arXiv:2302.13250v1 [math.GR] 26 Feb 2023

广义正规性具有传递关系的有限群*

Inna N.Safonova白俄罗斯国立大学应用数学与计算机科学系，明斯克 220030，白俄罗斯 电子邮箱：in.safonova@mail.ru

Alexander N.Skiba弗朗西斯克·斯科里纳戈梅利国立大学数学与编程技术系，戈梅利 246019，白俄罗斯 电子邮箱：alexander.skiba49@gmail.com

摘要

本文讨论群的σ性质理论中的一些著名结果和一些开放问题，这些内容与广义 T群的研究有关。

1 引言

在本文中，所有群均为有限群，且 G 始终表示一个有限群； $\mathcal{L}(G)$表示 G的所有子群构成的子群格。此外， $\mathbb{P}$ 表示所有素数的集合；如果 n 是一个整数，则符号 $\pi(n)$表示所有整除 n的素数组成的集合；通常， $\pi(G) = \pi(|G|)$表示所有整除 G的阶的素数组成的集合；

如果 A与 G的每个子群 H 都可置换，即 $AH = HA$，则称 A 是 G的拟正规（Ore）或可置换（Stonehewer）子群；如果 A 与 G的所有Sylow子群都可置换，则称其为Sylow可置换或 S-可置换 [1, 2]。

如果正规性在 G上是传递关系，即若 H 是 K 的正规子群且 K 是 G的正规子群，则 H 是 G 的正规子群，则称群 G 为 T-群。换言之，如果 G 的每个次正规子群都是 G的正规子群，则称群 G 为 T-群。

T群的刻画最初由 Gasch¨utz [3] 在可解情形下给出，随后 Robinson 在 [4],给出了一般情形的结果。

*本研究得到白俄罗斯共和国教育部资助（编号：20211328、20211778）。[0]关键词：有限群，模子群， σ-次正规子群， σ-可解群，Robinson σ-复形。[0]数学主题分类（2010）：20D10，20D15，20D30

这些研究 [3, 4] 引起了人们对进一步研究 T群以及某些广义正规性条件具有传递性的群的极大兴趣（PT群，即拟正规性具有传递性的群； PST群，即 Sylow 可置换性具有传递性的群； $P\sigma T$群，即 σ可置换性具有传递性的群（见下文第 2 节）；模性具有传递性的群，等等）。

不过，在这一方向上仍有许多尚未解决的问题，本文将讨论其中一些。

2 $P\sigma T$-群

下文中， $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathbb{P}$的一个划分，也就是说，对于所有$i \neq j$， $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ 且 $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$。

群 G [5, 6, 7, 8] 的 σ-性质，是指不依赖于 $\mathbb{P}$的划分 σ 的任一性质。换言之，在群的 σ-性质理论中，我们不对 $\mathbb{P}$的划分 σ 施加任何限制。

在继续之前，先回顾群的 σ-性质理论中的一些基本概念（参见 [5, 6,7, 8]）。

若 n 是整数，则 $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ $\sigma(G) = \sigma(|G|)$。群 G 称为：若存在某个 i，使得 G 是一个 σ_i-群，则称为 σ-主群；若 G 是若干 σ-主群的直积，则称为 σ-幂零群；若 G 的每个主因子都是 σ-主群，则称为 σ-可解群。

A 的子群 G 称为：

(i) 在 G中是 σ-次正规子群，当且仅当存在一个子群链

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$$

使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$， A_{i-1} 或 $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 σ-初级的；

(ii) 在 G 中是 σ-半正规子群（J.C. Beidleman），如果对于所有满足 $\sigma(|x|) \cap \sigma(A) = \emptyset$的 $x \in G$，都有 $x \in N_G(A)$；

(iii) 在 G 中是 σ-可置换子群，如果 $A \trianglelefteq G$ 或 G 是 σ-满的，也就是说，对于每个$\sigma_i \in \sigma(G)$，G 都有一个霍尔 σ_i-子群，并且 A 与 G的所有这类霍尔子群都可置换。

例 2.1. (i) 在经典情形 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$（本文在此处及下文采用 [9, 10]中的记号）下， G 的子群 A 在 G 中是 σ^1-次正规子群，当且仅当 A 在G中是次正规子群； A 在 G 中是 σ^1-可置换的，当且仅当 A 在 G中是Sylow可置换的。群 G 是 σ^1-可解的（σ^1-幂零的），当且仅当 G 是可解的（分别地，幂零的）

（ii）在另一种经典情形 $\sigma = \sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}, \pi \subseteq \mathbb{P}$ 中，群 G 是 σ^π-可解的（σ^π-幂零的），当且仅当 G 是 π-可分的（分别地，是 π-可分解的，即 $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$）。

A 的一个子群 G 在 G 中是 σ^π-次正规的，当且仅当 G 有一个子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq$

$\cdots \leq A_n = G$，使得 $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$，或者 $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 π-群，或者对于所有 $i = 1, \ldots, n$， $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 π'-群。

在此情况下，我们称 A 在 G 中是 π、π'-次正规的。

如果且仅如果 G 具有一个霍尔 π-子群和一个霍尔π'-子群，并且 A 与 G 的所有这类霍尔子群均可置换，则称 A 的子群在 G 中是 σ^π-可置换的。在此情况下，我们称 A 在 G 中是π、π'-可置换的。

（iii）事实上，在 π-可解群（$\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$）的理论中，我们处理的是 $\mathbb{P}$ 的划分 $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$。群 G 是 $\sigma^{1\pi}$-可解的（$\sigma^{1\pi}$-幂零的），当且仅当 G 是π-可解的（分别为 π-特殊的 [9, 10],，即 $G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$）。

子群 A 在 G 中是 $\sigma^{1\pi}$-次正规的，当且仅当 G 具有一个子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ 使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$， $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ 或 $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 π'-群。

在这种情况下，我们称 A 在 G中是 π-次正规子群。

事实上，群的 σ-性质理论的出现，主要是由于人们试图解决以下这个极其困难的问题。

问题 2.2（参见 [6]中的问题）。σ-丰满群 G 的结构是什么，其中 σ-可置换性在 G上是传递的? 也就是说，若 H 是 K 的 σ-可置换子群，且 K 是 G的 σ-可置换子群，那么 H 是 G 的 σ-可置换子群?

即使在 σ-可解情形下，这个问题也很难解决；其解决需要发展群的 σ-性质理论的许多方面。σ-可解 $P\sigma T$-群的理论主要是在论文 [6, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18] 中发展起来的，而以下定理（事实上，这是论文 [6, 9]的主要结果）是这方面的关键结果。

定理 2.3（见 [9] 中的定理 A）。若 G是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，且 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$，则以下条件成立:

(i) $G = D \rtimes M$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔霍尔子群， M 是 σ-幂零的，且 G的每个元素在 D上诱导一个幂自同构;

(ii) 对所有 i， $O_{\sigma_i}(D)$ 在 G 的一个霍尔 σ_i-子群中有正规补。

反过来，若某些 G的子群 D 和 M 满足条件 **(i)** 和 **(ii)**，则 G 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群。

在此定理中， $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 是 G的 σ-幂零剩余，也就是说，它是 G 的所有满足商群 G/N为 σ-幂零的正规子群 N 的交。

在 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$的情形下，由定理 2.3 可得以下已知结果。

推论 2.4（Agrawal [19, 定理 2.3]）。设 $D = G^{\mathfrak{N}}$ 是 G的幂零剩余。若 G 是一个可解 PST-群，则 D是 G的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群，且 G的每个元素在 D中诱导一个幂自同构。

为了进一步考察定理 2.3 的一些应用，我们引入以下概念。

定义 2.5. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个群类。假设我们为每个群 $G \in \mathfrak{X}$ 关联其子群的某个系统 $\tau(G)$。那么，如果满足以下条件，我们称 τ 为 Skiba 意义下的子群函子[20]，或者称 τ 为 $\mathfrak{X}$ [21] 上的 Skiba 子群函子：

(1) 对任意群 G，都有 $G \in \tau(G)$；

(2) 对任意满同态 $\varphi: A \mapsto B$，其中 A、$\in \mathfrak{X}$，以及任意群 $H \in \tau(A)$ 和 $T \in \tau(B)$，都有 $H^{\varphi} \in \tau(B)$ 和 $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$。

下文中，τ 是 $\mathfrak{X}$ 上的一个 Skiba 意义下的子群函子。

若 $A \in \tau(G)$，则称 A为 G的 τ-子群。若 $\mathfrak{X}$是所有群构成的群类，则我们将“ $\mathfrak{X}$上的子群函子”简称为“子群函子”。

我们还称子群函子 τ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 σ-特殊的，如果对任意群 $G \in \mathfrak{X}$，以下三个条件成立：

(*) G 的每个 σ-次正规 τ-子群在 G 中都是 σ-可置换的，并且

(**) 对于 G 的任意两个 σ-次正规子群 A、$B \in \tau$，有 $\langle A、B\rangle \in \tau(G)(G)$,

(***) 如果 $G = D \rtimes M$ 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，其中 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$，且 A 是 G 的一个 σ-初等 σ-次正规子群，使得 $A \in \tau(M)$，那么 $A \in \tau(G)$。

引理 2.6. 设 $G = D \rtimes M$ 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，其中 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$。如果 A 是 G 的一个 σ-初等 σ-次正规子群，使得 $A \leq M$，则 $D \leq C_G(A)$。

证明. 设 A 是一个 σ_i-群，且 x 是 D 中的一个具有素数幂阶 p^n 的元素。群 G 是 σ-可解的，因此根据 [7] 中的定理 B，对于所有 k， G 都有一个 Hall σ_k-子群 H_k。由定理 2.3，$H_k = O_{\sigma_k}(D) \times S_i$。

由于 A 在 G中是 σ-次正规子群，根据下面的引理 2.30(7)， $A \leq H_i$。另一方面，由于 $A \leq M$， $A \cap D = 1$。因此 $A = (A \cap O_{\sigma_i}(D)) \times (A \cap S_i)$，因为 $O_{\sigma_i}(D)$ 是 D和 G的霍尔子群，所以$A \leq S_i$，从而 $O_{\sigma_i}(D) \leq C_G(A)$。现在，令 $k \neq i$。那么 A是 V的一个霍尔 σ_i-子群：$= O_{\sigma_k}(D)$ A，且根据下面的引理 2.30(1)， A 在 V中是 σ-次正规子群，因此根据下面的引理 2.30(6)，$V = O_{\sigma_k}(D) \times A$，从而 $O_{\sigma_k}(D) \leq C_G(A)$。

引理得证。

引理 2.7. 设 $N \leq A$ 是 σ-满群 G的子群，其中 N 在 G中正规。假设对于所有 $i = 1, \ldots, t$，$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\} = \sigma(G)$，且 H_i是 G 的一个霍尔 σ_i-子群。

(1) 若对于所有 $i = 1$、.....、 t 以及所有 $x \in G$， $AH_i^x = H_i^x A$，则 A 在 G 中是 σ-可置换的。（参见 [22] 中的命题 1.1。）

(2) A/N 在 G/N 中是 σ-可置换的，当且仅当 A 在 G 中是 σ-可置换的。

证明。首先注意，对于每个 $\sigma_i \in \sigma(G/N)$， H_iN/N 都是 G/N 的 Hall σ_i-子群，因此 G/N 是

σ-全的。

若对于所有 $i=1$、.....、t 以及所有 $x\in G$， $AH_i^x=H_i^xA$，则

$$AH_i^x/N=(A/N)(H_iN/N)^{xN}=(H_iN/N)^{xN}(A/N)=H_i^xA/N$$

对于所有 $i=1$、.....、t 以及所有 $xN\in G/N$。因此，若 A 在 G 中是 σ-可置换的，则根据第 (1) 部分， A/N 在 G/N 中是 σ-可置换的。

同理，若 A/N 在 G/N 中是 σ-可置换的，则根据第 (1) 部分， A 在 G 中是 σ-可置换的。

引理得证。

例 2.8. 设 $\mathfrak{X}$ 为所有 σ-饱和群组成的类。

(1) 对任意 σ-饱和群 G，令 $\tau(G)$ 为 G 的所有 σ-可置换子群的集合。那么，根据引理 2.7(2)， τ 是 Skiba 意义下的子群函子；显然，条件 (*) 对任意群 $G\in\mathfrak{X}$ 都成立。此外，根据 [25, A, 1.6(a)], ，条件 (**) 对任意群 G 都成立。最后，根据定理 2.3，条件 (***) 对任意 $P\sigma T$-群都成立。

(2) 回忆一下，若子群 M 属于 G ，则称其在 G 中是模的，当且仅当 M 是格 $\mathcal{L}(G)$的模元素（按 Kurosh [24, 第 43]页的定义），也就是说,

(i) 对所有满足 $X\leq Z$的 $X\leq G$、 $Z\leq G$， $\langle X、 M\cap Z\rangle=\langle X、 M\rangle\cap Z$；并且

(ii) 对所有满足 $M\leq Z$的 $Y\leq G$、 $Z\leq G$， $\langle M、 Y\cap Z\rangle=\langle M、 Y\rangle\cap Z$。

对于任意 σ-满群 G，令 $\tau(G)$为 G的所有模子群构成的集合。那么，根据 [24,第201页的性质 (3)、(4)]， τ 是 Skiba 意义下的子群函子。

现在，我们证明函子 τ 是 σ-特殊的。事实上，若 A 是 σ-满群 G的一个 σ-次正规模子群，则根据下文定理 3.3 (i)， A 在 G 中是 σ-可置换的，因此条件 (*) 对 G成立。接下来，设 A 和 B 是 G 的 σ-次正规模子群。根据[24, 第201页的性质 (5)], ， $\langle A、 B\rangle$ 在 G 中是模的，因此条件 (**) 对 G 成立。

最后，设 $G=D\rtimes M$是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，其中 $D=G^{\mathfrak{N}_\sigma}$，并设 A是 G的一个 σ-主 σ-次正规子群，使得 $A\in\tau(M)$，也就是说， A在 M中是模的。我们证明，在这种情况下有 $A\in\tau(G)$，也就是说， A 在 G中是模的。

根据 [24], 中的引理 5.1.13，只需证明：若 x 是 G 中一个阶为素数幂 p^n的元素，则 A 在 $\langle x, A\rangle$中是模的。

若 $x\in D$，结论显然。现在假设 $x\notin D$ ，于是由于 M 是 G的霍尔子群，对某个 $d\in D$ 有 $x\in M^d$ 。但是，由引理 2.6， A 在 M 中是模的，因此由于 $A^d=A$ ， A 在 M^d 中是模的。因此， A 在 $\langle x, A\rangle$中是模的。于是，条件 (***) 对 G成立，所以 τ 是 $\mathfrak{X}$ 上的一个 σ-特殊子群函子。

(3) 对任意群 G，令 $\tau(G)$ 为 G 的所有正规子群所成的集合。则子群函子 τ 是 σ-特殊的（见第 (2) 部分）。

引理 2.9（Se e 推论 2.4 和引理 2.5（见 [6]）。所有 σ-幂零群组成的类 $\mathfrak{N}_\sigma$ 是

在正规子群的乘积、同态像和子群运算下封闭。此外，若 E 是 G 的正规子群，且 $E/(E\cap\Phi(G))$ 是 σ-幂零的，则 E 是 σ-幂零的。

引理 2.10（见 [6] 中的命题 2.3）。群 G 是 σ-幂零群，当且仅当 G 的每个子群都是 G 的 σ-次正规子群。

现在我们证明以下结果。

定理 2.11。设 G 是一个具有 $D=G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 的 σ-可解群，并设 τ 是定义在所有 σ-满群 $\mathfrak{X}$ 集合上的 σ-特殊子群函子。若 G 的每个 σ-次正规子群都是 G 的 τ-子群，则 G 是一个 $P\sigma T$-群，且满足以下条件：

(i) $G=D\rtimes M$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群，M 是具有 $U\in\tau(M)$ 的 σ-幂零群，对 M 的所有子群 U 均成立，且 G 的每个元素在 D 中诱导一个幂自同构；

(ii) 对所有 i，$O_{\sigma_i}(D)$ 在 G 的一个 Hall σ_i-子群中有正规补。

反过来，若某些子群 D 和 M 满足条件 (i) 和 (ii)，且它们是 G 的子群，则 G 的每个 σ-次正规子群都属于 $\tau(G)$。

证明。首先反设条件 (i) 和 (ii) 对某些子群 D 和 M 成立，且它们是 G 的子群，但 G 有一个 σ-次正规子群 U，使得 $U\notin\tau(G)$。此外，可设 G 是一个反例，且 $|G|+|U|$ 极小。于是，对每个满足 $U_0<U$ 的 G 的 σ-次正规子群 U_0，都有 $U_0\in\tau(G)$。

(1) $U\cap D=1$。

事实上，设 $V:=U\cap D\neq 1$。则 $G/V=(D/V)\rtimes(MV/V)$，其中

$$D/V=G^{\mathfrak{N}_\sigma}/V=(G/V)^{\mathfrak{N}_\sigma}$$

是 G/V 的一个奇数阶阿贝尔霍尔子群，$MV/V\simeq M$ 是一个 σ-幂零群，其中每个子群都属于 $\tau(MV/V)$，且 G/V 的每个元素在 D/V 上诱导一个幂自同构。显然，对所有 i，$O_{\sigma_i}(D/V)$ 在 G/V 的一个霍尔 σ_i- 子群中有一个正规补。因此，子群 D/V 和 MV/V 满足条件 (i) 和 (ii)，且它们是 G/V 的子群。因此，根据 G 的选取，G/V 的 σ-次正规子群 U/V 满足 $U/V\in\tau(G/V)$，故根据子群函子 τ 的定义，有 $U\in\tau(G)$。此矛盾表明结论 (1) 成立。

