arXiv:2302.13237v1 [math.CO] 26 Feb 2023

用于最小化线长的超立方体嵌入环面及路径与圈的笛卡尔积

ZHIYI TANG

Abstract. 尽管嵌入问题已针对若干正则图[1, 2, 3], 进行了研究，但超立方体嵌入环面仍然是一个悬而未决的问题[4, 2]。本文从数学上证明了该猜想，并获得了超立方体嵌入路径和／或圈的笛卡尔积时的最小线长。此外，我们还说明，格雷码嵌入是此类嵌入问题中的最优策略。

关键词： 嵌入线长；超立方体；环面；笛卡尔积；格雷码嵌入。

1. Introduction

现代高性能并行计算机中的任务映射可以建模为一个图嵌入问题。设 $G(V, E)$是一个顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G)$的简单连通图。图嵌入[1, 2, 3] 是客图 G 与宿主图 H之间的单射映射的有序对$< f, P_f >$，使得

(i) $f: V(G) \to V(H)$，以及 (ii) $P_f: E(G) \to \{P_f(u, v) : P_f(u, v)$ 是 H 中 $f(u)$ 与 $f(v)$ 之间的一条路径，对于$\{u, v\} \in E(G)\}$。

众所周知，拓扑映射问题是 NP完全问题[5]。自 Harper[6] 于 1964 年以及 Bernstein[7] 于 1967 年以来，一系列嵌入问题得到了研究[8,9, 10, 11, 12]。嵌入的质量可以通过某些成本准则来衡量。其中一项准则是线长。令 $WL(G, H; f)$ 表示在嵌入 f 下将G嵌入到 H中的线长。对所有嵌入 f取最小值， G 嵌入到 H 中的最小线长定义为

$$WL(G, H) = \min_f WL(G, H; f).$$

超立方体是互连网络中最受欢迎、用途最广且效率最高的拓扑结构之一[13]。与超立方体相关的研究日益增多[14, 15, 4, 16]。Manuel[4]等人计算了超立方体嵌入简单圆柱的最小线长。该论文将超立方体嵌入一般圆柱和环面的线长结果列为猜想。尽管Rajan等人[17]和Arockiaraj等人[2] 研究了这些嵌入问题，这两个猜想至今仍未解决。我们最近对超立方体嵌入圈[18]

和圆柱图（第一个猜想）[19] 分别给出了严格证明。利用这些技术和过程，我们尝试解决关于环面的最后一个猜想。本文还将这些结果推广到其他路径和／或圈的笛卡尔积。

可以看出，网格、圆柱体和环面都是图的笛卡尔积。过去，这些图的顶点通常用一系列自然数标记[15,4, 2, 19]。但对于某些高维图，这种标记方式并不方便。为了高效地描述特定嵌入，本文使用元组标记顶点。借助边等周问题（EIP）[20], ，我们估算并阐释了将超立方体嵌入环面及其他图的笛卡尔积时的最小线长。

记号。对于 $n \geq 1$，我们将 Q_n 定义为顶点集为 $\{0,1\}^n$的超立方体，其中两个 $0-1$ 向量恰好在一个坐标 [21]上不同时相邻。

记号。一个有 r_1 行、 r_2 列的 $r_1 \times r_2$ 网格表示为 $P_{r_1} \times P_{r_2}$，其中各行标记为 1，2，.....， r_1，各列标记为 1，2，.....， r_2 [15]。环面 $C_{r_1} \times C_{r_2}$ 是一个 $P_{r_1} \times P_{r_2}$，每列都有一条回绕边，每行也都有一条回绕边。

主要结果

定理 1.1。 对于任意 n_1、 $n_2 \geq 2$、 $n_1 + n_2 = n$，超立方体嵌入环面的最小线长为

$$WL(Q_n, C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}) = 2^{n_2}(3 \cdot 2^{2n_1-3} - 2^{n_1-1}) + 2^{n_1}(3 \cdot 2^{2n_2-3} - 2^{n_2-1}).$$

此外，格雷码嵌入是最优嵌入。

记号。 路径和/或圈的笛卡尔积记为 $\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_2 \times \cdots \times \mathscr{G}_k$，其中 $\mathscr{G}_i \in \{P_{2^{n_i}}, C_{2^{n_i}}\}$， $1 \leq i \leq k$。

