arXiv:2302.13244v2 [math.GT] 5 Oct 2023

扭曲虚拟辫子与扭曲链环

KOMAL NEGI、MADETI PRABHAKAR 和 SEIICHI KAMADA

Abstract. M. Bourgoin 引入的扭结纽结理论是纽结理论的一种推广，由此引出了扭曲虚辫的概念。本文证明了扭结链环对应于纽结理论中亚历山大定理和马尔可夫定理的定理。我们还给出了扭结虚辫群的群表示及约化群表示。

1. Introduction

M. O. Bourgoin [1] 将扭结纽结理论引入为纽结理论的一种推广。扭结链环图是绘制在 $\mathbb{R}^2$ 上的链环图，其中可能包含一些称为虚交叉的交叉点，以及横杠；横杠是与图示中的弧相交的短弧。扭结链环在图示意义上定义为扭结链图在 $\mathbb{R}^2$ 的同痕及称为扩展 ***Reidemeister*** 变换 的局部变换下的等价类。这些局部变换包括 Reidemeister 变换（R1、R2、R3）、虚 Reidemeister 变换（V1、V2、V3、V4）以及图 1 所示的扭结变换（T1、T2、T3）。扭结链环对应于定向三维流形中链环的稳定等价类，这些流形是闭曲面（不一定可定向）上的定向 I-丛。

扭结链环类似于 L. H. Kauffman [7] 引入的虚链环。虚链环图是在 $\mathbb{R}^2$ 上的链环图示，其中可能包含一些虚交叉。虚链环定义为：将虚链环图模去 $\mathbb{R}^2$ 的同痕以及称为 广义 ***Reidemeister*** 变换 的局部变换所得的对象；这些局部变换包括 Reidemeister 变换（R1、R2、R3）和图 1 所示的虚 Reidemeister 变换（V1、V2、V3、V4）。虚链环对应于定向三维流形中链环的稳定等价类，而这些流形是闭定向曲面上的定向 I-丛。

亚历山大定理指出，每个链环都可表示为一个辫的闭包；马尔可夫定理指出，这样的辫在某些称为马尔可夫变换的变换下是唯一的。在虚纽结理论中，类似的定理已在 [8, 9] 中建立。

本文证明了关于扭结链环、对应于亚历山大定理和马尔可夫定理的定理。我们还给出了扭结虚辫群的群表示和约化群表示。

本文的组织结构如下。第 2 节给出扭结虚辫群的定义，并提供该群的群表示。第 3 节通过引入一种将给定扭结链图编成辫的方法，证明了扭结链环的亚历山大定理；我们称此方法为编辫过程。第 4 节陈述并证明扭结链环的马尔可夫定理。第 5 节讨论虚交换变换。第 6 节给出扭结虚辫群的约化表示，并作总结。

2. The twisted virtual braid group

令 n 为正整数。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10,57K12.*Key words and phrases.* 扭结、扭结虚辫、亚历山大定理、马尔可夫定理。

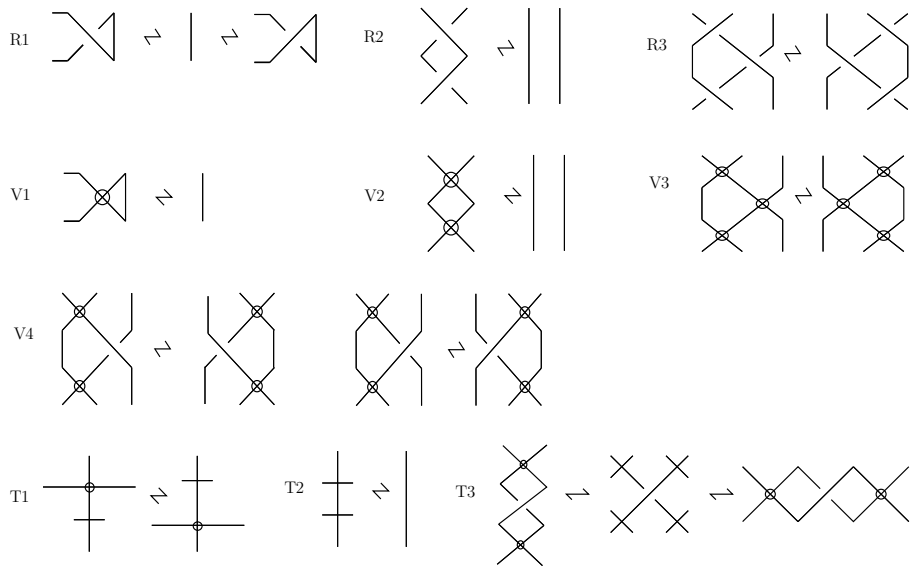

FIGURE 1. 扩展 Reidemeister 变换。

定义 2.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，将点 $(i,\ 1)$ 与点 $(q_i,\ 0)$ $(i = 1,\ \ldots\ldots,\ n)$ 相连的 n 条平滑曲线或多边形曲线的并，称为一幅由 n 股线组成的扭结虚辫图（或称次数为 n）；这些曲线称为股线。其中，$(q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n)$ 是数（$1,\ \ldots\ldots,\ n$）的一个置换，这些曲线关于第二坐标单调，且曲线的交点均为横截双重点，并标记为正交叉、负交叉或虚交叉；此外，股线上还可以带有横杠，即与股线横向相交的短弧。见图 2，其中从上往下的五个交叉点依次为负交叉、正交叉、虚交叉、正交叉和正交叉。

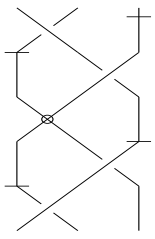

FIGURE 2. 一个含有3股线的扭结虚辫图。

下面给出另一种定义。

定义2.2。设 E 为 $[0, n+1] \times [0,1]$，令 $p_2 :\ E \to [0,1]$ 为第二因子投影。含有 n 股线（或次数为 n）的扭结虚辫图是 E 中的一个浸入的 1 维流形 $b = a_1 \cup \ldots \cup a_n$，其中 $a_1,\ \ldots,\ a_n$ 是嵌入弧，称为股线，其上可能带有横杠；横杠是指与股线横向相交的短弧，并满足以下条件（1）–（5）：

(1) $\partial b = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{0, 1\} \subset E$。(2) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$、$p_2|_{a_i} :$ $a_i \to [0,1]$ 是一个同胚。(3) 股线的多重点集合由横截双重点组成，这些点被称为图示的交叉点。

(4) 每个交叉点都标有正交叉、负交叉或虚交叉的信息。(5) 每条横杠都避开交叉点。

令 $X(b)$ 表示 b 的交叉点集合，以及横杠与股线相交处的点集。若扭曲虚辫图满足以下条件，则称其为良好的。

(6) The restriction map $p_2|_{X(b)} : X(b) \to [0,1]$ is injective.

图2所示的扭曲虚辫图是良好的。另一方面，图3所示的扭曲虚辫图并非良好，因为对于某个 $y \in [0,1]$，存在一对横杠位于 $p_2^{-1}(y)$ 中；或者对于某个 $y' \in [0,1]$，存在一个虚交叉点和一条横杠位于 $p_2^{-1}(y')$ 中。

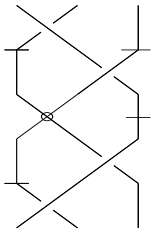

FIGURE 3. 一个不良好的扭曲虚辫图。

定义2.3。若存在一个由次数为 n 的扭曲虚辫图构成的有限序列，记作 b_0，b_1，...，b_m，其中 $b = b_0$ 且 $b' = b_m$，使得对每个 $j = 1$，...，m，b_j 都可通过以下某种方式由 b_{j-1} 得到，则称次数为 n 的两个扭曲虚辫图 b 和 b' 等价：

- 保持扭曲虚辫图条件 (1)–(5) 的 E 的一次同痕。
- 一次扩展 Reidemeister 变换。

一个*扭结虚辫*是扭曲虚辫图示的一个等价类。

扭结虚辫的集合构成一个群，其乘积的定义方式与辫群类似，通过拼接得到；当我们将辫图示竖直绘制时，bb' 是 b 在 b' 上。扭结虚辫群记作 TVB_n。

设图 4 所示的扭曲虚辫图示为 σ_i, σ_i^{-1}, $v_i (i = 1, \ldots, n-1)$ 和 $\gamma_i (i = 1, \ldots, n)$。由它们表示的扭结虚辫也用相同符号表示。群 TVB_n 由 σ_i, $v_i (i = 1, \ldots, n-1)$ 和 $\gamma_i (i = 1, \ldots, n)$ 生成，我们称它们为*标准生成元*。

