arXiv:2302.13196v1 [math.GR] 26 Feb 2023

平坦秩大于 1 的群

GEORGE A. WILLIS

摘要。本文介绍了一种一般方法，用于寻找平坦秩大于 1 的全不连通局部紧群的子群。该方法利用群的内部结构，特别是给定平坦群的 Levi 子群，以构造一个新的平坦群；在附加假设下，该群的平坦秩比给定群的平坦秩大 1。

1. 引言

全不连通局部紧（t.d.l.c.）群 G 的子群 H 若存在一个紧开子群 $U \le G$，使其对每个 $x \in H$都实现最小值，也就是说， U 取得正整数集合中的最小值，则称其为平坦

$$\left\{[xVx^{-1} : xVx^{-1} \cap V] \mid V \le G \text{ compact and open}\right\}.$$

这个最小值称为 x的尺度，记作 $s_G(x)$。 H的单尺度子群为 H_u:
$= \left\{h \in H \mid hUh^{-1} = U\right\}$，且 H/H_u是一个自由阿贝尔群，[16, 推论 6.15]。 H 的平坦秩就是这个自由阿贝尔群的秩。每个单生成群 $\langle x\rangle$都是平坦群；若存在一个由 x 正规化的 $U \le G$，其平坦秩为 0，否则平坦秩为 1。本文旨在寻找 G 中平坦秩大于 1 的子群。

已知平坦秩大于 1 的平坦群实例，出现在环境群 G 具有该平坦群所关联的额外结构的情形中。例如，若 G 是 $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Q}_p)$，则对角矩阵群是平坦群，其平坦秩为 $n-1$，等于 $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的李秩，见 [16, 例 6.11]。这是关于局部域上的半单代数群的一般结果的一个特例，而该一般结果本身源于这样一个事实：若 G 是某个建筑的自同构群，且该建筑有一个几何秩为 r的公寓，那么 G 有一个平坦秩为 r的阿贝尔子群，见 [2, 定理 A 和 B] 以及 [? 定理 1]。这些结果表明，在若干重要的群类中，平坦秩与熟知的秩概念相吻合，这促使人们研究一般全不连通局部紧群中的平坦子群及其平坦秩。

然而，对于一般的全不连通局部紧群，目前没有寻找更高秩平坦群的方法。在 G 是局部域上的李群且 $x \in G$ 的情况下，$\mathrm{Ad}(x)$ 是作用于 G 的李代数上的线性算子，由 $\mathrm{Ad}(x)$ 生成的算子代数是交换的。这个交换代数是 G 的一个阿贝尔子群的李代数，该子群的平坦秩可能大于 1；此外，它等于 $\mathrm{Ad}(x)$ 的特征值的绝对值的个数，而这些绝对值可借助凯莱-哈密顿定理求得。虽然这种方法不能推广到一般的全不连通局部紧群，但如果 x 的中心化子 $C(x)$ 包含一个满足 $s_{C(x)}(y) > 1$ 的 y，那么子群 $\langle x, y\rangle$ 是平坦的，其平坦秩等于 $\langle x\rangle$ 的平坦秩加 1。下文给出的主要结果——定理 4.1——通过将 x 的中心化子替换为 x 的更大*Levi* 子群，改进了这一思路；也就是说，该子群由所有满足 $\{x^n y x^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 预紧的 y 构成。因此，它将平坦群与 G 中的 Levi 子群和抛物子群联系起来；这些子群在 [3] 中仿照

本研究得到了澳大利亚研究委员会资助项目 FL170100032 的支持。

相应的代数群中同名子群定义。所找到的平坦群包含 y 和对 x 的一种修改。

本文结构如下。第 2 节回顾关于尺度和平坦群的基本结果，并在几种情况下加以强化。第 3 节给出联系 Levi 子群与极小化子群的预备结果，第 4 节则证明主定理。主定理的证明启发我们对关系“y 属于 x的 Levi 子群”进行对称化，并在第 5 节探讨这一对称化关系。

2. 尺度技巧

本节汇集了关于自同构的尺度及相关概念的结果，这些结果将在主定理的证明中用到。这里使用的术语有些是在所引论文发表之后才引入的。引理 2.3 强化了已知结果，而定理 2.12 则是新的（尽管相当显然）。

2.1. 整齐子群。 文献 [15] 从子群的整洁性角度，给出了使自同构达到最小值的子群的结构刻画；而 U 对于 α 的整洁性，则在 [13] 中通过子群 $U_+ = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \alpha^k(U)$ 和 $U_- := \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \alpha^{-k}(U)$ 定义如下。（在此定义中，零是自然数。）

定义 2.1。 设 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$，且 U 是 G的一个紧开子群。那么U 对于 α 整齐 当且仅当

TA: $U = U_+U_-$ and
TB: $U_{++} := \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \alpha^k(U_+)$ is closed.

那么 [15, 定理 3.1] 说明， $U \le G$ 对于 α 是极小化的，当且仅当它对于 α是整齐的。此外， $\alpha(U_+) \ge U_+$ 以及 $s(\alpha) = [\alpha(U_+): U_+]$ 如果 U 对于 α是整齐的。

紧开子群 U 称为对于 α 上整洁，如果它满足**TA**；若满足**TB**，则称为下整齐。以下是 [13, 引理 1]。

引理 2.2。 设 U 是 G 的一个紧开子群，且 $\alpha \in$自同构群(G)。那么存在 $n \ge 0$，使得 $\bigcap_{k=0}^{n} \alpha^k(U)$ 对于 α是上整洁的。

根据定义可立即得出，如果 U对于 α是极小化的，那么$\alpha(U)$也如此，因此对于整齐子群 α也同样成立。另一方面，可以证明，见 [13, 引理 10], ，两个对于 α 整齐的子群的交集对于 α也是整齐的。因此，极小化子群也有同样性质，且下文将用到这一事实。设 U对于 α是整齐的，则子群 $U_0 := \bigcap_{k\in\mathbf{Z}} \alpha^k(U) = U_+ \cap U_-$在 α作用下保持不变，并将频繁出现。另一个将会用到的事实是

$$\bigcap_{k=0}^{n} \alpha^k(U) = U \cap \alpha^n(U) = U_+\alpha^n(U) = \alpha^n(U)U_+. \tag{1}$$

下述内容本质上是 [13, 引理 9], ，不过第（2）部分在较弱的假设下得出了相同结论，并给出了证明以求完整。

引理 2.3。 设 $\alpha \in$ 自同构群(G)，并假设 U 对 α 是整齐的。

（1）若 $u \in U$ 且 $\{\alpha^n(u)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有一个聚点，则 $u \in U_-$。（2）若 $u \in \alpha^{j_1}(U)\ldots\alpha^{j_l}(U)$ 对某个整数序列 $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$ 成立，且 $\{\alpha^n(u)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 包含于一个紧集，则 $u \in U_0$。

证明。**(1)** 由于 U 是整齐的， $u = u_+u_-$ 且满足 $u_\pm \in U_\pm$。若 u_+ 不属于 U_0，则$\{x^n u_+ x^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ 没有聚点。另一方面， $\{x^n u_- x^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$包含于紧集 U_-中。因此，若 $\{x^n u x^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有聚点，则 $u_+ \in U_0$ 且 $u \in U_-$。

(2) 由于 U 是整齐的，且 $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$，我们有

$$\alpha^{j_1}(U)\ldots\alpha^{j_l}(U) = \alpha^{j_1}(U_-)\alpha^{j_l}(U_+).$$

因此 $u = u_-u_+$ with $u_- \in \alpha^{j_1}(U_-)$ 和 $u_+ \in \alpha^{j_l}(U_+)$。接着，(1) 中使用的论证表明，若 $u_- \notin U_0$，则 $\{\alpha^{-n}(u)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 不包含于任何紧集中；若 $u_+ \notin U_0$，则 $\{\alpha^{n}(u)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 不包含于任何紧集中。因此，若 $\{x^n u x^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 包含于某个紧集中，则 u 属于 U_0。□

2.2. **特殊子群**。对于自同构 α，最小化子群（即整齐子群）一般并不唯一。G 的某些其他子群由 α 在 G 上作用的动力学唯一确定，它们与尺度和整齐子群有关。

令 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$。$\alpha$ 的收缩群是

$$\mathsf{con}(\alpha) := \{x \in G \mid \alpha^n(x) \to 1 \text{ as } n \to \infty\},$$

该抛物子群 为

$$\mathsf{par}(\alpha) := \{x \in G \mid \{\alpha^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ has compact closure}\}$$

而该 *Levi* 子群 为

$$\mathsf{lev}(\alpha) := \mathsf{par}(\alpha) \cap \mathsf{par}(\alpha^{-1}) = \{x \in G \mid \{\alpha^n(x)\}_{n\in\mathbf{Z}} \text{ has compact closure}\}.$$

