arXiv:2302.13174v1 [math.HO] 25 Feb 2023

神奇置换多胞体

DJORDJE BARALI´C 和 LAZAR MILENKOVI´C

Abstract. 我们介绍一种称为幻排列多面体的配置，它展示了数字 $\{1, 2, 3, \ldots, 24\}$ 在置换多面体顶点上的排列方式，使得每个正方形面的数字之和为 50，每个六边形面的数字之和为 75。

1. What is the permutohedron?

对称物体自古以来就吸引着人类的好奇心。人们常常将它们与神秘和魔法般的特性联系起来。然而，它们也推动了严谨的研究，催生了新的数学和科学学科以及跨学科研究。早期的例子包括五种正多面体，也称为柏拉图立体，见图 1。

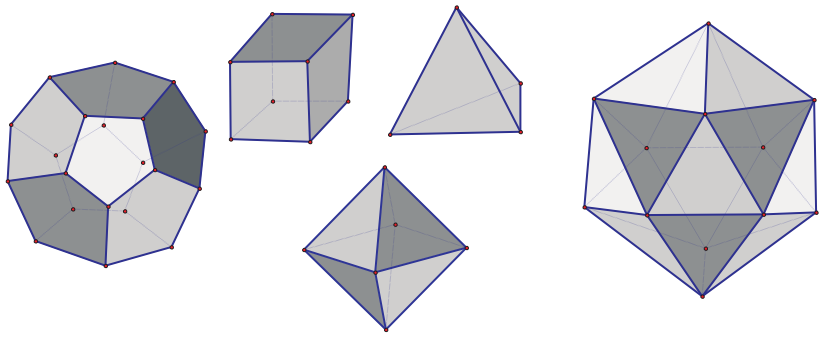

Figure 1. 柏拉图立体

为什么这类物体如此独特，又会出现在自然界中许多令人着迷的地方？从哲学角度来说，这是因为它们是完美的几何物体，而自然形态往往趋于完美。数学是我们用来解释这种完美性的语言。几何学捕捉它们的形态和显而易见的外在美感，而群论、数论和代数等其他数学分支则描述它们深层而隐秘的性质。

我们将在此介绍的这个立体，是现代数学中的一个基本对象。它是将正八面体的所有顶点截去后得到的，见图2。它的面都是正多边形：六个正方形和八个正六边形。这个立体有24个顶点和36条棱，每个顶点处有三条棱相交。它首次见诸数学文献是在1911年，提出者是荷兰数学家 Pieter Hendrik Schoute；他以研究正多面体及其高维类比——正多胞体——而闻名。Georges Th. Guilbaud 和 Pierre Rosenstiehl [1] 于1963年将其命名为排列多胞体。

它的名称由两个词组合而成：permute（排列）和 hedra（立体的面）。集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的元素有 24 种排列，排列多胞体也有 24 个顶点，但我们能否给出更令人满意的解释来说明

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 00A08。次分类号 05B30 .

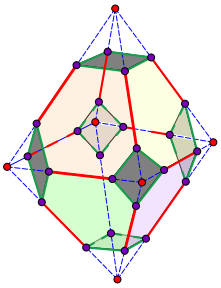

FIGURE 2. 截角八面体

它为何得名？当然可以！最简单的方法是将它介绍为一族凸多胞体中的一员。在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，凸多胞体是该空间中有限个点的凸包。根据这一定义，我们将凸多边形和多面体的基本特征推广到了更高维空间。事实上，我们可以看到二维和三维空间中的多边形与多面体之间存在几何类比。例如，除了顶点和棱之外，凸 4 多胞体还具有作为二维面的多边形，以及作为三维面的多面体。更一般地，凸 n多胞体具有所有维数为 k的面，其中 $0 \leq k \leq n-1$；而维数为 $n-1$ 的面则称为面。对多胞体感兴趣的读者，可参阅 G¨unter Ziegler[3] 所著的优秀著作《多胞体讲义》。