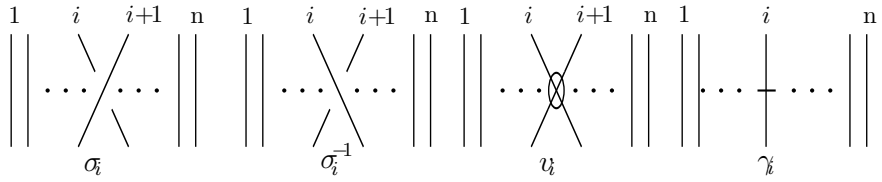

FIGURE 4. 扭结虚辫群的生成元。

图 5 展示了经典辫子变换，对应于二维实平面和 R3。图6展示了虚辫子变换，对应于 V2、V3 和 V4。（还有一些其他变换对应于 R3 和 V4。不过，众所周知，这些变换等价于图中所示的变换，参见 [8]。）

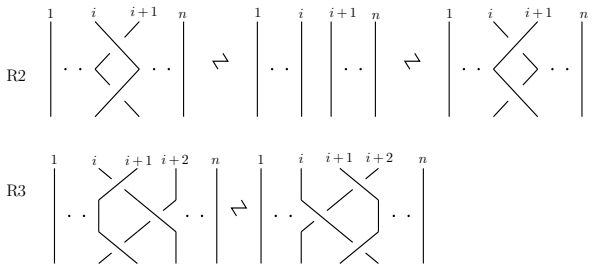

FIGURE 5. 经典辫子变换。

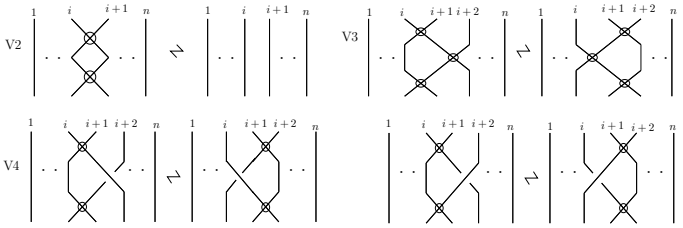

FIGURE 6. 虚辫子变换。

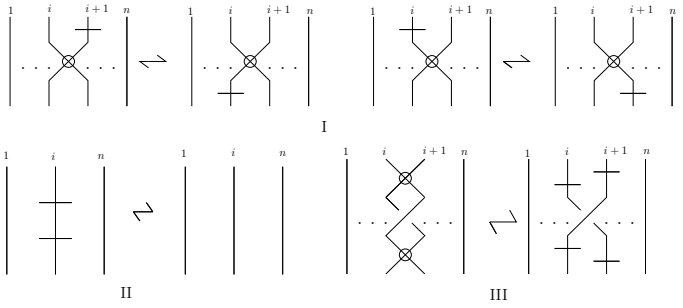

FIGURE 7. 扭结辫子变换。

我们将图7顶行所示的两个变换称为*I* 型扭结辫子变换，将第二行左侧的变换称为*II* 型扭结辫子变换。底部右侧的变换称为*III* 型扭结辫子变换或*III()* 型变换。将正交叉替换为负交叉时，称为*III* 型扭结辫子变换或*III()* 型变换。

与扩展 Reidemeister 变换相对应的辫子变换包括经典辫子变换、虚辫子变换和扭结辫子变换。

定理 2.4. 扭结虚辫群 TVB_n 由标准生成元 σ_i、 $v_i\,(i=1,\ldots,n-1)$ 和 $\gamma_i\,(i=1,\ldots,n)$生成，其定义关系如下

是定义关系，其中 e 表示单位元：

$$
\begin{aligned}
&(1) && \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{对于 } |i-j|>1;\\
&(2) && \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{对于 } i=1、\ldots\ldots、n-2;\\
&(3) && v_i^2 = e && \text{对于 } i=1、\ldots\ldots、n-1;\\
&(4) && v_iv_j = v_jv_i && \text{对于 } |i-j|>1;\\
&(5) && v_iv_{i+1}v_i = v_{i+1}v_iv_{i+1} && \text{对于 } i=1、\ldots\ldots、n-2;\\
&(6) && \sigma_iv_j = v_j\sigma_i && \textit{for } |i-j|>1;\\
&(7) && v_i\sigma_{i+1}v_i = v_{i+1}\sigma_iv_{i+1} && \textit{for } i=1,\ldots,n-2;\\
&(8) && \gamma_i^2 = e && \textit{for } i=1,\ldots,n;\\
&(9) && \gamma_i\gamma_j = \gamma_j\gamma_i && \textit{for } i,j=1,\ldots,n;\\
&(10) && \gamma_jv_i = v_i\gamma_j && \textit{for } j\neq i,i+1;\\
&(11) && \sigma_i\gamma_j = \gamma_j\sigma_i && \textit{for } j\neq i,i+1;\\
&(12) && \gamma_{i+1}v_i = v_i\gamma_i && \text{当 } i=1,\ldots,n-1 \text{ 时};\\
&(13) && v_i\sigma_iv_i = \gamma_{i+1}\gamma_i\sigma_i\gamma_i\gamma_{i+1} && \text{当 } i=1,\ldots,n-1. \text{ 时}
\end{aligned}
$$

注 2.5. 利用 (3)，我们看到关系 (7) 和 (12) 分别等价于以下 (14) 和 (15)：

$$
\begin{aligned}
&(14) && \sigma_{i+1} = v_iv_{i+1}\sigma_iv_{i+1}v_i && \text{for } i=1,\ldots,n-2,\\
&(15) && \gamma_{i+1} = v_i\gamma_iv_i && \text{当 } i=1,\ldots,n-1.
\end{aligned}
$$

注 2.6. 如图7所示，I型扭辫变换有两种。左边的对应关系 (12)，右边的对应关系 (16)：

$$
(16) \qquad \gamma_iv_i = v_i\gamma_{i+1} \qquad \text{for } i=1,\ldots,n-1.
$$

利用 (3)，我们看到关系 (12) 等价于 (16)。

注2.7。 III型的扭曲辫有两种变换：一种是图7所示的III型(+)，另一种是III型(–)。前者对应关系(13)，后者对应关系(17)：

$$
(17) \qquad v_i\sigma_i^{-1}v_i = \gamma_{i+1}\gamma_i\sigma_i^{-1}\gamma_i\gamma_{i+1} \qquad \text{for } i=1,\ldots,n-1.
$$

利用(3)和(8)，我们可以看出关系(13)与(17)等价。

证明。 注意， v_i 和 γ_i 在 TVB_n 中的逆元就是它们自身。令$\mathcal{S}$为 TVB_n 的标准生成元集合，令 $\mathcal{S}^*$ 为 TVB_n的标准生成元及其逆元的集合：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{\sigma_i, v_i \mid i=1,\ldots,n-1\}\cup\{\gamma_i \mid i=1,\ldots,n\},\\
\mathcal{S}^* &= \{\sigma_i,\sigma_i^{-1}, v_i \mid i=1,\ldots,n-1\}\cup\{\gamma_i \mid i=1,\ldots,n\}.
\end{aligned}
$$

设 b 是一个扭结虚辫图。若它是良好的，则它可以唯一地表示为 $\mathcal{S}^*$中元素的拼接，我们称之为 b的优选词 。若它不是良好的，则可以通过对 E 进行同痕作微小修改，同时保持其为扭结虚辫图，使其变为良好。因此， $\mathcal{S}$ 生成群TVB_n。

设 b 和 b' 是良好的扭曲虚拟辫图示。假设 b' 是由 b 经过保持扭结虚辫图条件的 E 同痕得到的。那么，它们之间可以通过有限次改变X（b）中一对点的高度来相互转换。改变这样一对点的高度一次，对应于关系（1）、（4）、（6）、（9）、（10）、（11）之一，或将 σ_i 替换为σ_i^{-1} 和/或将σ_j 替换为 σ_j^{-1} 后，关系（1）、（6）和（11）的变体之一。注意，这些变体可由原有关系以及关系（3）和（8）推出。

因此，我们看到，b 和 b' 的优选词模关系（1）、（4）、（6）、（9）、（10）、（11）以及关系（3）和（8）同余。

假设 b' 是由 b 经过一次扩展 Reidemeister 变换得到的。当该变换为 R2 时，优选词的变化对应于 $\sigma_i^{\epsilon}\sigma_i^{-\epsilon} = \sigma_i^{-\epsilon}\sigma_i^{\epsilon}(\epsilon \in \{\pm 1\})$，这是一个平凡关系。当该变换为 R3 时，众所周知，优选词的变化对应于一个可由关系 (2) 推出的关系。当该变换为 V2 时，优选词的变化对应于关系 (3)。当该变换为 V3 时，优选词的变化对应于关系 (5)。当该变换为 V4 时，我们可以假设它是图 5 所示的变换，这对应于关系 (7)。当该变换为 T1 时，优选词的变化对应于关系 (12) 或 (16)。当该变换为 T3 时，优选词的变化对应于关系 (13) 或 (17)。因此我们看到，b 和 b' 的优选词模去所有关系 (1)–(13) 后彼此同余。