（2） U 是某个 σ_i-群，且 i。

根据引理 2.9 和断言（1），$U\simeq UD/D$ 是 σ-幂零的。因此，U 是若干个 σ-主非平凡群 U_1、.....、U_t的直积。若 $U_1\neq U$，则根据U的选取，有 U_1、.....、$U_t\in\tau$（G），因此 $U=U_1\times\cdots\times U_t\in\tau$（$G$），因为根据假设 τ是特殊的，这就产生了矛盾。因此，$U=U_1$是某个 σ_i-群，且 i。

（3） $U\leq\tau$（M）。特别地，$U\in\tau$（M）。

设 $\pi=\pi$（D）。T hen G 根据条件 (i) 是 π-可分的，且 U 是一个 π'-群，因为 D 是一个正规

根据假设， G 的 Hall π-子群以及根据断言（1）， $U \cap D = 1$。于是，对某个 $d \in D$，有 $U^d \leq M$；由引理 2.6， $d^{-1} \in C_G(U^d)$，因此 $U \leq M$。

因此，根据假设， $U \in \tau(M)$；又由于根据假设， τ是特殊的，且根据条件 (i) 和 (ii) 以及定理 2.3， G是一个σ-可解的 $P\sigma T$-群，所以 $U \in \tau(G)$。这一矛盾完成了定理中条件充分性的证明。

现在假设，一个 σ-可解群 G 的每个 σ-次正规子群都属于集合 $\tau(G)$。我们证明在这种情况下，条件 (i) 和 (ii) 对 G成立。首先注意到， G σ中的每个 σ-次正规子群都是可置换的，因为根据假设，τ是特殊的。因此， G是一个 σ-可解的 $P\sigma T$-群，所以由定理 2.3 可知， $G = D \rtimes M$，其中 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以及定理 2.3 中的条件 (i) 和 (ii) 对 D成立，且 M成立。因此，我们只需证明对于 M的每个子群 H，都有 $H \in \tau(M)$。

由引理 2.9， G/D 是 σ-幂零的；由引理 2.10， G/D中的每个子群 $H/D \leq G/D$ 都是 σ-次正规的。接着，根据下文的引理 2.30(3)， G 中的 H 是 σ-次正规的，因此 $H \in \tau(G)$。然而，$H/D \in \tau(G/D)$。因此，对于 G/D的每个子群 H/D，都有 $H/D \in \tau(G/D)$；又由于 $M \simeq G/D$，对于 M的每个子群 V，都有 $V \in \tau(M)$。因此，条件 (i) 和 (ii) 对 G成立。

定理得证。

如果 G 的每个 σ-次正规子群都是 G中的模子群，我们就称 G 为 $Q\sigma T$-群。

显然，群 G 的所有子群构成的子群格 $\mathcal{L}(G)$是模的，当且仅当 G 的每个子群都是 G中的模子群。因此，结合例 2.8(2)，由定理 2.11 可得以下已知结果。

推论 2.12（Hu、Huang 和 Skiba [27]）。群 G with $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 当且仅当是一个满足以下条件的 σ-可解 $Q\sigma T$-群:

（i） $G = D \rtimes L$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群， L 是 σ-幂零的，并且 L 的所有子群的子群格 $\mathcal{L}$（L）是模的，

（ii） G 的每个元素在 D 中诱导一个幂自同构，并且

（iii）对于所有 i， G 的 Hall σ_i-子群中的 O_{σ_i}（D）具有一个正规补。

鉴于例 2.8(3)，由定理 2.11 在 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ 的情形下可得到以下经典结果。

推论 2.13（Gasch¨utz [3]）。群 G 是一个可解 T-群，当且仅当满足以下条件:

(i) G 的幂零剩余 L 是一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群，

(ii) G 通过共轭在 L 上作用为群幂自同构，且

(iii) G/L 是一个戴德金群。

显然，每个拟正规子群在群中都是模子群。此外，以下这一重要事实早已广为人知。

定理 2.14（Schmidt [24, 定理 5.1.1]）。子群 A G 在 G 中拟正规，当且仅当 A 在 G中是模的且次正规的。

回顾一下，岩泽群是指每个子群都是拟正规子群的群。

结合例 2.8(2)和定理 2.14，在$\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ 的情况下，由定理 2.11 可得以下众所周知的结果。

推论 2.15（Zacher [28]）。群 G 是可解的 PT-群，当且仅当满足以下条件:

（i） G的幂零剩余 L 是一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群,

（ii） G 通过共轭作用于 L ，且作用方式为群幂自同构，并且

(iii) G/L 是一个岩泽群。

按照 [16], 的说法，如果 G 的每个 σ次正规子群都是正规的，则称 G 为 T_σ群。

鉴于例 2.8(3)，由定理 2.11可得到以下已知结果。

推论 2.16（Zhang、Guo 和 Liu [16]）。如果 G 是一个具有 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 的 σ可解群，则 G 是一个 T_σ群，当且仅当以下条件成立:

(i) $G = D \rtimes L$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群，而 L 是一个 Dedekind 群,

(ii) G 的每个元素在 D中诱导一个幂自同构，并且

(iii) $O_{\sigma_i}(D)$ 在 G 的任意 σ_i 霍尔子群中都有一个正规补。

推论 2.17（Ballester-Bolinches、Pedraza-Aguilera 和 P`érez-Calabuing [18]）。A σ-可解群 G 是 T_σ-群，当且仅当 G 是 T-群，且对于任意 $i \in I$， G 的 σ_i 霍尔子群都是 Dedekind 群。

证明。首先，假设 G 是一个 σ-可解的 T_σ-群。那么 G 满足推论 2.16 中的条件 (i) 和 (ii)，因此根据推论 2.13， G 是一个 T-群。另一方面，对于每个 G 的 σ_i 霍尔子群 H，我们有 $H = (O_i(D)) \times S$，其中 $O_i(D)$ 是 D 的一个霍尔子群，而 D 是 G 的一个霍尔子群，因此 H 是一个 Dedekind 群，因为 $S \simeq DS/D$ 和 D 都是 Dedekind 群。

最后，设 G 是一个可解的 T-群，并且对所有 $i \in I$， G 的 Hall σ_i-子群都是 Dedekind 群。再设 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$。根据， G/N 是 Dedekind 群，因此 $D = G^{\mathfrak{N}}$。所以， G 是一个 σ-可解的 T_σ-群。

推论得证。

在近期论文 [23, 11], 中，当对所有 $\sigma_i \in \sigma(G)$， G 的每个 Hall σ_i-子群要么是超可解群，要么是 PST-群时，得到了 $P\sigma T$-群 G 的一种描述。

接下来我们将讨论这两篇论文中的一些结果。

定义 2.18. 若 $(D, Z(D); U_1,\ldots, U_k)$ 是 G 的 Robinson σ-复形（当 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ 时称为 Robinson 复形），且 $D \neq 1$ 是 G 的正规子群，并满足：

(i) $D/Z(D) = U_1/Z(D) \times \cdots \times U_k/Z(D)$，其中 $U_i/Z(D)$ 是 G 的一个单非-σ-主因子，$Z(D) \leq \Phi(D)$，并且

(ii) G 在 $Z(D)$ 下方的每个主因子都是循环的。

例 2.19. (i) 令 $G = SL(2, 7) \times A_7 \times A_5 \times B$，其中 $B = C_{43} \rtimes C_7$ 是一个阶为 301 的非阿贝尔群，并令 $\sigma = \{\{2,3,5\},\{7,43\},\{2,3,5,7,43\}'\}$。那么

$$(SL(2,7) \times A_7, Z(SL(2,7)); SL(2,7), A_7 Z(SL(2,7)))$$

是 G 的 Robinson σ-复形，并且

$$(SL(2,7) \times A_7 \times A_5, Z(SL(2,7)); SL(2,7), A_7 Z(SL(2,7)), A_5 Z(SL(2,7)))$$

是 G 的 Robinson 复形。

(ii) 若 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ 是 G 的 Robinson σ^π-复形（见例 2.1(ii)），则 $U_i/Z(D)$ 既不是 π-群，也不是 π'-群；此时我们称 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ 是 G 的 Robinsonπ, π'-复形。

(iii) 如果 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ 是 G 的 Robinson $\sigma^{1\pi}$-复形（见例 2.1(iii)），那么对于所有 $p \in \pi$，$U_i/Z(D)$ 既不是 π'-群，也不是 p-群；在这种情况下，我们称 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ 是 G 的 Robinson π- 复形。

设 $\pi \subseteq \mathbb{P}$。若 $\pi = \emptyset$，则记 $O_\pi(G) = O_\emptyset(G) = 1$。我们称 G 满足 N_π，如果每当 N 是 G 的可解正规子群时，G 的 π'-元素在 $O_\pi(G/N)$ 中诱导幂自同构。遵循 [1, 2.1.18], ，我们也称 G 满足 N_p，如果每当 N 是 G 的可解正规子群时，G 的 p'- 元素在 $O_p(G/N)$ 中诱导幂自同构。

我们接下来的目标是证明以下事实。

定理 2.20. 设 G 是一个 σ-丰满群，且对所有 $i \in I$，G 的每个 Hall σ_i-子群要么是超可解群，要么是 PST-群。那么，G 是一个 $P\sigma T$-群，当且仅当 G 有一个正规子群 D，使得：

(i) G/D 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，

(ii) 若 $D \neq 1$, G 有一个 Robinson σ-复形（$D, Z(D)$; $U_1,\ldots, U_k$），并且

(iii) 对任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G 和 $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ 对所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ 满足 N_{σ_i}。

鉴于例 2.1(iii)，由定理 2.20 可得以下结论

推论 2.21. 假设 G 有一个霍尔 π'-子群，其中 $\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$，并且 G 的所有此类霍尔子群都是超可解的。那么，条件 π-可置换性在G 上是传递关系，当且仅当 G 有一个正规子群 D，使得：

(i) G/D 是 π-可解的，且条件 π-可置换性在 G/D上是传递关系，

(ii) 若 $D \neq 1$, G 有一个 Robinson π-复形 ($D, Z(D)$; U_1,... , U_k)，并且

(iii) 对任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G 和 $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ 对所有 $p \in \pi$(Z(D)) 都满足 N$_p$，并且在 $O_{\pi'}(Z(D)) \neq 1$ 的情形下也满足 N$_{\pi'}$。

根据例 2.1(i)，由推论 1.5 可得以下结论

推论 2.22（Robinson [4]）。群 G 是一个 PST-群，当且仅当 G 有一个完美正规子群 D，使得：

(i) G/D 是一个可解 PST-群，

(ii) 若 $D \neq 1$, G 有一个 Robinson 复形 ($D, Z(D)$; $U_1, \ldots, U_k$)，并且

(iii) 对任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$、 G 和 $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ 对所有 $p \in \pi$ ($Z(D)$) $\cap \pi$ 满足 N$_p$。

定理 2.20 还有许多其他推论。特别是，根据例 2.1(ii)，由定理 2.20 可得以下结果

推论 2.23. 假设 G 有一个霍尔 π-子群和一个霍尔 π'-子群，并且 G 的所有这类霍尔子群都是超可解的。那么， π、 π'-可交换条件在 G 上是传递关系，当且仅当 G 有一个正规子群 D，满足：

(i) G/D 是 π-可分的，并且 π、 π'-可交换条件在 G/D 上是传递关系，

(ii) 如果 $D \neq 1$、 G 有一个 Robinson π、 π'-复形 (D、 $Z(D)$; $U_1, \ldots, U_k$)，并且

(iii) 对于任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$、 G 和 $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ 满足 N$_\pi$ if$O_\pi(Z(D)) \neq 1$，且 N$_{\pi'}$ if $O_{\pi'}(Z(D)) \neq 1$。

例 2.24. 令 α: $Z(SL(2,5)) \to Z(SL(2,7))$ 为一个同构，并令

$$D := SL(2,5) \curlyvee SL(2,7) = (SL(2,5) \times SL(2,7))/V,$$

其中

$$V = \{(a, (a^\alpha)^{-1}) \mid a \in Z(SL(2,5))\},$$

是群 $SL(2,5)$ 和 $SL(2,7)$ 的直积，且具有公共中心（见 [29, 第 49] 页）。令 $M = (C_{23} \wr C_{11}) \curlywedge (C_{67} \rtimes C_{11})$ 为群 $C_{23} \wr C_{11}$ 和 $C_{67} \rtimes C_{11}$ 的直积，且具有公共商群 C_{11} （见 [29, 第 50] 页），其中 $C_{23} \wr C_{11}$ 是群 C_{23} 和 C_{11} 的正则绕积，而 $C_{67} \rtimes C_{11}$ 是一个阶 737 的非阿贝尔群。

现在，令 $G = D \times M$ 和 $\sigma = \{\{5\}, \{7\}, \{2, 11, 23\}, \{3, 67\}, \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 67\}'\}$.。我们证明 G 是一个 $P\sigma T$-群。根据 [29, I, Satz 9.10], $D = U_1 U_2$ 和 $U_1 \cap U_2 = Z(D) = \Phi(D)$，其中 U_i 是 D 的正规子群， $U_1/Z(D)$ 是一个阶为 60 的单群，而 $U_2/Z(D)$ 是一个阶为 168 的单群。因此，(D, Z (D); U_1, U_2) 是 G的 Robinson σ-复形。根据 [29, I, Satz 9.11], M 有正规子群 R ($|R| = 23^{11}$) 和 L ($|L| = C_{67}$)，使得 $M/R \simeq C_{67} \rtimes C_{11}$ 且 $M/L \simeq C_{23} \wr C_{11}$.。显然， M 不是 σ-幂零的，因此 $M^{\mathfrak{N}_\sigma} = L$，因为 M/L 是 σ-素数幂阶的。因此， $M \simeq G/D$ 是一个

根据定理 2.3，σ-可解 $P\sigma T$-群，并且显然 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{S}}$。群 G是 σ-饱和的，且对于所有 i，G 的所有 Hall σ_i-子群都是超可解的。还需证明 G 满足 N$_\pi$，其中$\pi = \{2, 11, 23\}$。因此， G满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，故根据定理 2.20， G是一个 $P\sigma T$-群。

假设 G 是一个 PST-群。那么，根据例 2.1(i) 和定理 2.20， $M \simeq G/D$ 是一个可解的 PST-群，因此 $M^{\mathfrak{N}}$ 是 M 的一个霍尔子群，并且根据例 2.1(i) 和定理 2.3， $M^{\mathfrak{N}}$ 的所有子群在 M 中都是正规的。但是， R 包含一些在 M 中并不正规的子群。因此 $M^{\mathfrak{N}} = L$，所以 $M/L \simeq C_{23} \wr C_{11}$ 是幂零的。这一矛盾表明， G 不是一个 PST-群。

由定理 2.3 和定理 2.20 可知，每个 σ-可解 $P\sigma T$-群都是 σ-超可解的，并且每个具有对所有 i 都对应的超可解霍尔 σ_i- 子群的 σ- 满 $P\sigma T$- 群，按照下文的含义，都是一个 σ-SC- 群

定义 2.25。我们称 G 为:

(1) σ-超可解 [10] ，如果 G 的每个主因子 $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下都是循环的;

(2) 如果 G 的每个主因子 $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下都是单群，则称其为 a σ-SC-群。

例 2.26。（i） G 是超可解的，当且仅当它是 σ-超可解的，其中 $\sigma = \sigma^1$ （见例 1.1(i)）。

（ii）如果群 G满足 G 的每个主因子都是单群，则称其为 SC-群 [4] 。注意， G是 SC-群，当且仅当它是 σ-SC-群，其中 $\sigma = \sigma^1$。

（iii）设 $G = A_5 \times B$，其中 A_5 是 5 次交错群， $B = C_{29} \rtimes C_7$ 是一个阶为 203 的非阿贝尔群，并设 $\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{7\}, \{29\}, \{2, 3, 5, 7, 29\}'\}$。于是 $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = C_{29}$，因此 G 是一个 σ-超可解群，但它既不可解，也不是 σ-幂零的。

(iv) 设 $G = SL(2, 7) \times A_7 \times A_5 \times B$，其中 $B = C_{43} \rtimes C_7$ 是一个阶为 301 的非阿贝尔群，且 $\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{7, 43\}, \{2, 3, 5, 7, 43\}'\}$。那么 $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = SL(2, 7) \times A_7$，因此 G是一个 σ-SC-群，但它不是一个 σ-超可解群。

设 $1 \in \mathfrak{F}$ 是一个群类。那么 $G^{\mathfrak{F}}$ 是 G的 $\mathfrak{F}$-剩余，也就是 G 的所有满足 $G/N \in \mathfrak{F}$的正规子群 N 的交。若对每个群 G， $G/G^{\mathfrak{F}}$ 的每个同态像都属于 $\mathfrak{F}$ ，则称群类 $1 \in \mathfrak{F}$ 为一个形成。若当 $G \in \mathfrak{F}$ 且 H 是 G的（正规）子群时， $H \in \mathfrak{F}$ ，则称形成 $\mathfrak{F}$ 为（正规）遗传的。

引理 2.27（参见 [30, 命题 2.2.8]）。设 $\mathfrak{F}$ 是一个非空形成，且 N、 R 是 G的子群，其中 N 在 G中正规。

(1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$.(2) 若

$G = RN$，则 $G^{\mathfrak{F}}N = R^{\mathfrak{F}}N$。

下文中， $\mathfrak{U}_\sigma$ 表示所有 σ-超可解群构成的类； $\mathfrak{U}_{c\sigma}$ 表示所有 σ-SC-群构成的类。

在我们的证明中，我们经常使用以下

命题 2.28。对于任意划分 σ，以下结论成立。

(i) 类 $\mathfrak{U}_{c\sigma}$ 是正规遗传形成。(ii) 类 $\mathfrak{U}_{\sigma}$ 是遗传形成 [10]。

证明。(1) 设 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$。首先注意，若 R 是 G 的正规子群，则由引理 2.9 和 2.27 可得 $(G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma} = DR/R$，因此由 G-同构 $DR/R \simeq D/(D \cap R)$ 可知， G/R 中位于 $(G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下的每个主因子是单群，当且仅当 G 中介于 $D \cap R$ 与 D 之间的每个主因子是单群。因此，若 $G \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$，则 $G/R \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$。故类 $\mathfrak{U}_{c\sigma}$ 对取同态像封闭。