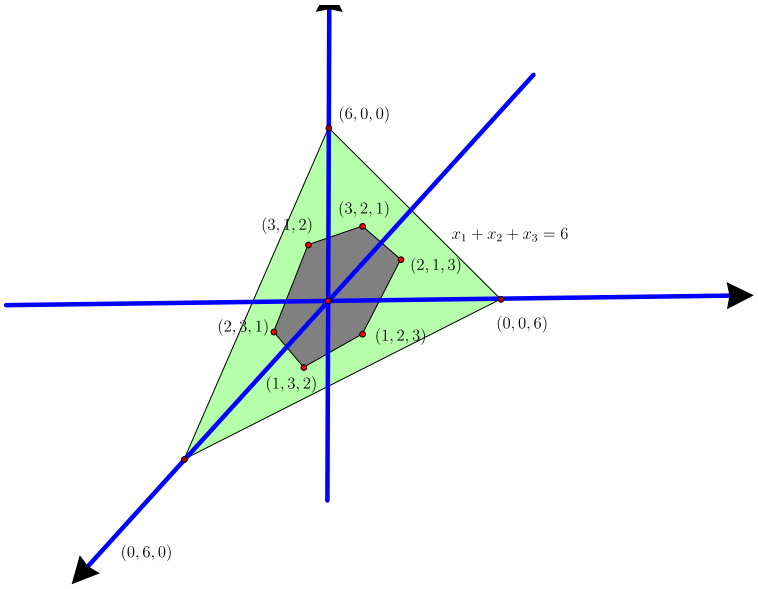

FIGURE 3. 排列多胞体是其顶点的凸包

n 阶排列多胞体是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 $(n+1)!$ 个点的凸包，这些点都是 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 坐标的排列。因此，正六边形就是一个二维排列多胞体。由于顶点坐标之和始终为

$(n+1)(n+2)/2$，因此 n 阶排列多胞体位于超平面

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，见图 3。它有 $(n+1)!/2$ 到 $2^{n+1} - 2$ 个面，每个面都对应于 $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ 的一个真子集。最后这一点可以从几何上看出，因为 n 维排列多胞体也可以通过截去 n 维单纯形的所有面来定义，见图 4。n 维单纯形是一般位置下 $n+1$ 个点的凸包，是三角形和四面体的 n 维类比。n 维排列多胞体周围的 k 维面具有令人兴奋的组合性质。维数为 k 的面的总数等于 $(n-k+1) \cdot S(n+1, n+1-k)$，其中 $S(n, k)$ 表示第二类斯特林数——将一个含有 n 个元素的集合划分为 k 个非空子集的方法数。

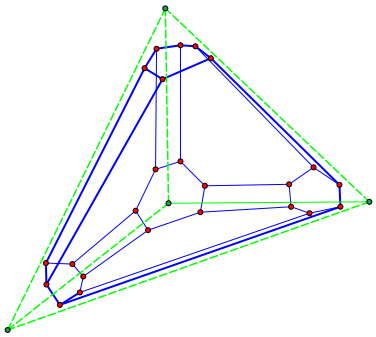

FIGURE 4. 四面体的完全截角

置换群 S_{n+1} 通过置换坐标作用于 n 阶排列多胞体的顶点，而这正是该对象外观华丽的主要原因。事实上，排列多胞体有助于理解排列和对称群 S_{n+1}。对于任意群 G 及其生成元集合 S，我们可以赋予一个边着色有向图 $\Gamma(G, S)$：其顶点集是 G 的元素，并且当且仅当 $h = gs$ 属于 G 时，才存在一条从 $g \in G$ 指向 $h \in G$ 、颜色由 $s \in S$ 标记的有向棱。这样的图称为 G 的凯莱图。事实证明，n 阶排列多胞体的顶点可以用排列标记，使得其棱构成 S_{n+1} 的凯莱图，其中生成元集合为对换

$$(1, 2), (2, 3), \ldots, (n, n+1),$$

即交换两个相邻元素的对换，见图 5。

2. MAGIC FIGURES AND SOLIDS

幻方是已知最早的娱乐数学对象之一，其历史至少可追溯到公元前190年。过去，人们赋予它们神秘学或神话意义，因此它们常作为符号出现在艺术作品中。n 阶幻方是由 n^2 个数字排列在 $n \times n$ 个正方形中构成的序列，使每一行、每一列以及两条对角线上的数字之和都相同，见图6。这个和也称为幻方常数。数学家还研究了具有额外约束的幻方，例如超幻方、泛对角幻方、对称幻方等。