定理 1.2。 对于任意 $k > 0$、 $n_i \geq 2$ 和 $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，超立方体嵌入笛卡尔积 $\mathscr{G}$ 的最小线长为

$$WL(Q_n, \mathscr{G}) = \sum_{i=1}^{k} \mathscr{L}_i,$$

其中

$$\mathscr{L}_i = \begin{cases} 2^{n-n_i}(3 \cdot 2^{2n_i-3} - 2^{n_i-1}), & if \ \mathscr{G}_i = C_{2^{n_i}}, \\ 2^{n-n_i}(2^{2n_i-1} - 2^{n_i-1}), & if \ \mathscr{G}_i = P_{2^{n_i}}. \end{cases}$$

此外，格雷码嵌入是一种最优嵌入。

本文组织如下。在第2节中，我们介绍一些定义和基本性质。在第3节中，我们说明格雷码嵌入是将超立方体嵌入环面的最优策略。第4 节 посвящено 笛卡尔积的路径和／或圈。

2. Preliminaries

EIP 已被用作计算图嵌入最小线长的有力工具[20]。EIP 用于确定图G 的一个基数为 k 的子集 S，使得将该子集与其补集分隔开的边割大小最小。在数学上，Harper 表示

$$\Theta(S) = \{\{u, v\} \in E(G) \ : u \in S, v \notin S\}.$$

For 任意 $S \subset V(Q_n)$，用 $\Theta(n,\ S)$ 代替 $\Theta(S)$，并令 $|\Theta(n,\ S)|$ 为 $\theta(n,\ S)$。

引理 2.1。 取 Q_n的一个子超立方体 Q_{n_1}，且 $S_1 \subset V(Q_{n_1})$ $S_2 \subset V(Q_{n-n_1})$，则

$$\theta(n, S_1 \times S_2) = \theta(n, S_2 \times S_1).$$

证明。 根据超立方体 Q_n的定义，当且仅当 $S_1 \times S_2$ 中存在一条边相连时， $S_2 \times S_1$中也存在一条边相连。□

以下引理是求精确线长的有效方法。

引理 2.2。 [19]设 f 是一个从 Q_n 到 H的嵌入。设 $(L_i)_{i=1}^m$ 是 $E(H)$的一个划分。对于每个 $1 \le i \le m$，$(L_i)_{i=1}^m$ 满足:

(A1) L_i 是 H 的一个边割，使得 L_i 将 H 分成两个连通分支，其中一个诱导顶点集记为 l_i; (A2) $|P_f(u,v) \cap L_i|$ 在 $\{u,v\} \in \Theta(n, f^{-1}(l_i))$ 时取 *1*，否则取 *0*，对任意$\{u,v\} \in E(Q_n)$均成立。

Then

$$WL(Q_n, H; f) = \sum_{i=1}^{m} \theta(n, f^{-1}(l_i)).$$

记号。 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，以及 $F_i^n = \{i, i+1, \cdots, i+2^{n-1}-1\}$、 $1 \le i \le 2^{n-1}$。记号。令 (i, j) 表示圆柱体 $C_{2^{n_1}} \times P_{2^{n_2}}$中第 i行和第 j列的一个顶点，其中 $1 \le i \le 2^{n_1}$ 和 $1 \le j \le 2^{n_2}$。于是 $V(C_{2^{n_1}} \times P_{2^{n_2}}) = N_{2^{n_1}} \times N_{2^{n_2}}$. 可以看出，顶点集 $F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}} = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1 \in F_i^{n_1}、\ x_2 \in N_{2^{n_2}}\}$和$N_{2^{n_1}} \times N_j = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1 \in N_{2^{n_1}}、\ x_2 \in N_j\}$分别等价于[19] , 中定义的 A_i和 B_j。示例见图 1 和图 2。

