arXiv:2302.13188v1 [math.CV] 25 Feb 2023

支割与黎曼曲面

David Jeffrey 数学系，西安大略大学，伦敦，安大略省，加拿大

摘要

本文讨论如何使用计算软件绘制黎曼曲面。文章强调多值函数 $g(z)$ 的分支与黎曼曲面之间的联系：前者定义在 $g(z)$ 的值域上，后者定义在 $g(z)$ 的定义域上。通过定义函数的自变量 $charisma\, z$ ，阐明二者之间的联系。本文运用这种方法，使用 Maple 绘制了若干曲面。

1 引言

许多作者和计算机系统都曾将复函数的黎曼曲面可视化，且常常呈现出引人注目的图像。 [3] 中收录了令人印象深刻的例子。传统教材通常通过非正式的讨论来介绍黎曼曲面：将分层曲面切开并粘合，从而形成一个连续的（通常会自相穿透的）曲面 [5]。这种方法不适合使用软件创建曲面。 [4], 对此进行了讨论，起因是一个 MATLAB 演示程序。本文将扩展其中所用的方法，以加强值域与定义域之间的联系。

黎曼曲面用于理解多值函数，而多值函数通常是“适当的”单值函数的反函数。例如，指数函数的反函数（即对数）、三角函数的反函数（反三角函数）以及整数次幂的反函数（n次根）。在每种情况下，都有一个单值函数$z = f(w)$，以及一个多值反函数 $w = \overset{\curlyvee}{f}(z)$。对于多值函数，问题在于如何区分并获取多值集合中的各个元素。有两种可能的做法：要么在函数的值域中进行区分，要么在其定义域中进行区分。

2 值域标记

我们从一个常见的多值函数例子开始：对数。如果 $z = e^w$，那么 $w = \ln z$。由于，对于$n \in \mathbb{Z}$, $z = e^{w+2n\pi i} = e^w$，对任意复数 z，对数都有无穷多个值。标准的处理方式定义了两个对数函数。按照 DLMF 的记法 [1, 2], ，我们用 $\mathrm{Ln}\ z$表示一般对数函数，它代表无穷多个值的集合；用 $\ln z$表示主值或主值分支。主值分支定义为 $-\pi < \Im(\ln z) \le \pi$。然而，一般函数的记法含糊得令人沮丧，并会导致诸如以下的表述

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i\ , \tag{1}$$

其中，方程左边有一个变量 z ，右边有两个变量 z, n .

为了更精确地定义对数值，记号

$$\ln_k z = \ln z + 2k\pi i\ , \tag{2}$$

是在 [7] 中引入的。从几何上看，这对应于将对数的值域划分为若干分支，并为每个分支标注名称。见图 1。请注意，$\ln_0 z$ 也表示主值分支。对于每个独立的分支 $\ln_k z$，其定义域包含整个复平面，但沿负实轴有一条不连续线，称为支割。考虑分支时，有时不妨忽略各分支之间的联系，把每个分支视为一个独立的函数。例如，方程 $\ln x = 2$有解 $x = e^2$，但方程 $\ln_1 x = 2$ 无解，因为 2 不在 $\ln_1 x$ 的值域内。

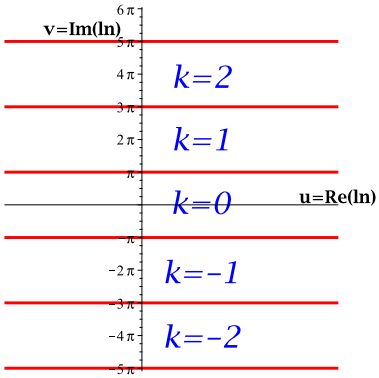

图 1：对数的值域划分为多个分支。各分支用整数 k 标记，并将索引添加到函数记号中：$\ln_k z$。因此，若要指定虚部介于 π 和 3π 之间的对数值，可写作 $\ln_1 z$。