参见 [3, §3]，了解这些定义以及这些子群名称的由来。收缩子群与尺度之间的联系见 [3, 命题 3.21],，该命题表明，$s(\alpha)$ 等于 α 在 $\mathsf{con}(\alpha^{-1})^-$ 上的限制的尺度，其中 $\mathsf{con}(\alpha^{-1})^-$ 是 α^{-1} 的收缩子群的闭包。一般而言，收缩子群并非闭集，但 [3, 定理 3.32] 表明，$\mathsf{con}(\alpha)$ 当且仅当 *nub* 子群 $\mathrm{nub}(\alpha)$ 平凡时才是闭集，其中

$$\mathsf{nub}(\alpha) := \left\{x \in G \mid x \in \mathsf{con}(\alpha) \cap \mathsf{par}(\alpha^{-1})\right\}^-.$$

相比之下，[13, 命题 3] 表明，$\mathsf{par}(\alpha)$，因而 $\mathsf{lev}(\alpha)$ 也总是 G 的闭子群。

现在回顾下文将用到的若干关于收缩子群和 Levi 子群的结果。第一个结果很容易验证。

引理 2.4。设 $\alpha \in$ 自同构群(G)。则 $\mathsf{con}(\alpha^n) = \mathsf{con}(\alpha)$ 且 $\mathsf{lev}(\alpha^n) = \mathsf{lev}(\alpha)$。

接下来是引理 2.3 的一个推论。

引理 2.5。令 V 对 α 整齐，并令 $U := V \cap \mathsf{lev}(\alpha)$。则 $\alpha(U) = U$。

nub 子群与整洁性有关，[17, 推论 4.2], 表明，U 对 α 下整齐，当且仅当 $\mathrm{nub}(\alpha) \leq U$。结合引理 2.2 以及 $\mathrm{nub}(\alpha)$ 在 α 下保持不变这一事实，可得如下结论。

引理 2.6。如果 $U \geq \mathsf{nub}(\alpha)$，那么存在 n 使得 $\bigcap_{k=0}^{n} \alpha^k(U)$ 是整齐的。

α 的 nub 也是 G 的最大闭子群，在该子群上 α 遍历地作用；同时，它还是对 α整齐的所有子群的交集，如 [17, 定理 4.1]所示。

最后一个引理的证明是直接验证。

引理 2.7。设 $\alpha \in$ 自同构群(G)。则 $\mathsf{nub}(\alpha) \lhd \mathsf{lev}(\alpha)$。

本小节最后两个引理利用 nub 和收缩群证明了第 5 节中用到的技术性事实。

~~**引理 2.8.** 设 $\alpha \in$自同构群(G)，且 V 是 G的一个紧的 α-稳定子群。那么~~存在 G 的一个紧开子群 V，它对 α 是整齐的，并且满足 $V \leq V$。

~ ~证明。子群 V 包含于 lev(α) 中，因此根据~引理 2.7， V 正规化 nub(α)。所以 Vnub(α) 是 G的一个紧的 α-稳定子群。取一个包含 V nub(α) 的紧开 $U \leq G$ ~。（要说明这样的 U 存在，取~ G 的任意一个紧开子群 W，并令 U 为 V nub(α) 与 $\bigcap\{vWv^{-1} \mid v \in \widetilde{V}\text{nub}(\alpha)$ 的乘积}。）令 $V = \bigcap_{k=0}^{n} \alpha^k(U)$ 为引理 2.6 中证明存在的、对 α 整齐的 U子群~ ~。由于 V 是 α-稳定的，因此 $V \leq V$□

引理 2.9. 设 $\alpha \in$ 自同构群(G) 且设 $v \in \text{con}(\alpha) \setminus \text{nub}(\alpha)$。那么，对于任意 $m > 0$ ~ ~、G 的任意紧且 α-稳定子群 V，以及任意序列 $\{w_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset V$，该序列

$$\left\{v\alpha(v)\dots\alpha^k(v)w_k\alpha^{m+k}(v)^{-1}\dots\alpha^{m+1}(v)^{-1}\alpha^m(v)^{-1}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$$

是离散且非紧的。

~证明。取 V 为 α 的整齐子群，并利用引理 2.8 假设 $V \leq V$。将V替换为 α^n(V)，其中 $n \in$ 属于 Z 后，还可进一步假设 $v \in V_+ \setminus \alpha^{-1}(V_+)$。于是

$$v\alpha(v)\dots\alpha^k(v)w_k \in \alpha^k(V_+)$$

and

$$\alpha^{m+k}(v)^{-1}\dots\alpha^{m+1}(v)^{-1}\alpha^m(v)^{-1} \in \alpha^{m+k}(V_+) \setminus \alpha^{m+k-1}(V_+).$$

因此，对于任意 k，乘积都属于 $\alpha^{m+k}(V)\setminus\alpha^{m+k-1}(V)$，结论得证。 □

后续各节讨论内自同构 α_x： $y \mapsto xyx^{-1}$，并分别用 con(x)、lev(x) 和 nub(x) 表示收缩子群、lev 子群和 nub 子群。

2.3. **平坦群与根**。本文的主要结果涉及自同构平坦群，也就是自同构群 H，它存在一个紧开子群 $U \leq G$，对每个 $\alpha \in H$ 都是最小化的。如 §2.1 所示，这等价于 U 对每个 $\alpha \in H$ 都是整齐的。

关于平坦群的许多定义和结果，都可以直接从单个自同构的相应概念推广而来。本文涉及的一个概念是子群 $U_{H0} := \bigcap_{\alpha\in H} \alpha(U)$，它对任意紧开子群 U 都有定义，但在 U 整齐时尤其值得关注。此外， H 的下 ***nub*** 是

$$\text{lnub}(H) := \langle \text{nub}(\alpha) \mid \alpha \in H\rangle^- .$$

下 nub 在 [9], 中定义；其中指出，它包含于每个对 H 整齐的子群中，因此是紧的，但 lnub(H) 可能真包含于对 H 整齐的子群之交集中。后一个交集在 [9] 中被定义为 H 的***nub***，因此，将由 H 中元素的 nub 生成的闭子群称为下 nub。

李维s 子群 H 也可以定义如下 ws

$$\text{lev}(H) := \left\{x \in G \mid \{\alpha(x)\}_{\alpha\in H}^- \text{ is compact}\right\}.$$

那么 lev(H) 是 G 的闭子群，参见 [1, 引理 2.1.8]。显然，lev(H) 包含于所有满足 $\alpha \in H$ 的 lev(α) 的交集中，但这些群不一定相等，参见 [1, 注 2.1.9]。

lnub(H) 的紧性及其在 H 下的稳定性意味着 lnub(H) $\leq$ lev(H)。接下来的引理由引理 2.7 得出。

引理 2.10。假设 $H \leq$ 自同构群(G) 是平坦的。那么 lnub$(H) \triangleleft$ lev(H)。因此，若U 是 lev(H) 的紧子群，则 Ulnub(H) 是 lev(H) 的紧子群。

由于 U_{H0} 是紧的且 H-稳定，因此 $U_{H0} \leq U \cap$lev(H)，而引理 2.3 蕴含了下式中的反向包含关系

引理 2.11。令 $H \leq$自同构群(G) 为平坦的，并设 U 对于 H是整齐的。则$U \cap$lev$(H) = U_{H0}$。

接下来的一些结果用内自同构来表述较为方便，并将平坦群 H 视为 G 中诱导内自同构的子群。这与后文的用法一致。下一个结果是 [16, 定理 5。9] 在 $K = \{1\}$ 的情形；一般情形可用证明 [2, 命题 20] 时所采用的论证来证明。

定理 2.12。假设 x_1、.....、 $x_n \in G$ 和紧群 $K \leq G$ 满足

- $x_i K x_i^{-1} = K$ *and*
- $[x_i, x_j] \in K$.