现在证明，若 $G/R, G/N \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$，则 $G/(R \cap N) \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$。不失一般性，可设 $R \cap N = 1$。由于 $G/R \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$， G 中介于 $D \cap R$ 与 D 之间的每个主因子都是单群。此外， G 中介于 $D \cap N$ 与 D 之间的每个主因子也都是单群。现在令 H/K 为 G 中位于 $D \cap R$ 以下的任意主因子。则 $H \cap D \cap N = 1$，因此由 G-同构

$$H(D \cap N)/K(D \cap N) \simeq H/(H \cap K(D \cap N)) = H/K(H \cap D \cap N) = H/K$$

我们得到 H/K 是单群，因为 $D \cap N \leq K(D \cap N) \leq H(D \cap N) \leq D$。另一方面， G 中介于 $D \cap R$ 和 D 之间的每个主因子也都是单群。因此，带算子群的 Jordan-H¨older 定理 [25, Ch. A, Theorem 3.2] 表明， G 中位于 D 以下的每个主因子都是单群。于是 $G \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$，因此类 $\mathfrak{U}_{c\sigma}$ 对次直积封闭。

最后，若 $H \trianglelefteq G \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$，则由引理 2.9 和 2.27 以及同构 $H/(H \cap D) \simeq HD/D \in \mathfrak{N}_\sigma$，我们得到 $H^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq H \cap D$，因此 H 中位于 $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下的每个主因子都是单群，因为 G 中位于 D 以下的每个主因子都是单群。于是 $H \in \mathfrak{U}_{c\sigma}$，因此类 $\mathfrak{U}_{c\sigma}$ 对正规子群封闭。

该命题得证。

命题 2.29. 假设 G 是一个 $P\sigma T$-群。则

(i) 对任意正规子群 R 和所有 $i \in I$， G/R 都满足 $\mathbf{N}_{\sigma_i}$，并且

(ii) 若对所有 $i \in I$， G 的所有 Hall σ_i-子群都是超可解的，则 G 是一个 σ-SC-群。

为了证明该命题，我们需要几个引理。

回顾 th 如果存在一个子群链，则称 A of G 中的子群为 σ-次正规。

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$$

使得对于所有 $i = 1$、.....、 n， $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ 或 $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 σ-初等的。

我们称：整数 n 是一个 Π-数，如果 $\sigma(n) \subseteq \Pi$；子群 H 是 G 的 Π-子群，如果 $|H|$ 是一个 Π-数； σ-霍尔子群 H 是 G 的霍尔 Π-子群，如果 H 是 Π的子群且 $|G : H|$ 是一个 Π'-数。我们用 $O^{\Pi}(G)$ 表示由 G 的所有 Π'-子群生成的子群。

引理 2.30. 设 A、 K 和 N 是 σ-满群 G的子群。假设 A 在 G 中是 σ-次正规子群，且 N 在 G中正规。

（1） $A \cap K$ 在 K中是 σ-次正规子群。（2） AN/N 在 G/N中是 σ-次正规子群。（3）如果 $N \leq K$ 和 K/N 在 G/N中是 σ-次正规子群，则 K 在 G.中是 σ-次正规子群。（4）如果 $H \neq 1$ 是 G 的一个Hall σ_i-子群，且 A 不是一个 σ_i'-群，则 $A \cap H \neq 1$ 是 A的一个Hallσ_i-子群。（5）如果 A 是一个 σ_i-群，则 $A \leq O_{\sigma_i}(G)$。（6）如果 A 是 G的一个Hall σ_i-子群，则 A 在 G中正规。（7）如果 $|G: A|$ 是一个 Π-数，则 $O^{\Pi}(A) = O^{\Pi}(G)$。（8）如果对所有 $i \in I$， $O^{\sigma_i}(G) = G$，则 A 在 G中次正规。（9） $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 在 G中次正规。

证明。假设该引理不成立，并令 G 为一个阶最小的反例。根据假设，存在一条子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_r = G$，使得对于所有 $i = 1$, ..., r， $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ 或 $A_i/(A_{i-1})^{A_i}$ 是 σ- 初等的。令 $M = A_{r-1}$。不失一般性，我们可以假设 $M \neq G$。

（1）–（7）见 [6] 中的引理 2.6。

（8）根据 G 的选取， A 在 M 中是次正规的。另一方面，由于 G 是 σ-完美的， G/M_G 不是 σ-初等的。因此， M 在 G 中是正规的，从而 A 在 G 中是次正规的。

（9）根据第（1）部分， A 在 $AM_G \leq M$ 中是 σ-次正规的，因此 G 的选取意味着 $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 在 AM_G 中是次正规的。因此， G/M_G 是某个 i 的 σ_i-群，从而 $M_G A/M_G \simeq A/(A \cap M_G)$ 是一个 σ_i-群。因此$A^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq M_G$，所以 $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 在 M_G 中是次正规的，进而 $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 在 G 中是次正规的。

该引理得证。

引理 2.31. 以下结论成立：

(1) G是一个 $P\sigma T$-群，当且仅当 G的每个 σ-次正规子群都在 G中 σ-可置换。(2) 若 G是一个 $P\sigma T$-群，则 G的每个商群 G/N也都是 $P\sigma T$-群。

证明. (1) 首先注意，若 A 是 G的一个极大 σ-次正规子群，则要么 A 在 G 中正规，要么对某个 i， G/A_G 是一个 σ_i-群。我们证明 A 在 G中 σ-可置换。若 A 在 G中正规，则显然成立。现在假设 G/A_G 是一个 σ_i-群。令 H 为 G的一个 Hall σ_j-子群。若 $j \neq i$，则$H \leq A_G$，因此 $AH = A = HA$。最后，若 $i = j$，则 $A_G H = G$，因此 $AH = G = HA$。

现在假设 G 是一个 $P\sigma T$-群，并令 A 为 G 的一个 σ-次正规子群。于是存在一条子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$，使得 A_{i-1} 是 A_i 的极大 σ-次正规子群，因此对于所有 $i = 1, \ldots, n$， A_{i-1} 在 A_i 中是 σ- 可置换的。但于是 A 在 G 中是 σ- 可置换的。因此，任意 $P\sigma T$-群的每个 σ-次正规子群都是 σ-可置换的。

最后，由 [6] 中的定理 B 可知， G 的每个 σ-可置换子群都是 G 中的 σ-次正规子群。因此 (1) 成立。

(2) 任取 G/N 的一个 σ-次正规子群 A/N。由引理 2.30(3)， A 是 σ-次正规的，因此 A 在 G 中是 σ-可置换的，进而由引理 2.7(1)， A/N 在 G 中是 σ-可置换的。因此，由第 (1) 部分可得 (2)。

引理得证。

引理 2.32. 设 A 和 B 是 G 的子群，其中 A 在 G 中是 σ-可置换的 .

(1) 若 $A \leq B$ 和 B 在 G 中是 σ-次正规的，则 A 在 B 中是 σ-可置换的。

(2) 设 B 是一个 σ_i-群。那么， B 在 G 中是 σ-可置换的，当且仅当 $O^{\sigma_i}(G) \leq N_G(B)$（见 [6] 中的引理 3.1 ）。

证明. (1) 设 $\sigma(B) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$，并设 H_i 是对所有 i 的一个 Hall σ_i-子群。设 $x \in B$ 和 $H = H_i$。于是我们有 $AH^x = H^x A$，因此

$$AH^x \cap B = A(H^x \cap B) = A(H \cap B)^x = (H \cap B)^x A,$$

根据引理 2.30(4)，其中 $H \cap B$ 是 B 的一个 Hall σ_i-子群。因此，根据引理 2.7(1)， A 在 B 中是 σ-可置换的。

引理得证。

命题 2.29 的证明。令 $S = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ 为 G的 σ-可解剩余， $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 为其 σ-幂零剩余。

(i) 鉴于引理 2.31(2)，不失一般性，我们可以假设 $R = 1$。令 L 为 G的任意可解正规子群，并令 x为 G的一个 σ_i'-元素。令 $V/L \leq O_{\sigma_i}(G/L)$。于是 V/L在 G/L中是次正规子群，因此根据引理 2.7(1)， V/L在 G/L中是 σ-可置换的，因为根据引理 2.31(2)， G/L是一个 $P\sigma T$-群。因此，根据引理 2.32(2)， $xL \in O^{\sigma_i}(G/L) \leq N_{G/L}(V/L)$。所以 G满足 N$_{\sigma_i}$。

(ii) 假设结论不成立，并设 G 是阶最小的反例。若 $S = 1$，则 G 是σ-可解的，因此由定理 B 可知 G 是一个 σ-SC-群。因此 $S \neq 1$，故 $D \neq 1$。令 R 为 G 的一个包含于 D 中的极小正规子群。由引理 2.31(2)， G/R 是一个 $P\sigma T$-群。因此，根据 G 的选取， G/R 是一个 σ-SC-群。由于由引理 2.9 和 2.27 可知 $(G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma} = D/R$ ， G/R 在 D/R 以下的每个主因子都是单群。因此， G 在 R 与 $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 之间的每个主因子都是单群。因此，鉴于带算子群的 Jordan-H¨older 定理 [25, Ch. A, Theorem 3.2], ，只需证明 R 是单群。

假设结论不成立，令 L 为 R的一个极小正规子群。于是 $1 < L < R$和 L 在 G中是 σ-次正规子群，因此由引理 2.31(1)，因为 G 是一个 $P\sigma T$-群， L 在 G 中是 σ-可置换的。此外， $L_G = 1$ ，因此由定理 A 可知 L 是 σ-幂零的。因此， R 是某个 i的 σ_i-群，从而 $R \leq H$，其中 H 是 G的一个 Hall σ_i-子群。由假设， H 是超可解的，故 R 是阿贝尔群，因此 R 有一个极大子群 V，使得 V 在 H中正规。因此，鉴于

引理 2.32(2)，我们有 $G = HO^{\sigma_i}(G) \leq N_G(V)$。于是 $V = 1$，因此 $|R| = p$，矛盾。故 G 是一个 σ-SC-群。

该命题得证。

引理 2.33. 设 H/K 是 G 的一个非阿贝尔主因子。若 H/K 是单群，则 $G/HC_G(H/K)$ 可解。

证明. 由于 $C_G(H/K)/K = C_{G/K}(H/K)$，不失一般性，我们可以假设 $K = 1$。于是 $G/C_G(H) \simeq V \leq \mathrm{Aut}(H)$ 且 $H/(H \cap C_G(H)) \simeq HC_G(H)/C_G(H) \simeq \mathrm{Inn}(H)$，因为 $C_G(H) \cap H = 1$. 因此

$$G/HC_G(H) \simeq (G/C_G(H))/(HC_G(H)/C_G(H)) \simeq W \leq \mathrm{Aut}(H)/\mathrm{Inn}(H).$$

由施赖尔猜想成立可知，$G/HC_G(H/K)$ 可解。

该引理得证。

引理 2.34. 若 L 是 G 的一个非阿贝尔极小次正规子群，则 L^G 是 G 的一个极小正规子群。

证明。由于根据 [40, II，定理 7.9],，任意两个完美次正规子群均可置换，因此对于某个 x_1，……，$x_t \in G$，我们有 $L^G = L^{x_1} \cdots L^{x_t}$。现在设 R 是 G 的一个包含于 L^G 中的极小正规子群。根据 [25, 第 A 章，引理 14.3]，$R \leq N_G(L^{x_i})$，因此对于某个 j，我们有 $L^{x_j} \leq R$，因为 L^G 和 R 是非阿贝尔群。但于是 $L^G \leq R \leq L^G$，故 $L^G \leq R$。

引理得证。

定理 2.35。设 G 的每个 σ-主因子均为阿贝尔群。那么，G 是 σ-SC 群，当且仅当 $G/G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ 是 σ-超可解的，并且若 $G^{\mathfrak{S}_\sigma} \neq 1$，则 G 有一个 Robinson σ-复合体 $(G^{\mathfrak{S}_\sigma}, Z(G^{\mathfrak{S}_\sigma}); U_1, \ldots\ldots, U_k)$。

证明。令 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$。则对于所有 $i \in I$，$O^{\sigma_i}(D) = D$。

首先假设 G 是一个 σ-SC-群。则 G 在 $Z(D)$ 以下的每个主因子都是循环的。现在令 H/K 为 G 中位于 $Z(D)$ 与 D 之间的任意主因子。若 H/K 是阿贝尔的，则该因子是循环的，这意味着 $D \leq C_G(H/K)$。另一方面，若 H/K 是一个非 σ-主单群，则由引理 2.33 可知 $G/HC_G(H/K)$ 是可解的。因此

$$DHC_G(H/K)/HC_G(H/K) \simeq D/(D \cap HC_G(H/K)) = D/HC_D(H/K)$$

是可解的，因此 $D = HC_D(H/K)$，因为对于所有 i，$O^{\sigma_i}(D) = D$。因此，在这两种情况下，D 的每个元素都在 H/K 上诱导一个内自同构。因此 D 是拟幂零的。于是，根据 [41,X、定理 13.6]，对于所有 $j = 1$、……、k，$D/Z(D) \simeq U_1/Z(D) \times \cdots \times U_k/Z(D)$，其中 $U_j/Z(D)$ 是 D 的一个非 σ-主单群因子。最后，注意到 $Z(D) \leq \Phi(D)$，因为对于所有 i，$O^{\sigma_i}(D) = D$。因此，由引理 2.34，$(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ 是 G 的一个 Robinson σ-复形，因为 G 是一个 σ-SC-群。

现在假设 G/D 是 σ-超可解的，并且在 $D \neq 1$ 的情况下，G 有一个 Robinson σ-复形（D，Z（D）；U_1，……，U_k）。那么 G 存在如下的一个主列 $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = D$

$G^{\mathfrak{N}_\sigma}$，使得对所有 $i = 1,\ldots,t$， G_i/G_{i-1} 都是单群。因此，带算子群 [25, 的 Jordan-H¨older 定理（第 A 章，定理 3.2] ）表明， G 在 $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下的每个主因子都是单群，也就是说， G 是一个 σ-SC-群。

定理得证。

在 $\sigma = \sigma^1$ 的情况下，由定理 2.35 可得以下结果

推论 2.36（参见 [1] 中的定理 1.6.5）。群 G 是 SC-群，当且仅当 G 满足:

(i) $G/G^{\mathfrak{S}}$ 是超可解的。(ii) 若 $G^{\mathfrak{S}} \neq 1$，则 G 有一个 Robinson 复形
（$G^{\mathfrak{S}}$， $Z(G^{\mathfrak{S}})$; U_1，...， U_k）。

命题 2.37。若 G 是一个满足 $G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$ 的 σ-SC-群，则 $G^{\mathfrak{S}_\sigma} \leq C_G(G_{\mathfrak{S}} \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$。

证明。设 H/K 是 $G_{\mathfrak{S}} \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 以下 G 的任一主因子。由于 G 是一个 σ-SC-群，故 H/K 是循环的，因此 $G_{\mathfrak{S}} \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 包含于 G 的超可解超中心 $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ 中。于是，根据 [25, IV，定理 6.10] , $G/C_G(G_{\mathfrak{S}} \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$ 是超可解的，因此 $G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{U}_\sigma} \leq C_G(G_{\mathfrak{S}} \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$。

该命题得证。

在 $\sigma = \sigma^1$ 的情形下，由命题 2.37 得到如下

推论 2.38（见 [1] 中的命题 1.6.4）。若 G 是一个 SC-群，则 $G^{\mathfrak{S}} \leq C_G(G_{\mathfrak{S}})$。

引理 2.39。设 G 有一个 Robinson σ-复形（$D, Z(D); U_1, \ldots, U_k$），并设 N 是 G 的正规子群。

(1) 若 $N = U_i'$ 和 $k \neq 1$，则 $Z(D/N) = U_i/N = Z(D)N/N$ 和

$$(D/N, Z(D/N); U_1N/N, \ldots, U_{i-1}N/N, U_{i+1}N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是 G/N 的 Robinson σ-复形。

(2) 若 N 是幂零群，则 $Z(DN/N) = Z(D)N/N$ 且

$$(DN/N, Z(DN/N); U_1N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是 G/N 的 Robinson σ-复形。

证明。设 $Z = Z(D)$。由于 U_i/Z 是一个非 σ-素幂阶单群，因此 $U_i'Z = U_i$，故 $U_i/U_i' = U_i'Z/U_i' \leq Z(D/U_i')$ 且 $U_i/U_i' \leq \Phi(D/U_i')$。

此外， DN/N 是 $G/N.$ 的非平凡正规子群。事实上，若对某个 i 有 $D \leq N = U_i' \leq D$, 则 $D = U_i' = U_i = U_1$，因而 $k = 1$，矛盾。另一方面， N 为幂零群的情形 $D \leq N$ 也不可能，因为 U_2/Z 是一个非 σ-素幂阶群。

(1) 不失一般性，我们可以假设 $i = 1.$

我们有

$$D/U_1' = (U_1/U_1')(U_2U_1'/U_1') \cdots (U_kU_1'/U_1'),$$

so

$$(D/U_1')/(U_1/U_1') = ((U_2U_1'/U_1')/(U_1/U_1'))\cdots((U_kU_1'/U_1')/(U_1/U_1'))$$