由于关系 (1)–(13) 在群 TVB_n 中均成立，因此这些关系就是定义关系。□

注 2.8。 扭结虚群 TVB_n 不同于环群（[2]）或扩展焊接辫群（[5]）。Brendle 和 Hatcher [2] 研究了 n 个互不链接的欧氏圆（称为环）的构形空间，其基本群是环群 R_n。他们证明，按照 Dahm [3]的定义，环群同构于具有 n 个连通分支的平凡链环的运动群 。环群具有一个有限指数子群，该子群同构于辫置换群，也称为焊接辫群，由 Fenn、Rim´anyi 和 Rourke[6] 引入。Damiani [4] 从不同角度研究了环群。特别地，她在 [5] 中引入了扩展焊接辫群 的概念，该群通过使用受 Satoh [11] 工作启发的图示来定义。Damiani 的扩展焊接辫群同构于环群。

扭结虚辫群 TVB_n 不同于环群和扩展焊接辫群（对于 $n > 2$），因为它们满足关系 $v_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1 v_2$，而该关系在扭结虚辫群 TVB_n中不被允许。

3. Braid presentation of twisted links

扭结虚辫（图示）的闭包定义方式与经典辫类似。

例3.1。 扭结虚辫图的闭包如图8所示。

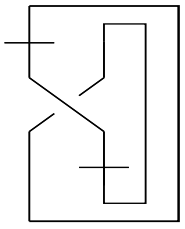

Figure 8. 辫 $\gamma_1\sigma_1^{-1}\gamma_2$的闭包。

在本节中，我们证明每个扭结链都可以表示为某个扭结虚辫图的闭包（定理 3.6）。

3.1. 高斯数据。对于扭结链图 K，我们先准备一些记号：

- 令 $V_R(K)$ 表示 K的所有实交叉的集合。
- 令 $S(K)$ 表示从 $V_R(K)$ 到集合 $\{+1,-1\}$ 的映射，该映射为实交叉赋予符号。
- 令 $B(K)$ 表示 K 中所有横杠的集合。
- 令 $N(v)$ 表示 v 的一个正则邻域，其中 $v \in V_R(K) \cup B(K)$。
- 对于 $c \in V_R(K)$，我们将 $c_{(1)}c_{(2)}c_{(3)}$ 和 $c_{(4)}$ 称为$\partial N(c)$的四个点，$\cap K$ 如图9所示。

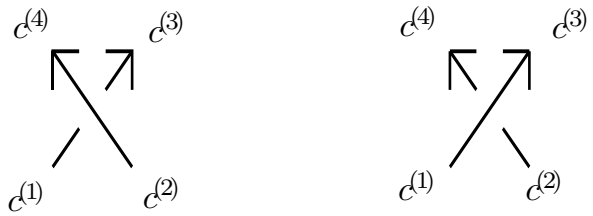

FIGURE 9. $N(c) \cap K$的边界点。

- 对于 $\gamma \in B(K)$，我们将 $\gamma_{(1)}$ 和 $\gamma_{(2)}$ 记作 $\partial N(\gamma) \cap K$ 的两个点，如图 10 所示。

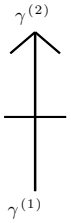

FIGURE 10. $N(\gamma) \cap K$的边界点。

- 令 $W = W(K) = Cl(\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{v\in V_R(K)\cup B(K)}N(v))$，其中 Cl 表示闭包。
- 设 $V_R^{\partial}(K) = \{c_{(j)} | c \in V_R(K)\ 1 \le j \le 4\}$，以及 $B^{\partial}(K) = \{\gamma_{(j)} | \gamma \in B(K)\ 1 \le j \le 2\}$.
- 设 $K|_W$ 为 K 在 W上的限制，它是若干条定向弧和环的并，且一般地浸入 W，使得双重点是 K的虚交叉，而这些弧的边界点集合为集合$V_R^{\partial}(K) \cup B^{\partial}(K)$。
- 令 $\mu(K)$ 表示 K 的连通分支数。
- 定义 $(V_R^{\partial}(K) \cup B^{\partial}(K))^2$ 的子集 $G(K)$，使得 $(a,\ b) \in G(K)$ 当且仅当 $K|_W$ 有一条从 a 出发并终止于 b 的定向弧。

扭结链图 K 的高斯数据 是五元组

$$(V_R(K), S(K), B(K), G(K), \mu(K)).$$

例3.2。设 K 为图11所示的扭结链图。当我们如图中所示将实交叉命名为 c_1 和 c_2 时，高斯数据为

$$(\{c_1,c_2\},\{+1,+1\},\{\gamma_1\},\{(c_1^{(4)},c_2^{(2)}),(c_2^{(3)},c_1^{(2)}),(c_2^{(4)},\gamma_1^{(1)}),(\gamma_1^{(2)},c_1^{(1)}),(c_1^{(3)},c_2^{(1)})\},1).$$

如果两个扭结链图 K 和 K' 具有相同的高斯数据，即$\mu(K) = \mu(K')$，并且存在一个双射 g：$V_R(K) \cup B(K) \to V_R(K) \cup B(K)$ 满足以下条件：

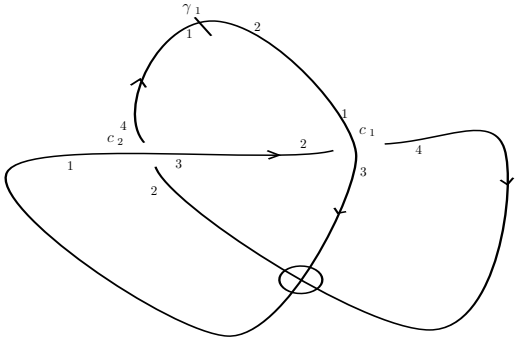

FIGURE 11. 一条带有一根横杠的扭结链图。

- $g(V_R(K)) = V_R(K)$，且 $g(B(K)) = B(K)$。
- g 保持实交叉的符号； $S(K)(c) = S(K')(g(c))$ 对于 $c \in V_R(K)$。

- $(a,b) \in G(K)$ 当且仅当 $(g^\partial(a)\ g^\partial(b)) \in G(K')$，其中 $g^\partial\colon V_R^\partial(K) \cup B^\partial(K) \to V_R^\partial(K') \cup B^\partial(K')$ 是由 g 诱导的双射，即，对于 $c \in V_R(K)$ $1 \le j \le 4$，$g^\partial(c(j)) = (g(c))(j)$，并且对于 $\gamma \in B(K)$ $1 \le j \le 2$， $g^\partial(\gamma(j)) = (g(\gamma))(j)$。

设 K 为扭结链图， $W = W(K) = Cl(\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{v \in V_R(K) \cup B(K)} N(v))$ 如前所述。假设 K' 是一个与 K 具有相同高斯数据的扭结链图。那么，通过对 $\mathbb{R}^2$ 进行同痕，我们可以移动 K'，使得

- K 和 K' 在每个 $v \in V_R(K) \cup B(K)$ 中的 $N(v)$ 均相同，
- K' 在 W 中没有实交叉和横杠，并且
- 的 $K|_W$ 与 $K'|_W$ 的弧/环之间存在一个双射，该双射对应弧的端点。

在这种情况下，我们称 K' 是通过替换 $K|_W$从 K 得到的。

引理3.3。设 K 和 K' 为扭结链图，并设 $W = W(K) = Cl(\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{v \in V_R(K) \cup B(K)} N(v))$。

(1) 如果通过替换 $K|_W$ 得到 K'，那么它们可通过在支持为 W 的 $\mathbb{R}^2$ 的同痕以及 *V1*、*V2*、*V3*、*V4* 和 *T1* 变换的有限序列彼此关联。

(2) 如果两个扭结链图 K 和 K' 具有相同的高斯数据，那么 K 等价于 K'。

证明。(1) 设 N_1、N_2、.....、N_m 是 K 的实交叉和横杠的正则邻域。设 a_1、a_2、.....、a_n 以及 a'_1、a'_2、.....、a'_n 分别是 $K|_W$ 和 $K'|_W$ 的弧/环。通过使用支持为 W 的 $\mathbb{R}^2$ 的同痕，我们不妨设 a'_1 与 a_2、.....、a_n 的交点均为横截双重点。弧/环 a_1 在 $\mathbb{R}^2$ 中同伦于 a'_1 （当 a_1 为弧时，相对于边界）。相对于弧/环 a_2、.....、a_n 以及 2-圆盘 N_1、N_2、.....、N_m，一般地取该同伦，可知弧/环 a_1 可通过图 12 所示的变换序列变为 a'_1，再加上支持为 W 的 $\mathbb{R}^2$ 的同痕。鉴于图 12 中的所有交叉点都是虚交叉，我们将这些变换视为 V1、V2、V3、V4 和 T1 变换。这样，我们可以在不改变 $K|_W$ 和 $K'|_W$ 的其他弧/环的情况下，将 a_1 变为 a'_1。归纳地应用这一论证， $K|_W$ 的所有弧/环都变为 $K'|_W$ 中相应的弧/环。