则 $\langle x_i,\ K \mid i \in \{1, \ldots, n\}\rangle$ 是平坦的。

定义 2.13。平坦群 H 的单尺度子群[1] 为

$$H_u := \big\{\alpha \in H \mid s(\alpha) = 1 = s(\alpha^{-1})\big\} = \{\alpha \in H \mid \alpha(V) = V\}$$

其中 V 是使 H 最小化的任意子群。

于是，根据 [16, 定理6.18]， H_u 在 H 中正规，且 H/H_u 是一个自由阿贝尔群。另一种证明见 [1, 定理 A]。 H 的平坦秩是该自由阿贝尔群的秩。下一个结果是新的，不过正如我们将看到的，其证明是直接的。

命题 2.14. 设 $H = \langle y_1, .., y_n\rangle \leq G$ 是平坦的，且 V对于 H是整齐的。设$L = \langle z_1, .., z_n\rangle \leq G$ 是 G 的另一个子群，并假设对于自由群 $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$中的每个字$\mathbf{w}(a_1, \ldots, a_n)$，都有

$$\mathbf{w}(z_1, \ldots, z_n) V \mathbf{w}(z_1, \ldots, z_n)^{-1} = \mathbf{w}(y_1, \ldots, y_n) V \mathbf{w}(y_1, \ldots, y_n)^{-1}. \tag{2}$$

则 L 是平坦的，且f-rk(L) =f-rk(H)。

证明。为证明 L 是平坦的，只需证明对于每个 $z \in L$， $[zVz^{-1} :\ zVz^{-1} \cap V] = s(z)$，因为这意味着 V对于 L是最小化的。为此，令 $z \in L$，并设 $z =$w$(z_1, \ldots, z_n)$，其中 w $\in \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$。令 $y =$w$(y_1, \ldots, y_n)$属于 H。则对于每个 $n \in$N，根据方程 (2)，有

$$[z^n V z^{-n} : z^n V z^{-n} \cap V] = [y^n V y^{-n} : y^n V y^{-n} \cap V],$$

而后者等于 $s(y)^n$，因为 V 对 H 是整齐的。因此

$$\lim_{n\to\infty} [z^n V z^{-n} : z^n V z^{-n} \cap V]^{\frac{1}{n}} = s(y)$$

由此，根据 [6, 定理 7.7], ，可得 $s(z) = s(y)$。然后再次根据方程 (2)，

$$[zVz^{-1} : zVz^{-1} \cap V] = s(z)$$

且 V是 z 的最小化对象。

映射 $\phi :\ y \mapsto yVy^{-1}$ 将 H 映射到 G的紧开子群集合，是一个双射 $H/H_u \to \phi(H)$。由于我们现在知道， V对 L 也整齐，映射 $\psi :\ z \mapsto zVz^{-1}$ 也是一个双射 $L/L_u \to \psi(L)$。方程 (2) 表明，$\phi(H) = \psi(L)$，因此 ϕ 和 ψ 诱导出一个双射 $H/H_u \to L/L_u$。此外，若 w$_1$和 w$_2$ 是自由群 $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$中的两个字，且 $y_i =$w$_i(y_1, \ldots, y_n)$ 和$z_i =$w$_i(z_1, \ldots, z_n)$ 分别是对应于 H和 L的元素，那么由方程 (2)可得 $\phi(y_1y_2) = \psi(z_1z_2)$，从而双射 $H/H_u \to L/L_u$ 是一个群同构。因此，自由阿贝尔群 H/H_u 和 L/L_u 具有相同的秩。□

[1]“单尺度”一词由 T. W. Palmer 在 [8, 定义 12.3.25] 中引入。

3. 平坦群的 Levi 子群与整洁子群

本节推导了关于 Levi 子群与平坦群的整齐子群之间联系的初步结果。这些结果将在下一节证明主定理时用到。其中许多结果本身也可能具有独立的研究价值。第一个结果表明，对于平坦群 H ，整齐这一性质在 lev(H) 中元素的共轭作用下几乎保持不变。

命题 3.1。设 $H \leq G$ 为平坦群， $y \in \mathsf{lev}(H)$ ，且 V 为 G 的紧开子群，并且对 H 整齐。那么

$$L := \{x \in H \mid xyx^{-1} \in yV\}$$

是 H 的有限指数子群，且 yVy^{-1} 对 L 整齐。

证明。假设 $x \in L$。那么 $xyx^{-1} = yv$ ，其中 $v \in V$，并且对每个 $h \in H$，

$$h(xyx^{-1})h^{-1} = h(yv)h^{-1} = (hyh^{-1})(hvh^{-1}) \tag{3}$$

对所有 $n \in \mathsf{Z}$ 均成立。因此，对所有 $n \in \mathsf{Z}$， hvh^{-1} 都属于紧集 $(y^H)^2$ ，并且由于 V 对 H 整齐，引理 2.11 蕴含 $v \in V_{H0}$。令 $x_1, x_2 \in L$。那么 $x_1yx_1^{-1} = yv_1$ 且 $x_2^{-1}yx_2 = yv_2$ ，其中 $v_1, v_2 \in V_{H0}$ ，并且

$$(x_1x_2^{-1})y(x_1x_2^{-1})^{-1} = x_1yv_2x_1^{-1} = y(v_1x_1v_2x_1^{-1})$$

与 $v_1x_1v_2x_1^{-1} \in V_{H0}$。因此 $x_1x_2^{-1} \in L$ 和 L 是一个群。

由于 $y \in \mathsf{lev}(H)$， $\{xyx^{-1}V \mid x \in H\}$ 是有限个 V-陪集组成的集合；再次利用等式 (3)，可知 H 被有限个 L 陪集覆盖。

对于每个 $x \in L$，都存在 $v \in V_{H0}$ 使得

$$x(yVy^{-1})x^{-1} = (xyx^{-1})(xVx^{-1})(xyx^{-1})^{-1} = yv(xVx^{-1})v^{-1}y^{-1} = y(xVx^{-1})y^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}&[x(yVy^{-1})x^{-1} : x(yVy^{-1})x^{-1} \cap yVy^{-1}]\\ &= [y(xVx^{-1})y^{-1} : y(xVx^{-1})y^{-1} \cap yVy^{-1}]\\ &= [xVx^{-1} : xVx^{-1} \cap V] = s(x)\end{aligned}$$

并且 yVy^{-1} 对于 x 是整齐的。因此 yVy^{-1} 对于 L 是整齐的。 □

命题 3.1 的证明实际上给出了以下更强的断言。

推论 3.2. 设 y 和 L 如命题 *3.1* 中所述。那么，对每个 $x \in L$，都有 $xyx^{-1}y^{-1} \in V_{H0}$ 。

在下一节中，我们将通过添加一个来自平坦群 H 的 Levi 子群的元素来扩充该群。以下命题有助于找到一个使该元素整齐的子群。

命题 3.3. 设 $H \leq G$ 是平坦的，且 $y \in \mathsf{lev}(H)$。那么，$\mathsf{nub}(y) \leq \mathsf{lev}(H)$。

证明。取 V，使其对 H 整齐。于是引理 2.2 表明，存在 $n \geq 0$ ，使得 $V_1 := \bigcap_{k=0}^{n} y^kVy^{-k}$ 对 y 上整洁；而由命题 3.1，存在 H 的有限指数子群 H_1，使得 V_1 对 H_1 整齐。令 $V_2 = y^{-1}V_1y \cap V_1$。然后，再由命题 3.1，存在 H_1 的有限指数子群 H_2，使得 V_2 对 H_2 整齐，并且 $H_3 := \{x \in H_2 \mid xyx^{-1} \in yV_2\}$ 在 H_2 中具有有限指数。考虑 $c \in \mathsf{nub}(y)$，并令 $x \in H_3$。那么 $xcx^{-1} \in \mathsf{nub}(xyx^{-1})$。由于 $x \in H_3$ ，我们有 $xyx^{-1} \in yV_2$，因此由 [4, 推论 3.4], ，存在 $r \in V_1$ ，使得 $\mathsf{nub}(xyx^{-1}) = r\mathsf{nub}(y)r^{-1}$。于是，对于每个 $x \in H_3$， xcx^{-1} 都属于紧集 $V_1\,\mathsf{nub}(y)V_1$。由于 H_3 在 H 中具有有限指数，由命题 3.1 可知， $\{xcx^{-1}\}_{x \in H}$ 具有紧闭包，因此 $c \in \mathsf{lev}(H)$。□

前面的论证表明，若仅假设 $c \in \mathsf{con}(y)$（而非 $\mathsf{nub}(y)$）且 $x \in H_3$，那么根据 [4,推论 3.2]，对于某个 $t \in V$， xcx^{-1} 属于 $t\mathsf{con}(y)t^{-1}$。然而，论证的其余部分并不适用；一般而言，$\mathsf{con}(y) \leq \mathsf{lev}(H)$ 并不成立，例如考虑 $H = \langle y \rangle$ 即可看出。

扩充平坦群 H 涉及修改一个对 H 整洁的子群 U。下面的引理有助于进行这种修改。

引理 3.4。设 U 对 $x \in G$ 整洁，且 C 是 G 的一个紧子群，使得 $CU = UC$ 且 $\{x^n C x^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq (xUx^{-1})C$。则 UC 是 G 的一个紧开子群，并且对 x 整洁。