因此，由 $D \neq U_1$ 以及 G-同构

$$(U_jU_1'/U_1')/(U_1/U_1') \simeq U_jU_1'/U_1 = U_jU_1/U_1 \simeq U_j/(U_1 \cap U_j) = U_j/(ZU_1' \cap U_j)$$

$$= U_j/Z(U_1' \cap U_j) = U_j/Z$$

我们得到，$(D/U_1')/(U_1/U_1')$ 是非-σ-主简单 G/U_1'-不变子群 $(U_jU_1'/U_1')/(U_1/U_1')$，$j \neq 1$ 的直积。因此 $U_1/U_1' = ZU_1'/U_1' \leq Z(D/U_1') \leq U_1/U_1'$，故 $U_1/U_1' = ZU_1'/U_1' = Z(D/U_1') \leq \Phi(D/U_1')$。因此

$$(D/U_1', Z(D/U_1'); U_2U_1'/U_1', \ldots, U_kU_1'/U_1')$$

是 G/N 的 Robinson σ-复形。

(2) 显然 $N \cap D \leq Z$，因此我们有如下 G-同构：

$$(DN/N)/(ZN/N) \simeq DN/ZN \simeq D/(D \cap NZ) = D/(D \cap N)Z = D/Z.$$

还要注意，

$$(U_iN/N)/(NZ/N) \simeq U_i/(NZ \cap U_i) = U_i/(N \cap U_i)Z = U_i/Z$$

对所有 i，且 $(DN/N)/(ZN/N)$ 是非-σ-主简单 G/N-不变群 $(U_iN/N)/(NZ/N)$ 的直积。因此 $Z(DN/N) = ZN/N \leq \Phi(DN/N)$，并且 G/N 在 $NZ/N \simeq_G Z/(N \cap Z)$ 之下的每个主因子都是循环的。因此

$$(DN/N, Z(DN/N); U_1N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是一个由 G/N 构成的 Robinson σ-复形。

该引理得证。

Lemma 2.40. 设 G 是一个非-σ-可解的 σ-全 σ-SC-群，且具有 Robinson σ-复形

$$(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k),$$

其中 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$。设 U 是 G 的一个非-σ-可置换 σ-次正规子群，且阶最小。则：

(1) 若对所有 $j = 1$，.....，k，UU_j'/U_j' 在 G/U_j' 中均为 σ-可置换的，则 U 是 σ-超可解的；并且

(2) 若 U 是 σ-超可解的，且对于 G 的所有非平凡幂零正规子群 L，UL/L 在 G/L 中均为 σ-可置换的，则对某个素数 p，U 是一个循环的 p-群。

证明。假设此引理不成立，并令 G 为阶最小的反例。根据假设，对某个 i 以及 G 的某个 Hall σ_i-子群 H，有 $UH \neq HU$。此外，对所有 $s \in I$，$O^{\sigma_s}(D) = D$；鉴于命题 2.28(ii)，G/D 是 σ-超可解的。

(1) 假设结论不成立，并设 $U\cap D\leq Z(D)$。那么， U 在$U\cap Z(D)=U\cap D$之下的每个主因子都是循环的；此外，由命题 2.28(ii)， $UD/D\simeq U/(U\cap D)$是 σ-超可解的。因此， U 是 σ-超可解的，矛盾。故 $U\cap D\not\leq Z(D)$。此外，引理 2.30(1)(2)表明，$(U\cap D)Z(D)/Z(D)$在 $D/Z(D)$中是 σ-次正规的；于是，由引理 2.30(8)，$(U\cap D)Z(D)/Z(D)$是 $D/Z(D)$的非平凡次正规子群，因为对于所有s，$O^{\sigma_s}(D/Z(D))=D/Z(D)$。

因此，对于某个 j，有 $U_j/Z(D)\leq(U\cap D)Z(D)/Z(D)$，所以 $U_j\leq(U\cap D)Z(D)$。但此时 $U_j'\leq((U\cap D)Z(D))'\leq U\cap D$.根据假设， $UU_j'/U_j'=U/U_j'$在 G/U_j'中是 σ-可置换的，因此

$$UH/U_j'=(U/U_j')(HU_j'/U_j')=(HU_j'/U_j')(U/U_j')=HU/U_j'.$$

因此 $UH=HU$，矛盾。所以命题 (1) 成立。

(2) 设 $N=U^{\mathfrak{N}_\sigma}$。根据引理 2.30(9)， N是 G的次正规子群。由于根据假设， U是 σ-超可解的， $N<U$。根据引理 2.10、2.27 和 2.30(3)， U 的每个满足 $N\leq V$的真子群 V都是 G中的 σ-次正规子群，因此，由 U的极小性可知 $VH=HV$。因此，若 U有至少两个不同的极大子群 V和 W，且满足 $N\leq V\cap W$，则 $U=\langle V,W\rangle$与H 可置换，这由 $[25,$ Ch. A, Proposition 1.$6],$ ，与我们对 (U,H) 的假设矛盾。因此，对于某个素数 p， U/N 是一个循环p-群。因此我们可以假设 $N\neq 1$。

首先假设 $p\in\sigma_i$。引理 2.30(4) 推出 $H\cap U$ 是 U 的一个 σ_i-霍尔子群，因此$U=N(H\cap U)=(H\cap U)N$。于是

$$UH=(H\cap U)NH=H(H\cap U)N=HU,$$

矛盾。因此，对某个 $j\neq i$， $p\in\sigma_j$。

现在我们证明 U 是一个 $P\sigma T$-群。设 V 是 U 的一个真 σ-次正规子群。由于 U 是 G的 σ-次正规子群，因此V 是 G 的 σ-次正规子群。由 U 的极小性可知， V 在 G中是 σ-可置换的，因此根据引理 2.32(1)， V 在 U 中是 σ-可置换的。于是根据引理 2.31(1)， U 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，因此 N 是 U 的一个阿贝尔 Hall 子群，并且根据定理 B， N 的所有子群在 U 中都是正规的。因此，由于 $N=U^{\mathfrak{N}_\sigma}$， N 是一个 σ_j'-群，所以根据引理 2.30(5)（在 $\sigma=\sigma^1$ 的情形下取），$N\leq O=O_{\sigma_s'}(F(G))$。根据假设， OU/O 与 OH/O 可置换。根据引理 2.30(1)(2)，OU/O 是 σ-次正规子群，

$$(OU/O)(OH/O)=(OH/O)(OU/O)=OHU/O,$$

其中 $OU/O\simeq U/(U\cap O)$ 是一个 σ_j-群，而 $OH/O\simeq H/(H\cap O)$ 是一个 σ_i-群。因此，根据引理 2.6(6)， UO/O 在 OHU/O 中是正规的。因此 $H\leq N_G(OU)$。

现在令 $\Pi=\sigma\setminus\{\sigma_j\}$。则

$$H\leq N_G(O^\Pi(OU))=N_G(O^\Pi(U))$$

由引理 2.30(7)，因为 $|OU\colon U|=|O\colon O\cap U|$是一个 Π-数，且根据引理 2.30(1)， U在 OU中是 σ-次正规。对于 U的一个 Sylow p-子群 P，我们有 $P\leq O^\Pi(U)$，因为 $p\in\sigma_j$。因此 $U=O^\Pi(U)N$

并且 $U/O^{\Pi}(U) \simeq N/(N \cap O^{\Pi}(U))$ 是幂零的，因此 $N \leq O^{\Pi}(U)$。但这时 $O^{\Pi}(U) = U$，所以 $H \leq N_G(U)$，进而 $HU = UH$，矛盾。因此命题（2）成立。

引理得证。

引理 2.41（参见 [39] 中的引理 5）。设 H、K 和 N 是 G 的两两可置换子群，且 H 是 G 的一个霍尔子群。则 $N \cap HK =$ （$N \cap H$）（$N \cap K$）。

引理 2.42。若 G 满足 Nσ_i，且 N 是 G 的可解正规子群，则 G/N 满足 Nσ_i。

证明。设 L/N 是 G/N 的正规可解子群，$(U/N)/(L/N) \leq O_{\sigma_i}((G/N)/(L/N))$，并设 yN 是 G/N 中的一个 σ_i'- 元素。则对于某个 σ_i'- 元素 $x \in G$，有 $yN = xN$。

另一方面，L 是 G 的可解正规子群，且 $U/L \leq O_{\sigma_i}(G/L)$，所以 $(U/L)^x = U^x/L = U/L$。因此

$$((U/N)/(L/N))^{yN} = ((U/N)/(L/N))^{xN} = (U/N)/(L/N).$$

因此 G/N 满足 Nσ_i。

该引理得证。

定理 2.20 的证明。首先假设 G 是一个 $P\sigma T$-群，并令 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ 为 G 的σ-可解剩余。于是，对所有 $i \in I$，都有 $O^{\sigma_i}(D) = D$。此外，根据引理 2.31(2)，G/D 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，因此根据定理 2.3，G/D 是 σ-超可解的，所以实际上 $D = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$ 是 G 的σ-超可解剩余。由命题 2.29(ii) 可知，G 是一个 σ-SC-群。

因此，若 $D \neq 1$，则根据定理 2.35，G 有一个 Robinson σ-复形（$D, Z(D); U_1, \ldots, U_k$）；并且根据命题 2.29(i)，对于任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$、G 和 $G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'$ 对所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ 都满足 Nσ_i。因此，定理中条件的必要性成立。

现在，反证法假设 G 是满足条件 (i)、(ii) 和 (iii) 的最小阶非$P\sigma T$-群。则 $D \neq 1$，并且由引理 2.31(1)，G 存在一个 σ-次正规子群 U，使得对于某个 $i \in I$ 以及 G 的某个 Hall σ_i-子群 H，有 $UH \neq HU$；此外，G 的每个满足 $U_0 < U$ 的 σ-次正规子群 U_0 在 G中都是 σ-可置换的。由条件 (i) 和 (ii) 可知，G是一个 σ-SC-群。

(1) U 是 σ-超可解的。

首先假设 $k = 1$，即 $D = U_1 = D'$。则由引理 2.30(1)(2)，$Z(D) \leq \Phi(D)$ 且 $(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 是非阿贝尔单群 $D/Z(D)$ 的一个 σ-次正规子群。因此$U \cap D \leq Z(D)$，从而 $U \cap D = U \cap Z(D)$。所以，U 在 $U \cap D$ 以下的每个主因子都是循环的。另一方面，由条件 (i)、定理 2.3 和命题 2.28(ii)，$U/(U \cap D) \simeq UD/D$ 是 σ-超可解的，因而 U 是 σ-超可解的。

现在令 $k \neq 1$。我们证明，对于所有 $j = 1$、.....、k，假设对 G/U_j' 成立。不失一般性，我们可以假设 $j = 1$。

令 $N = U_1'$。那么 $(G/N)/(D/N) \simeq G/D$ 是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群，因此条件 (i) 对于G/N成立。由引理2.39(1)可得

$$(D/N, Z(D/N); U_2N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是由 G/N和 $Z(D/N) = U_1/N = Z(D)N/N \simeq Z(D)/(Z(D)\cap N)$ 构成的 Robinson σ-复形。此外，若 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{2, \ldots, k\}$，其中 $2 \leq r < k$，则商群 $G/N = G/U_1'$和

$$(G/N)/(U_{j_1}N/N)' \cdots (U_{j_r}N/N)' = (G/N)/(U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'U_1'/N) \simeq G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'U_1'$$

根据条件 (iii)，对所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D/N)) \subseteq \sigma(Z(D))$，均满足 N$_{\sigma_i}$。

因此，假设对 $G/N = G/U_1'$ 成立，所以根据 G 的选取，G/U_1' 的 σ-次正规子群 UU_1'/U_1' 在 G/U_1' 中是 σ-可置换的。最后，由引理 2.27(2) 和命题 2.28(ii) 可得

$$(G/U_1')^{\mathfrak{S}_\sigma} = U_1'G^{\mathfrak{S}_\sigma}/U_1' = DU_1'/U_1' = U_1'G^{\mathfrak{U}_\sigma}/U_1' = (G/U_1')^{\mathfrak{U}_\sigma}.$$

因此，由引理2.40(1)，U 是 σ-超可解的

(2) U 是某个素数 $p \in \sigma_s$ 对应的循环 p-群，其中 $s \neq i$。

首先，我们证明 U 是某个素数 p 对应的循环 p-群。

根据命题 2.28(ii) 和引理 2.31(2),

$$(G/N)/(DN/N) \simeq G/DN \simeq (G/D)/(DN/D)$$

是一个 σ-可解 $P\sigma T$-群。此外，根据引理 2.27(2)，$Z(DN/N) = Z(D)N/N$以及 $(DN/N, Z(D)N/N; U_1N/N, \ldots, U_kN/N)$ 是 G/N 的一个 Robinson σ-复形。根据引理 2.42，G/N 对所有情况均满足 N$_{\sigma_i}$

$$\sigma_i \in \sigma(Z(D)N/N) \subseteq \sigma(Z(D)).$$

类似地，对于任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$,

$$(G/N)/(U_{j_1}N/N)' \cdots (U_{j_r}N/N)' = (G/N)/(U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N/N)$$

$$\simeq G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N \simeq (G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}')/(U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}')$$

根据引理 2.42，σ_i 对所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D)N/N)$ 均满足 N，因为

$$U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}' \simeq N/(N \cap U_{j_1}' \cdots U_{j_r}')$$

是幂零的。因此，假设在 G/N 上成立，所以 UN/N 在 G/N 中是 σ-可置换的。此外，我们还有 $(G/N)^{\mathfrak{S}_\sigma} = (G/N)^{\mathfrak{U}_\sigma}$. 因此，根据引理 2.40(2)，$U$ 是某个素数 $p \in \sigma_s$ 的循环 p- 群。最后，引理 2.30(4) 表明，在 $i = s$ 的情况下，我们有 $U \leq H$，所以 $UH = H = HU$。因此$s \neq i$。

(3) $\sigma_s \notin \sigma(Z(D))$（由条件 (iii) 和引理 2.32(2) 可得，因为根据断言（2），H 是一个 σ_s'-群）。

(4) $O_{\sigma_s}(G) \cap D = 1$。

假设 $O_{\sigma_s}(G) \cap D \neq 1$。由于 $D/Z(D)$ 是非 σ-主单群的直积，$O_{\sigma_s}(G) \cap D \leq Z(D)$。但这样一来， $\sigma_s \in \sigma(Z(D))$，这与断言（3）矛盾。因此，结论（4）成立。

最终矛盾。根据引理 2.30(2)， UD/D 在 G/D 中是 σ-次正规子群。另一方面，HD/D 是 G/D 的 Hall σ_i-子群。因此

$$(UD/D)(HD/D) = (HD/D)(UD/D) = HUD/D$$

根据条件 (ii) 和引理 2.31(1)，因此 HUD 是 G 的子群。所以，根据断言（4）和引理 2.41，

$$UHD \cap HO_{\sigma_s}(G) = UH(D \cap HO_{\sigma_s}(G)) = UH(D \cap H)(D \cap O_{\sigma_s}(G)) = UH(D \cap H) = UH$$

是 G 的子群，因此 $HU = UH$，矛盾。因此，定理条件的充分性成立。

定理得证。

3 每个 σ-次正规子群都是 σ-拟正规的群

拟正规子群和 Sylow 可置换子群具有许多对应用很有用的性质。例如，如果 A 在 G 中是拟正规的，那么： A 在 G 中是次正规的（Ore [31]）， A/A_G 是幂零的（Ito 和 Szep [32]）， H/K 的 G 与 A_G 和 A^G 之间的每个主因子都是中心的，即 $C_G(H/K) = G$（Maier 和 Schmid [33]）；而且，一般而言，截面 A/A_G 不一定是阿贝尔的（Thomson[34]）。

还应注意， the 拟正规子群与模子群有着密切的联系。

每个拟正规子群显然都是群中的模子群。此外，下面这个引人注目的事实是众所周知的。

定理 3.1（Schmidt [24, 定理 5.1。1]）。群 G 的子群 A 在 G 中是拟正规的，当且仅当 A 是 G 中的模子群且为次正规子群。

这一结果使得人们能够在群的 σ-性质理论中找到拟正规子群的类似物。

定义 3.2. 按照 [26], 的说法，若子群 A 在 G 中是模 σ-拟正规子群，则 A 在 G中是模的且 σ-次正规的。

PT群的刻画最初由 Zacher 在 [28],针对可解情形给出，而 Robinson 在 [4], 给出了一般情形的刻画。在后续出版物中，作者们（参见 [1]第 2 章）发现并描述了许多关于 PT群和广义PT群的其他有趣刻画。

σ-拟正规子群理论是在论文 [26]中建立的。特别是，文中证明了以下结果，它在 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\} \ldots\}$ 情形下涵盖了 [31, 32, 33]中提到的上述结果。

定理 3.3（见 [26] 中的定理 C）。设 A 是 G 的一个 σ-拟正规子群。则以下结论成立：

(i) 若 G 有一个 Hall σ_i-子群，则 A 与 G 的每个 Hall σ_i-子群都可交换。(ii) 商群 A^G/A_G 和 $G/C_G(A^G/A_G)$ 是 σ-幂零的；(iii) G 的 A^G 与 A_G 之间的每个主因子在 G 中都是 σ-中心的。(iv) 对每个满足 $\sigma_i \in \sigma(G/C_G(A^G/A_G))$ 的 i，都有 $\sigma_i \in \sigma($ $A^G/A_G)$。(v) A 在 G 中是 σ-半正规子群。

然而，以下问题仍未解决。

问题 3.4。 $Q\sigma T$-群的结构是什么？也就是说，所有 σ-次正规子群都是 σ-拟正规子群的群，其结构是什么？

问题 3.4 的部分内容已在近期论文 [27] 中得到解决。

定理 3.5（参见 [27] 中的定理 1.5）。设 D 是 G 的 σ-幂零剩余，即 D 是 G 的所有满足商群 G/N 为 σ-幂零的正规子群 N 的交。若 G 是一个 σ-可解 $Q\sigma T$-群，则满足以下条件：

(i) $G = D \rtimes L$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群，L 是 σ-幂零的，并且 L 的所有子群格 $\mathcal{L}(L)$ 是模的，

(ii) G 的每个元素在 D 中诱导一个幂自同构，并且

(iii) 对所有 i，$O_{\sigma_i}(D)$ 在 G 的一个 Hall σ_i-子群中具有正规补。

反之，若某些 G 的子群 D 和 L 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，则每个 G 都是一个 σ-可解 $Q\sigma T$-群。

在最近的论文 [23]，中，问题 3.4 在一般情形下得到了解决。

设 $\pi \subseteq \mathbb{P}$。那么我们称 G 满足 P_π，如果每当 N 是 G 的可解正规子群，且 G有一个 Hall π-子群时，$O_\pi(G/N)$ 的每个子群都是 G/N的 Hall σ_i-子群中的模子群。

