$，令 κ' 为大于 κ 的最小 2-马洛基数；否则令 $\kappa' = \kappa$。令 $\mathbb{P}_\kappa$ 为

- 强迫 $Q_{\kappa',\ \delta_\kappa}$，如果 $\delta_\kappa \leq \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$,
- 命题所给出的强迫 3.2，其中 $\eta = \eta_\kappa$ 且 $\delta = \delta_\kappa$，如果 $\kappa = \sup(\mathcal{A})$,
- 命题 3.4 给出的强迫，其中 $\eta = \eta_\kappa$ 且 $\delta = \delta_\kappa$；否则。

令 $\mathbb{P}$ 为东森积强迫 $\Pi_{\kappa \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_\kappa$。那么对于每个可测基数 δ，若$\delta \neq \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$，则 δ 在 $V^{\mathbb{P}}$中仍是可测的。

任取 $\kappa \in \mathcal{A}$。同样，我们可以将 $\mathbb{P}$分解为 $\mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_\kappa \times \mathbb{Q}_{<\kappa}$。令 $\lambda_\kappa = \min(\mathcal{A} \setminus (\kappa+1))$。那么需要考虑两种情况：

► $\delta_\kappa > \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$。如果 $\delta_{\lambda_\kappa} > \kappa$，那么 $\mathbb{Q}^\kappa$ 是 $<\kappa$-有向闭的，并且 $\mathbb{Q}_\kappa$ 的大小小于 δ_κ。因此， κ 是 δ_κ-强紧的 $V^{\mathbb{P}}$ 中最小的恰好基数，依据定理 4.1中的论证。

如果 $\delta_{\lambda_\kappa} \leq \kappa$，那么 κ 在 $V^{\mathbb{Q}^\kappa}$中是 $<\lambda_\kappa$-超紧的。注意到 $\mathbb{Q}_\kappa$ 的大小小于 δ_κ，由此可知， κ 在 $V^{\mathbb{P}}$中是 $(\delta_\kappa, \lambda_\kappa)$-强紧的。

► $\delta_\kappa \leq \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$。如果 $\delta_\kappa < \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$，那么 $\sup(\mathcal{A} \cap \delta_\kappa) < \delta_\kappa$。我们可以将 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 分解为 $\Pi_{\theta \in \mathcal{A}}$、$_{\delta_\kappa \leq \theta < \kappa} \mathbb{P}_\theta$ 和 $\Pi_{\theta \in \mathcal{A} \cap \delta_\kappa} \mathbb{P}_\theta$的乘积。然后，根据定理 4.6， κ 在 $V^{\mathbb{Q}^\kappa \times \mathbb{P}_\kappa \times \Pi_{\theta \in \mathcal{A}}}$中恰好是 $(\delta_\kappa, \lambda_\kappa)$-强紧的，$_{\delta_\kappa \leq \theta < \kappa} \mathbb{P}_\theta$。还要注意， $\Pi_{\theta \in \mathcal{A} \cap \delta_\kappa} \mathbb{P}_\theta$ 的大小小于 δ_κ，由此可知， κ 在 $V^{\mathbb{P}}$中恰好是 $(\delta_\kappa, \lambda_\kappa)$-强紧的。

若 $\delta_\kappa = \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$，则 δ_κ 是 $\mathcal{A}$ 在 V中且 $\mathcal{A} \cap [\delta_\kappa, \kappa) = \emptyset$的可测极限点。于是 κ 恰为 $(\delta_\kappa, \lambda_\kappa)$-强紧致基数（由注 3.3）。

因此，在 $V^{\mathbb{P}}$ 中， κ 恰为任意 $\kappa \in \mathcal{A}$ 的 δ_κ-强紧致。此外，若 $\delta_\kappa > \sup(\mathcal{A} \cap \kappa)$ 属于 $V^{\mathbb{P}}$，则 κ 是最小的恰为 δ_κ-强紧基数。