证明。由于 U 是紧开集且 C 是紧的， U, UC 是 G 的紧开子集，而条件 $UC = CU$ 蕴含它是一个群。由以下事实可知， UC 对 x 的整洁性成立:

$$[x(UC)x^{-1} : x(UC)x^{-1} \cap UC] = [xUx^{-1} : xUx^{-1} \cap U] = s(x).$$

为说明这一点，考虑映射

$$xUx^{-1}/(xUx^{-1} \cap U) \to x(UC)x^{-1}/(x(UC)x^{-1} \cap UC)$$

定义为 $w(xUx^{-1} \cap U) \mapsto w(x(UC)x^{-1} \cap UC)$。该映射是良定义的，因为 $xUx^{-1} \cap U \leq x(UC)x^{-1} \cap UC$；它是满射的，因为

$$x(UC)x^{-1} = (xUx^{-1})(xCx^{-1}) \subseteq (xUx^{-1})C.$$

该映射是一一对应的，因为，如果

$$w_1, w_2 \in xUx^{-1} \text{ and } w_2^{-1}w_1 \in x(UC)x^{-1} \cap UC,$$

那么 $w_2^{-1}w_1 = wc$ 与 $w \in U$ 且 $c \in C$。因此 $c = w_2^{-1}w_2w^{-1}$，它属于 $(xUx^{-1})U$，并且 $\{x^n c x^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$有紧闭包，因为它是$xUx^{-1}C$的子集。接着，由于 U 对 x是整齐的，引理 2.3(2)表明 $w_2^{-1}w_1w^{-1} =: w_0$属于 U_0，从而 $w_2^{-1}w_1 = w_0w \in U \cap xUx^{-1}$。□

推论 3.5。引理 *3.4* 的假设蕴含 $\{y^n C y^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq U_0C$。

证明。这些假设蕴含：若 $c \in C$ 且 $k \in \mathbf{Z}$，则 $y^k c y^{-k} = uc_1$ 与$u \in yUy^{-1}$ 且 $c_1 \in C$。接着

$$\{y^n u y^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}} = \{y^n(y^k c y^{-k} c_1^{-1})y^{-n}\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq ((yUy^{-1})C)^2,$$

它是紧的。因此，由引理 2.3(2)可得 $u \in U_0$。 □

下面的命题表明，只需转而考虑 H的一个有限指数子群 F，便可找到一个对 $y \in \mathsf{lev}(H)$和 H 整齐的子群。不过请注意，该命题并不意味着所找到的子群对 $\langle y$ 和 $F\rangle$ 也整齐。这将在下一节的附加假设下证明。

命题 3.6。设 $H \leq G$ 是平坦的，且 $y \in \mathsf{lev}(H)$。那么，存在 G 的一个紧开子群 V以及一个有限指数子群 $F \leq H$，使得 V对F 和 y都整齐。

证明。设 G 的子群 W 对 H整齐。由于 $\mathsf{nub}(y)$是紧的，且W是开集，因此存在 $c_i \in \mathsf{nub}(y)$、 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得

$$\bigcap \{cWc^{-1} \mid c \in \mathsf{nub}(y)\} = \bigcap_{i=1}^{k} c_i W c_i^{-1}.$$

由引理 3.3，每个 $c_i \in \mathsf{lev}(H)$，因此根据命题 3.1，存在一个有限指数子群 $H_i \leq H$，使得 $c_i W c_i^{-1}$ 对于 H_i是整齐的。于是 $W_1 := \bigcap_{i=1}^{k} c_i W c_i^{-1}$

对于 $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$ 是整齐的，且由 $\mathrm{nub}(y)$正规化。令 $W_2 = \mathrm{nub}(y)W_1$。那么 W_2 是 G 的一个紧开子群，且包含 $\mathrm{nub}(y)$。

我们将看到， W_2 对于 $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$的一个有限指数子群是整齐的。由于 $\mathrm{nub}(y) \leq \mathrm{lev}(H)$, 根据命题 3.3，且它是紧的，因此根据命题 3.1，存在 $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$ 的一个有限指数子群 E，使得对于每个$x \in E$， $x\mathrm{nub}(y)x^{-1} \subseteq \mathrm{nub}(y)W_1$。推论 3.2 表明，事实上，对于每个$x \in E$， $x\mathrm{nub}(y)x^{-1} \subseteq \mathrm{nub}(y)(W_1)_{E0}$。因此，取 $U = W_1$、 $C = \mathrm{nub}(y)$，引理 3.4 的假设对每个 $x \in E$ 都得到满足，我们由此得出，对于每个这样的 x， W_2 是整齐的。

最后，取 n 充分大，使得 $V := \bigcap_{k=0}^{n} y^k W_2 y^{-k}$ 对于 y是上整洁的。根据引理 2.2，这样的 n 存在。于是，由于 $\mathrm{nub}(y) \leq W_2$，引理 2.6 表明V对于 y是整齐的。根据命题 3.1，对于每个 $k \in \{0, \ldots, n\}$，存在 E 的一个有限指数子群 E_k，使得 $y^k W_2 y^{-k}$ 对于 E_k是整齐的。于是， V 对于子群 $F := \bigcap_{k=0}^{n} E_k$ 是整齐的；该子群在 E中具有有限指数，因而在 H中也具有有限指数。□

本节的最后一个命题推导出了 G 中某个元素的上整洁子群的一项有用性质。

命题 3.7. 设 U 对 y 上整洁，并且假设 $z \in UyU$。那么存在 $u \in U$，使得 $uzu^{-1} \in yU_0$。

证明。设 v、 $w \in U$ 满足 $z = vyw$。由于 U 对 y 上整洁，我们有 $v = v_- v_+$，其中 $v_\pm \in U_\pm$。于是 $vyw = v_- yw'$，其中 $w' = y^{-1} v_+ yw \in U$。对 w' 重复此论证可知，可以假设

$$z = vyw \text{ with } v \in U_- \text{ and } w \in U_+.$$

接下来，令 $v_0 = v$ 和 $w_0 = w$，递归地构造 $v_i \in y^i U_- y^{-i}$ 和 $w_i \in U_+$，使得

$$v_i^{-1}(v_i y w_i) v_i = v_{i+1} y w_{i+1}.$$

设对某个 i， v_i 和 w_i 已经构造完成。那么

$$v_i^{-1}(v_i y w_i) v_i = y w_i v_i = y v_i' w_i'$$

其中 $v_i' \in y^i U_- y^{-i}$ 和 $w_i \in U_+$，因为根据等式 (1), $w_i v_i \in U_+ \left(y^i U_- y^{-i}\right) = \left(y^i U_- y^{-i}\right) U_+$。令 $v_{i+1} = y v_i' y^{-1}$ 和 $w_{i+1} = w_i'$，即可继续构造。设 $u_i = v_0 v_1 \ldots v_{i-1}$。那么对每个 $i \geq 1$，我们有

$$u_i (vyw) u_i^{-1} = v_i y w_i$$

与 $v_i \in y^k U_- y^{-k}$ 和 $w_i \in U_+$。由于 U、 U_- 和 U_+ 是紧的，序列$\{u_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$、 $\{v_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ 和 $\{w_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ 分别有极限点 $\hat{u} \in U$、$\hat{v} \in \bigcap_{k \geq 0} y^k U_- y^{-k} = U_0$和 $\hat{w} \in U_+$，且 $\hat{u}(vyw)\hat{u}^{-1} = \hat{v}y\hat{w}$。这还可以进一步简化为

$$\hat{u}(vyw)\hat{u}^{-1} = y\hat{w}$$

与 $\hat{w} \in U_+$，因为 $y^{-1}\hat{v}y \in U_0$ 和 $U_0 \leq U_+$。

重复上一段的构造：从 $\hat{w}_0 = \hat{w}$开始，并为 $i \geq 0$定义 $\hat{w}_{i+1} = y^{-1}\hat{w}_i y$；然后为 $i \geq 1$定义 $\hat{u}_i = \hat{w}_{i-1} \ldots \hat{w}_0$，得到

$$\hat{u}_i \hat{u} (vyw) \hat{u}^{-1} \hat{u}_i^{-1} = y \hat{w}_i$$

其中有 $\hat{w}_i \in y^{-i} U_+ y^i$。由于 U_+ 是紧的，序列 $\{\hat{u}_i\}_{i \geq 1}$ 和 $\{\hat{w}_i\}_{i \geq 1}$ 分别具有极限点 $\hat{\hat{u}} \in U$ 和 $u_0 \in \bigcap_{i \geq 0} y^{-i} U_+ y^i = U_0$，使得

$$\hat{\hat{u}} \hat{u} (vyw) \hat{u}^{-1} \hat{\hat{u}}^{-1} = y u_0.$$

因此，该断言对 $u = \hat{\hat{u}}\hat{u}$ 成立。 □

4. 平坦秩大于 1 的群

本节将看到，在某些假设下， G 的一个平坦子群 H，若存在 $y \in \mathsf{lev}(H)$ 且其尺度大于 1，则可以加以修改，从而得到一个平坦秩增加 1 的子群。本文给出一个说明该方法的例子，以及另一个展示其局限性的例子。

假设 H 具有定理 2.12 中所述的形式 $\langle x_i, K \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$。该定理说明了如何构造一个群 $\langle y, z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$，它也是平坦群，且其秩可能高于 H。定理所构造的群也具有所需的形式，单生成群 $\langle y\rangle$亦然。因此，只要最后构造出的平坦群的 Levi 子群中存在非单尺度元素，就可以迭代此方法来构造平坦秩更高的群。在定理的陈述中，$s_{\mathsf{lev}(H)}(y)$ 表示 y 在群 $\mathsf{lev}(H)$ 中的尺度，该尺度可能小于 y 在 G 中的尺度。

定理 4.1. 设 G 是一个全不连通局部紧群，并设 $x_i \in G$, $i \in \{1,\dots,n\}$ 和 K 是 G 的一个紧子群，使得：

- $x_i K x_i^{-1} = K$; *and*
- $[x_i, x_j] \in K$.