定理 3.6（Safonova、Skiba [23]）设 G 是一个 σ-完全群。那么，G 是一个 $Q\sigma T$-群，当且仅当 G 有一个正规子群 D，满足：

(i) G/D 是一个 σ-可解 $Q\sigma T$-群，

(ii) 若 $D \neq 1$，则 G有一个 Robinson σ-复合体 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$，并且

(iii) 对任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$、G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$对所有$\sigma_i \in \sigma(Z(D))$均满足 N_{σ_i}，且对所有 $\sigma_i \in \sigma(D)$均满足 P_{σ_i}。

In 情形 $\sigma = \sigma^{1\pi}$ （见例 2.1(ii)），由定理 3.6 可得如下结论

推论 3.7. 假设 G 有一个 Hall π'-子群。那么，G 的每个 π-次正规子群在 G中是模的，当且仅当 G 有一个正规子群 D 满足：

(i) G/D 是一个 π-可解群，其中每个 π-次正规子群都是模的 ，

(ii) 如果 $D \neq 1$, G 有一个 Robinson π-复形（$D, Z(D)$; U_1,... , U_k），并且

(iii) 对任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 满足：对于所有整除 $|Z(D)|$的素数 p，均有 N_p；若 $O_{\pi'}(Z(D)) \neq 1$，则有 $\mathrm{N}_{\pi'}$；此外， G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 满足：对于所有整除 $|D|$ 的素数 p，均有 P_p；若 $O_{\pi'}(D) \neq 1$，则有 $\mathrm{P}_{\pi'}$。

在 $\pi = \mathbb{P}$ 的情况下，由推论 3.7 可得以下经典结果。

推论 3.8（Robinson [4]）。 G是一个 PT-群，当且仅当 G有一个正规完全子群D，满足：

(i) G/D是一个可解 PT-群，并且

(i) 若 $D \neq 1$, G有一个 Robinson 复形（$D, Z(D)$; $U_1, \ldots, U_k$），并且

(iii) 对任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 满足对所有$p \in \pi(Z(D))$均有 N_p，且对所有 $p \in \pi(D)$均有 P_p。

定理 3.6 还有许多其他推论。特别是，鉴于例 2.1(ii)，由定理 3.6 可得以下

推论 3.9。设 G 有一个 Hall π-子群和一个 Hall π'-子群。那么， G 的每个π, π'-次正规子群在 G 中都是模的，当且仅当 G 有一个正规子群 D，满足：

(i) G/D 是一个 π-可解群，其中每个 π, π'-次正规子群都是模的 ，

(ii) 如果 $D \neq 1$, G 具有一个 Robinson π, π'-复合体（$D, Z(D)$; $U_1, \ldots, U_k$），并且

(iii) 对任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 满足 $\mathrm{N}_\pi$if$O_\pi(Z(D)) \neq 1$以及 $\mathrm{N}_{\pi'}$if $O_{\pi'}(D) \neq 1$，并且 G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 也满足 $\mathrm{P}_\pi$if $O_\pi(D) \neq 1$以及 $\mathrm{P}_{\pi'}$ if $O_{\pi'}(D) \neq 1$。

例 3.10. 设 α: $Z(SL(2,5)) \to Z(SL(2,7))$是一个同构，且 l et

$$D := SL(2,5) \curlyvee SL(2,7) = (SL(2,5) \times SL(2,7))/,$$

其中

$$V = \{(a, (a^\alpha)^{-1}) \mid a \in Z(SL(2,5))\},$$

是群 $SL(2,5)$ 和 $SL(2,7)$ 的直积，其公共中心为 （见 [29, 第 49] 页）。令 $M = (C_{23} \wr C_{11}) \curlywedge (C_{67} \rtimes C_{11})$（见 [29, 第 50], 页），其中 $C_{23} \wr C_{11}$是群 C_{23}和 C_{11} 的正则绕积，而 $C_{11} \wr C_{67}$是一个阶为 737 的非阿贝尔群。于是，根据定理 B， M是一个可解的 $P\sigma T$-群，而 M不是一个 PST。令 $G = D \times M$和 $\sigma = \{\{2,3\}, \{5,11,23\}, \{7,67\}, \{2,3,5,7,11,23,67\}'\}$。于是，根据推论 3.8， G不是一个 PT-群。此外， G是 σ-富群，并且定理 3.6 中的条件 (i)、(ii) 和 (iii) 对 G成立。因此， G 的每个 σ-次正规子群在 G中都是模的。

To p为了证明这个定理，我们需要第 2 节中的结果以及几个新的引理。

首先注意到，由定理 3.3(1) 可得以下结论

引理 3.11. 设 G 是一个 $Q\sigma T$-群。那么

(1) G 的每个 σ-次正规子群在 G 中都是 σ-半正规的；特别地，(2) 如果 G 是 σ-满的，那么 G 的每个 σ-拟正规子群在 G 中都是 σ-可置换的。

由引理 3.11 可得如下结果

推论 3.12. 每个 σ-满的 $Q\sigma T$-群都是一个 $P\sigma T$-群。

引理 3.13. 如果 G 是一个 $Q\sigma T$-群，那么 G 的每个商群 G/N 也是一个 $Q\sigma T$-群。

证明. 设 L/N 是 G/N 的一个 σ-次正规子群。根据引理 2.30(3)， L 是 G 中的 σ-次正规子群，因此 L 在 G 中是模的，进而根据第 201 页的性质（3）[24, ， L/N 是模的，从而在 G/N 中是 σ-拟正规的。因此， G/N 是一个 $Q\sigma T$-群。

引理得证。

引理 3.14. 设 G 是一个 σ-满的 $Q\sigma T$-群。则对于 G 的每个正规子群 R 以及所有 $i \in I$, G/R 满足 $\mathrm{P}\sigma_i$ 和 $\mathrm{N}\sigma_i$。

证明。根据引理 3.12，不失一般性，我们可以假设 $R = 1$。令 $U/N \leq O_{\sigma_i}(G/N)$。则 U/N 是 G/N 的 σ-次正规子群，因此根据引理 2.30(3)， U 是 G 的 σ-次正规子群。因此， U 在 G 中是模的，因为 G 是一个 $Q\sigma T$-群；由 Ore 第 201 页的性质（3）], U/R 在 G/N 的每个 Hall σ_i-子群 H/R 中都是模的，因为 $O_{\sigma_i}(G/N) \leq H/N$。于是 G 满足 $\mathrm{P}\sigma_i$。此外，根据引理 3.11， U/N 在 G/N 中是 σ-可置换的，因此对于每个 σ_i'-元素 $x \in G$，根据引理 2.32(2)，我们有 $xL \in O^{\sigma_i}(G/N) \leq N_{G/L}(U/N)$。于是 G 满足 $\mathrm{N}\sigma_i$。

引理得证。

引理 3.15. 设 G 是一个非-σ-可解的 σ-饱和 σ-SC-群，且具有 Robinson σ-复形

$$(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k),$$

其中 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$。设 U 是 G 的一个阶最小的 σ-次正规非模（非正规）子群。那么：

(1) 若对所有 $i = 1, \ldots, k$， UU_i'/U_i' 在 G/U_i' 中是模的（分别地，正规的），则 U 是 σ-超可解的。

(2) 若 U 是 σ-超可解的，且对 G 的所有非平凡幂零正规子群 L， UL/L 在 G/L 中是模的（分别地，正规的），则对某个素数 p， U 是一个循环 p-群。

证明。 Su假设该引理不成立，并设 G 是一个阶最小的反例 .

(1) 假设结论不成立。设 $U \cap D \leq Z(D)$。那么 U 在 $U \cap Z(D) = U \cap D$ 以下的每个主因子都是循环的；此外，由命题 2.28， $UD/D \simeq U/(U \cap D)$ 是 σ-超可解的。因此， U 是 σ-超可解的，这与假设矛盾。故 $U \cap D \not\leq Z(D)$。 $U \cap D \not\leq Z(D)$。此外，引理 2.30(1)(2) 表明，($U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 是 σ 在 $D/Z(D)$ 中的次正规子群，并且

因此，由引理 2.30(8)，$(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 是 $D/Z(D)$ 的非平凡次正规子群，因为对所有 s，都有 $O^{\sigma_s}(D/Z(D)) = D/Z(D)$。

因此，对某个 j，有 $U_j/Z(D) \leq (U \cap D)Z(D)/Z(D)$，故 $U_j \leq (U \cap D)Z(D)$。但于是$U_j' \leq ((U \cap D)Z(D))' \leq U \cap D$.根据假设，$UU_j'/U_j' = U/U_j'$在 G/U_j' 中是模的（分别地，正规的），因此由 $[24,$ p. 201，性质 (4)$],$，U 在 G 中也是模的（分别地，正规的），矛盾。因此，结论 (1) 成立。

(2) 设 $N = U^{\mathfrak{N}_\sigma}$。由引理 2.30(9)，$N$ 是 G 的次正规子群。根据假设，U 是 σ-超可解的，因此 $N < U$。由引理 2.9、2.10 和 2.30(3)，U 的每个满足 $N \leq V$ 的真子群 V 都是 G 的 σ-次正规子群，因此由 U 的极小性可知，V 在 G 中是模的（分别地，正规的）。

因此，若 U 有至少两个不同的极大子群 V和 W 满足 $N \leq V \cap W$，则根据 $[24,$第 201 页的性质 (5)，$U = \langle V$在 G 中是模的（分别地，正规的），这与我们对 U的假设矛盾。因此，由于 U 不是循环的，U/N 是某个 $p \in \sigma_i$ 的循环 p- 群，且 $N \neq 1$ 。

现在我们证明 U是一个 $P\sigma T$-群。设 V是 U的一个真 σ-次正规子群。由于 U 在 G中是 σ-次正规的，因此 V在 G 中是 σ-次正规的；所以 V 在 G 中是模的（分别地，正规的），进而 V 在 U中是模的（分别地，正规的）。因此，根据引理 3.11，V 在 U 中是 σ-可置换的。因此，U 是一个 σ-可解的可解 $P\sigma T$-群，所以 $N = U^{\mathfrak{N}_\sigma}$是 U的霍尔阿贝尔子群，并且根据定理 2.3，N 的每个子群都是 U 的正规子群。因此，事实上，对于 U的一个 Sylow p-子群 P，有 $U = N \rtimes P$，且 P是 U的一个循环霍尔 σ_i-子群。令

显然，N 在 G中是 σ-拟正规。假设对某个 G 的极小正规子群 R，有 $R \leq N_G$。那么 R 是阿贝尔群，根据假设，U/R 在 G/R 中是模的（分别为正规的），因此由 $[24,$ 第 201 页性质 (4)$],$，U 在 G 中是模的（分别为正规的），这导致矛盾。因此$N_G = 1$，所以 $P \leq C_G(N^G)$，因为对于每个满足 $\sigma_k \in \sigma(G/C_G(N^G)$的 k，由定理 3.3(iv)可得 $\sigma_i \in \sigma(N^G)$。因此 $U = N \times P$ 是 σ-幂零的，故 $N = 1$，矛盾。因此命题（2）成立。

引理得证。

引理 3.16. 设 N 是 G的可解正规子群。若 G 满足 P_{σ_i}，则 G/N 满足P_{σ_i}。

证明. 设 L/N是 G/N的正规可解子群，并且$(U/N)/(L/N) \leq O_{\sigma_i}((G/N)/(L/N))$。那么 L 是 G 的可解正规子群，且 $U/L \leq O_{\sigma_i}(G/L)$。

根据假设，U/L是 G/L的一个 Hall σ_i子群 H/L中的模子群。那么，$(U/N)/(L/N)$是$(G/N)/(L/N)$的 Hall σ_i子群$(H/N)/(L/N)$中的模子群。因此，G/N满足 P_{σ_i}。

引理得证。

引理 3.17. 若 G 是一个 $Q\sigma T$群，则 G 是一个 σ-SC群。

证明。假设此引理不成立，并设 G 是阶最小的反例。令

$D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$。若 $D = 1$，则 G 是 σ-可解的，因此根据定理 2.3， G 是一个 σ-SC-群。因此 $D \neq 1$。令 R 为 G 的一个包含于 D 中的极小正规子群。根据引理 3.13， G/R 是一个 $Q\sigma T$-群。因此，根据对 G 的选择， G/R 是一个 σ-SC-群。由于根据引理 2.9 和 2.27，$(G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma} = D/R$， G/R 在 D/R 以下的每个主因子都是单群。因此，G 在 $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 与 R 之间的每个主因子都是单群。因此，鉴于带算子群的 Jordan-H¨older 定理（ [25, 第 A 章，定理 3.2], ），只需证明 R 是单群。

假设结论不成立，令 L 为 R的一个极小正规子群。则 $1 < L < R$ 和L 在 G中是 σ-次正规子群，因此 L 在 G 中是模的，因为 G 是一个 $Q\sigma T$-群。此外， $L_G = 1$ ，所以 G 在 L^G 以下的每个主因子根据 [24, 定理 5.25]都是循环的。但是 $L^G = R$ ，从而 $|R| = p$，矛盾。因此 G 是一个 σ-SC-群。

引理得证。

引理 3.18. 如果 G是一个 σ-可解的 $Q\sigma T$-群，那么对于所有 i， G的每个霍尔 σ_i-子群 H都是一个 M-群。

证明. 根据定理 3.3， $G = D \rtimes L$，其中 G 的一个奇数阶阿贝尔霍尔子群 D， L是 σ-幂零的，并且 L 的所有子群的子群格 $\mathcal{L}(L)$是模的， D 的每个子群在 G中都是正规的，并且对于所有 j，D (O_{σ_j})在 G 的一个霍尔 σ_i-子群中有一个正规补。

由此可得 $H_i = O_{\sigma_i}(D) \times S$，其中 $O_{\sigma_i}(D)$ 是 $G$and $S \leq L^x$ 的 Hall σ_i-子群，其中某个 $x \in G$成立。于是 $O_{\sigma_i}(D)$ 和 $S \simeq SD/D \leq G/D \simeq L$ 的子群格都是模格，因此，根据 [24, 定理 2.4.4]， H 的全体子群的子群格 $\mathcal{L}(H)$是模格。

引理得证。

定理 3.6 的证明。首先假设 G 是一个 σ-满的 $Q\sigma T$-群，并令 $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ 为 G 的σ-可解剩余。于是对所有 $i \in I$，都有 $O^{\sigma_i}(D) = D$。此外，根据引理 3.13， G/D 是一个 σ-可解的 $Q\sigma T$-群，因此根据定理 3.3， G/D 是 σ-超可解的，进而实际上， $D = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$ 是 G 的σ-超可解剩余。

由引理 3.17 可知， G 是一个 σ-SC-群。因此，若 $D \neq 1$, G 具有一个 Robinson σ-复形 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$，则由定理 2.37 并结合引理 3.14，对于任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$, G和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 对所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ 满足 $\mathfrak{N}\sigma_i$，且 $\mathfrak{P}\sigma_i$ 对所有$\sigma_i \in \sigma(D)$ 成立。因此，定理中的条件是必要的。

现在，反设 G 是满足条件 (i)、(ii) 和 (iii) 的最小阶非-$Q\sigma T$-群。则 $D \neq 1$。我们考虑 G 的一个最小阶 σ-次正规非模子群 U 。

首先证明 U 是 σ-超可解的。假设 $k = 1$，也就是说， $D = U_1 = D'$。那么 $Z(D) \leq \Phi(D)$，并且 $(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 是非 σ-主单群 $D/Z(D)$ 的一个 σ-次正规子群（由引理 2.30(1)(2)）。因此 $U \cap D \leq Z(D)$，故 $U \cap D = U \cap Z(D)$。所以， U 在 $U \cap D$ 以下的每个主因子都是循环的。另一方面，由定理 3.3 和命题 2.28(ii)， $U/(U \cap D) \simeq UD/D$ 是 σ-超可解的，因此 U 是 σ-超可解的。

现在令 $k \neq 1$。我们证明，对于所有 $i = 1$，.....，k，假设对 G/U_i' 都成立。不失一般性地，设 $i = 1$。令 $N = U_1'$。那么 $(G/N)/(D/N) \simeq G/D$ 是一个 σ-可解的 $M\sigma T$-群，因此条件 (i) 对 G/D 成立。由引理 2.41(1) 可知

$$(D/N, Z(D/N); U_2N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是 σ和 G/N 的 Robinson 复形

$$Z(D/N) = U_1/N = Z(D)N/N \simeq Z(D)/(Z(D) \cap N).$$

此外，若 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{2, \ldots, k\}$，其中 $2 \leq r < k$，则商群 $G/N = G/U_1'$和

$$(G/N)/(U_{i_1}N/N)' \cdots (U_{i_r}N/N)' = (G/N)/(U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'U_1'/N) \simeq G/U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'U_1'$$

由条件 (iii)，对于所有 $\sigma_i \in \sigma(Z(D/N)) \subseteq \sigma(Z(D))$，$\mathrm{N}\sigma_i$ 成立；对于所有 $\sigma_i \in \sigma(D/N)$，$\mathrm{P}\sigma_i$ 成立，因此 G/D满足条件 (ii) 和 (iii)。因此，$G/N = G/U_1'$满足该假设，所以根据对 G的选择，G/N的σ-次正规子群 UU_1'/U_1'在 G/U_1'中是模的。最后，由引理 2.27(2) 和命题 2.28(2)可知

$$(G/U_1')^{\mathfrak{S}_\sigma} = U_1'G^{\mathfrak{S}_\sigma}/U_1' = DU_1'/U_1' = U_1'G^{\mathfrak{U}_\sigma}/U_1' = (G/U_1')^{\mathfrak{U}_\sigma}.$$