立方根函数是第二个例子。我们有 $z = w^3$，这意味着其反函数为 $w = z^{1/3}$。在复平面上，立方根总是有 3 个值。为了表示这 3 个立方根，我们需要一种能为标签留出空间的记法。由于记法 $z^{1/3}$ 和 $\sqrt[3]{z}$ 添加标签后显得笨拙，我们创建了一个立方根函数名称：$\mathrm{cbrt}_k z$。如图 2 所示，cbrt 的值域被划分为若干部分，其中各分支通过复相位[1]定义。令 ph z 表示主复相位 $-\pi < \mathrm{ph}\, z \le \pi$，我们通过条件 $-\pi/3 < \mathrm{ph}(z^{1/3}) \le \pi/3$来定义主值分支。若用$\omega = e^{2\pi i/3}$表示单位根，且 $\theta = \mathrm{ph}\, z$，则这 3 个分支定义如下

$$\mathrm{cbrt}_k(z) = \mathrm{cbrt}_k(re^{i\theta}) = \begin{cases} r^{1/3}e^{i\theta/3}\,, & k = 0\,, \\ \omega r^{1/3}e^{i\theta/3}\,, & k = 1\,, \\ \overline{\omega} r^{1/3}e^{i\theta/3}\,, & k = -1\,. \end{cases} \tag{3}$$

对于 $\mathrm{cbrt}_k(z)$ 的每个独立分支，其定义域都是整个复平面，并在负实轴上有一条不连续线（支割）。

作为一个值得注意的特殊情形，我们来看 $(-8)^{1/3}$ 的值。这三个立方根分别是 -2，$1+\sqrt{3}\,i$，$\overline{1-\sqrt{3}\,i}$。有些读者可能会惊讶地发现，$(-8)^{1/3}$ 的主分支值并非 -2。主值分支的值是 $\mathrm{cbrt}_0(-8) = 1+\sqrt{3}\,i$，而实数根是分支 1：$\mathrm{cbrt}_1(-8) = -2$。如图 2 所示，该函数的负实值不属于主值分支。

这里需要指出，对数和立方根的主分支值，都是所有主流科学软件（如 MATLAB、Maple 和 Mathematica）返回的唯一值。这也适用于其他多值函数，例如 n 次根和反三角函数。

3 定义域的标记

本文的主要目的是展示，如何将上一节中的标记思路从复函数的值域转移到其定义域，从而为黎曼曲面的图像带来新的视角。多值函数的黎曼曲面建立在其定义域上。对构造过程的一种典型描述是：切开并连接定义域的曲面层。例如，下面是平方根函数 [8]的黎曼曲面的一种描述。

> $z^{1/2}$ 的黎曼曲面是通过将 z 平面替换为由两个曲面层组成的曲面而得到的：R_0 和 R_1，每个曲面层都沿正实轴切开，并且 R_1 位于 R_0前方。 R_0 中裂口的下边缘与 R_1中裂口的上边缘相连，而 R_1 中裂口的下边缘与 R_0中裂口的上边缘相连。

[1]我们使用“复相位”而非“复辐角”这个名称，因为“辐角”一词将用于函数自变量。

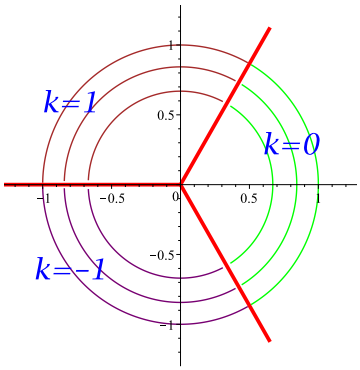

图 2：立方根的值域划分为多个分支。与对数一样，各分支用整数 k 标记。本例中只有 3 个分支，它们由边界 $re^{\pm i\pi/3}$ 和负实轴隔开。

黎曼曲面架设在多值函数的定义域之上；也就是说，给定 $w = \sqrt[\mathcal{C}]{}(z)$，该曲面表示的是 z 的值，而非 w 的值。单凭 z 的值不足以确定 $\sqrt[\mathcal{C}]{}(z)$ 的值，因此，除了 z 的复数值之外，还必须具有某种属性，由 z 的特定取值所拥有，并据此决定函数的值。目前这种属性尚不可见。我们将这种属性称为特征。我们暂且把具有这种特征的变量 z 记为 $z_{\mathcal{C}}$，之后再确定它是什么。

我们的目标是将特征定义为一个数值，使其可以作为垂直于复平面的坐标轴上的纵坐标。我们设置 3 条坐标轴：实轴和虚轴用于确定 z 的复数值，另设一条与它们正交的坐标轴表示特征。第一个例子将采用上文所述的立方根函数。