将平坦群 $\langle x_i, K \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 记为 H，并假设 $y \in \mathsf{lev}(H)$。

那么存在 $z_i \in G$ 和一个紧群 $L \le G$，使得对所有 $i \in \{1,\dots,n\}$:

(1) $z_i L z_i^{-1} = L$, $yLy^{-1} = L$;(2) $[z_i, z_j] \in L$ 和 $[z_i, y] \in L$; 并且(3) $\mathsf{con}(z_i) = \mathsf{con}(x_i)$ 以及 $\mathsf{lev}(z_i) = \mathsf{lev}(x_i)$

因此 $\langle y, z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 是平坦的。若 $s_{\mathsf{lev}(H)}(y) > 1$，则

$$\text{f-rk}(\langle y, z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle) = \text{f-rk}(\langle x_i, K \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle) + 1.$$

证明。命题 3.6 表明，存在 $V \le G$，它对 y 和 H 的一个有限指数子群 F 都是紧、开且整齐的。令 $U := V \cap \mathsf{lev}(H)$。那么 U 是 $\mathsf{lev}(H)$ 的一个紧开子群，且对 $y \in \mathsf{lev}(H)$ 整齐；引理 2.5 表明，对于每个 $x \in F$，都有 $xUx^{-1} = U$。

我们通过一系列断言证明 (1) 和 (2)。为此，注意到假设 $[x_i, x_j] \in K$ 且 K 是由每个x_i 正规化的紧子群，意味着 $H \le \mathsf{lev}(H)$。因此， z_i 和 L 可以在 $\mathsf{lev}(H)$ 中定义。鉴于此，在证明 (1) 和 (2) 时，不妨假设 $G = \mathsf{lev}(H)$，从而 $U = V$ 且 H 是单尺度的。

断言 1。对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，存在 $n_i > 0$ 使得

$$x_i^{n_i} U x_i^{-n_i} = U \text{ and } x_i^{n_i} y x_i^{-n_i} \in yU.$$

证明。由于 F 在 H中具有有限指数，因此存在 $m_i > 0$ 使得 $x_i^{m_i} \in F$，从而 $x_i^{m_i} U x_i^{-m_i} = U$。命题 3.1 表明，存在一个有限指数子群$L \le \langle x_i^{m_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$，使得对每个 $x \in L$都有 $xyx^{-1} \in yU$。因此存在n_i，它是 m_i的倍数，使得 $x_i^{n_i} U x_i^{-n_i} = U$且 $x_i^{n_i} y x_i^{-n_i} \in yU$。□

接下来，命题 3.7 表明，对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，都存在 $u_i \in U$，使得

$$u_i x_i^{n_i} y x_i^{-n_i} u_i^{-1} \in yU_0.$$

令 $z_i = u_i x_i^{n_i}$。那么由此以及断言1可得

Claim 2. $z_i y z_i^{-1} \in yU_0$ and $z_i U z_i^{-1} = U$ for every $i \in \{1,\dots,n\}$.

定义了元素 z_i 后，接下来将定义子群 L。为此，令 K'为满足以下条件的最小闭子群：对所有 i, j, k,

- $[x_i^{n_i}, x_j^{n_j}] \in K'$ and

- $x_k^{n_k} K' x_k^{-n_k} = K'$.

根据断言1， K'由 $\langle x_i^{n_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$的一个正规子群稠密生成，因此对所有 $w \in K'$，都有 $wUw^{-1} = U$。此外， K'包含于 K中，因而是紧的。因此， UK'是一个在所有 $x_i^{n_i}$的共轭作用下保持不变的紧群。由于 U被所有 $x_i^{n_i}$正规化， UK'在所有 z_k的共轭作用下也保持不变，并且对所有 $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$，都有 $[z_i, z_j] = [u_i x_i^{n_i}, u_j x_j^{n_j}] \in UK'$。因此

断言 3. 满足以下条件的最小闭子群 K''：对所有 i、 j、 $k \in \{1,\dots,n\}$，$[z_i, z_j] \in K''$ 且$z_k K'' z_k^{-1} = K''$，是 UK'的一个紧子群。

由断言 2 以及 U_0 在 y 下共轭的不变性可知，$z_i y^l z_i^{-1} \in y^l U_0$，从而对每个 $l \in \mathbb{Z}$， $z_i(y^l U y^{-l}) z_i^{-1} = y^l U y^{-l}$。因此，对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，$z_i U_0 z_i^{-1} = U_0$，且对每个 $z \in K''$， $zU_0 z^{-1} = U_0$。所以$K''U_0$ 是一个群；由于 K'' 和 U_0 都是紧的，它也是紧的。定义 $L = K''U_0$。现在我们可以证明（1）和（2）。

断言 4. 对于每个 $i,j \in \{1,\dots,n\}$

$$[z_i, y] \in L,\ [z_i, z_j] \in L \text{ and } yLy^{-1} = L = z_i L z_i^{-1}.$$

断言的证明。 这是因为 $[z_i, y] \in L$根据断言 2.，而这是因为 $[z_i, y] \in U_0$，参见断言3。由于刚才已经证明 $z_i U_0 z_i^{-1} = U_0$，且根据定义 $z_i K'' z_i^{-1} = K''$，因此对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，都有 $z_i L z_i^{-1} = L$。 U_0的定义意味着 $yU_0y^{-1} = U_0$。最后， K''由形如 $z_{k_1} \dots z_{k_r} [z_i, z_j] z_{k_r}^{-1} \dots z_{k_1}^{-1}$ 的元素生成，而对于任何这样的元素，我们有

$$y(z_{k_1} \dots z_{k_r} [z_i, z_j] z_{k_r}^{-1} \dots z_{k_1}^{-1}) y^{-1} \in z_{k_1} \dots z_{k_r} [z_i, z_j] z_{k_r}^{-1} \dots z_{k_1}^{-1} U_0$$

因为 $[z_i, y] \in U_0$根据断言 2.，并且 U_0是正规化的 z_1、.....、 z_n。因此 $yK''y^{-1} \le K''U_0 = L$。□

证明的其余部分回到一般情形，其中 $G \ne \mathrm{lev}(H)$ 且$V \ne U$。为证明 con(z_i) = con(x_i)，回顾引理 2.4 可知 con($x_i^{n_i}$) =con(x_i)，并考虑 $c \in G$。于是，由于 x^{n_i} 正规化 U，对每个 $r \in \mathbb{N}$，我们有

$$z_i^r c z_i^{-r} = (u_i x_i^{n_i})^r c (u_i x_i^{n_i})^{-r} = t_r (x_i^{rn_i} c x_i^{-rn_i}) t_r^{-1}$$

其中 $t_r \in U$。由于 V 的开正规子群构成 1 的邻域基，因此 $c \in$con(z_i) 当且仅当 $c \in$con($x_i^{n_i}$)。同样的论证以及 lev($x_i^{n_i}$) = lev(x_i) 这一事实表明，lev(z_i) = lev(x_i)。

由定理 2.12 以及 (1) 和 (2)，可知 $\langle y, z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 是平坦的。关于平坦秩的陈述将由下式推出

断言 5. f-rk($\langle z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$) = f-rk($H$)。

证明。 由于 $V \le G$对 $\langle x_i^{n_i}, \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$是整齐的，对于自由群 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$中的每个字 w($a_1,\dots,a_n$)，我们有，

$$\mathbf{w}(z_1,\dots,z_n) = \mathbf{w}(x_1^{n_1},\dots,x_n^{n_n})u$$

其中 $u \in U$，因为对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，每个 $x_i^{n_i}$都将 U正规化。因此

$$\mathbf{w}(z_1,\dots,z_n) U \mathbf{w}(z_1,\dots,z_n)^{-1} = \mathbf{w}(x_1^{n_1},\dots,x_n^{n_n}) U \mathbf{w}(x_1^{n_1},\dots,x_n^{n_n})^{-1}.$$