因此，根据引理 3.15(1)，U 是 σ-超可解的。

接下来我们证明，对于某个素数 $p \in \sigma_i$，U 是一个 p-群。

显然，$(G/N)^{\mathfrak{S}_\sigma} = (G/N)^{\mathfrak{U}_\sigma}$，因此，由于 U 是 σ-超可解的，根据引理 3.15(2)，只需证明对于 G 的每个幂零正规子群 N，假设在 G/N 上成立。显然还有

$$(G/N)/(DN/N) \simeq G/DN \simeq (G/D)/(DN/D)$$

是一个 σ-可解 $Q\sigma T$-群，其中 $|DN/N| \neq 1$。此外，$Z(DN/N) = Z(D)N/N$，并且

$$(DN/N, Z(D)N/N; U_1N/N, \ldots, U_kN/N)$$

根据引理 2.41(2)，是一个由 G/N 的 Robinson σ-复形。鉴于引理 2.42 和 3.16，G/N 对所有满足 $\mathrm{N}\sigma_i$

$$\sigma_i \in \sigma(Z(D)N/N) \subseteq \sigma(Z(D))$$

以及对所有满足 $\mathrm{P}\sigma_i$

$$\sigma_i \in \sigma(DN/N) \subseteq \sigma(D.)$$

类似地，对于任意集合 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$,

$$(G/N)/(U_{j_1}N/N)' \cdots (U_{j_r}N/N)' = (G/N)/(U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N/N)$$

$$\simeq G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N \simeq (G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}')/(U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'N/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}')$$

对所有 $\sigma_i \in \sigma$ 均满足 N_{σ_i} ($Z(D)N/N$)，因为

$$U'_{j_1} \cdots U'_{j_r} N / U'_{j_1} \cdots U'_{j_r} \simeq N/(N \cap U'_{j_1} \cdots U'_{j_r})$$

是幂零的。因此，假设对 G/N成立，所以 U 是某个素数 p对应的 p-群。

根据假设， U在 G中是 σ-次正规子群，因此由引理 2.30(5)，存在某个 $p \in \sigma_i$，使得 $U \leq U^G \leq O_{\sigma_i}(G)$。

We s证明 U在 $\langle x$中是模的，且对 G中所有阶为素数幂 q^a的元素 x， $U\rangle$ 均成立。

首先假设 $q \in \sigma'_i$，并在此情况下证明 x 在 $O_{\sigma_i}(G)$ 中诱导幂自同构。

假设 $O_{\sigma_i}(G) \cap D = 1$。由于根据条件 (i)， G/D是一个 $Q\sigma T$-群，因此 G/D 中的 σ'_i-元素在 $O_{\sigma_i}(G/D)$ 中诱导幂自同构。于是，由 G-同构$U^G \simeq U^G D/D$可知， x在 $O_{\sigma_i}(G)$ 中诱导幂自同构。

现在假设 $E := O_{\sigma_i}(G) \cap D \neq 1.$。那么 EZ/Z是 D/Z的一个 σ-可解正规子群，因此，由于对所有 j， $O^{\sigma_j}(D/Z) = D/Z$，故有$E \leq Z$。因此， $\sigma_i \in \sigma(Z)$，所以 G满足 N_{σ_i}，这意味着 x在 $O_{\sigma_i}(G)$ 中诱导幂自同构。因此，子群 U在 $\langle x$中是模的， $U\rangle$。

现在设 $q \in \sigma_i$。如果 $\sigma_i \cap \pi(D) \neq \emptyset$，那么 U在 $\langle x$ 中模的，因为在这种情况下，根据假设，G满足 P_{σ_i}。最后，假设 $\sigma_i \cap \pi(D) = \emptyset$。则 $O_{\sigma_i}(G) \cap D = 1$。令 E 为 G中 D 的一个极小补子。于是 $E \cap D \leq \Phi(E)$，所以 E 是 σ-可解的。因此， E 有一个 Hall σ_i-子群 H。由于 $|G : E| = |D/(D \cap E)|$ 是一个 σ_i-数，故 H 是 G 的一个 Hall σ_i-子群。因此$U \leq O_{\sigma_i}(G) \leq H^y$，其中 y 满足 $x \leq H^y$，且 $H^y \simeq DH^y/D$ 是G/D的一个 Hall σ_i-子群，所以根据引理 3.18，H^y 是一个 M-群。然而， U 在 $\langle x$ 中模的， $U\rangle$。因此，对于 $x \in G$ 的每个素数幂阶元素， U 在 $\langle x$ 中模的， $U\rangle$。由引理 5.113] 可知， U 在 G 中模的。这一矛盾完成了定理条件的充分性证明。

该定理得证。

所有 $Q\sigma T$ 群的类远比所有 PT 群的类广。事实上，一个阶为 60 的非可解群 G 是 PT 群，但不是 $Q\sigma T$ 群，其中 $\sigma = \{\{2,3,5\}, \{2,3,5\}'\}$，因为它的阶为 2 的子群是 σ 次正规子群，却不是 G 中的拟正规子群。

设 $\pi \subseteq \mathbb{P}$。那么我们称 G 满足 t_π，如果每当 N 是 G的可解正规子群时， O_π（G/N）的每个子群都是 G/N 的正规子群。

稍微修改定理 3.6 的证明并运用该定理，我们便可证明以下结果，从而回答问题 3.4(2)。

定理 3.19（Safonova、Skiba [23]）设 G 是一个 σ-满群。群 G 是 T_σ 群，当且仅当 G 对所有 $i \in I$ 都满足 t_{σ_i}，并且 G 的每个非 σ-主因子都是单群。

推论 3.20（Ballester-Bolinces、Beidleman 和 Heineken [35]）群 G 是一个 T-群，当且仅当 G对所有素数 p 都满足 t_p，且 G 的每个非阿贝尔主因子都是单群。

4 拟正规性具有传递关系的群

回顾一下， G 的子群 A 在 G 中是 σ-拟正规子群，当且仅当 A 是 G中的 σ-次正规模子群。

如果 σ-拟正规性在 G 上具有传递关系，也就是说，如果 H 是 K 的 σ-拟正规子群，且 K 是 G 的 σ-拟正规子群，那么 H 是 G 的 σ-拟正规子群，我们就称 G 为 $M\sigma T$-群。

以下开放问题是群的 σ-性质理论中最引人入胜、最难解决的问题之一。

问题 4.1。 $M\sigma T$-群的结构是什么?

在本节及后续各节中，我们将讨论这个问题的两个特殊情形 .

首先注意 当 $\sigma = \{\mathbb{P}\}$ 时，这个问题就是下面这个古老的未解问题 .

问题 4.2. MT-群的结构是什么? 也就是说，哪些群 G 的模性在 G 上构成传递关系；换言之，若 H 是 K 的模子群，且 K 是 G 的模子群，那么 H 是 G 的模子群?

问题 4.1 的以下特殊情形也尚未得到探讨。

问题 4.3. σ-可解 $M\sigma T$-群的结构是什么?

Frigerio 于 [37] 找到了可解群类中问题 4.2 的解。

定理 4.4（Frigerio [37], Zimmermann [38]）。可解群 G 是 MT-群，当且仅当 G 是一个所有子群的模格群 $\mathcal{L}(G)$。

在后续的一篇论文中， [38], Zimmermann 为这一结果给出了新的证明。

在可解群类中，近期论文 [23, 36]针对一般情形给出了问题 4.1 的解答。

定理 4.5（Zhang、Guo、Safonova、Skiba [23, 36]）。若 G 是一个可解的 $M\sigma T$-群，且 $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$，则下列条件成立:

(i) $G = D \rtimes M$，其中 D 是 G 的一个奇数阶阿贝尔 Hall 子群， M 是 σ-幂零的，并且 M 的所有子群 $\mathcal{L}(M)$构成的子群格是模的,

(ii) G 的每个元素在 D中诱导一个幂自同构,

(iii) 对所有 i， $O_{\sigma_i}(D)$在 G 的一个霍尔 σ_i-子群中有一个正规补。

反过来，若某些子群 D 和 M 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，且它们是 G 的子群，则 G 是一个可解的 $M\sigma T$-群。

由定理 3.5 和 4.5，我们得到以下有趣的结果。

定理 4.6（Zhang、Guo、Safonova、Skiba [23, 36]）。设 G 是一个可解群。当且仅当 G 是一个$W\sigma T$-群时， G 才是一个 $M\sigma T$-群。

在 $\sigma = \{\mathbb{P}\}$ 的情况下，我们由此定理得到以下已知结果。

推论 4.7（Frigerio [37], Zimmermann [38]）。可解群 G 是一个 MT-群，当且仅当 G 是一个所有子群的格为模格的群 $\mathcal{L}(G)$。

在经典情形下 $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$，由定理 4.5 可得以下众所周知的结果。

推论 4.8（Zacher [28]）。群 G 是可解的 PT-群，当且仅当满足以下条件：

（i） G的幂零剩余 L 是一个奇数阶的阿贝尔霍尔子群，

（ii） G 通过共轭在 L 上作用为群幂自同构，并且

（iii） G/L 的每个子群在 G/D中都是拟正规子群。

不过，问题 4.3 的答案尚不明确。

下一个引理是关于模子群 [24, p、201] 和σ-次正规子群的一般性质的推论（见引理 2.30）。

引理 4.9. 设 A、 B 和 N 是 G的子群，其中 A 是 σ-拟正规子群，且 N 在G中正规。

(1) 子群 $A \cap B$ 在 B中 σ-拟正规。(2) 子群 AN/N 在 G/N中 σ-拟正规。(3)
若 $N \leq B$ 和 B/N 在 G/N中 σ-拟正规，则 B 在 G中 σ-拟正规。

引理 4.10. G 的子群 A 是 G 中的极大 σ-拟正规子群，当且仅当$G/A = G/A_G$ 是单的 σ-主群，或者 G/A_G 是阶为 pq 的 σ-主非阿贝尔群，其中 p 和 q是素数。

证明。假设 A 是 G中的极大 σ-拟正规子群。根据定理 3.3(2)， G/A_G 是某个 i-群，因此由引理 2.30(5)， G 中介于 A_G 与 G 之间的每个子群都是 G 中的 σ-次正规子群。另一方面，根据第 201 页的性质 (4)， U/A_G 在 G 中模，当且仅当 U 在 G 中模。因此，事实上， A 是 G的极大模子群。于是，根据引理 5.1，要么 $A \trianglelefteq G$ 和$G/A = G/A_G$ 是单群 σ_i-群，要么 G/A_G 是阶为 pq （其中 p、 $q \in \sigma_i$为素数）的非阿贝尔群。2]

最后，若 G/A_G 是阶为 pq （其中 p 和 q为素数）的 σ-初等非阿贝尔群，则 A 是 G 的极大子群，并且显然， A/A_G 在 G/A_G中模，因此根据第 201 页的性质 (4)， A 是 G 的极大模子群，所以 A 是 G的极大 σ-拟正规子群。类似地，若$G/A = G/A_G$ 是单非阿贝尔 σ-初等群，则根据引理 5.1， A 是G 的极大模子群，所以 A 是 G的极大 σ-拟正规子群。

该引理得证。

如果存在一条子群链，则称 G 的子群 A 在 G 中是 σ-次拟正规的

$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$，使得对于所有 $i = 1$，.....，n，A_{i-1} 在 A_i 中都是 σ-拟正规的。

显然，G是一个 $M\sigma T$-群，当且仅当它的每个 σ-次拟正规子群在 G中都是 σ-拟正规子群。

我们用 $\mathfrak{A}^*$ 表示所有无平方因子指数的阿贝尔群组成的类；$G^{\mathfrak{A}^*}$ 是 G 中所有具有 $G/N \in \mathfrak{A}^*$的正规子群 N 的交。显然，$\mathfrak{A}^*$ 是一个遗传形成，因此$G/G^{\mathfrak{A}^*} \in \mathfrak{A}^*$。

下面的引理是由 [38] 中的引理 1 和引理 4 以及引理 2.30 推得的推论 .

引理 4.11. 设 A、B 和 N 是 G的子群，其中 A 是 σ-次拟正规子群 G，且 N 在 G中正规。

(1) $A \cap B$ 在 B中是 σ-次拟正规子群。(2) AN/N 在 G/N中是 σ-次拟正规子群。(3) 若 $N \leq K$ 且 K/N 是 G/N中的 σ-次拟正规子群，则 K 在 G.中是 σ-次拟正规子群。(4) $A^{\mathfrak{A}^*}$ 在 G中是次正规子群。

引理 4.12（参见 [24, 引理 5.1.13]）。子群 M 在 G 中模当且仅当，对每个素数幂阶元素 $x \in G$，M在 $\langle x$中模 $M\rangle$。

命题 4.13。设 G是一个可解的 PT-群，且令 p为一个素数。若 G 的每个次模 p-子群在 G 中模，则 G 的每个 p-子群在 G中模。特别地，若可解的 PT-群 G的每个次模子群在 G中模，则 G是一个M-群。

证明。假设该命题不成立，并令 G 为一个阶最小的反例。于是，根据 [1, 定理 2.1.11], ，满足以下条件：G 的幂零剩余 D 是一个霍尔子群；G 通过共轭作用于 D，其作用为群幂自同构；并且 G/D 的每个子群在 G/D中拟正规。特别地，G 是超可解的。

令 M 为 G 中 D 的补子群，并令 U 为 G 中阶最小的非模 p-子群。则 U 在 G 中不是次模的，且 U 的每个极大子群在 G 中都是模的，因此根据 [24, p. 201，性质 (5)，U 是一个循环群。令 V 为 U 的极大子群。则 $V \neq 1$，因为根据 [38, 引理 6], 超可解群的每个素数阶子群都是次模的。不失一般性，我们可以假设 $U \leq M$，因为 M 是 G 的一个霍尔子群。

(1) 如果 R 是 G 的正规 p-子群，那么包含 R 的 G 的每个 p-子群在 G 中都是模的。特别地，$U_G = 1$，因此 $U \cap D = 1$.

令 L/R 为 G/R 的一个次模 p-子群。根据引理 4.9(3)，则 L 是 G 的一个次模 p-子群，因此根据假设，L 在 G 中是模的。于是根据 [24, p. 201，性质 (4)，L/R 在 G/R 中是模的。因此该假设对 G/R 成立。于是根据 G 的选择，G/R 的每个 p-子群 S/R 在 G/R 中都是模的，因此根据 [24, p. 201，性质 (4)，S 在 G 中是模的。

(2) 如果 K 是一个命题 若是 G 的次模子群，则 K 的每个 p-子群 L 在 G 中都是模的，

因此，包含 U 的 G 的每个真子群在 G 中都不是次模的。

首先注意，由 [1, 推论 2.1， K 是一个 PT-群。若 S 是 K 的一个次模 p-子群，则 S 在 G 中是次模的，因此 S 在 G 中是模的。于是 S 在 K 中是模的。因此，假设对 K 成立，所以根据 G 的选取， K 的每个 p-子群 L 都在 K 中是模的。因此，根据假设，L 在 G 中也是模的。

(3) $DU = G$ （这由断言（2）以及 G 中每个包含 D 的子群都是 G 的次正规子群这一事实可得。）

(4) V 不是 G 的次正规子群。

假设 V 是 G 的次正规子群。由于 V 在 G 中是模的，根据定理 A， V 在 G 中是拟正规的。因此，根据 [1, 推论 1.5， $1 < V \leq R = O_p$（Z_∞（G））。由断言（1）， $V_G = 1 = U_G$，但根据断言（3）， U 是 G 的一个 Sylow p-子群，所以 $R \leq U$，因此 $R = V = 1$，从而 $|U| = p$, 矛盾。因此我们得到 (4)。

(5) $G = V^G \times K$，其中 V^G 是一个阶与 $|K|$ 互素的非阿贝尔 P 群（由于 $V_G = 1$，这可由断言 (4) 和引理 2.2 得出。

最终矛盾。由断言 (5) 可知 $U \leq V^G$，因此根据 [24, 定理 2.4， U 是 G 的次模子群。4]）。这一最终矛盾完成了该结果的证明。

命题得证。

定理 4.4 的证明。设 σ（G） $= \{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$。

首先假设 G 是一个可解的 $M\sigma T$ 群。那么，对所有 $i =$， G 都有一个 Hall σ_i 子群 H_i，其中 $i =$ 为 1，...， t。

我们证明条件 (i)、(ii) 和 (iii) 对 G 成立。假设这不成立，并设 G 是一个最小阶反例。

(1) 若 R 是 G 的非平凡正规子群，则 G/R 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)。

若 H/R 是 G/R 的 σ-次拟正规子群，则由引理 4.11(3)， H 是 G 的 σ-次拟正规子群，因此根据假设， H 是 G 的 σ-拟正规子群，进而由引理 4.9(2)， H/R 是 G/R 的 σ-拟正规子群。因此 G/R 是一个 $M\sigma T$-群，所以根据 G 的选取，我们得到 (1)。

(2) 若 E 是 G 的真 σ-次拟正规子群，则 $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq D$ 满足条件 (i) 和 (ii)。

E 的每个 σ-次拟正规子群 H 都是 G 的 σ-次拟正规子群，因此根据假设， H 是 G 的 σ- 拟正规子群。因此假设对 E 成立，所以根据 G 的选取， E 满足条件 (i) 和 (ii)。此外，由于根据引理 2.9， $G/D \in \mathfrak{N}_\sigma$ 和 $\mathfrak{N}_\sigma$ 是一个遗传类，$E/E \cap D \simeq ED/D \in \mathfrak{N}_\sigma$，因此 $E/E \cap D \in \mathfrak{N}_\sigma$。于是

$$E^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq E \cap D \leq D.$$

(3) D 是幂零的，且 G 是超可解的。

设 R 是 G的一个极小正规子群。根据引理 2.27 和断言（1）， $RD/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 是阿贝尔群。因此， $R \leq D$, R 是 G 和 $R \not\leq \Phi(G)$的唯一极小正规子群。于是，根据 [25, 第 A 章的 13.8(b) 和 15.2]，对于某个 $p \in \sigma_i$ ，有 $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$。