3.1 立方根的特征

我们首先以式 (3) 中给出的带指标立方根为例，探讨该函数特征的四种可能取法。

3.1.1 以分支指标作为特征

我们已经看到，分支标签 k 用于定义 $\mathrm{cbrt}_k(z)$ 值域中的值，因此我们首先尝试如下赋值

$$\mathcal{C} = k \ .$$

将特征设为指标 k 后，我们按如下方式绘制相应的曲面。我们在复平面上生成一个点数组。然后创建一个由 3 个元素组成的绘图结构，其中包含复数的实部和虚部，以及特征。将该结构应用于复数值数组三次，分别对应特征的三个值。最后，将完整数组传递给 Maple 中的三维绘图命令。得到的图像如图 3 所示。

特征的作用只是抬升平坦的复平面，使三个平面上下堆叠并彼此间隔。图中的垂直墙面是 Maple 表示这些平面不连续相连的方式。我们可以这样理解这幅图：设想一个位于函数值域 中的点[2] 。现在，该点在值域中绕着原点转动。每当该点越过分支边界时，特征就会随着分支编号发生不连续的跳跃。这种不连续变化在定义域中表现为从一个片层跳到另一个片层。

3.1.2 连续特征

我们的第一个选择有个不尽如人意之处。如果我们沿着 $z^{1/3}$ 值域中的点移动，它所取样的复数值会连续变化。不连续性完全是由分支标签不连续造成的。

[2]或者更形象地说，是一只蚂蚁。

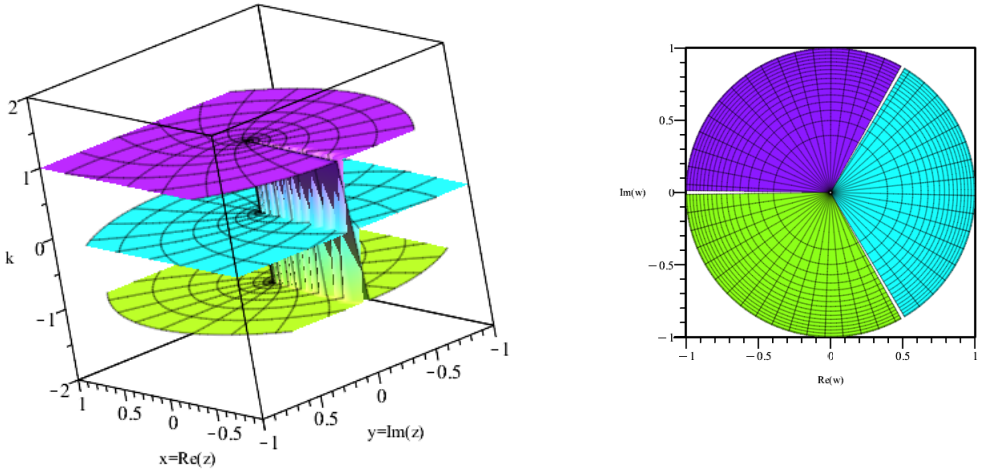

图 3：左侧展示了 $z^{1/3}$ 作为黎曼曲面的定义域；右侧则是 $z^{1/3}$的值域。通过标注分支指标，将黎曼曲面的各个曲面层区分开来。$\mathrm{cbrt}_k(z)$ 的各分支采用与黎曼曲面各曲面层相同的颜色。顶层对应于 $k=1$，这意味着该曲面层上的所有 z 值都映射到 $\mathrm{cbrt}_1(z)$，如值域中的对应颜色所示。其他两个分支也同理。还可以注意到，各曲面层之间的连接是不连续的，这反映了在值域中移动时分支编号发生的不连续变化。