因此，由命题 2.14，

$$\text{f-rk}(\langle z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle) = \text{f-rk}(\langle x_i^{n_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle).$$

这足以证明该断言，因为 L 和 K 包含在平坦群 $\langle z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 和 H的单模子群中。□

现在我们可以证明，如果 $s_{\mathsf{lev}(H)}(y) > 1$，那么平坦秩会增加 1。若确实如此，则 $U_{y++} := \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} y^k U_{y+} y^{-k}$ 是 $\mathsf{lev}(H)$ 的一个闭非紧子群，因为 U 在 $\mathsf{lev}(H)$ 中对 y 是整齐的。此外，由于 $y^k U y^{-k}$ 在 z_i的共轭作用下保持不变，因此对于每个$i \in \{1,\dots,n\}$，U_{y++} 在 z_i 的共轭作用下也保持不变。因此，$\langle y、\ z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 通过共轭作用于 U_{y++}。映射 $\alpha_x : u \mapsto xux^{-1}$ 是 U_{y++}的一个自同构，并且

$$x \mapsto \alpha_x : \langle y, z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle \to \mathrm{Aut}(U_{y++})$$

是一个同态。将 $\mathsf{Aut}(U_{y++})$ 上的模函数记为 Δ，定义ρ：$\langle y, z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle \to (\mathbf{R}, +)$ 为

$$\rho(x) = \log \Delta(\alpha_x), \qquad x \in \langle y, z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle.$$

于是 ρ是一个同态，且 $\langle z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle \le \ker \rho$，因为 U_{y++}包含于 $\mathsf{lev}(H)$ 中，而它等于 $\mathsf{lev}(\langle z_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle)$。另一方面，$\rho$ 映射到 $(\mathbf{R}, +)$ 的一个子群上，该子群同构于 $(\mathbf{Z}, +)$，因为 y 不是单尺度的。因此，$\langle y, z_i, L \mid i \in \{1,\dots,n\}\rangle$ 模其单尺度子群的秩为 $\mathsf{f\text{-}rk}(H) + 1$。□

由于有限生成阿贝尔群是平坦的，根据定理 2.12，定理 4.1 特化为如下结果。

推论 4.2. 设 G 是一个全不连通局部紧群，且 $x_i \in G$与 $i \in \{1,\dots,n\}$ 交换，并记 $H = \langle x_1, \dots\dots, x_n\rangle$。假设 $y \in C(H)$。那么 $\langle H, y\rangle$ 是平坦的。若$s_{C(H)}(y) > 1$，则 $\langle H, y\rangle$ 的平坦秩等于 H 的平坦秩加 1。

下面的例子展示了定理 4.1 证明中的步骤。

例 4.3. 设 $G = GL(3, \mathbf{Q}_p)$ 和 $H = \langle x\rangle$ 满足

$$x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \text{ and } a \in \mathbf{Q}_p \setminus \{0\}.$$

（我们将用到 $|a|_p$（ a的 p-进绝对值）是 p的幂这一事实。）那么 H 是平坦的，并且

$$\mathsf{lev}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{Q}_p,\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33} \neq 0 \right\}.$$

由于 $s(x) = p^2$，H 的平坦秩等于 1。

因此

$$y = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

属于 $\mathsf{lev}(H)$ 和 $s_{\mathsf{lev}(H)}(y) = p$。

我们将构造步骤应用于这个 H 和 y。首先，该群

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & pa_{12} & pa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & pa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbf{Q}_p) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z}_p,\ |a_{11}a_{22}a_{33}|_p = 1 \right\}$$

对于 H 和 y 而言是整齐的

$$U = V \cap \mathsf{lev}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & pa_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbf{Q}_p) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z}_p,\ |a_{11}a_{22}|_p = 1 \right\}.$$

然后选择 $n = p^2|a^{-1}|_p$ 可确保 $x^nUx^{-n} = U$ 和 $x^nyx^{-n} \in yU$，如断言1所示。接下来，令

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么 $u \in U$ 和 $ux^nyx^{-n}u^{-1} = y$。令 $z = ux^n$。那么

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p^n \end{pmatrix},$$

并且断言 2 成立，断言 3 和 4 中的子群 K'' 和 L 是平凡的，因为 y 和 z 交换。因此，$\langle y, z\rangle$ 是平坦的，且平坦秩等于 2。

定理 4.1 的证明和例 4.3 中的构造，在构造秩更高的新平坦群的过程中，都从给定的平坦群 H 转而取其一个有限指数子群。例 4.3 中本可以通过选择另一个对 H 和 y整齐的子群 V 来避免这一步。下一个例子表明，转而取有限指数子群并非总能避免。

例 4.4. 定义 x，$y \in \mathbf{Z}^2 \to$ 自同构群$(SL(2,\ \mathbf{Q}_p) \times \mathbf{Q}_p)$ 如下

$$x(A,c) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, pc \right)$$
$$\text{and } y(A,c) = \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, c \right), \qquad A \in SL(2,\mathbf{Q}_p),\ c \in \mathbf{Q}_p,$$

并令 $G = \langle x, y\rangle \ltimes (SL(2, \mathbf{Q}_p) \times \mathbf{Q}_p)$. 那么 $\langle x^2, y\rangle$ 是有限生成阿贝尔群，因此是平坦的。事实上，若 $U \leq SL(2, \mathbf{Q}_p)$ 是子群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}_p,\ ad - pbc = 1 \right\},$$

那么 $U \times \mathbf{Z}_p$ 对 $\langle x^2, y\rangle$ 是整齐的。然而，$\langle x, y\rangle$ 不是平坦的，因为例如它的阿贝尔化是有限的。

下一个例子表明，定理 4.1 中的构造可能不适用，因为可能出现这样的情况：虽然 $\mathrm{lev}(H)$ 包含平坦秩更大的平坦群中的元素，却不包含该较大平坦群中任何元素的收缩子群。

例 4.5。设 x_1 和 x_2 是 $\mathbf{Q}_p^2$ 的自同构，定义为

$$x_1(\xi_1, \xi_2) = (p\xi_1, p\xi_2) \text{ and } x_2(\xi_1, \xi_2) = (p\xi_1, p^{-1}\xi_2), \qquad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{Q}_p^2,$$

并设 $A := \langle x_1, x_2\rangle$。那么 A 是 $G := \mathbf{Q}_p^2 \rtimes A$ 的平坦子群，其整齐子群为 $V := \mathbf{Z}_p^2 \rtimes \{0\}$。$A$ 的单尺度子群是平凡的，因此 A 的平坦秩等于 A 的秩，即 2。

设 $H := \langle x_1\rangle \leq A$。那么 H 的平坦秩等于 1。然而，$\mathrm{lev}(H) = A$ 是离散的，因而是单尺度的，也就是说，对于每个 $y \in A$，$s_{\mathrm{lev}(H)}(y) = 1$。因此，无法从 $\mathrm{lev}(H)$ 中选取任何 y 用于定理 4.1 中的构造。

最后一个例子表明，定理 4.1 中的构造可能不适用，因为可能出现这样的情况：尽管 $\mathrm{lev}(H)$ 包含一个平坦秩更大的平坦群中某个元素的收缩子群，但它并不包含该较大平坦群的元素。

例 4.6. 令 $A := \langle a, b\rangle$ 为以 a 和 b 为生成元的自由群，并定义一个同态 $\phi\colon A \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}_p^2)$，使得

$$\phi(a)(\xi_1,\xi_2) = (p\xi_1,\xi_2) \text{ and } \phi(b)(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1, p\xi_2), \qquad (\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{Q}_p^2.$$

于是， A 是 G 的平坦子群: $= \mathbf{Q}_p^2 \rtimes A$，其整齐子群为 $\mathbf{Z}_p^2 \rtimes \{0\}$。 A 的单尺度子群是 $\langle a$的换位子群， $b\rangle$ ，且A 的平坦秩等于 2。

设 $H = \langle a\rangle \le A$。则 H 的平坦秩等于 1。然而，尽管有 $\mathrm{lev}(H) = \{0\} \times \mathbf{Q}_p = \mathrm{con}(b)$ 和 $s(b^{-1}|_{\mathrm{lev}(H)}) = p$， b^{-1}在 a下的共轭元集合仍是无限离散的，因此没有紧闭包。因此， b^{-1} 不属于 $\mathrm{lev}(H)$。