设 V 是 R的一个极大子群。那么 $V_G = 1$ 和 V 在 G中是 σ-次拟正规子群，因此 H 在 G中是σ-拟正规子群。由此，根据 [24, 定理 5.2， $R = V^G$ 是一个阶为 p 的群。3], ，所以 $G/R = C_G(R)$ 是循环的，因而 G 超可解。但这样一来， $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq G' \leq F(G)$，因此 D 幂零。

(4) 若 H/K 是 σ-幂零的，其中 $K \leq H$ 是 G 的正规子群，则 H/K 是一个 M-群。

设 U/K 是 H/K 的任意次模子群，则 U/K 在 G/K 中是次模子群，因此 U 在 G 中是次模子群。另一方面，根据引理 2.10， U/K 在 G/D 中是 σ-次正规子群，因此根据引理 2.30(5)， U 在 G 中是σ-次正规子群。因此， U 在 G 中是 σ-次拟正规子群，故根据假设，U 在 G中是 σ-拟正规子群。由此可得， U/K 在 G/K 中是 σ-拟正规子群，因此根据引理 4.9(1)(2)，它在 H/K 中也是如此，所以 H/K 的每个次模子群都是 H/K 的模子群。因此，根据命题 4.13， H/K 是一个 M-群。

(5) D 是 G的霍尔子群。

假设该命题不成立，并令 P 为 D 的一个西洛 p-子群，使得 $1 < P < G_p$，其中$G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$。不失一般性，设 $G_p \leq H_1$。

(a) $D = P$ 是 G的极小正规子群。

设 R 为包含于 D中的 G的一个极小正规子群。则对于某个素数q， R 是一个 q-群。此外，根据断言（1）， $D/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 是 G/R 的霍尔子群。假设 $PR/R \neq 1$。则 $PR/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$。若 $q \neq p$，则 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。这与 $P < G_p$的事实相矛盾。因此， $q = p$，从而 $R \leq P$ ，并且因此 $P/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$，我们再次得到 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。这一矛盾表明 $PR/R = 1$，这意味着 $R = P$ 是包含于 D中的 G的唯一极小正规子群。由于 D 是幂零的， D 的一个 p'-补子群 E 在 D中是特征的，因此它在 G中是正规的。因此 $E = 1$，这意味着 $R = D = P$。

(b) $D \not\leq \Phi(G)$。因此，对于 G 的某个极大子群 M ，有 $G = D \rtimes M$ （由引理 2.9 可知，因为 G不是 σ-幂零的）。

(c) 如果 G 有一个 极小正规子群 $L \neq D$，那么 $G_p = D \times (L \cap G_p)$。因此 $O_{p'}(G) = 1$。

事实上，由断言 (1) 和 (a)， $DL/L \simeq D$ 是 G/L 的一个霍尔子群。因此 $G_pL/L = RL/L$，故 $G_p = D \times (L \cap G_p)$。于是，由断言 (a)， $D < G_p$ ，所以 $O_{p'}(G) = 1$ 。

(d) $V = C_G(D) \cap M$ 是 G 的正规子群，且 $C_G(D) = D \times V \leq H_1$。

鉴于断言 (a) 和 (b)， $C_G(D) = D \times V$，其中 $V = C_G(D) \cap M$ 是G的正规子群。此外，由引理 2.9， $V \simeq DV/D$ 是 σ-幂零的。令 W 为 V的一个 σ_1-补子群。那么 W是 V 的特征子群，因此它是 G的正规子群。因此，由断言 (c) 可得 (d)。

（e） $G_p \neq H_1$。

假设 G $_p = H_1$。设 Z 是 $Z(G_p) \cap D$ 中阶为 p 的子群。那么 Z 是 σ-次拟正规

于 G，由断言（3）可知，因此 Z 在 G 中是 σ-拟正规，故由定理 3.3(v) 得 $O^{\sigma_1}(G) = O^p(G) \leq N_G(Z)$。因此 $G = G_pO^p(G) \leq N_G(Z)$，于是 $D = Z < G_p$。由此可得 $D < C_G(D)$。那么，由断言 (d)，$V = C_G(D) \cap M \neq 1$ 是 G 的正规子群，且 $V \leq H_1 = G_p$。设 L 是包含于 V 中的 G 的一个极小正规子群。由断言 (c)，$G_p = D \times L$ 是 G 的一个阶为 p^2 的正规初等阿贝尔子群；并且由定理 3.3(v)，G_p 的每个子群都是 G 的正规子群。设 $D = \langle a \rangle$、$L = \langle b \rangle$ 且 $N = \langle ab \rangle$。那么 $N \nleq D,$，因此考虑到 G-同构

$$DN/D \simeq N \simeq NL/L = G_p/L = DL/L \simeq D$$

由引理 2.9 可知，$G/C_G(D) = G/C_G(N)$ 是一个 p-群，因为 G/D 是 σ-幂零的。但断言 (d) 随即推出 G 是一个 p-群。这个矛盾说明结论 (e) 成立。

（5）的最终矛盾。根据 [7] 中的定理 A，G 有一个 σ_1-补子群 E，使得$EG_p = G_pE$。

设 $V = (EG_p)^{\mathfrak{N}_\sigma}$。由断言 (e)，$EG_p \neq G$。另一方面，由断言 (a)，因为 $D \leq EG_p$，根据断言（4）和引理 4.11(3)，EG_p 在 G 中是 σ-子拟正规子群。因此，断言（2）推出 V是 EG_p 和 $V \leq D$的霍尔子群，所以对于 V的一个西洛 p-子群 V_p，有 $|V_p| \leq |P| < |G_p|$。因此 $V = 1$。于是 $EG_p = E \times G_p$ 是 σ-幂零的，故 $E \leq C_G(D) \leq H_1$。因此 $E = 1$，从而 $D = 1$，矛盾。故 D 是 G的霍尔子群。

（6） $H_i = O_{\sigma_i}（D）\times S$ 对每个 $\sigma_i \in \sigma（D）$ 均成立。

由断言（3）和（5），D是 G的幂零霍尔子群，因此 $D = L \times N$，其中 $L = O_{\sigma_i}（D）$ 和 $N = O^{\sigma_i}（D）$ 是 G的霍尔子群。首先假设 $N \neq 1$。那么

$$O_{\sigma_i}((G/N)^{\mathfrak{N}_\sigma}) = O_{\sigma_i}(D/N) = LN/N$$

由断言（1），V/N 在 $H_iN/N \simeq H_i$ 中有正规补 V/N。另一方面，由 Schur-Zassenhaus 定理，N 在 V中有补子群 S。因此 $H_i = .H_i \cap LSN = LS$ 和 $L \cap S = 1$，因为

$$(L \cap S)N/N \leq (LN/N) \cap (V/N) = (LN/N) \cap (SN/N) = 1$$

显然，V/N是 H_iN/N的霍尔子群，因此 V/N是 H_iN/N的特征子群。另一方面，由引理 2.9，H_iN/N在 G/N中正规，因为 $D/N \leq H_iN/N$。因此 V/N在 G/N中正规。于是，$H_i \cap V = H_i \cap NS = S（H_i \cap N）= S$在 H_i中正规，因此 $H_i = O_{\sigma_i}（D）\times S$。

现在假设 $D = O_{\sigma_i}(D)$。那么 H_i在 G中正规，因此根据断言（4），H_i是一个 M-群。因此，依据定理 B(v)，H_i 的每个子群 U 都是 σ-拟正规，并且是 G 中的 σ-正规。由于 D 是 H_i的正规霍尔子群，它在 H_i 中有一个补子群 S，且 $D \leq O^{\sigma_i}(G) \leq N_G(S)$，因为 S在 G中是 σ-正规。因此 $H_i = D \times S = O_{\sigma_i}(D) \times S$。

（7） D 的每个子群 H 在 G中都是正规子群。因此，G 的每个元素在 D中诱导一个幂自同构。

由于根据断言（3），D 是幂零的，因此只需考虑对某个 $\sigma_i \in \sigma(D)$，$H \leq O_{\sigma_i}(D) = H_i \cap D$ 的情形。断言（6）表明，$H_i = O_{\sigma_i}(D) \times S$。显然，$H$ 是 σ-拟正规子群

于 G中，因此 H 在 G中是 σ-拟正规的。由定理 B(v)，所以 H 在 G 中是 σ-正规的，因此

$$G = H_i O^{\sigma_i}(G) = (O_{\sigma_i}(D) \times S) O^{\sigma_i}(G) = S O^{\sigma_i}(G) \leq N_G(H)$$

.

（8）若 p是一个素数，且 $(p-1, |G|) = 1$，则 p不整除 $|D|$。因此， $\pi(G)$ 中最小的素数属于 $\pi(|G: D|)$。特别地， $|D|$ 是奇数。

假设结论不成立。那么，由断言 (7)， D 有一个极大子群 E，使得 $|D: E| = p$，且 E 是 G 的正规子群。由此可得 $C_G(D/E) = G$，因为 $(p-1, |G|) = 1$。由于根据断言 (5)， D 是 G 的霍尔子群，因此它在 G中有一个补子群 M。于是 $G/E = (D/E) \times (ME/E)$，其中 $ME/E \simeq M \simeq G/D$ 是 σ-幂零的。因此，根据引理 2.9， G/E 是 σ-幂零的。但这样一来， $D \leq E$，矛盾。因此，结论（8）成立。

（9） D 是阿贝尔的。

鉴于断言 (7)， D 是一个戴德金群。因此， D 是阿贝尔的，因为根据断言 (8)， $|D|$ 是奇数。

由断言 (4)–(9)可知，条件 (i)、(ii) 和 (iii)（其中 M 是一个 M-群）对G成立。

现在我们证明：如果条件 (i)、(ii) 和 (iii)（其中 M 是一个 M-群）对 G成立，那么 G是一个 $M\sigma T$-群。假设结论不成立，并令 G 为阶最小的反例。于是$D \neq 1$，并且根据引理 4.12，对于某个 σ-次拟正规子群 A （它是 G 的子群）以及某个阶为素数幂阶 p^a 的元素$x \in G$，子群 A 在 $\langle A$中不是模的， $x\rangle$。此外，我们可以假设 A 的每个真 σ-次拟正规子群在 G中都是 σ-拟正规的。

(*) 如果 N 是 G 的极小正规子群，那么 G/N 是一个 $M\sigma T$-群。（由于该假设对 G/N 成立，因此由 G 的选取可得此结论。）

(**) 如果 N 是 G 的极小正规子群，那么 AN 在 G 中是 σ-拟正规子群。特别地，$A_G = 1$。

断言 (*) 表明 G/N 是一个 $M\sigma T$-群。另一方面，根据引理 4.11(2)， AN/N 是 G/N 的一个 σ-次拟正规子群，因此 AN/N 在 G 中是 σ-拟正规子群。于是由引理 4.11(3)得到 (**)。

(***) 对某个 i， A 是一个 σ_i-群。

由条件 (i) 和断言 (**) 可知 $A \cap D = 1$，因此 $AD/D \simeq A$ 是 σ-幂零的。于是对于 $\sigma_i \in \sigma(A)$，我们有 $A = O_{\sigma_i}(A) \times O_{\sigma_i'}(A)$。假设 $O_{\sigma_i'}(A) \neq 1$。那么 $O_{\sigma_i}(A)$ 和 $O_{\sigma_i'}(A)$ 在 G 中是 σ- 拟正规子群，因此根据引理 2.30(3) 以及第 201 页的性质 (5)， A 在 G 中是 σ- 拟正规子群。这一矛盾表明， $A = O_{\sigma_i}(A)$ 是一个 σ_i-群。

充分性的最终矛盾。由于 A 在 G中是 σ-次正规，根据断言 (***)，由引理 2.30(5)可得，对所有 $y \in G$， $A \leq H_i^y$。

由条件 (i) 和 (ii) 可知，对于某个霍尔子群 S， $H_i = (H_i \cap D) \times S$。然后由 $A \leq H_i^y = (H_i^y \cap D) \times S^y$ 可知，对所有 $y \in G$， $A \leq S^y$。此外，根据

根据断言 (**) 和条件 (i)， $H_i \cap D$ 与 M 是 M-群。因此，由 [24,定理 2.4.4] 可知， H_i 是一个 M-群。因此，对所有 $y \in G$， $x \notin H_i^y$ ，所以对于某个 $j \neq i$， $p \in \sigma_j$ 。

设 $U = \langle x \rangle$。先假设 $x \in D$，于是 $U \trianglelefteq G$。另一方面， A 在 UA 中是 σ-次正规子群，因此根据引理 2.30(5)， $UA = U \times A$。故 A在 $\langle x$ 中是模的， $A\rangle = UA$，矛盾。因此， $x \notin D$。

由于 D 是 G 的霍尔子群且 $x \notin D$，对于某个 $z \in G$， $x \in M^z$ 。显然，对于某个 $y \in G$，$A \leq S^y \leq M^z$；其中根据条件 (i)， M^z是一个 M-群，进而 A在$\langle A$中是模的， $x\rangle$。

这个最终矛盾完成了对 G是一个 $M\sigma T$-群这一事实的证明。

定理得证。

5 模性具有传递性的群

回顾一下，若群 G 满足 [24, p，则称其为一个 M-群。 54] 如果由 G的所有子群组成的格 $\mathcal{L}(G)$是模的。

定义5.1. 如果模性在 G上是传递关系，即如果 H 是 K 的模子群且 K 是 G的模子群，那么 H 是 G的模子群，我们就称 G为 MT-群。

下一个问题可追溯至 Frigerio 的论文 [37]。

问题5.1. MT-群 G的结构是什么，即模性在 G上构成传递关系的群是什么?

Frigerio 证明了下面的定理，该定理完整解答了可解情形下的这一问题。

定理5.3（Frigerio [37]）。一个可解群是 MT-群，当且仅当 G是一个所有子群构成模格的群 $\mathcal{L}$（G）。

论文 [38]给出了定理5.3的一个新证明。

备注 5.4。问题 5.2 是一般问题 4.2 的特殊情形，其中 $\sigma = \{\mathbb{P}\}$，因为在这种情况下，每个群的每个子群都是 σ-次正规子群。

在继续之前，我们先给出一些定义。

如果存在一个子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq$，则称群 G 的子群 A 在 G 中是次模的 $\cdots \leq A_n = G$ 使得对于所有 $i = 1$、.....、 n， A_{i-1} 都是 A_i 的模子群。因此，群 G 是一个 MT-群，当且仅当 G 的每个次模子群在 G 中都是模的。

备注 5.5. 显然，每个次正规子群都是次模的。另一方面，根据上述 [31] 中 Ore 的结果以及定理 3.1， G 是 PT-群，当且仅当它的每个次正规子群都是模的。因此，每个 MT-群都是 PT-群。

鉴于备注 5.5，以下众所周知的结果部分描述了不可解 MT-群的结构。

定理 5.6（Robinson [4]）。 G是一个 PT群，当且仅当 G有一个正规完全子群D，满足:

(i) G/D是一个可解 PT群，并且

(i) 若 $D \neq 1$， G有一个 Robinson 复形（D， Z（D）；U_1，.....，U_k），并且

(iii) 对于任意集合

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

其中 $1 \leq r < k$、 G和$G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$对所有 $p \in \pi$（Z（D））均满足 N$_p$，且对所有 $p \in \pi$（D）均满足 P$_p$。

现在回顾一下，若 $G = A \rtimes \langle t \rangle$，则 G 是一个非阿贝尔 P群（见 [24, 第 49]页）；其中 A 是一个初等阿贝尔 p群，而一个阶为素数 $q \neq p$ 的元素 t 在 A上诱导一个非平凡的幂自同构。在这种情况下，我们称 G为类型（p， q）的 P群。

定义 5.7. 如果每当 N 是 G 的可解正规子群，且 P/N 是 G/N 的正规非阿贝尔 P-子群（分别为正规 P-群，类型为（p， q））， P/N 的每个非次正规子群都是 G/N 中的模子群时，我们称 G 满足 M$_P$ (M$_{p,q}$，分别为)。

下面的定理回答了问题5.1。

定理 5.8（Liu、Guo、Safonova 和 Skiba [23, 42]）。群 G 是 MT-群，当且仅当 G 具有一个完美正规子群 D，满足:

(i) G/D 是 M-群,

(ii) 如果 $D \neq 1$， G 具有一个 Robinson 复形（D， Z（D）；U_1，.....，U_k），并且

(iii) 对任意集合

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

其中 $1 \leq r < k$、 G 和 $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ 满足：对所有 $p \in \pi(Z(D))$， N$_p$；对所有 $p \in \pi(D)$， P$_p$；以及对所有梨 $\{p, q\} \cap \pi(D)$， M$_{p,\ q} \neq \emptyset$.