(2) 通过对 $\mathbb{R}^2$ 进行同痕移动 K，我们可以假设 K' 是通过替换 $K|_W$ 从 K 得到的。由 (1)，即可得到所述结论。□

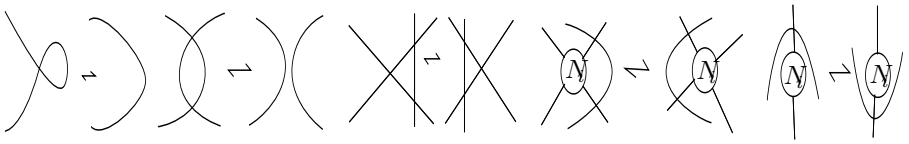

FIGURE 12. 浸入曲线上的变换。

3.2. **编辫过程**。令 O 为 $\mathbb{R}^2$ 的原点，并用极坐标将 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 与 $\mathbb{R}_+ \times S^1$ 识别，其中 $\mathbb{R}_+$ 是正数集。令 $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{R}_+ \times S^1 \to S^1$ 表示径向投影。

对于扭结链图 K，我们用 $V_R(K)$ 表示实交叉点集，用$V_B(K)$ 表示横杠与 K 相交处的点集，并用 $X(K)$ 表示所有（实或虚）交叉点的集合，以及横杠与 K 相交处的点集。

定义 3.4. 闭合扭结虚辫图是满足以下条件 (1) 和 (2) 的扭结链图K ：

(1) K 包含于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$中。(2) 设 $k : \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 为 K的底层浸入，其中 $\sqcup S^1$ 是不交并，由若干个 S^1的副本组成。那么 $\pi \circ k : \sqcup S^1 \to S^1$ 是从 S^1 到 n 的覆盖映射，且保持 $\sqcup S^1$ 和 S^1的定向。

如果闭合扭结虚辫图满足以下条件，则称其为良。（3）设 $N_1, N_2, \dots, N_m$ 是 K 的实交叉点和横杠的正则邻域。那么对于 $i \neq j$， $\pi(N_i) \cap \pi(N_j) = \emptyset$。

命题 3.5. 每个扭结链图 K 均作为扭结链等价于一个良闭合扭结虚辫图 K'，使得 K 和 K' 具有相同的高斯数据。

证明。设 K 为一个扭结链图，并设 $N_1, N_2, \dots, N_m$ 为 K 的实交叉点和横杠的正则邻域。通过对 $\mathbb{R}^2$ 作同痕移动 K，可假设所有 N_i 都位于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 中；对于 $i \neq j$， $\pi(N_i) \cap \pi(N_j) = \emptyset$，且 K 在 N_i 上的限制满足闭合扭结虚辫图的条件。替换余下部分 $K|_{W(K)}$，使所得结果成为良闭合扭结虚辫图 K'。于是 K 和 K' 具有相同的高斯数据，并且根据引理 3.3，它们作为扭结链等价。□

命题 3.5 证明中的过程，将给定的扭结链图转化为一个具有相同高斯数据的良闭扭结虚拟辫图K。这就是本文中的编辫过程。

对于闭合扭结虚拟辫图K，如果 $X(K) \cap \pi^{-1}(\theta) = \emptyset$，则 θ of S^1 中的点被称为正则值。对于 θ 的正则值，沿半直线 $\pi^{-1}(\theta)$ 切割 K，即可得到一个扭结虚拟辫图，其闭包与 K 等价。

因此，命题 3.5 蕴含以下结论。

定理 3.6。 每个扭结链都可以表示为某个扭结虚拟辫图的闭包。

4. THE MARKOV THEOREM FOR TWISTED LINKS

本节将证明一个关于扭结链辫表示的定理，它类似于经典链环的马尔可夫定理。

一种 0 型扭结 *Markov* 移动，或*TM0* 变换，是将一个扭结虚辫图 b 替换为另一个同次数的扭结虚辫图 b'，使得 b 和 b' 作为扭结虚辫等价，也就是说，它们表示同一个扭结虚辫群元素。

一种 1 型扭结 *Markov* 移动，或*TM1*-变换，是将一个扭曲虚拟辫（或其图示） b 替换为 $b_1 b b_1^{-1}$，其中 b_1 是一个与 b具有相同次数的扭曲虚拟辫（或其图示）。我们也将此变换称为共轭。

类型 1 的扭结 *Markov* 移动或*TM1*-变换可定义为将一个扭曲虚拟辫（或其图示） $b = b_1 b_2$ 替换为 $b' = b_2 b_1$ ，其中 b_1 和 b_2是次数相同的扭曲虚拟辫（或其图示）。见图 13。

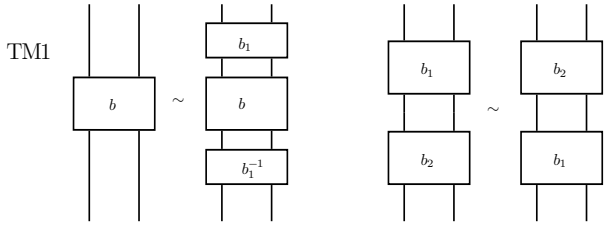

FIGURE 13. 类型 1 的扭结 Markov 移动或 TM1-变换。

对于次数为 n 的扭曲虚拟辫（或其图示） b 以及非负整数 s 和 t，我们将由 b 在左侧添加 s 条平凡股线、在右侧添加 t 条平凡股线所得到的次数为 $n+s+t$ 的扭曲虚拟辫（或其图示）记为 $\iota_s^t(b)$。这定义了一个单同态 $\iota_s^t \colon TVB_n \to TVB_{n+s+t}$。

正型、负型或虚拟型的稳定化分别是将一个次数为 n 的扭曲虚拟辫（或其图示） b 替换为 $\iota_0^1(b)\sigma_n$、 $\iota_0^1(b)\sigma_n^{-1}$或 $\iota_0^1(b)v_n$。

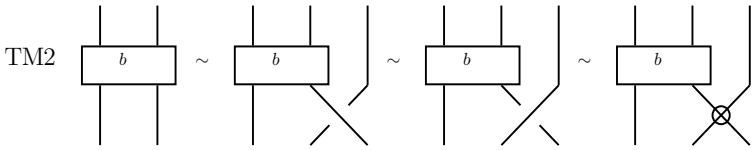

FIGURE 14. 第2类扭结 Markov 移动或 TM2-移动。

第2类扭结 Markov 移动或*TM2*-移动是正型、负型或虚拟型的稳定化，或其逆运算。见图 14。

一个右虚交换变换是一个替换

$$\iota_0^1(b_1)\sigma_n^{-1}\iota_0^1(b_2)\sigma_n \longleftrightarrow \iota_0^1(b_1)v_n\iota_0^1(b_2)v_n,$$

而一个左虚交换移动是一个替换

$$\iota_1^0(b_1)\sigma_1^{-1}\iota_1^0(b_2)\sigma_1 \longleftrightarrow \iota_1^0(b_1)v_1\iota_1^0(b_2)v_1,$$

其中， b_1 和 b_2 是扭结虚辫（或其图示）。第3类扭结 Markov 移动或*TM3*-移动是右/左虚交换移动或其逆运算。见图 15。

定义 4.1。两个扭结虚辫（或其图示）若可通过扭曲马尔可夫移动 TM1–TM3 的有限序列（当我们将其作为图示讨论时，则为 TM0–TM3）相互关联，则称它们*Markov* 等价。

定理4.2。两个扭结虚拟辫（或其图示）的闭合是等价的扭结链环，当且仅当它们是马尔可夫等价的。

注 4.3. 在第 5 节中，我们将看到，如果两个扭曲虚辫（或其图示）通过左虚交换移动相关联，那么它们就可以通过一系列 TM1-变换（若将其视为图示来讨论，则通过一系列 TM0 变换和 TM1-变换）以及一次右虚交换变换相关联。因此，我们可以从马尔可夫等价的定义中去掉左虚交换移动。

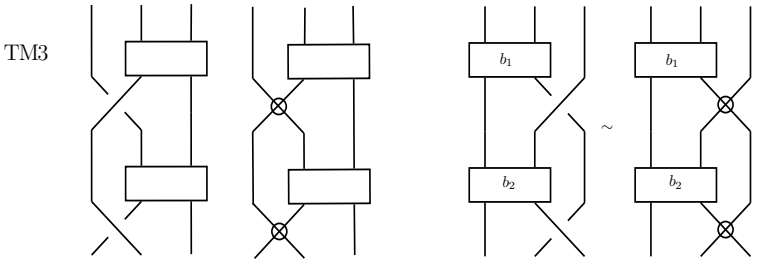

FIGURE 15. 第3类扭结 Markov 移动，或 TM3-移动。

图示）以及一次右虚交换变换相关联。因此，我们可以从马尔可夫等价的定义中去掉左虚交换移动。

设 K 和 K' 是闭扭结虚辫图， b 和 b' 是分别沿正则值 $\pi^{-1}(\theta)$ 和 $\pi^{-1}(\theta')$ 切开 K 和 K' 得到的扭结虚辫图，且 θ 和 θ'是正则值。若 K' 和 K作为闭合扭结虚辫等价，则称 K' 由 K经过第*0*类扭结 *Markov* 移动或*TM0* 变换得到。注意， K' 由 K 经过 TM0 变换得到，当且仅当 b 和 b' 之间存在由 TM0 变换和 TM1 移动组成的有限序列。若 b 和 b' 由一次 TM2-移动及若干次 TM1 移动联系起来，则称 K' 由 K 经过第*2*类扭结 *Markov* 移动或*TM2*-移动得到。若 b 和 b'由一次 TM3-移动及若干次 TM1 移动联系起来，则称 K' 由 K 经过第*3*类扭结 *Markov* 移动或*TM3*-移动得到。