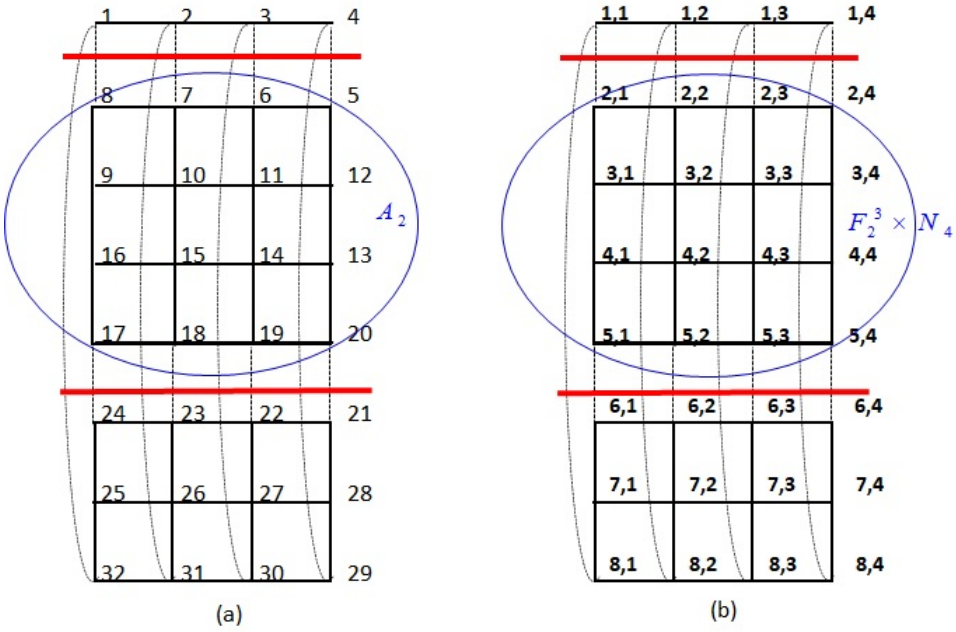

FIGURE 1. A_2 和 $F_2^3 \times N_{2^2}$ 在圆柱体 $C_{2^3} \times P_{2^2}$中

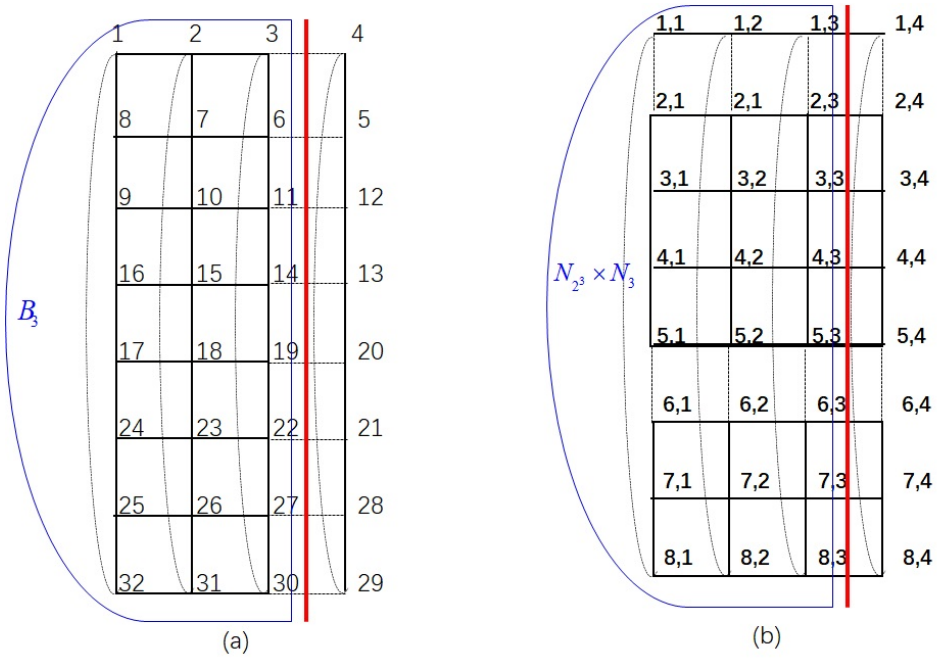

FIGURE 2. B_3 和$N_{2^3} \times N_3$ 在圆柱体 $C_{2^3} \times P_{2^2}$中

现在我们推广格雷码映射 ξ_n： $\{0,1\}^n \to \{1,2,\cdots,2^n\}$ 定义于 [18, 19]。定义 k阶格雷码映射 $\xi_{n_1\ldots n_k}$ 对应于 k 连通分支。

定义2.3。 k阶格雷码映射 $\xi_{n_1\ldots n_k}$ 定义为 $\xi_{n_1\ldots n_k}$ ： $\{0,1\}^n \to N_{2^{n_1}} \times \cdots \times N_{2^{n_k}}$, 即

$$\xi_{n_1\ldots n_k}(v) = \xi_{n_1\ldots n_k}(v_1 \ldots v_k) = (\xi_{n_1}(v_1), \ldots, \xi_{n_k}(v_k)),$$

w这里 $n_1 + \ldots + n_k = n$, 且 $v = v_1 \ldots v_k \in \{0,1\}^n$, $v_i \in \{0,1\}^{n_i}$, $1 \le i \le k$。