5. 预紧共轭轨道与对称关系

关系与.....交换，例如“x_1 与 x_2交换”，在群的元素上是自反且对称的。较弱的关系属于.....的 *Levi* 子群，例如“$x_1 \in \mathrm{lev}(x_2)$”，是自反的，但不对称。定理 4.1 及其证明中的思路提示了一种更弱但仍然自反且对称的关系。本节将探讨这种关系，称为模糊交换，记作 $x_1 V x_2$。遗憾的是，这种关系的对称性是以 $\{x_1 \in G \mid x_1 V x_2\}$不是一个群为代价实现的。

定义 5.1。设 G 是一个全不连通局部紧群。对于 x_1、 $x_2 \in G$ ，称 x_1 与.....模糊交换 x_2，记作 $x_1 V x_2$，若存在 $n > 0$ 以及 G 的一个紧子群U，使得 x_1^n和 $u \in U$ 将其正规化，并且 $u x_1^n \in \mathrm{lev}(x_2)$。

显然，关系 VC 是自反的，下面的命题还表明它也是对称的。

命题 5.2。设 x_1， $x_2 \in G$ 且 $x_1 V x_2$。那么，对于每个 $i = 1, 2$，存在整数 $n_i > 0$、由 $x_i^{n_i}$正规化的紧子群 U_i以及元素 $u_i \in U_i$，使得 $z_i := u_i x_i^{n_i}$模紧子群 L交换，并且满足 $z_i L z_i^{-1} = L$。

此外， $x_2 V x_1$。

证明。由于 x_1 与 x_2模糊交换，存在 $n_1 > 0$ 以及 G的一个紧子群 U_1 ，由 x_1 正规化，并且 $u_1 \in U_1$ ，使得 $u_1 x_1^{n_1} \in \mathrm{lev}(x_2)$。于是 $H := \langle x_2\rangle$ 以及 $y := u_1 x_1^{n_1}$满足定理 4.1 的假设。因此存在 $n_2 > 0$ 和一个紧子群 U_2，由 x_2 和 $u_2 \in U_2$正规化，以及一个紧子群 L，令 $z_i = u_i x_i^{n_i}$: $z_1 L z_1^{-1} = L = z_2 L z_2^{-1}$和 $[z_1, z_2] \in L$，即得所述结论。

由此可知 $u_2 x_2^{n_2} \in \mathrm{lev}(u_1 x_1^{n_1})$，从而

$$\left\{(u_1 x_1^{n_1})^k (u_2 x_2^{n_2})(u_1 x_1^{n_1})^{-k} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$

具有紧闭包。由于 $u_1 \in U_1$由 $x_1^{n_1}$正规化，因此对于满足 $\tilde{u}_k \in U_1$的每个 k ，我们有 $(u_1 x_1^{n_1})^k = \tilde{u}_k x_1^{k n_1}$。由于 U_1 是紧的，故可得

$$\left\{x_1^{k n_1} (u_2 x_2^{n_2}) x_1^{-k n_1} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$

具有紧闭包，因此 $\left\{x_1^k (u_2 x_2^{n_2}) x_1^{-k} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ 也具有紧闭包。因此， $u_2 x_2^{n_2}$属于 $\mathrm{lev}(x_1)$，并且 x_2 与 x_1弱交换。□

The模糊中心化子of x_2 is

$$\{x_1 \in G \mid x_1 \text{ vaguely commutes with } x_2\}.$$

那么， x_2 的模糊中心化子就是交换关系中 x_2 的中心化子的类比，也是“属于 $\mathrm{lev}(x_2)$”关系中 $\mathrm{lev}(x_2)$ 的类比。

例5.3。设 Aut(T_{q+1}) 是正则树 T_{q+1} 的自同构群，其度为 $q+1$ 和 $q \geq 2$。设 x_1 和 x_2 是平移，即具有无限轨道的自同构，其轴分别为 ℓ_1 和 ℓ_2，见 [12,]。那么 $x_1^k x_2 x_1^{-k}$ 是一个轴为 $x_1^k.\ell_2$ 的平移；如果将 x_2 替换为 ux_2^n，其中 $n > 0$ 和 u 是被 x_2^n 正规化的紧子群中的任意元素，同样成立。因此，除非 $\ell_1 = \ell_2$，$\{x_1^k(ux_2^n)x_1^{-k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 不具有紧闭包，从而可知，除非满足此条件，x_1 和 x_2 不会弱交换。另一方面，如果 x_1 是 Aut(T_{q+1}) 的椭圆元素，也就是说，如果 x_1 在 T_{q+1} 中具有有限轨道，那么 $\langle x_1\rangle^-$ 是紧的。因此 $\{x_1^k x_2 x_1^{-k}\}_{k\in}^-$Z 也是紧的，并且 x_1 和 x_2 弱交换。

因此，这些考量表明，x 的模糊中心化子为：

- Aut(T_{q+1})，若 x 是椭圆元素；以及
- {轴为 ℓ} ∪ {的平移，椭圆元素}，若 x 是轴为 ℓ的平移。

例5.3表明，虽然 x_2 的中心化子和 lev(x_2) 都是 G的子群，但模糊中心化子通常并非如此。为了进一步阐释这个例子，我们再给出几个定义。

定义 5.4。设 G 是一个全不连通局部紧群。

(1) $Per(G) = \{x \in G \mid \langle x\rangle^- \text{ 是紧的}\}$。(2) 若 x 的共轭类具有紧闭包，则 $x \in G$ 是一个 FC^--元，而 G中 FC^--元的集合记为 $FC^-(G)$。(3) G 的近似中心化子是所有满足 lev(x) $= G$的 $x \in G$ 构成的集合，记为 $AC(G)$。(4) G 的近似中心等于 $\bigcap\{\text{lev}(y) \mid y \in G\}$，记为$AZ(G)$。(5) G 的模糊中心是所有模糊中心化子等于 G的 $x \in G$ 构成的集合，记为 $VZ(G)$。

在例5.3中，$Per(G)$等于 T_{q+1}的椭圆自同构集合，而该集合等于近似中心化子 $AC(G)$，也等于模糊中心$VZ(G)$。FC^--元的集合 $FC^-(G)$和近似中心 $AZ(G)$均等于 $\{1\}$。

下一个结果描述定义 5.4 中各集合之间的序关系，并记录它们的性质。

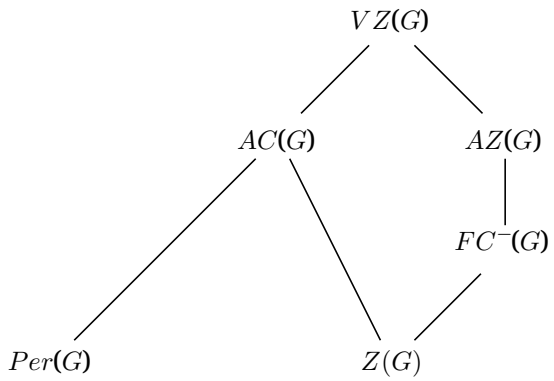

图 1. 与 G 中心相关的子集

命题 5.5。设 G 是一个全不连通局部紧群。定义 *5.4* 中所述的全不连通局部紧群 G 的子集，其包含关系如图 *5* 所示的哈斯图所示。此外：

(1) 所有子集在共轭下均不变；(2) $Z(G)$、$FC^-(G)$（若 G 是紧生成的）以及 $AZ(G)$ 是 G 的闭正规子群；以及(3) $\boldsymbol{Per}(G)$、$AC(G)$ 和 $VZ(G)$ 是 G 的闭子集。

VZ（G）中所有元素的尺度都等于1。

证明。这些包含关系可如下看出：命题 5.2 表明，$AC(G)$ 和 $AZ(G)$ 包含于 $VZ(G)$；$AC(G)$ 包含 $Per(G)$，因为 $\langle x\rangle^-$ 的紧性意味着 $\{x^k y x^{-k}\}^-_{k\in\mathbf{Z}}$ 等于 y 在 $\langle x\rangle^-$ 下的共轭元集合；它还包含 $Z(G)$，因为若 $x\in Z(G)$，则 $\{x^k y x^{-k}\}^-_{k\in\mathbf{Z}} = \{y\}$；$AZ(G)$ 包含 $FC^-(G)$，因为对每个 $y\in G$，都有 $\{y^k x y^{-k}\}^-_{k\in\mathbf{Z}} \subseteq \{wxw^{-1}\}^-_{w\in G}$；而 $FC^-(G)$ 包含$Z(G)$，因为单元素共轭类是紧的。

由于定义 5.4 中用于定义这些集合的每个陈述在共轭下均保持不变，因此如此定义的集合也具有这一性质。

关于这些集合的更多性质，众所周知，在每个拓扑群中，中心都是一个闭子群；并且，如果 G 是紧生成的，那么 $FC^-(G)$ 是闭的，这是 [7, 定理 2]。$AZ(G)$ 是闭子群，这是因为它是闭子群 $\mathrm{lev}(y)$、$y\in G$ 的交集。这些子群是正规子群，这是因为正如刚才所见，它们在共轭下封闭。$Per(G)$ 是闭的，这是 [14, 定理 2]。证明 $AC(G)$ 和 $VZ(G)$ 也闭的过程，与证明 $Per(G)$ 闭的论证类似；该论证用到了群元素都是单尺度的这一事实。