定义4.4. 若两个闭合扭结虚辫图示 K 和 K' 可以通过有限序列的 TM0、TM2 和 TM3 变换相互得到，则称它们是马尔可夫等价的。

命题4.5. 两个闭合扭结虚辫图示 K 和 K' 马尔可夫等价，当且仅当扭结虚辫图示 b 和 b' 马尔可夫等价；其中， b 和 b' 是从 K 和 K' 沿着 $\pi^{-1}(\theta)$ 和$\pi^{-1}(\theta')$ 切割得到的，所取的是某些正则值 θ 和 θ'。

证明. 对于给定的闭合扭结虚辫图示 K， b 在相差 TM1-变换的意义下唯一确定。因此，根据定义，结论显然成立。□

由命题4.5可知，定理4.2等价于下述定理。

定理4.6. 两个闭合扭结虚辫图示等价为扭结链，当且仅当它们马尔可夫等价。

为了证明定理4.6，我们需要以下引理。

引理4.7。 具有相同高斯数据的两个闭合扭结虚辫图示是马尔可夫等价的。

证明。 设 K 和 K' 是具有相同高斯数据的闭合扭结虚辫。对它们施加 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 的同痕变换后，可假定它们是良好的。设 N_1， N_2， ... ， N_m 是 K 的实交叉和横杠的正则邻域，而N_1'， N_2'， ... ， N_m'是 K'中对应实交叉和横杠的正则邻域。

情形（I）。假设 $\pi(N_1)\ \pi(N_2)\ldots,\pi(N_m)$ 和 $\pi(N_1')\ \pi(N_2')\ldots,\pi(N_m')$ 在 S^1 中按相同的循环次序出现。通过对 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 施加同痕来修改 K ，同时保持其为良闭扭结虚拟辫的条件，我们可以假设 $N_1 = N_1', N_2 = N_2', \ldots, N_m = N_m'$，并且 K 和 K' 在这些圆盘上的限制相同。令 $a_1, \ldots, a_s$ 为 $K|_W$ 的弧/环， $a_1', \ldots, a_s'$ 为 $K'|_W$ 中对应的弧/环。令 $\theta \in S^1$ 为 K 和 K' 的一个正则值

使得 $\pi^{-1}(\theta)$ 与 $N_1 \cup \cdots \cup N_m$ 不相交。若存在 $K|_W$ 的一条弧/环 a_i，使得 $|a_i \cap \pi^{-1}(\theta)| \neq |a_i' \cap \pi^{-1}(\theta)|$，则通过若干次 V2 变换，将 a_i 或 a_i' 的一小段朝原点 O 移动，这些变换

TM0 变换，并应用一些虚拟型 VM2 变换，使得 $|a_i \cap \pi^{-1}(\theta)| = |a_i' \cap \pi^{-1}(\theta)|$ 在修改后成立。因此，不失一般性，我们可以假设对所有 $i = 1, \ldots\ldots, s$，$|a_i \cap \pi^{-1}(\theta)| = |a_i' \cap \pi^{-1}(\theta)|$。

设 $k\colon \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 和 $k'\colon \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 分别是 K 和 K' 的底层浸入，使它们在实交叉点和横杠的原像附近相同。设 $I_1, \ldots\ldots, I_s$ 是 $\sqcup S^1$ 中的弧/环，满足 $k(I_i) = a_i$，且 $k'(I_i) = a_i'$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, s$。注意，$\pi \circ k|_{I_i}$ 和 $\pi \circ k'|_{I_i}$ 是到 S^1 中的保向浸入，且 $\pi \circ k|_{\partial I_i} = \pi \circ k'|_{\partial I_i}$。由于 a_i 和 a_i' 的次数相同，因此存在一个同伦 $k_i^t\colon I_i \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ $(t \in [0,1])$，它是 I_i 的相对于边界 ∂I_i 的同伦，满足 $k_i^0 = k|_{I_i}$ 和 $k_i^1 = k|_{I_i}$，且 $\pi \circ k_i^t$ 是保向浸入。相对于 $K|_W$ 的其他弧/环以及二维圆盘 N_1、N_2、……、N_m，对这样的同伦作一般位置选取，我们看到 a_i 可通过一系列 TM0 变换变为 a_i'。归纳应用这一过程，可通过一系列 TM0 变换和 TM2 变换，将 $a_1, \ldots\ldots, a_s$ 变为 $a_1', \ldots\ldots, a_s'$。因此我们看到，K 可通过有限序列的 TM0 和 TM2 变换变为 K'。

情形（II）。假设 $\pi(N_1)\ \pi(N_2) \ldots, \pi(N_m)$ 和 $\pi(N_1')\ \pi(N_2') \ldots, \pi(N_m')$ 在 S^1 中并非按相同的循环次序出现。只需证明我们可以交换两个相邻的 $\pi(N_i)$ 的位置。假设我们要交换 $\pi(N_1)$ 和 $\pi(N_2)$ 的位置。

(1) 假设 N_2 是一个实交叉的邻域。图16展示了如何通过 TM0 变换和 TM2 变换交换 $\pi(N_1)$ 和 $\pi(N_2)$。

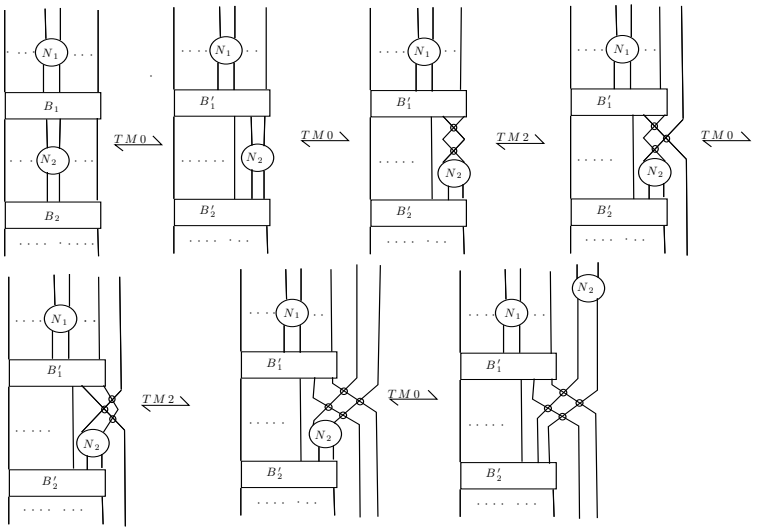

FIGURE 16. 交换 N_1 和 N_2 的位置。

(2) 假设 N_2 是一条横杠的邻域。图17展示了如何通过 TM0 变换和 TM2 变换交换 $\pi(N_1)$ 和 $\pi(N_2)$ 的位置。

应用这一论证，我们可以通过 VM0 和 VM2 变换，使 $\pi(N_1)\ \pi(N_2) \ldots, \pi(N_m)$ 和 $\pi(N_1')\ \pi(N_2') \ldots, \pi(N_m')$ 在 S^1 上按相同的循环次序出现。然后我们可以将此情形归结为情形（I）。□

定理4.6的证明。如果两个闭合扭结虚辫（或其图示）马尔可夫等价，那么它们作为扭结链也是等价的。反过来，假设

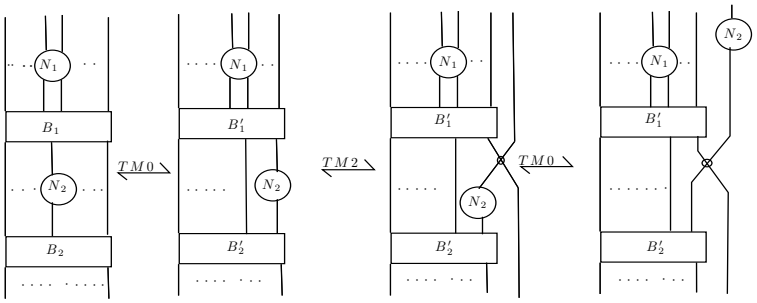

FIGURE 17. 交换 N_1 和 N_2的位置。

K 和 K' 是作为扭结链等价的闭扭结虚辫图。存在一个有限的扭结链图序列，即 K =K_0， K_1，.....， $K_n = K'$，使得 K_{i+1}可由 K_i经过某个扩展 Reidemeister 变换得到。