For example, $\xi_{32}(11011) = (\xi_3(110), \xi_2(11)) = (5,3)$.
A根据d格雷码映h射规则,f G我们有 d h h

$$\xi^{-1}_{n_1n_2}(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}}) = \xi_n^{-1}(A_i), \quad \xi^{-1}_{n_1n_2}(N_{2^{n_1}} \times N_j) = \xi_n^{-1}(B_j).$$

结合 [19], 中的 (12) 和 (13), 我们有

$$\sum_{i=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, \xi^{-1}_{n_1n_2}(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}})) = 2^{n-n_1}(3 \cdot 2^{2n_1-3} - 2^{n_1-1}). \tag{1a}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, \xi^{-1}_{n_1n_2}(N_{2^{n_1}} \times N_j)) = 2^{n-n_2}(2^{2n_2-1} - 2^{n_2-1}). \tag{1b}$$

设 $f\colon\ \{0,1\}^n \to N_{2^{n_1}} \times N_{2^{n_2}}$是将 Q_n嵌入到 $C_{2^{n_1}} \times P_{2^{n_2}}$中的一个嵌入。中的定理 5.2 和定理 5.1 可改写为

$$\sum_{i=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, f^{-1}(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}})) \geq \sum_{i=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, \xi_{n_1n_2}^{-1}(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}})). \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, f^{-1}(N_{2^{n_1}} \times N_j)) \geq \sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, \xi_{n_1n_2}^{-1}(N_{2^{n_1}} \times N_j)). \tag{2b}$$

圆柱体$C_{2^{n_1}} \times P_{2^{n_2}}$也可视为$P_{2^{n_2}} \times C_{2^{n_1}}$。令 $f\colon\ \{0,1\}^n \to N_{2^{n_2}} \times N_{2^{n_1}}$为 Q_n 到 $P_{2^{n_2}} \times C_{2^{n_1}}$的一个嵌入，则（2）可改写为

$$\sum_{i=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, f^{-1}(N_{2^{n_2}} \times F_i^{n_1})) \geq \sum_{i=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, \xi_{n_2n_1}^{-1}(N_{2^{n_2}} \times F_i^{n_1})). \tag{3a}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, f^{-1}(N_j \times N_{2^{n_1}})) \geq \sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, \xi_{n_2n_1}^{-1}(N_j \times N_{2^{n_1}})). \tag{3b}$$

注 2.4。可见 $\xi_{n_1n_2}^{-1}\left(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}}\right) = \xi_{n_1}^{-1}\left(F_i^{n_1}\right) \times V\left(Q_{n_2}\right)$。然后，由引理2.1，可得 $\theta\left(n,\ \xi_{n_1n_2}^{-1}\left(F_i^{n_1} \times N_{2^{n_2}}\right)\right) = \theta\left(n,\ \xi_{n_2n_1}^{-1}\left(N_{2^{n_2}} \times F_i^{n_1}\right)\right)$。

3. HYPBERCUBES INTO TORUS

在本节中，我们通过以下步骤证明定理1.1 。

- **标记**。令一个二进制元组集表示环面 $C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}$ 的顶点集，即

$$V(C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}) = \{x = (x_1, x_2) : 1 \leq x_i \leq 2^{n_i},\ i = 1, 2\} = N_{2^{n_1}} \times N_{2^{n_2}}.$$

边集 $E(C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}})$ 由 $\mathscr{E}_1$ 和 $\cup\mathscr{E}_2$组成，其中

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &= \{\{(x_1, x_2), (x_1', x_2)\} : \{x_1, x_1'\} \in E(C_{2^{n_1}}), x_2 \in N_{2^{n_2}}\}, \\ \mathscr{E}_2 &= \{\{(x_1, x_2), (x_1, x_2')\} : x_1 \in N_{2^{n_1}}, \{x_2, x_2'\} \in E(C_{2^{n_2}})\}. \end{aligned}$$

- **划分**。 构造环面边集的一个划分。

步骤 1。 对于每个 $i = 1,\ 2, j = 1,\ \ldots,\ 2^{n_i-1}$，令 $\mathscr{X}_{ij}$为圈$C_{2^{n_i}}$ 的一条边割，使得 $\mathscr{X}_{ij}$ 将 $C_{2^{n_i}}$ 断开为两个连通分支，其导出顶点集为 $F_j^{n_i}$。

步骤 2。 对于 $i = 1,\ 2$，记

$$\mathscr{P}_{ij} = \bigcup_{\{x_i, x_i'\} \in \mathscr{X}_{ij}} \{\{x, x'\} \in \mathscr{E}_i\},$$

则 $\{\mathscr{P}_{ij}\colon\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2^{n_i-1}\}$是 $E(C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}})$ 的划分 .