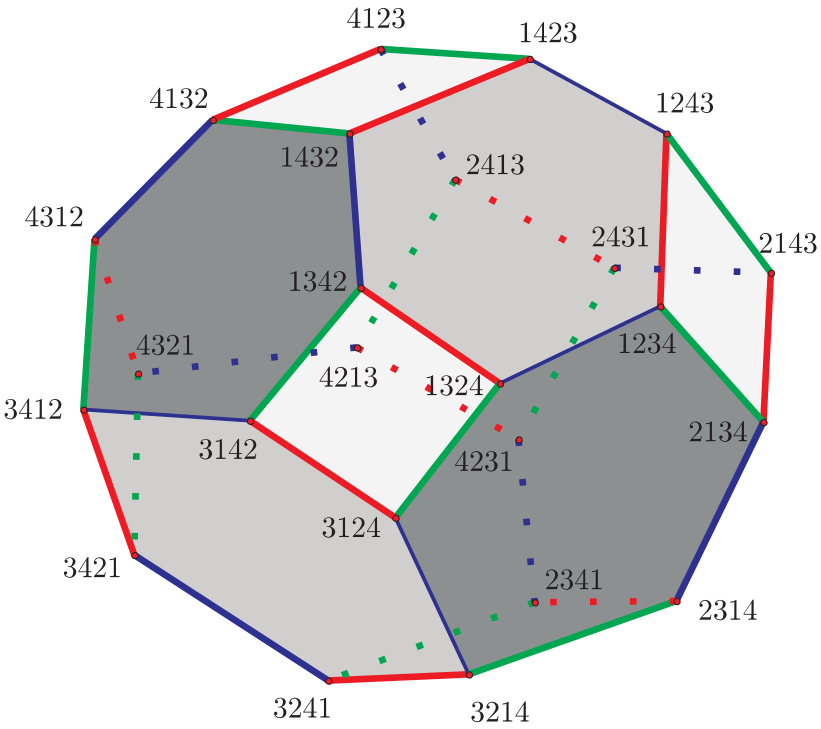

FIGURE 5. 作为凯莱图的置换多面体 S_4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

FIGURE 6. 幻方

根据 n 除以4的余数，有多种构造高阶幻方的方法。如果 n 是奇数，我们就称该幻方为奇数阶幻方。当4整除 n 时，称其为双偶数阶；而当 $n \equiv 2 \pmod 4$时，则称其为单偶数阶。单偶数阶幻方更难构造。有些方法可以为给定的 n构造出多个幻方，而另一些通常较简单的方法则只能构造出一个给定阶数的幻方。借助一些变换和对称性，我们还能构造出更多解。然而，如何对给定阶数的所有幻方进行分类，长期以来一直是个悬而未决的问题。许多著名数学家都研究过这个问题，包括约翰·康威、Simon de la Loub`ère 和克劳德·巴歇；后者撰写了*Probl`èmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*，这是17世纪初最早的娱乐数学著作之一。

幻方的理念也被应用于其他平面图形，甚至高维图形。这里我们考虑一个类似的问题：目标是将集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 中的数字排列在正 m 面体的顶点上。我们立即排除了四面体和二十面体的这种可能性，因为任何两个共用一条棱的三角形，其位于公共棱对面的顶点上都会有相同的数字。找到这样的排列并不难；示例见 7。显然，在任何此类配置中，立方体每个面的顶点数字之和都必须是 18。简单分析后可知，除去立方体的旋转，共有六种不同的可能排列。

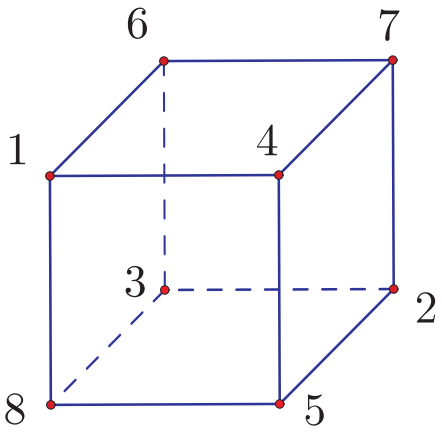

FIGURE 7. 幻立方

我们来考虑十二面体的情况。若用 S 表示每个五边形上数字之和，那么我们有

$$12S = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 20) = 630,$$

但这是不可能的，因为 $12 \nmid 630$。除了立方体，其他柏拉图立体在顶点放置数字时都没有令人惊奇的配置。我们可以进一步探讨其他多面体的情况，以及能否放宽约束，同时保留某些神奇性质。