对于每个 $i = 1, \ldots, n-1$, K_i可能不是闭合扭结虚辫图。~设 K_i 是通过上一节中的辫化~ ~过程从 K_i 得到的闭合扭结虚辫图。我们假设 $K_0 = K_0$ 和 $K_n = K_n$。那么对于每个~$i = 0, 1, \ldots, n$, K_i与 K_i具有相同的高斯数据。只需证明~ ~K_i 与 K_{i+1} 是马尔可夫等价的。

~ ~文献 [9]证明，当 K_{i+1} 由 K_i 通过 R1、R2、R3、V1、V2、V3 和 V4 中的一种变换得到时， K_i 与 K_{i+1} 是马尔可夫等价的。（文献 [9] 讨论了虚链环和闭虚辫图。不过，文献 [9] 中的论证在我们当前的情形下仍然成立。）

因此，只需考虑这样一种情况： K_{i+1} 由 K_i 通过扭曲变换 T1、T2 或 T3 得到。

(1) 设 K_{i+1} 由 K_i 通过 T1 变换得到。那么 K_i 和 K_{i+1} 具有相同的~ ~~高斯数据，因此 K_i 和 K_{i+1} 具有相同的高斯数据。由引理4.7， K_i~和 K_{i+1} 是马尔可夫等价的。

(2) 设 K_{i+1} 由 K_i 通过 T2 变换得到。假设 K_i中的一对横杠通过 T2 变换被移除，从而得到 K_{i+1}。设 N 为应用 T2 变换的一个 2-圆盘，使得 $N \cap K_i$ 是一条弧，记作 α，它带有两条横杠，而 $N \cap K_{i+1}$ 是弧 α。设 N_1 和 N_2 是这两条横杠的邻域，使得 $N_1 \cup N_2 \subset N$。通过对 $\mathbb{R}^2$做同痕，将 K_i、 α 和 N 变形，使得 $N \cap K_i$ 是带有两条横杠的 α，且$\pi|_\alpha$： $\alpha \to S^1$ 是一个保向嵌入。设 $\widetilde{K_i'}$ 为由变形后的 K_i 经过上一~节中的辫化过程得到的闭扭曲虚拟辫，并使 N 逐点固定；再设 K_{i+1}' 为通过移除与 α相交的两条横杠，从 K_i' 得到的闭扭曲~ ~虚拟辫。那么 K_i'~ ~和 K_{i+1}' 通过 TM0 变换相联系。由于 K_i 和 K_i' 具有相同的高斯数据，~ ~它们是马尔可夫等价的。由于 K_{i+1} 和 K_{i+1}' 具有相同的高斯数据，它们~ ~是马尔可夫等价的。因此， K_i 和 K_{i+1} 是马尔可夫等价的。类似地可证明，向 K_i 引入一对横杠以得到 K_{i+1} 的情况。

(3) 设 K_{i+1} 由 K_i 经过一次 T3 变换得到。T3 变换有 4 种可能的定向，分别称为 T3a、T3b、T3c 和 T3d，如图 18 所示。

首先考虑这样一种情况： K_{i+1} 通过 T3a 或 T3b 变换由 K_i 得到。假设 K_i 如图 18 左侧所示，而 K_{i+1} 如图 18 右侧所示。设 N为施加该变换的一个 2-圆盘。于是， $N \cap K_i$ 是一对弧，分别记为 α_1 和α_2，它们在一个实交叉处横截相交，并且有四条横杠。设 N_1 为 K_i和 N_2的实交叉的一个邻域, $\ldots, N_5$ 为

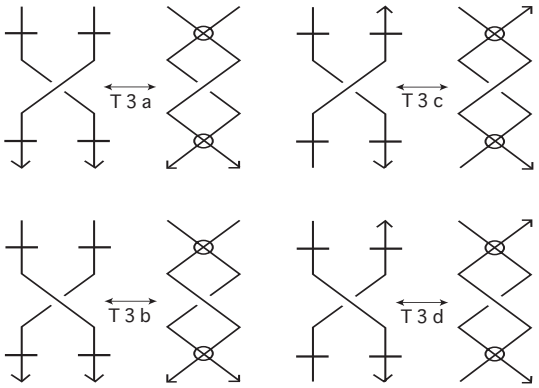

FIGURE 18. 定向 T3 变换。

K_i 在 N 中的四条横杠的邻域，使得 $N_1 \cup \cdots \cup N_5 \subset N$。通过对 $\mathbb{R}^2$进行同痕，将K_i、α_1、 α_2和 N 变形，使得 $\pi|_{\alpha_1}$： $\alpha_1 \to S^1$ 和 $\pi|_{\alpha_2}$： $\alpha_2 \to S^1$ 是保持方向的嵌入。设 K_i' 为对变形后的 K_i 应用上一节中的辫化过程得到的闭合扭结虚辫图，使得$\widetilde{\ }$ N 逐点固定；设 K_{i+1}' 为对 K_i' 应用 T3a（或 T3b）变换得到的闭合扭结虚辫图 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。那么 K_i' 和 K_{i+1}' 通过 TM0 变换相关。由于 K_i 和 K_i' 具有相同的高斯数据，因此它们是马尔可夫等价的。由于 K_{i+1} 和 K_{i+1}' 具有相同的高斯数据，因此它们是马尔可夫等价的。因此， K_i 和 K_{i+1} 是马尔可夫等价的。 K_i 如图所示右侧而 K_{i+1} 如图所示左侧的情况类似可证。

现在考虑 K_{i+1} 通过 T3c 或 T3d 变换得到 K_i 的情形。注意，模去 V1、V2、V3 和 V4 变换后，T3c（或 T3d）变换是 T3b（或 T3a）变换的结果。将 T3c（或 T3d）中的两个图示顺时针90度旋转，即可看出这一点。此时，左侧变成与 T3b（或 T3a）左侧相同的图示。旋转后的 T3c（或 T3d）右侧具有一个实交叉且没有横杠。可以看出，T3b（或 T3a）的右侧同样具有一个实交叉且没有横杠。考虑 N 中缠结的高斯数据，并对引理4.7的证明应用相同的论证，我们看到，旋转后的 T3c（或 T3d）右侧可通过 N中的 V1、V2、V3 和 V4 变换转化为 T3b（或 T3a）的右侧。因此，我们可以将该情形归约为 T3a（或 T3b）以及 V1、V2、V3 和 V4 变换的情形。□

5. On virtual exchange moves of twisted virtual braids

事实证明，如果两个扭结虚辫（或其图示）通过左虚交换移动相关联，那么它们也可通过一系列 TM1 变换（或 TM0 变换和 TM1 变换）以及一次右虚交换变换相关联。因此，我们可以从马尔可夫等价的定义中删去左虚交换移动。

令 f_n： $TVB_n \to TVB_n$ 为由下式确定的同构

$$\begin{aligned} &\sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}, && \text{for } i = 1, \ldots, n-1 \\ &v_i \mapsto v_{n-i}, && \text{for } i = 1, \ldots, n-1 \\ &\gamma_i \mapsto \gamma_{n-i+1}, && \text{for } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

对于优良的次数为 n 的扭结虚辫图 b，我们也用 $f_n(b)$ 表示将上述对应关系应用于 b 的优选词后，由图示 b 得到的扭结虚辫图。

设 ∇_n 为一个扭曲虚拟辫（或其图示），其

$$\nabla_n = \prod_{i=1}^{n-1}(v_i v_{i-1} \dots v_1) \prod_{j=1}^{n} \gamma_j.$$

设 $F_n\colon\ TVB_n \to TVB_n$ 是由下式确定的同构

$$b \mapsto \nabla_n b \nabla_n^{-1} \qquad \text{for } b \in TVB_n.$$

则对于 $b \in TVB_n$，$\nabla_n^2 = e$ 属于 TVB_n，且 $F_n(b) = f_n(b)$。特别地，b 和 $f_n(b)$通过 TM1-变换（或者在将它们作为图示讨论时，通过 TM0-变换和 TM1-变换）相关联。

定理 5.1。如果两个次数为 n 的扭曲虚拟辫（或其图示）通过左虚交换移动相关联，那么它们可通过一系列 *TM1*-变换（或 *TM0*-变换和 *TM1*-变换）以及一次右虚交换变换相关联。

证明。设 b 和 b' 是通过左虚交换移动相关联的次数为 n 的扭曲虚拟辫图示。假设

$$b = \iota_1^0(b_1)\sigma_1^{-1}\iota_1^0(b_2)\sigma_1 \quad \text{and} \quad b' = \iota_1^0(b_1)v_1\iota_1^0(b_2)v_1,$$

其中 b_1 和 b_2 是次数为 $n-1$ 的良好扭曲虚拟辫图示。于是

$$f_n(b) = \iota_0^1(f_{n-1}(b_1))\sigma_n^{-1}\iota_0^1(f_{n-1}(b_2))\sigma_n \quad \text{and} \quad f_n(b') = \iota_0^1(f_{n-1}(b_1))v_n\iota_0^1(f_{n-1}(b_2))v_n,$$