- **计算**。 注意，对于每个 $i,\ j,\ \mathscr{P}_{ij}$ 都是环面 $C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}$ 的一个边割。 $\mathscr{P}_{1j}$ 会将环面分割成两个连通分支，其导出顶点集为 $F_j^{n_1} \times N_{2^{n_2}}$，而 $\mathscr{P}_{2j}$导出的顶点集为 $N_{2^{n_1}} \times F_j^{n_2}$。例如见图3。

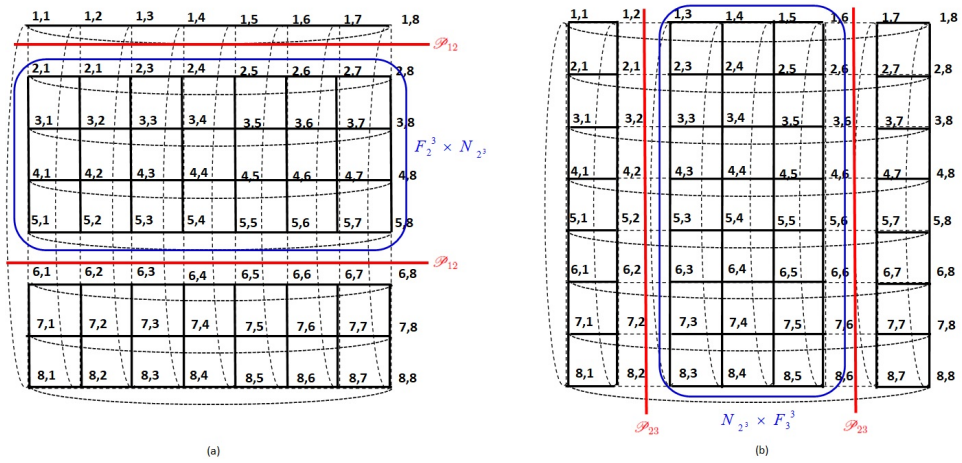

FIGURE 3. (a) 边割 $\mathscr{P}_{12}$ 将 $C_{2^3} \times C_{2^3}$ 分为两个连通分支，其导出顶点集为 $F_2^3 \times N_{2^3}$。(b) 边割$\mathscr{P}_{23}$ 将 $C_{2^3} \times C_{2^3}$ 分为两个连通分支，其导出顶点集为 $N_{2^3} \times F_3^3$。

设 $f\colon \{0,1\}^n \to N_{2^{n_1}} \times N_{2^{n_2}}$是从 Q_n到 $C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}$的一个嵌入。在划分 $\{\mathscr{P}_{ij}: 1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 2^{n_i-1}\}$ 以及引理 2.2 下，线长可写成与函数 θ 相关的求和，即

$$WL(Q_n, C_{2^{n_1}} \times C_{2^{n_2}}; f) = \sum_{j=1}^{2^{n_1-1}} \theta(n, f^{-1}(F_j^{n_1} \times N_{2^{n_2}})) + \sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, f^{-1}(N_{2^{n_1}} \times F_j^{n_2})). \tag{4}$$

根据引理 2.1 和（1a），可得

$$\sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, \xi_{n_1 n_2}^{-1}(N_{2^{n_1}} \times F_j^{n_2})) = 2^{n-n_2}(3 \cdot 2^{2n_2-3} - 2^{n_2-1}). \tag{5}$$

根据引理 2.1和（3a），可得

$$\sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, f^{-1}(N_{2^{n_1}} \times F_j^{n_2})) \ge \sum_{j=1}^{2^{n_2-1}} \theta(n, \xi_{n_1 n_2}^{-1}(N_{2^{n_1}} \times F_j^{n_2})). \tag{6}$$

结合上述三个公式及（1a）、（2a），定理 1.1 成立。

4. 超立方体

本节分三个部分证明定理1.2。第一部分遵循与第3节类似的过程。然后，我们求得格雷码嵌入下的线长。最后，我们得出结论：格雷码嵌入是一种最优策略。

4.1. **嵌入线长的计算**。

•**标记**。令

$$V(\mathscr{G})=\{x=(x_1,\ldots,x_k):x_i\in N_{2^{n_i}},1\le i\le k\}=N_{2^{n_1}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}}$$