假设（稍后将证明）$x\in VZ(G)$ 的所有元素都是单尺度的，并考虑 $y\in VZ(G)^-$。为了证明 $y\in VZ(G)$，必须说明，对每个 $y_2\in G$，都存在一个紧子群 $n>0$、一个由 y_2^n 正规化的 U，以及 $u\in U$，使得 $uy_2^n\in\mathrm{lev}(y)$。由于尺度是连续的，我们有 $s(y) = 1 = s(y^{-1})$，因此存在一个由 y 正规化的紧开 $W\le G$。由于 yW 是 y 的一个邻域，我们可以选择 $x\in VZ(G)\cap yW$。于是存在一个紧子群 $n>0$、一个由 y_2 正规化的 U，以及 $u\in U$，使得 $uy_2^n\in\mathrm{lev}(x)$，因为$x\in VZ(G)$。由于 $yW=xW$ 和 x 正规化 W，对所有 $k\in\mathbf{Z}$，都存在元素 $w_k\in W$，使得 $y^k = w_k x^k$。因此，对每个 $k\in\mathbf{Z}$，

$$y^k(uy_2^n)y^{-k} = w_k x^k(uy_2^n)x^{-k}w_k^{-1}\in W\{x^j(uy_2^n)x^{-j}\}_{j\in\mathbf{Z}}W,$$

其为紧的。因此，$uy_2^n\in\mathrm{lev}(y)$如所要求，并且 $y\in VZ(G)$。证明 $AC(G)$是闭集的过程本质上相同。$AC(G)$中的每个元素都是单尺度的，因为它包含于 $VZ(G)$ 中。给定 $y\in AC(G$，存在由 y正规化的 W 以及 $x\in AC(G)\cap yW$。于是$\mathrm{lev}(x) = \mathrm{lev}(y)$，而每个 $y_2\in G$都属于$\mathrm{lev}(x)$这一事实意味着 y_2 也属于$\mathrm{lev}(y)$。

现在，只需证明 $VZ(G)$中的每个元素都是单尺度的，即可完成证明。设 x_1 属于 G，且 $s(x_1) > 1$，取 $v_+\in\mathrm{con}(x)\setminus\mathrm{nub}(x)$，并令$x_2 = v_+x_1$。那么，对于每个 $n>0$、每个由 x_1^n 正规化的紧群 U 以及所有 $k\ge 0$，我们都有

$$\begin{aligned} x_2^{k+1}(ux_1^n)x_2^{-k-1} &= (v_+x)^{k+1}(ux_1^n)(v_+x)^{-k-1}\\ &= v_+\dots(x_1^k v_+ x_1^{-k})(x_1^{k+1}ux_1^{-k-1})(x_1^{n+k}v_+x_1^{-n-k})^{-1}\dots(x_1^n v_+ x_1^{-n})^{-1}x^n. \end{aligned}$$

因此，根据引理 2.9，$\{x_2^{k+1}(ux_1^n)x_1^{-k-1}\}_{k\ge 0}$ 是离散且非紧的。特别地，对于任意 n 和 u，ux_1^n 都不属于 $\mathrm{lev}(x_2)$，并且 x_1 和 x_2 不弱交换。由于对于任意满足 $s(x_1)>1$ 的 x_1，都存在一个不与 x_1弱交换的 x_2，因此 $VZ(G)$中的每个元素都是单尺度的。□

注记 5.6. (1) 若 $x_1\in\mathrm{Per}(G)$，则 $x_2\in\mathrm{lev}(x_1)$，因此对于每个 x_2，x_2 都与 x_1模糊交换，其中 x_2 属于 G。命题 5.2 随即推出，每个 $x_1\in\mathrm{Per}(G)$ 都与每个 $x_2\in G$模糊交换。直接验证这一点很有启发性：考虑

$x_1 \in \mathrm{Per}(G)$ 和 $x_2 \in G$，并取 $n = 1$、$U = \langle x_1 \rangle^-$ 和 $u = x_1^{-1}$；于是 $ux_1 = 1_G$，它显然属于 $\mathrm{lev}(x_2)$。

(2) 如果 G 是非紧生成的全不连通局部紧群，子群 $FC^-(G)$ 不一定是闭的。 [11, 命题 3] 中的例子是一个群 G，其中$FC^-(G)$ 是真且稠密的。若 G 是连通局部紧群，则根据 [11, 推论 1], , $FC^-(G)$ 是闭的；该推论还提供了有关这个子群结构的更多信息。一般 $[FC]^-$-群的结构由 [10, 定理 3D], 描述；证明见 [5, 定理 2。2] ，另见 [8, 12.6.10]。

(3) 证明 $VZ(G)$ 和 $AC(G)$ 是闭的论证，仿照了 [14, 定理 2] 中用来证明 $Per(G)$ 是闭的论证；该定理回答了 Karl Heinrich Hofmann 提出的问题。

(4) 所有紧生成、拓扑单、非离散局部紧群组成的类记为 $\mathcal{S}$，目前尚未解决的问题是，$\mathcal{S}$ 中是否存在单尺度的全不连通局部紧群。由命题 5.5 可知，这一问题的更强版本是：$\mathcal{S}$ 中的群是否有 G 等于 $VZ(G)$、$AC(G)$ 或 $Per(G)$。任何 G 等于 $Per(G)$ 的群都具有比单尺度更强的性质，即是<正体 id='14'>各向异性</正体>的，这意味着内自同构的所有收缩子群都是平凡的。注意，具有$G = Per(G)$的离散有限生成单群确实存在，因为对于离散群，$Per(G)$是扭元的集合，而伯恩赛德猜想存在简单的反例。

参考文献

[1] 全不连通局部紧群的自同构平坦群。<正体 id='2'>即将出版</正体>。[2] Udo Baumgartner、Bertrand Rémy 和 George A. Willis。建筑自同构群的平坦秩。<正体 id='5'>Transform. Groups</正体>，12(3)：413–436，2007。[3] Udo Baumgartner 和 George A. Willis。全不连通局部紧群的自同构的收缩群与尺度。<正体 id='8'>Israel J. Math.</正体>，142：221–248，2004。[4] Pierre-Emmanuel Caprace、Colin D Reid 和 George A. Willis。收缩群的极限与蒂茨核。<正体 id='11'>J. Lie Theory</正体>，24：957–967，2014。[5] John R. Liukkonen。具有相对紧共轭类的群的对偶空间。<正体 id='14'>Trans. Amer. Math. Soc.</正体>，180：85–108，1973。[6] Rognvaldur G. Möller。通过图与置换研究全不连通局部紧群的结构理论。<正体 id='17'>Canadian J. Math.</正体>，54：795–827，2002。[7] Rognvaldur G. Möller。全不连通群中的 $fc^?$-元素与无限图的自同构。<正体 id='21'>Math. Scand.</正体>，92(2)：261–268，2003。[8] Theodore W. Palmer。<正体 id='24'>巴拿赫代数与 *-代数的一般理论。第 2 卷。*-代数</正体>，《<正体 id='26'>数学及其应用百科全书</正体>》第 79 卷。剑桥大学出版社，2001。[9] Colin D. Reid。全不连通局部紧群上的平坦作用的动力学。<正体 id='29'>New York J. Math.</正体>，22：115–190，2016。[10] Lewis C. Robertson。关于穆尔群结构的注记。<正体 id='32'>Bull. Amer. Math. Soc.</正体>，75：594–599，1969。[11] Jacques Tits。李群的有界位移自同构。<正体 id='35'>Topology</正体>，3（增刊 1）：97–107，1964。[12] Jacques Tits。关于树的自同构群。第 188–211 页，1970。[13] George A. Willis。全不连通局部紧群的结构。<正体 id='39'>Math. Ann.</正体>，300(2)：341–363，1994。[14] George A. Willis。全不连通群以及 Hofmann 和 Mukherjea 猜想的证明。<正体 id='42'>Bull. Austral. Math. Soc.</正体>，51(3)：489–494，1995。[15] George A. Willis。全不连通群上尺度函数的进一步性质。<正体 id='45'>J. Algebra</正体>，237(1)：142–164，2001。[16] George A. Willis。交换自同构的整洁子群：矩阵同时三角化的一个类比。<正体 id='48'>New York J. of Math.</正体>，10：1–35，2004。[17] George A. Willis。全不连通局部紧群的一个自同构的 nub。<正体 id='51'>Ergodic Theory Dynam. Systems</正体>，34(4)：1365–1394，2014。