因此，$f_n(b)$ 和 $f_n(b')$ 可通过右虚交换变换联系起来。由于作为 TVB_n中的元素，b 与 $F_n(b) = f_n(b)$ 共轭，而 b' 与 $F_n(b') = f_n(b')$ 共轭，我们可以看出，b 和 b' 可通过一系列 TM1 变换（若将它们视为图示，则通过 TM0 变换和 TM1 变换）以及一次右虚交换变换联系起来。□

6. A reduced presentation of the twisted virtual braid group

L. Kauffman 和 S. Lambropoulou [8] 给出了虚拟辫群的一个约化表示。受他们工作的启发，我们给出了扭结虚辫群的一个约化表示。利用该约化表示，可以用更少的生成元和关系处理扭结虚辫群。

本节中，我们证明，定理 2.4 中给出的扭结虚辫群表示TVB_n可约化为一个具有 $n+1$ 个生成元且关系更少的表示，方法是将 $\sigma_i (i = 2, \dots\dots, n-1)$ 和 $\gamma_i (i = 2, \dots\dots, n)$ 改写为 σ_1、γ_1 和 $v_1, \dots\dots, v_{n-1}$ 的形式，如下所示：

$$\sigma_i = (v_{i-1} \dots v_1)(v_i \dots v_2)\sigma_1(v_2 \dots v_i)(v_1 \dots v_{i-1}) \qquad \text{for } i = 2, \dots, n-1, \tag{18}$$

$$\gamma_i = (v_{i-1} \dots v_1)\gamma_1(v_1 \dots v_{i-1}) \qquad \text{for } i = 2, \dots, n. \tag{19}$$

参见图 19。可以从其图示中以几何方式看出，也可以从公式 (14) 和 (15) 中以代数方式看出。

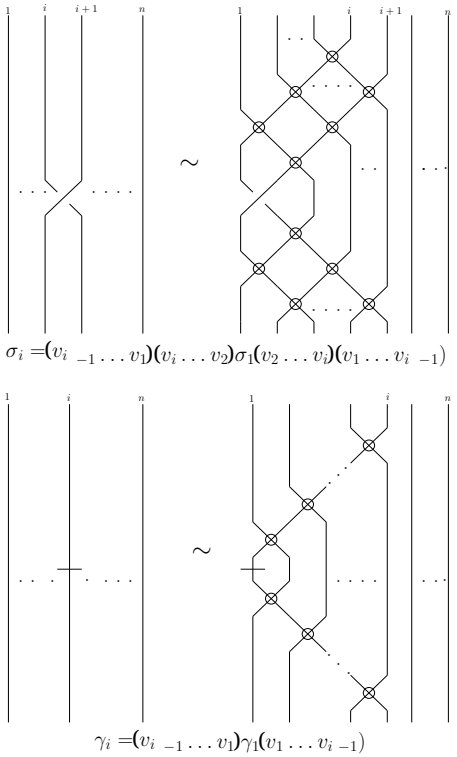

FIGURE 19. σ_i 和 γ_i。

定理 6.1。 扭结虚辫群 TVB_n 有一个表示，其生成元为 $\sigma_1, \gamma_1, v_1, \dots, v_{n-1}$，定义关系如下：

(20) $v_i^2 = e$ 对于 $i = 1, \dots, n-1$;

(21) $v_i v_j = v_j v_i$ 当 $|i-j| > 1$;

(22) $v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}$ 对于 $i = 1, \dots, n-2$;

(23)
$$\sigma_1(v_2 v_3 v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 v_3 v_2) = (v_2 v_3 v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 v_3 v_2)\sigma_1,$$

(24)
$$(v_1\sigma_1 v_1)(v_2\sigma_1 v_2)(v_1\sigma_1 v_1) = (v_2\sigma_1 v_2)(v_1\sigma_1 v_1)(v_2\sigma_1 v_2),$$

(25) $\sigma_1 v_j = v_j \sigma_1$ 对于 $j = 3, \dots, n-1$;

(26) $\gamma_1^2 = e,$

(27) $\gamma_1 v_j = v_j \gamma_1$ 对于 $j = 2、\dots、n-1$;

(28) $\gamma_1 v_1 \gamma_1 v_1 = v_1 \gamma_1 v_1 \gamma_1,$

(29) $\gamma_1 v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 = v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 \gamma_1,$

(30) $\gamma_1 v_1 \gamma_1 \sigma_1 \gamma_1 v_1 \gamma_1 = \sigma_1.$

下文中，我们将关系 (3)、(4) 和 (5)，或等价地，关系 (20) 和 (22)，称为虚 (21) 关系。

引理 6.2 (参见 [8])。 关系(7) 可由关系(18) 和虚关系推出。

这个引理显然成立。下面的三个引理在 [8] 中得到了证明。因此我们省略证明。

引理 6.3 (引理 1，来自 [8])。 关系 (6) 由关系 (18)、虚关系以及关系 (25)推出。

引理 6.4 （引理3，来自 [8]）。 关系 （1） 可由关系 （18）、虚关系以及关系 （23） 和 （ 25 ）推出。

引理 6.5 （引理2，来自 [8]）。 关系 （2） 可由关系 （18）、虚关系以及关系 （24） 和 （ 25 ）推出。

在下面的证明中，我们将重点考察的表达式加下划线。

引理 6.6。 关系 （8） 可由关系 （19）、虚关系以及关系 （26）推出。

证明。

$$\begin{aligned}\gamma_i^2 &= (v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{(v_1\dots v_{i-1})(v_{i-1}\dots v_1)}\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})\\ &= (v_{i-1}\dots v_1)\underline{\gamma_1^2}(v_1\dots v_{i-1})\\ &= \underline{(v_{i-1}\dots v_1)(v_1\dots v_{i-1})}\\ &= e.\end{aligned}$$

□

引理 6.7。 关系 (10) 由关系 (19)、虚关系以及关系 (27)推出。

证明。 由于 $j\neq i,\ i+1$，我们考虑以下两种情形。

情形**(i)** 假设 $j\leq i-1$。那么 $i\geq 2$ 并且我们有

$$\begin{aligned}v_i\gamma_j &= \underline{v_i}(v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\underline{v_i\gamma_1}(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{v_i}(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})v_i\\ &= \gamma_j v_i.\end{aligned}$$

情形**(ii)** 假设 $j\geq i+2$。那么

$$\begin{aligned}v_i\gamma_j &= \underline{v_i}(v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_{i+2}\underline{v_iv_{i+1}v_i}v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_{i+2}v_{i+1}v_i\underline{v_{i+1}}v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_{i+2}v_{i+1}v_iv_{i-1}\dots v_1)\underline{v_{i+1}\gamma_1}(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{v_{i+1}}(v_1\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1}\underline{v_{i+1}v_iv_{i+1}}v_{i+2}\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1}v_iv_{i+1}\underline{v_i}v_{i+2}\dots v_{j-1})\\ &= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})v_i\\ &= \gamma_j v_i.\end{aligned}$$

□

引理 6.8. 关系 (9) 可由关系 (19)、虚关系以及关系(27) 和(28)推出。

证明。 根据前一个引理，我们可以假设关系 (10) 成立。只需考虑 $j > i$ 的一种情形。

$$\begin{aligned}
\gamma_i\gamma_j &= (v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(\underline{v_1\dots v_{i-1}})(\underline{v_{j-1}\dots v_1})\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{i-1}\dots v_1)\underline{\gamma_1}(v_{j-1}\dots v_1)(v_2\dots v_i)\underline{\gamma_1}(v_1\dots v_{j-1}) \ \text{(by (10))}\\
&= (v_{i-1}\dots v_1)(v_{j-1}\dots v_2)\underline{\gamma_1 v_1\gamma_1}(v_2\dots v_i)(v_1\dots v_{j-1}) \ \text{(by (28))}\\
&= (\underline{v_{i-1}\dots v_1})\underline{(v_{j-1}\dots v_2)v_1}\gamma_1 v_1\gamma_1 v_1(v_2\dots v_i)(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_2v_1)(v_i\dots v_2)\gamma_1 v_1\gamma_1 v_1(\underline{v_2\dots v_i})(\underline{v_1\dots v_{j-1}})\\
&= (v_{j-1}\dots v_2v_1)(v_i\dots v_2)\gamma_1 v_1\gamma_1\underline{v_1}(\underline{v_1}\dots v_{j-1})(v_1\dots v_{i-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_2v_1)(v_i\dots v_2)\underline{\gamma_1}v_1\underline{\gamma_1}(v_2\dots v_{j-1})(v_1\dots v_{i-1}) \ \text{(by (10))}\\
&= (v_{j-1}\dots v_2v_1)\gamma_1(\underline{v_i\dots v_2})\underline{v_1(v_2\dots v_{j-1})}\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_2v_1)\gamma_1 v_1(v_2\dots v_{j-1})(v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})\\
&= \gamma_j\gamma_i.
\end{aligned}$$