为笛卡尔积 $\mathscr{G}$ 的顶点集，其中包含路径和/或圈。笛卡尔积 $\mathscr{G}$ 的边集$E(\mathscr{G})$由所有与路径和/或圈对应的边 $\mathscr{E}_i$ 组成，记作 $E(\mathscr{G})=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i$。

• **划分**。 将笛卡尔积 $\mathscr{G}$的边集划分。

步骤 1。 对每个 $i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,2^{n_i-1},\ \mathscr{X}_{ij}$已在第3节中描述。对每个 $i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,2^{n_i}-1$, 令 $\mathscr{Y}_{ij}$为路径 $P_{2^{n_i}}$的一个边割，使得 $\mathscr{Y}_{ij}$ 将 $P_{2^{n_i}}$ 断开为两个连通分支，其导出顶点集为N_j。

记号。 对于 $1\le i\le k$, 若 $\mathscr{G}_i=C_{2^{n_i}}$，令 q_i 为 2^{n_i-1}；否则令其为$\mathscr{G}_i=P_{2^{n_i}}$。对于 $j=1,\ldots,q_i$, 记作

$$\mathscr{F}_{ij}=\begin{cases}\mathscr{X}_{ij}, & \text{if}\quad \mathscr{G}_i=C_{2^{n_i}},\\ \mathscr{Y}_{ij}, & \text{if}\quad \mathscr{G}_i=P_{2^{n_i}}.\end{cases}$$

步骤 2. 对于 $i=1$、k, $j=1$、q_i, 记为

$$\mathscr{P}_{ij}=\bigcup_{\{x_i,x_i'\}\in\mathscr{F}_{ij}}\{\{x,x'\}\in\mathscr{E}_i\},$$

那么 $\{\mathscr{P}_{ij}:\ 1\le i\le k,\ 1\le j\le q_i\}$是 $E(\mathscr{G})$ 的一个划分。

• **计算**。 注意，对于每个 i, j, $\mathscr{P}_{ij}$是笛卡尔积$\mathscr{G}$的一条边割。定义顶点集 $\mathscr{A}_{ij}$：若满足 $\mathscr{G}_i=C_{2^{n_i}}$，则为 $F_j^{n_i}$；否则为 $\mathscr{G}_i=P_{2^{n_i}}$。

记号。

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}_{1j}=\mathscr{A}_{1j}\times N_{2^{n_2}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}},\quad \mathscr{B}_{kj}=N_{2^{n_1}}\times\cdots\times N_{2^{n_{k-1}}}\times\mathscr{A}_{kj},\\ &\mathscr{B}_{ij}=N_{2^{n_1}}\times\cdots\times\mathscr{A}_{ij}\times\cdots\times N_{2^{n_k}},\quad 1<i<k.\end{aligned}\tag{7}$$

可见 $\mathscr{P}_{ij}$ 将 $\mathscr{G}$ 断开为两个连通分支，其中导出顶点集 $\mathscr{B}_{ij}$。令 f: $\{0,1\}^n\to N_{2^{n_1}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}}$是 Q_n到 $\mathscr{G}$的一个嵌入。在划分 $\{\mathscr{P}_{ij}:\ 1\le i\le k$ 下，$1\le j\le q_i\}$ 并根据引理 2.2，线长可表示为与函数 θ相关的求和，即:

$$WL(Q_n,\mathscr{G};f)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i}\theta(n,f^{-1}(\mathscr{B}_{ij})).\tag{8}$$

4.2. **格雷码嵌入下的线长**。

我们分两种情况讨论格雷码嵌入下的线长：一种是 $\mathscr{G}_i$为圈$C_{2^{n_i}}$，另一种是 $\mathscr{G}_i$为路径$P_{2^{n_i}}$。下文设$1\le i\le k$, $1\le j\le q_i$。

引理 4.1. 如果 $\mathscr{G}_i$ 是圈 $C_{2^{n_i}}$，那么我们有

$$\sum_{j=1}^{q_i}\theta(n,\xi_{n_1\ldots n_k}^{-1}(\mathscr{B}_{ij}))=2^{n-n_i}(3\cdot 2^{2n_i-3}-2^{n_i-1}).$$

证明。 根据记号（7），我们有

$$\begin{aligned}\xi^{-1}_{n_1\dots n_k}(\mathscr{B}_{ij}) &= \xi^{-1}_{n_1\dots n_k}(N_{2^{n_1}}\times\cdots\times F^{n_i}_j\times\ldots\times N_{2^{n_k}})\\ &= V(Q_{n_1})\times\ldots\times\xi^{-1}_{n_i}(F^{n_i}_j)\times\ldots\times V(Q_{n_k})\\ &= V(Q_{n_1+\ldots+n_{i-1}})\times\xi^{-1}_{n_i}(F^{n_i}_j)\times V(Q_{n_{i+1}+\ldots+n_k}).\end{aligned}$$