这就像驾车穿过两个省或州之间的边界。道路是连续的，土地也是连续的，但突然之间，所有人都在说法语、卖烟花[3]。

在上一节中，我们看到，最简单的特征选择遗漏了立方根的一个重要性质，即各分支之间存在连续过渡。我们希望找到一种能够体现这一行为的特征。在寻找特征的度量时，重要的是[4] 不要只关注 z的定义域，尽管曲面会位于定义域上。我们试图表示函数的多值性，而多值性由值域决定。前文提到，在值域中绕原点转一圈的点会呈现连续行为。由此可知，立方根的相位可能是更适合作为特征的量。因此，给定 $w=\mathrm{cbrt}_k(z)$，我们令 $\mathcal{C}=\mathrm{ph}(w)$。相位根据 w的值计算，也就是根据 $z^{1/3}$的值域计算，而不是根据 z的值计算。这个选择得到的黎曼曲面如图 4 所示。它消除了上一节中看到的跳跃，但仍不理想：在 $z^{1/3}$ 的值域中，分支 $k=1$ 平滑地连接到分支 $k=-1$，而图 2 中的黎曼曲面却是不连续连接的。因此，我们现在尝试第三种选择，以实现所有分支过渡处的平滑连接。

3.1.3 连续且具有周期性魅力值

在 $z^{1/3}$ 的值域中，我们看到其行为本质上是周期性的，即对于 $x<0$

$$\lim_{y\downarrow 0}\mathrm{cbrt}_1(x+iy)=\lim_{y\uparrow 0}\mathrm{cbrt}_{-1}(x+iy)\ . \tag{4}$$

具有这些性质的函数是 $\mathcal{C}=\sin\theta\propto\Im(w)$。图 5 展示了采用这一选择所生成的黎曼曲面。该曲面处处连续且光滑。现在它在两处与自身相交：当 $\mathcal{C}=-1/2$ 位于负虚轴上时，分支 $k=-1$ 与 $k=0$ 相交；当 $\mathcal{C}=1/2$ 位于正虚轴上时，$k=0$ 与 $k=1$相交。曲面沿负实轴在 $\mathcal{C}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 处改变颜色（分支）。

[3]至少我从多伦多开车到蒙特利尔时看到的是这样。[4]这个词是不是太夸张了？
好吧，至少是有帮助的。

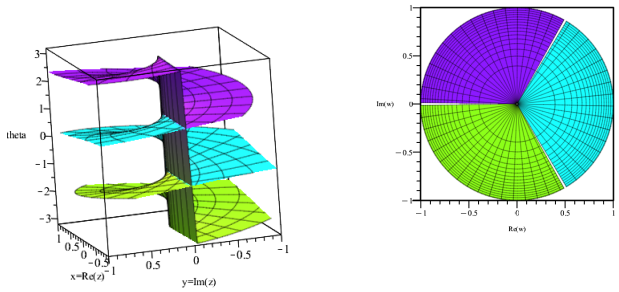

图 4：通过将立方根的相位用作特征而得到的黎曼曲面。相位的最小值为 $-\pi$，并在分支 $k=-1$ 覆盖其定义域（即整个复平面）时单调递增至 $-\pi/3$。这是定义域中的绿色曲面。其他两个分支也重复这一行为。各曲面相接处平滑相连。Maple 将曲面的末端在 $\mathcal{C}=\pi$ 处不连续地连接到了 $\mathcal{C}=-\pi$。

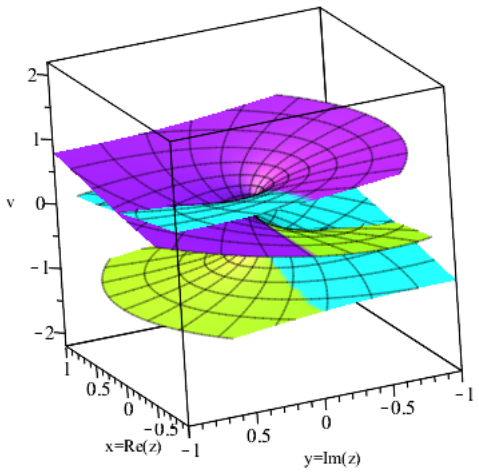

图 5：立方根函数的周期性黎曼曲面。其特征基于 $\sin\theta$，其中 $\theta=\text{ph}(z^{1/3})$。这也可以等价地基于 $z^{1/3}$ 的虚部。由于黎曼曲面绘制在定义域 z 上，而颜色则基于值域 $z^{1/3}$，因此在定义域中沿负实轴、满足 $\mathcal{C}=-\sqrt{3}/2$, 0, $\sqrt{3}/2$ 的区域，颜色会发生变化。