□

引理 6.9. 关系 (11) 可由关系 (18)、(19)、虚关系、关系(25)、(27) 和(29)推出。

证明. 根据前面的引理，我们可以假设关系 (6) 和 (7)，或等价地假设 (14)。

首先，当 $j = 1$ 时，我们证明 (11)，即 $i \neq 1$ 的 $\sigma_i\gamma_1 = \gamma_1\sigma_i$ 。对 i 使用归纳法，初始条件为 $i = 2$。关系 $\sigma_2\gamma_1 = \gamma_1\sigma_2$ 可由 (18) 和 (29) 推出。

假设 $\sigma_i\gamma_1 = \gamma_1\sigma_i$，我们可以如下得到 $\sigma_{i+1}\gamma_1 = \gamma_1\sigma_{i+1}$：

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1}\gamma_1 &= v_iv_{i+1}\sigma_iv_{i+1}\underline{v_i\gamma_1}\\
&= v_iv_{i+1}\sigma_iv_{i+1}\underline{\gamma_1}v_i\\
&= v_iv_{i+1}\underline{\sigma_i\gamma_1}v_{i+1}v_i\\
&= v_i\underline{v_{i+1}\gamma_1}\sigma_iv_{i+1}v_i\\
&= \underline{v_i\gamma_1}v_{i+1}\sigma_iv_{i+1}v_i\\
&= \gamma_1v_iv_{i+1}\sigma_iv_{i+1}v_i\\
&= \gamma_1\sigma_{i+1}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\sigma_i\gamma_1 = \gamma_1\sigma_i \quad \text{for } i \neq 1. \tag{31}$$

现在，我们证明关系 (11)： $\sigma_i\gamma_j = \gamma_j\sigma_i$ 当 $j \neq i, i+1$。
情形(i) 假设 $j \leq i-1$。那么

$$\begin{aligned}
\sigma_i\gamma_j &= \underline{\sigma_i}(v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\underline{\sigma_i\gamma_1}(v_1\dots v_{j-1}) \ \text{(by (31))}\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{\sigma_i}(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\sigma_i\\
&= \gamma_j\sigma_i.
\end{aligned}$$

情形(ii) 假设 $j \geq i+2$。那么

$$\begin{aligned}
\sigma_i\gamma_j &= \underline{\sigma_i}(v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_{i+2})\underline{\sigma_i}(v_{i+1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_{i+2})v_{i+1}v_i\sigma_{i+1}\underline{v_iv_{i+1}}(\underline{v_{i+1}v_i}v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_i)\underline{\sigma_{i+1}}(v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_i)(v_{i-1}\dots v_1)\underline{\sigma_{i+1}\gamma_1}(v_1\dots v_{j-1}) \quad \text{(by (31))}\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{\sigma_{i+1}}(v_1\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})\underline{\sigma_{i+1}}(v_i\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})v_iv_{i+1}\sigma_i\underline{v_{i+1}v_i}(\underline{v_iv_{i+1}}v_{i+2}\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i+1})\underline{\sigma_i}(v_{i+2}\dots v_{j-1})\\
&= (v_{j-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i+1})(v_{i+2}\dots v_{j-1})\sigma_i\\
&= \gamma_j\sigma_i.
\end{aligned}$$

□

引理 6.10。 关系 (12) 可由关系 (19) 及虚关系推出。

证明。

$$\begin{aligned}
\gamma_{i+1}v_i &= (v_i\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots \underline{v_i})\underline{v_i}\\
&= v_i(v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})\\
&= v_i\gamma_i.
\end{aligned}$$

□

引理 6.11。 关系 (13) 可由关系 (18)、(19)、虚关系以及关系(27) 和(30)推出。

证明。

$$\begin{aligned}
\gamma_{i+1}\gamma_i\sigma_i\gamma_i\gamma_{i+1} &= (v_i\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_i)(v_{i-1}\dots v_1)\gamma_1\underline{(v_1\dots v_{i-1})(v_{i-1}\dots v_1)}(v_i\dots v_2)\\
&\quad \sigma_1(v_2\dots v_i)\underline{(v_1\dots v_{i-1})(v_{i-1}\dots v_1)}\gamma_1(v_1\dots v_{i-1})(v_i\dots v_1)\gamma_1(v_1\dots v_i)\\
&\quad = (v_i\dots v_1)\gamma_1\underline{(v_1\dots v_{i-1}v_iv_{i-1}\dots v_1)}\gamma_1(v_i\dots v_2)\sigma_1(v_2\dots v_i)\gamma_1\\
&\quad \underline{(v_1\dots v_{i-1}v_iv_{i-1}\dots v_1)}\gamma_1(v_1\dots v_i)\\
&\quad = (v_i\dots v_1)\underline{\gamma_1}(v_i\dots v_2v_1v_2\dots v_i)\underline{\gamma_1}(v_i\dots v_2)\sigma_1(v_2\dots v_i)\underline{\gamma_1}\\
&\quad (v_i\dots v_2v_1v_2\dots v_i)\underline{\gamma_1}(v_1\dots v_i)\\
&\quad = (v_i\dots v_1)(v_i\dots v_2)\gamma_1v_1\underline{(v_2\dots v_i)(v_i\dots v_2)}\gamma_1\sigma_1\gamma_1\underline{(v_2\dots v_i)(v_i\dots v_2)}\\
&\quad v_1\gamma_1(v_2\dots v_i)(v_1\dots v_i)\\
&\quad = (v_i\dots v_1)(v_i\dots v_2)\underline{\gamma_1v_1\gamma_1\sigma_1\gamma_1v_1\gamma_1}(v_2\dots v_i)(v_1\dots v_i)\\
&\quad = v_i\underline{(v_{i-1}\dots v_1)(v_i\dots v_2)\sigma_1(v_2\dots v_i)(v_1\dots v_{i-1})}v_i\\
&\quad = v_i\sigma_iv_i.
\end{aligned}$$

□

定理 *6.1* 的证明。 在扭结虚辫群中，通过使用图示的几何论证，或利用关系 (1)–(13) 进行代数论证，可以验证所有关系 (18)–(30) 均成立。另一方面，根据前述引理可知，关系 (1)–(13) 可由关系 (18)–(30) 推出。□

Concluding remarks

本文研究扭结虚辫及扭结虚辫群，并给出与亚历山大定理和马尔可夫定理相对应的扭结链环定理。我们还给出了扭结虚辫群的群表示和约化群表示。作为未来的研究方向，研究纯扭结虚辫群，并为扭结虚辫和扭结链环构造不变量，将会很有意义。例如，可以利用扭结虚辫讨论 [10] 中引入的、具有与扭结链环相关结构的双拟群。

Acknowledgements

K. Negi 感谢印度大学拨款委员会（UGC）提供研究奖学金，NTA 参考编号为 191620008047。M. Prabhakar 感谢印度政府科学技术部科学与工程委员会（SERB）通过数学研究影响力支持计划（MATRICS）提供的资助，项目编号为 F.No.MTR/2021/00394。本研究部分得到印度政府科学技术部 FIST计划的支持，参考编号为 SR/FST/MS-I/2018/22(C)；同时也得到日本学术振兴会科研费 JP19H01788 号项目的支持。

References

[1] M. O. Bourgoin，《扭结链环理论》，Algebr. Geom. Topol. 8 (2008)，第 3 期，1249–1279。[2] T. E. Brendle 和 A. Hatcher，《环和门环的构形空间》，Comment. Math. Helv. 88 (2013)，131–162。[3] D. M. Dahm，《辫理论的一种推广》，博士论文，普林斯顿大学，1962。[4] C. Damiani，《环辫群探究》，Expo. Math. 35 (2017)，第 3 期，252–285。[5] C. Damiani，《扩展焊接辫和链环的 Markov 定理》，Osaka J. Math. 56 (2019)，第 2 期，255–268。[6] R. Fenn、R. Rim´anyi 和 C. Rourke，《辫置换群》，Topology 36 (1997)，123–135。[7] L. H. Kauffman，《虚纽结理论》，European J. Combin. 20 (1999)，第 7 期，663–691。[8] L. H. Kauffman 和 S. Lambropoulou，《虚辫》，Fund. Math. 184 (2004)，159–186。[9] S. Kamada，《虚纽结和焊接纽结的辫表示》，Osaka J. Math. 44 (2007)，第 2 期，441–458。[10] N. Kamada 和 S. Kamada，《具有与虚链环和扭结链环相关结构的双拟群》，J. Knot Theory Ramifications 21 (2012)，第 13 期，1240006，14 页。[11] S. Satoh，《带状环面纽结的虚纽结表示》，J. Knot Theory Ramifications 9 (2000)，第 4 期，531–542。

（K. Negi） Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Ropar, Punjab,
India.
Email address: komal.20maz0004@iitrpr.ac.in(M. Prabhakar) Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Ropar,
Punjab ,
India.*Email address*: prabhakar@iitrpr.ac.in(S. Kamada) Department of Mathematics, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan*Email address*: kamada@math.sci.osaka-u.ac.jp