此外，由引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}&\theta(n, V(Q_{n_1+\ldots+n_{i-1}})\times\xi^{-1}_{n_i}(F^{n_i}_j)\times V(Q_{n_{i+1}+\ldots+n_k}))\\ =\ &\theta(n,\xi^{-1}_{n_i}(F^{n_i}_j)\times V(Q_{n_{i+1}+\ldots+n_k})\times V(Q_{n_1+\ldots+n_{i-1}}))\\ =\ &\theta(n,\xi^{-1}_{n_i}(F^{n_i}_j)\times V(Q_{n-n_i})).\end{aligned}$$

因此，引理 4.1 由（1a）得出。 □

类似地，我们给出以下引理。

引理 4.2。 如果 $\mathscr{G}_i$ 是路径 $P_{2^{n_i}}$，那么我们有

$$\sum_{j=1}^{q_i}\theta(n,\xi^{-1}_{n_1\dots n_k}(\mathscr{B}_{ij})) = 2^{n-n_i}(2^{2n_i-1}-2^{n_i-1}).$$

结合（8）、引理 4.1 和引理 4.2，我们得到超立方体嵌入到路径和/或圈的笛卡尔积中的格雷码嵌入线长。即

$$WL(Q_n,\mathscr{G};\xi_{n_1\dots n_k}) = \sum_{i=1}^{k}\mathscr{L}_i,$$

其中 $\mathscr{L}_i$ 在定理 1.2中定义。

4.3. **最小线长**。

我们证明，格雷码嵌入的线长是将超立方体嵌入到路径和／或圈的笛卡尔积时线长的下界。根据（8），只需证明

引理 4.3. 设 $f\colon\{0,1\}^n\to N_{2^{n_1}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}}$ 是将 Q_n 嵌入到 $\mathscr{G}$ 的嵌入，则

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i}\theta(n,f^{-1}(\mathscr{B}_{ij}))\geq\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i}\theta(n,\xi^{-1}_{n_1\cdots n_k}(\mathscr{B}_{ij})).$$

证明。 为证明此引理，我们只考虑 $i=1$，因为类似的论证同样适用于其他 $2\leq i\leq k$。

• **情形 1.** $\mathscr{G}_1 = C_{2^{n_1}}$.

对于 $1\leq j\leq q_1 = 2^{n_1-1}$, $f^{-1}(\mathscr{B}_{1j}) = f^{-1}(F^{n_1}_j\times N_{2^{n_2}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}})$。定义一个从 $N_{2^{n_1}}\times N_{2^{n_2}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}}$ 到 $N_{2^{n_1}}\times N_{2^{n-n_1}}$ 的双射 f_1，其中

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_k) = (x_1, x_k+\sum_{i=2}^{k-1}(x_i-1)2^{\sum_{j=i+1}^{k}n_j}).$$

显然 该 $f_1(F^{n_1}_j\times N_{2^{n_2}}\times\cdots\times N_{2^{n_k}}) = F^{n_1}_j\times N_{2^{n-n_1}}$。此外，我们有

$$f^{-1}(\mathscr{B}_{1j}) = f^{-1}\circ f_1^{-1}(F^{n_1}_j\times N_{2^{n-n_1}}) = (f_1\circ f)^{-1}(F^{n_1}_j\times N_{2^{n-n_1}}).$$

注意到 $f_1 \circ f$是从 $\{0,1\}^n$到 $N_{2^{n_1}} \times N_{2^{n-n_1}}$的任意映射，那么，根据（2a），我们有 $\sum_{i=1}^{2^{n_1}-1} \theta$（$n$，$f^{-1}$（$\mathscr{B}_{1j}$））$\geq \sum_{i=1}^{2^{n_1}-1} \theta$（$n$，$\xi_{n_1}^{-1}$（$F_j^{n_1}$）$\times V$（$Q_{n-n_1}$））。因此，我们得出结论：

$$\sum_{i=1}^{2^{n_1}-1} \theta(n, f^{-1}(\mathscr{B}_{1j})) \geq \sum_{i=1}^{2^{n_1}-1} \theta(n, \xi_{n_1 \cdots n_k}^{-1}(\mathscr{B}_{1j})). \tag{9}$$