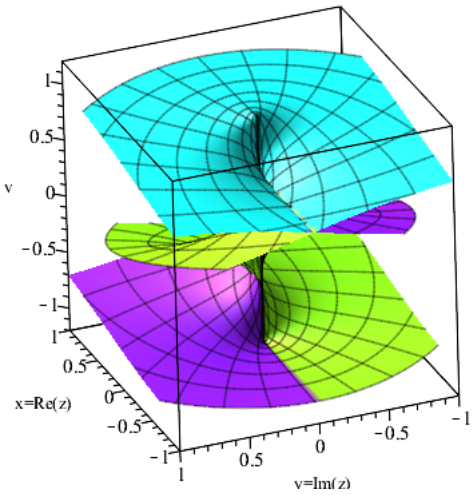

图 6：立方根的黎曼曲面，使用 $\cos\theta$ 作为特征。该曲面的形状与使用正弦函数时相同，但分支之间的划分有所变化。

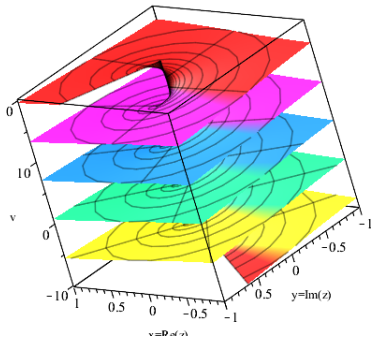

图 7：对数的无限黎曼曲面的一部分，按分支指标着色。

3.1.4 一种替代的连续周期曲面

也可以使用特征 $\mathcal{C} = \cos\theta$。结果如图 6 所示。请注意，现在主值分支在曲面顶部十分显眼。

3.2 最后，对数

在 [4], 中，我们对尝试绘制对数的黎曼曲面进行了比较。其中一种尝试被证明并不理想。只要强调应从函数值域的角度思考，我们就能立即明白原因。我们选择对数的实部作为特征，但只需看一眼 log 的值域就会发现，沿着平行于实轴的方向移动，点始终不会离开它起始时所在的 log 分支。要得到对数的曲面，我们必须沿着平行于虚轴的方向移动，才能从一个分支跨越到下一个分支。事实证明，这才是正确的选择。我们可以像处理立方根那样，尝试使用 $\ln_k z$ 的分支指标，但这样仍会得到被跳跃隔开的平坦线段。如 [**?**], 所示，对数的一个简单特征是它的虚部。结果如图 7 所示，其中颜色也会随分支而变化。

4 结论

许多关于多值函数的论述都着重于函数的定义域，并关注定义域中的支割线。例如，参见 [1, 2, 10]。本文希望说明，同时从值域和定义域的角度思考，能让理解变得更加容易。

参考文献

[1] Abramowitz,M. 与 Stegun,I.，《数学函数手册：公式、图表和数学表格》。美国政府印刷局，1964 年。第 10 次印刷，1972 年 12 月。[2] Frank W. Olver、Daniel W. Lozier、Ronald Boisvert、Charles W. Clark，《NIST 数学函数手册》，剑桥大学出版社，2010 年。[3]Michael Trott，《黎曼曲面的回归》，《Mathematica》期刊，10(4)，2011 年。dx.doi.org/doi:10.3888/tmj.10.4-1[4] Robert M. Corless 和 David J. Jeffrey。绘制初等黎曼曲面。《SIGSAM 公报》，32(1)：11–17，1998 年。[5] Elias Wegert，《复函数可视化》，ISBN 978-3-0348-0179-9，Birkh¨auser，2012 年[6] R.J.Bradford、R.M.Corless、J.H.Davenport、D.J.Jeffrey、S.M. Watt：关于复分析初等函数的推理。《人工智能数学年刊》，第 36 卷，2002 年，第 303–318 页。[7] D.J. Jeffrey、D.E.G.Hare、Robert M. Corless：展开朗伯 W 函数的各分支。《数学科学家》，21，1–7（1996）[8] James Ward Brown 和 Ruel V. Churchill，《复变函数及其应用》，第 8 版，麦格劳-希尔，2009 年。[9] John H. Mathews 和 Russell W. Howell，《复分析》，第 5 版，琼斯与巴特利特出版社，2006 年。[10] Kahan,W.，《复初等函数的支割线》。《数值分析的最新进展》（编者：A. Iserles 与 M.J.D. Powell），克拉伦登出版社，牛津，1987 年，第 165–211 页。