下一个正则 n 边形棱柱的例子很有说明性。让我们尝试将 1、2、.....、$2n$ 排列在这个棱柱的顶点上，使得每个底面上的数字之和为 A，且棱柱每个矩形面上的数字之和为 B。我们得到以下条件：

$$2A = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) \quad \text{and} \quad nB = 2n(2n+1)$$

第二个条件给出 $B = 4n+2$，但第一个条件要求 n 必须是偶数。很容易为 $n = 2k$ 构造出这样的排列；其中一种可能性如图 8 所示。

3. MAGIC PERMUTOHEDRON

这个魔方形 $2n$ 边形棱柱的例子启发我们思考以下问题：

能否将数字 1、2、.. . 、24 放置在置换多面体的顶点上，使每个正方形面的数字之和相同，且每个六边形面的数字之和也相同？

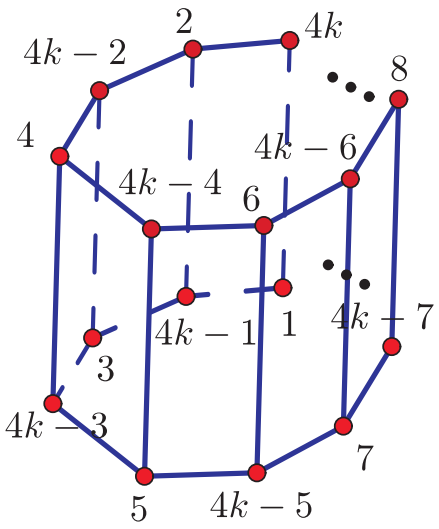

FIGURE 8. 幻 $2k$ 边形棱柱

我们很容易得出，每个正方形面和六边形面的数字之和分别应为 50 和 75。然而，如果尝试手动明确地找出一种排列，我们很可能会失败，因为一开始可供选择的空间太大。另一方面，作者们尝试加入更多自然约束也未能成功，因此我们编写了一个程序来替我们完成这项工作！

结果令人振奋不已。计算机找到了3900064个不同的解（忽略置换多面体的旋转）。然而，这些解的数量还不到总计1292600836944248832000种可能性的 4^{-15}%。计算机找到的一个解如图9所示。

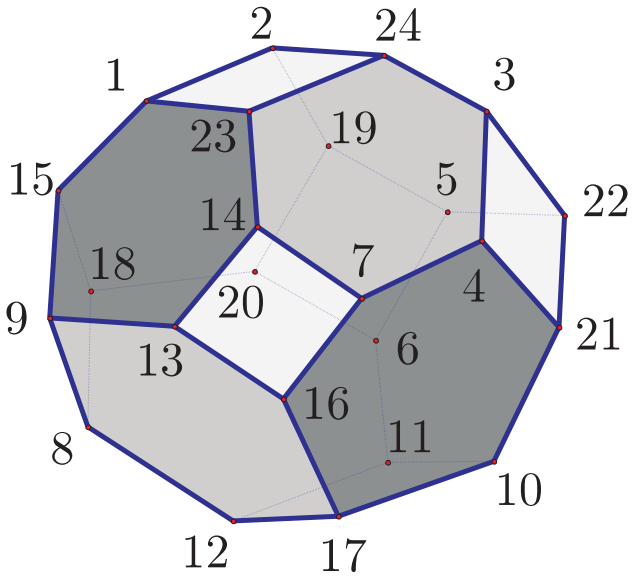

FIGURE 9. 幻方置换多面体

我们想知道，对于 $n \geq 4$，类似的性质是否也适用于 n-排列多胞体。这个条件可以用二维面（六边形和正方形）来表述，也可以用其面来表述；这些面是低维置换多面体的乘积。

Acknowledgements

第一作者的研究经费由塞尔维亚科学、创新与技术发展部通过塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所提供。

References

[1] Georges Th. Guilbaud 和 Pierre Rosenstiehl, *Analyse algébrique d'un scrutin*, 《数学与人文科学》**4**（1963年），9–33。[2] Pieter HendrikSchoute, *Analytic treatment of the polytopes regularly derived from the regularpolytopes*, 《阿姆斯特丹皇家科学院论文集》**11**（1911年），第3期，87。[3] G M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer，数学研究生教材。**152**（1998年）。

Mathematical Institute SASA, Knez Mihailova 36, p.p. 367, 11001, Belgrade, Serbia*Email address*: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Tel Aviv University, P.O. Box 39040, Tel Aviv 6997801, Tel Aviv, Israel*Email address*: milenkovic.lazar@gmail.com