- **情形 2**。$\mathscr{G}_1 = P_{2^{n_1}0}$。通过类似的分析，我们还可得到（9）。

  结合**情形 1** 和**情形 2**，$i = 1$ 的情形得以证明。因此，引理成立。□

定理 1.2的证明。 定理1.2 由第4.1节至第 4.3节得出。**致谢** 作者感谢 Qinghui Liu 教授的认真审阅和宝贵建议。本工作得到国家自然科学基金委员会的资助，项目编号为 11871098。

References

[1] S. L. Bezrukov、J. D. Chavez、L. H. Harper、M. R¨ottger、U. P. Schroeder，将超立方体嵌入网格，《1998 年计算机科学数学基础会议》，载于：Brim L.、Gruska J.、Zlatuka J.（编），《计算机科学讲义》，第 1450 卷，施普林格，柏林，海德堡，693–701。[2] M. Arockiaraj、A. J. Shalini，关于将超立方体嵌入圆柱体和环面的线长猜想，《理论计算机科学》，595（2015），168–171。[3] Micheal Arockiaraj、Jia-Bao Liu、J. Nancy Delaila 和 Arul Jeya Shalini，将平衡完全多部图嵌入网格及树相关结构的最优布局，《离散应用数学》，288（2021），50–65。[4]P. Manuel、M. Arockiaraj、I. Rajasingh、B. Rajan，为最小化线长而将超立方体嵌入圆柱体、蛇形图和毛毛虫树，《离散应用数学》，159（2011），2109–2116。[5] T. Hoefler 和 M. Snir，大规模并行体系结构的通用拓扑映射策略，ICS '11：《超级计算国际会议论文集》，2011 年 5 月，75–84。http://doi.acm.org/10.1145/1995896.1995909。[6] L. H. Harper，顶点的数字赋值的最优性，《SIAM 期刊》12:1（1964），131–135。[7] A. J. Bernstein，n元超立方体上的极大连通数组，《SIAM 应用数学期刊》，15:6（1967），1485–1489。[8] J. A. Ellis，将矩形网格嵌入正方形网格，《IEEE 计算机学报》，40:1（1991），46–52。[9] D. Sotteau 和 J. Opatrny，将完全二叉树嵌入网格和扩展网格，使总顶点拥塞为 1，《离散应用数学》，98（2000），237–254。[10] B. Doina、W. B. Wolfgang、B. Natasa、L. Shahram，将蜂窝网络最优嵌入超立方体，《并行处理快报》，14（2004），367–375。[11] J. Fan J 和 X. Jia，将网格网络嵌入交叉立方体，《信息科学》，177:15（2007），3151–3160。[12] Jia-Bao Liu、Arul Jeya Shalini、Micheal Arockiaraj 和 J. Nancy Delaila，《布局计算中拥塞引理的刻画》，《数学杂志》，文章编号 2984703（2021），https://doi.org/10.1155/2021/2984703。[13] 徐俊明，《互连网络的拓扑结构与分析》，Kluwer Academic Publishers，2001 年，第 105 页。[14] B. Chen，关于将矩形网格嵌入超立方体，《IEEE 计算机学报》，37:10（1988），1285–1288。

[15] P. Manuel、I. Rajasingh、B. Rajan 和 H. Mercy, 《网格上超立方体的精确线长》, 《离散应用数学》157:7（2009）, 1486–1495。[16] Indra Rajasingh、Micheal Arockiaraj、Bharati Rajan 和 Paul Manuel, 《超立方体嵌入 $n-$维网格网络的最小线长》, 《信息处理快报》112（2012）, 583–586。[17] R.S.Rajan、I.Rajasingh、N.Parthiban、T.M. Rajalaxmi, 《将超立方体嵌入圆柱体和环面的线性时间算法》, 《理论计算机科学》542（2014）, 108–115。[18] Qinghui Liu 和 Zhiyi Tang, 《超立方体环形线长的严格证明》, 《数学学报》43B:2（2023）, 919–941。[19] Zhiyi Tang, 《超立方体嵌入圆柱体的最优嵌入》, 《理论计算机科学》923（2022）, 327–336。[20] L. H. Harper, 《等周问题的全局方法》, 剑桥大学出版社, 2004, 第1章。[21] C. Rashtchian、W. Raynaud, 《超立方体的幂的边等周不等式》, 2022, 最新版本见 arXiv:1909.10435。

School of Mathematics and Physics, Hubei Polytechnic University, Huangshi435003, PR China.电子邮箱地址：tangzhiyi@hbpu.edu.cn