定理 4.7的证明至此完成。 □

这肯定地回答了问题1.2 。

5. 开放问题

根据 Goldberg 在 [Gol20], 中的结果，不难看出以下定理成立 s:

定理 5.1 ([Gol20])。 假设 κ 是一个几乎强紧致基数。那么以下情况恰有一种成立：

(1) κ 的余终性为 ω，且 κ 不是几乎强紧致基数的极限 .
(2) κ 是最小的 ω_1-强紧基数，但 κ 不是强紧致的。*(3)* κ 是一个强紧基数。*(4)* κ 是一个强紧基数的后继。*(5)* κ 是一个非强紧致的几乎强紧致基数极限。

根据定理 4.4，我们证明了在适当的大基数假设下，(1) 在一致性意义下是可能的。(3)、(4) 和 (5) 显然成立。然而，我们不知道 (2) 是否可能。

问题 5.2. 如果最小的几乎强紧致基数就是最小的 ω_1-强紧基数，它是否必然是强紧致的？

在假设 奇异基数假设 的条件下，Goldberg 在 [Gol20定理 5 中7] 对这个问题给出了肯定的回答。因此，若要得到否定的相容性结果，就必须在 奇异基数假设 以下无界多个基数处将其违背 κ。

参考文献

[AC01] Arthur W. Apter 和 James Cummings。Identity crises and strong compactnessii. strong cardinals。《数学逻辑档案》，40(1):25–38，2001。[Apt96] Arthur W. Apter。Patterns of compact cardinals。《纯粹与应用逻辑年刊》，89:101–115，1996。[BM14a] Joan Bagaria 和 Menachem Magidor。群根与强紧致基数。《美国数学会汇刊》，366(4):1857–1877，2014。http://www.jstor.org/stable/23812931。[BM14b] Joan Bagaria 和 Menachem Magidor。论 ω_1 强紧致基数。《符号逻辑杂志》，79(1):266–278，2014。10.1017/jsl.2013.12。[Cum10] James Cummings。迭代强迫与初等嵌入。施普林格数学专著丛书（Springer-Verlag，柏林），2010。[Git20]Moti Gitik。论 σ-完备一致超滤。预印本，2020。https://www.tau.ac.il/~gitik/scuu4-20.pdf。[Gol19] Gabriel Goldberg。《超幂公理》。博士论文，哈佛大学，2019。[Gol20] Gabriel Goldberg。终极 L 与 V的一些组合性质。预印本，2020。https://arxiv.org/pdf/2007.04812.pdf。[Gol21] Gabriel Goldberg。强紧致基数与序数可定义性。预印本，2021。https://arxiv.org/pdf/2107.00513.pdf。[Jec03] Thomas Jech。《集合论》。施普林格数学专著丛书（Springer-Verlag，柏林）。第三个千年版，修订并扩充，2003。[Kan94] Akihiro Kanamori。《更高的无穷：集合论中的大基数及其起源》。施普林格数学专著丛书。Springer-Verlag，柏林，1994。[Kun78] Kenneth Kunen。饱和理想。《符号逻辑杂志》，43(1):65–76，1978。[Lav78] Richard Laver。使 κ 的超紧致性在 κ-有向闭强迫下不可毁。《以色列数学杂志》，29(4):385–388，1978。[LHR22] Chris Lambie-Hanson 和 Assaf Rinot。Knaster 及其相关概念 III：次可加着色。《符号逻辑杂志》，2022。[Mag76] Menachem Magidor。第一个强紧基数有多大？《纯粹与应用逻辑年刊》，10:33–57，1976。[Usu20] Toshimichi Usuba。关于 δ-强紧致基数的一则注记。《拓扑学及其应用》，2020。https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107538。

以色列拉马特甘 5290002，巴伊兰大学数学系电子邮箱地址：zhixingy121@gmail.com

英国利兹 LS2 9JT，利兹大学数学学院电子邮箱地址：J.Yuan@leeds.ac.uk