下面的例子表明，一般而言， PT-群未必是 MT-群。

例 5.9. (i) 令 α：$Z(SL(2,5)) \to Z(SL(2, 7))$ 为一个同构，并令

$$D := SL(2, 5) \curlyvee SL(2, 7) = (SL(2, 5) \times SL(2, 7))/V,$$

其中

$$V = \{(a, (a^{\alpha})^{-1}) \mid a \in Z(SL(2, 5))\},$$

是群 $SL(2, 5)$ 和 $SL(2, 7)$ 的直积，具有公共中心（见 [29, 第 49] 页）。令$M = (C_7 \rtimes C_3) \curlywedge (C_{13} \rtimes C_3)$ 为群 $C_7 \rtimes C_3$ 和 $C_{13} \rtimes C_3$ 的直积，具有公共商群 C_3（见 [29, 第 50] 页），其中 $C_7 \rtimes C_3$ 是阶为 21 的非阿贝尔群，而 $C_{13} \rtimes C_3$ 是

阶为 39 的非阿贝尔群。最后，令 $G = D \times M$。我们证明 G 满足定理 5.6 中的条件。

显然， $D = G^{\mathfrak{S}}$ 是 G 的可解剩余，且 $M \simeq G/D$ 是一个可解的 PT-群。根据 [29, I, Satz 9.10], $D = U_1U_2$ 和 $U_1 \cap U_2 = Z(D) = \Phi(D)$，其中 U_i 是 D 的正规子群， $U_1/Z(D)$ 是一个阶为 60 的单群，而 $U_2/Z(D)$ 是一个阶为 168 的单群。因此，$(D, Z(D); U_1, U_2)$ 是 G 的一个 Robinson 复形，且子群 $Z(D)$ 的阶为 2，并且 $Z(D) \leq Z(G)$。因此， G 满足条件 (i) 和 (ii)。不难证明，对于每个整除 $|G|$ 的素数 r 以及 $O_r(G/N)$，其中 N 是 G 的一个正规可解子群，均有 $|O_r(G/N)| \in \{1, r\}$，故 G 也满足条件 (iii)。因此，根据定理 5.6， G 是一个 PT-群。

现在证明 G 不是 MT-群。首先注意， M 有一个子群 $T \simeq C_7 \rtimes C_3$，且 $|M : T| = 13$。于是， T 是 M 的极大子群，且 $M/T_M \simeq C_7 \rtimes C_3$。因此， T 的一个阶为 3 的子群 L 在 T 中是模的，而根据引理 5.1， T 在 M 中是模的。2], 所以 L 在 G 中是次模的。最后，根据下面的引理 5.11， L 在 M 中不是模的。因此，根据定理 5.8， G 不是 MT-群。

(ii) 根据定理 5.8，群 $D \times (C_7 \rtimes C_3)$ 是一个 MT-群。

引理 5.10. 设 A、 B 和 N 是 G 的子群，其中 A 是次模的，且 N 在 G 中正规。那么：

(1) $A \cap B$ 在 B 中是次模的；(2) AN/N 在 G/N 中是次模的；(3) 若 $N \leq K$ 且 K/N 在 G/N 中是次模的，则 K 在 G 中是次模的；(4) $A^{\mathfrak{N}^*}$ 在 G 中是次正规的；(5) 若 $G = U_1 \times \cdots \times U_k$，其中 U_i 是非阿贝尔单群，则 A 在 G 中正规。

证明。(1)–(4) 的陈述已在 [38] 中证明。

(5) 设 $E = U_iA$ 和 $A \neq 1$。由第 (1) 部分， A 是 E 中的次模子群，因此存在一条子群链

$$A = E_0 < E_1 < \cdots < E_{t-1} < E_t = E$$

使得对于所有 $i = 1, \ldots, t$， E_{i-1} 都是 E_i 的极大模子群；而对于 $M = E_{t-1}$，我们有 $M = A(M \cap U_i)$，并且根据 [24, 引理 5.1.2], ，或者 $M = E_{t-1}$ 是 E 的极大正规子群，或者 M 是 E 的极大子群，且 E/M_E 是一个阶为 qr 的非阿贝尔群，其中 q 和 r 是素数。在前一种情况下，我们有 $M \cap U_i = 1$，因此 $A = M$ 是 E 的正规子群。第二种情况不可能，因为 E 没有阶为 qr 的商群。因此，对于所有 i， $U_i \leq N_G(A)$，故 $G \leq N_G(A)$。于是得到 (5)。

该引理已得到证明。

引理 5.11（参见引理 5.1.9 [24]）。设 M 是 G 的一个素数幂阶模子群。

若 M 在 G 中不是拟正规子群，则

$$G/M_G = M^G/M_G \times K/M_G,$$

其中 M^G/M_G是一个与 $|K/M_G|$阶互素的非阿贝尔 P群。

回顾一下，若群 G的每个主因子都是单 [4]，则称其为 SC群。

引理 5.12. 设 G 是一个非可解 SC群，且假设 G 具有一个 Robinson 复形

$$(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k),$$

其中 $D = G^{\mathfrak{S}} = G^{\mathfrak{U}}$。设 U 是 G 的一个最小阶次模非模子群。那么：

(1) 若对所有 $i = 1$，.....， k， UU_i'/U_i'都是 G/U_i'的模子群，则 U是超可解群。

(2) 若 U是超可解的，且对 G的所有非平凡幂零正规子群 L， UL/L 都是 G/L 的模子群，则 U 是某个素数 p的循环 p群。

证明。假设该引理不成立，并设 G 是一个阶最小的反例。

(1) 假设结论不成立。设 $U \cap D \leq Z(D)$。那么， U 在$U \cap Z(D)$ 下方的每个主因子 $= U \cap D$ 都是循环的，而且 $UD/D \simeq U/(U \cap D)$ 是超可解的。因此 U 是超可解的，矛盾。故 $U \cap D \not\leq Z(D)$。此外，由引理 5.10(1)(2) 可知，$(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 在 $D/Z(D)$ 中是次模的，因此根据引理 5.10(5)，$(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ 是 $D/Z(D)$ 的非平凡正规子群。

因此，对某个 i，有 $U_i/Z(D) \leq (U \cap D)Z(D)/Z(D)$，所以 $U_i \leq (U \cap D)Z(D)$。但此时 $U_i' \leq ((U \cap D)Z(D))' \leq U \cap D.$。根据假设，$UU_i'/U_i' = U/U_i'$ 在 G/U_i' 中是模的，因此由 [24, 第 201 页、性质 (4)]，可知， U 在 G 中也是模的，矛盾。因此，结论 (1) 成立。

(2) 假设结论不成立。令 $N = U^{\mathfrak{N}}$为 U的幂零剩余。由于U 超可解，因此 $N < U$，所以 N 在 G中是模的。显然， U 的每个真子群 S 若满足 $N \leq S$，则在 G中是次模的，因此由 U 的极小性可知， S 在 G中是模的。因此，若 U 有至少两个不同的极大子群 S和 W满足 $N \leq S \cap W$，则根据 [24, 第 201 页的性质 (5)]，， $U = \langle S, W \rangle$ 在 G 中是模的，这与我们对 U的假设矛盾。因此， U/N 是某个素数 p 对应的循环 p-群，并且 $N \neq 1$，因为 U 不是循环的。

现在证明 U是一个 PT-群。设 S是 U的真次正规子群。由于 U 在 G中次模，因此 S在 G 中次模，所以 S 在 G 中为模，进而由定理 3.1 可知 S 在 U中拟正规。因此， U是一个可解的 PT-群，所以 $N = U^{\mathfrak{N}} = U'$是$U$的霍尔阿贝尔子群，并且根据 [1,定理 2.1， N的每个子群在 U 中都是正规子群。11]。于是 $N \leq U^{\mathfrak{A}^*}$，因此 $U^{\mathfrak{A}^*} = NV$，其中 V是 U的一个 Sylow p-子群 $P \simeq U/N$的极大子群。根据引理 5.10(4)， NV在 G中为模，且 NV在 G中次正规。因此由定理 3.1 可知 NV在 G中拟正规。假设对于 G 的某个极小正规子群 R，有 $R \leq (NV)_G$。那么根据假设， U/R 在 G/R 中为模，因此 U 在 G中为模，矛盾。因此 $(NV)_G = 1$，所以根据 [1,推论 1.5，NV是幂零的。6]，于是 V在 U中正规。

N的某个极大子群 W在 U中正规，且满足 $|N\colon\ W| = q$。那么 $S = WP$是 U 的一个极大子群，使得 U/S_U 是一个阶为 pq的非阿贝尔群。因此，根据[24, 引理 5.1， S 在 U 中为模。2], ，所以 S 在 G中为模。由此可得， $U = NS$ 在 G中为模，矛盾。因此命题（2）成立。

引理得证。

引理 5.13. 如果 G是一个 MT-群，那么 G的每个商群 G/N都是一个 MT-群，并且满足 M_P。

证明. 设 L/N 是 G/N的次模子群。根据引理 2.1(3)， L 是 G 中的次模子群，因此根据假设，L 在 G 中是模的；继而根据 [24, p. 201，性质（3）]， L/N 在 G/N 中是模的。因此， G/N是一个 MT-群。

现在证明 G/N满足 M_P。由于 G/N是一个 MT-群，不失一般性，我们可以假设 $N = 1$。设 P/R 是 G/R 的一个正规非阿贝尔 P-子群，并设 $L/R \leq P/R$。根据 [24, 引理 2.4.1], ， R/N 在 P/R 中是模的，因此 L/R 是 G/R 中的次模子群；又由于 G/R 是一个 MT- 群， L/R 在 G/R中是模的。因此， G满足 M_P。

该引理得证。

我们需要引理 2.39 的以下特殊情形。

引理 5.14. 假设 G 有一个 Robinson 复形 $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$，并设 N是 G的正规子群。

(1) 若 $N = U_i'$和 $k \neq 1$，则 $Z(D/N) = U_i/N = Z(D)N/N$且

$$(D/N, Z(D/N); U_1N/N, \ldots, U_{i-1}N/N, U_{i+1}N/N, \ldots U_kN/N)$$

是 G/N的 Robinson 复形。

(2) 若 N 是幂零的，则 $Z(DN/N) = Z(D)N/N$ 且

$$(DN/N, Z(DN/N); U_1N/N, \ldots, U_kN/N)$$

是 G/N 的 Robinson 复形。

定理 5.8 的证明。首先假设 G 是一个 MT-群。那么根据引理 5.13， G 是一个 PT-群，且每个商群 G/N 都是一个 MT-群。此外，根据定理 5.6， G 有一个正规完全子群 D，使得：G/D 是一个可解群 PT-群；并且若 $D \neq 1$，则 G 有一个 Robinson 复形（D， Z（D）；U_1，. . .， U_k），满足对任意集合 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$，其中 $1 \leq r < k$、 G 和 $G/U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'$ 对所有 $p \in \pi$（Z（D））均满足 N_p，而 P_p 对所有 $p \in \pi$（D）均成立。根据引理 5.13， G 和 $G/U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'$ 对所有 pears $\{p, q\} \cap \pi$（D）均满足 $\mathrm{M}_{p,\ q} \neq \emptyset$.

鉴于 [1, 定理 2.1，11] G/D是一个超可解 PT-群，并且如果 U/D是 G/D的次模子群，那么根据引理 5.10(3)， U 在 G 中是次模的，因此根据假设， U 在 G 中是模的，从而根据 [24, p. 201，性质 (4)], ， U/D 在 G/D 中是模的。因此，根据命题 4.13， G/D 是一个 M-群。因此，该定理的条件的必要性成立。

现在反设 G 是满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)的一个非-MT-群，且阶最小。于是， $D \neq 1$ 和 G 有一个次模子群 U，使得 U 在 G 中不是模的，但 G 的每个满足 $U_0 < U$ 的次模子群 U_0 在 G中都是模的。令 $Z = Z(D)$。由于 D/Z 是完美的，故 $Z = \Phi(U_i) = \Phi(D)$。

(1) U 是超可解的。

首先假设 $k = 1$，也就是说， $D = U_1 = D'$。那么，根据引理 5.10(1)(2)，$(U \cap D)Z/Z$ 是单群 D/Z 的次模子群。如果 $(U \cap D)Z/Z \neq 1$，那么根据引理 5.10(5)，$(U \cap D)Z/Z = U_i/Z$，因此 $(U \cap D)Z = U_i$，这与 $Z \leq \Phi(U_i)$这一事实矛盾。

因此 $U \cap D \leq Z$，所以 $U \cap D = U \cap Z$。因此， U 在 $U \cap D$ 以下的每个主因子都是循环的。另一方面，根据条件 (i)， $U/(U \cap D) \simeq UD/D$是超可解的，因为根据定理 2.4，每个 M-群都是超可解的。4] 因此 U 是超可解的。

现在令 $k \neq 1$。我们证明，对于所有 $i = 1, \ldots, k$，该假设对 G/U_i'成立。不失一般性，可设 $i = 1$。令 $N = U_1'$。则 $(G/N)/(D/N) \simeq G/D$是一个 M-群，且 $(D/N)' = D'/N = D/N$。由引理 5.14(1) 可知，$(D/N, Z(D/N); U_2N/N, \ldots, U_kN/N)$ 是 G/N 的一个 Robinson 复形，并且

$$Z(D/N) = U_1/N = ZN/N \simeq Z/(Z \cap N).$$

此外，若 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{2, \ldots, k\}$，其中 $2 \leq r < k$，则商群 $G/N = G/U_1'$和

$$(G/N)/(U_{i_1}N/N)' \cdots (U_{i_r}N/N)' = (G/N)/(U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'U_1'/N) \simeq G/U_{i_1}' \cdots U_{i_r}'U_1'$$

根据条件 (iii)，对所有 $p \in \pi(Z(D/N)) \subseteq \pi(Z)$，满足 N_p；对所有 $p \in \pi(D/N)) \subseteq \pi(D)$，满足 P_p；并且对所有 $\mathrm{pear}\{p, q\} \cap \pi(D) \neq \emptyset$，满足 $\mathrm{M}_{p,\ q}$。

因此，假设对 $G/N = G/U_1'$成立，所以根据 G的选取， G/U_1'的次模子群 UU_1'/U_1'在 G/U_1' 中是模的。由此，根据引理 5.12(1)， U 是超可解的。

(2) 若 $N \neq 1$ 是 G的正规幂零子群，则条件 (i)、(ii) 和 (iii) 对G/N成立（见断言（1）的证明，并利用 M-群的每个商群也都是 M-群这一事实）。

(3) 若对某个正规幂零子群 $N \neq 1$， XN/N 在 G/N 中是次模的，则 XN/N 在 G/N 中是模的，且 XN 在 G中是模的。特别地， $U_G = 1$ （这由断言（2）、引理 5.10(3) 以及 G的选取可得）。

(4) U是某个素数 p对应的循环 p-群，且 $U \cap Z_\infty(G)$ 是 U的极大子群。

设 N 是 G的一个非平凡幂零正规子群。由引理 5.10(2)， UN/N 在 G/N中是次模的；因此由断言（3）， UN/N 在 G/N 中是模的。于是由引理 5.12(2)和断言（1）， U 是某个素数 p 对应的循环 p-群。

现在令 V 为 U 的极大子群。根据引理 5.10(4)， $V = U^{\mathfrak{A}^*}$ 是 G 的次正规子群，因此根据定理 A， V 是模子群，因而在 G 中拟正规。因此由推论 $[1, ,\ V \leq Z_\infty(G)$

1.5.6]，因为根据断言（3）有 $V_G = 1 = U_G$。因此 $V = U \cap Z_\infty(G)$。

(5) G 有一个阶为 q 的正规子群 C_q，其中 $q \in \pi$（Z（D））。

只需证明 $Z \neq 1$。假设结论不成立。则 $D = U_1 \times \cdots \times U_k$，其中对所有 i，U_i 都是非阿贝尔单群。

令 $E = U_i U$。我们证明 $U_i \leq N_G$（U）。注意，根据引理 5.10(1)，U 在 E 中是次模的。因此存在一个子群链

$$U = E_0 < E_1 < \cdots < E_{t-1} < E_t = E$$

使得对所有 $i = 1$，....., t，E_{i-1} 都是 E_i 的极大模子群；而对于 $M = E_{t-1}$，有 $M = U$（$M \cap U_i$）。此外，根据 [24, 引理 5.1.2]，，要么 $M = E_{t-1}$ 是 E 的极大正规子群，要么 M 是 E 的极大子群，且 E/M_E 是一个阶为 qr 、其素数为 q 和 r 的非阿贝尔群。在前一种情况下，我们有 $M \cap U_i = 1$，因此 $U = M$ 在 E 中正规。后一种情况不可能，因为 E 没有阶为 qr 的商群。因此，对所有 i，有 $U_i \leq N_E$（U），故 $D \leq N_G$（U），进而 $U \cap D \leq O_p$（D）$= 1$。由此可得 $DU = D \times U$，所以 $1 < U \leq C_G$（D）。但是，C_G（D）$\cap D = 1$，因为 Z（D）$= 1$。因此 C_G（D）$\simeq C_G$（D）D/D 可解。于是，对于某个整除 $|C_G$（D）$|$ 的素数 q，有 O_q（C_G（D））$\neq 1$。但是 O_q（C_G（D））是 C_G（D）的特征子群，因此结论 (5) 成立。

（6） U^G 可解。

根据引理 5.10(2)，子群 $C_q U/C_q$ 在 G/C_q 中是次模的，因此根据断言（3），$C_q U$ 在 G 中是模的。

先假设 $C_q U$ 在 G 中不是次正规的。则 $C_q U$ 在 G 中不是拟正规的，因此根据引理 5.11，$(C_q U)^G/(C_q U)_G$ 是一个非阿贝尔 P-群。因此，$(C_q U)^G$ 可解。

现在假设 $C_q U$ 在 G 中是次正规的，因此 $C_q U/C_q$ 是 G/C_q 的一个次正规 p-子群，从而

$$U^G/(U^G \cap C_q) \simeq C_q U^G/C_q = (C_q U/C_q)^{G/C_q} \leq O_p(G/C_q).$$

因此 U^G 可解。

（7） U 在 G 中不是次正规的。

假设 U 在 G 中是次正规的。由于根据定理 5.6，G 是一个 PT-群，因此 U 在 G 中是拟正规的；于是根据定理 3.1，U 在 G 中是模的，矛盾。因此我们得到（7）。

(8) $|U| = p$.

假设 $|U| > p$。那么由断言（4）和 $U \not\leq R$，可得 $1 < V \leq R := O_p(Z_\infty(G))$。由断言（7）可得 $U \not\leq R$。令 $E = RU$。由断言（4）和（7），E 在 G 中不是次正规子群；由断言（3）和引理 5.10(2)，该子群在 G 中是模子群。此外，$UR/R \simeq U/(U \cap R) = U/V$ 的阶为 p，因此 $(RU)_G = R$。所以，鉴于引理 5.11，

$$G/R = E^G/E_G \times K/E_G = U^G R/R \times K/R,$$

其中 $RU^G/R \simeq U^G/(U^G \cap R)$ 是一个阶与 K/R互素的非阿贝尔 P-群。那么 RU^G/R是一个π-群, 其中 $\pi = \{p, q\}$ 对某个素数 q成立，因此 G 是 π-可解的，从而 D 和 D/Z 是 π-可解群。

假设 $U^G \cap D \neq 1$。根据断言（6），由于 $U^G \cap D \leq Z = Z(D) \leq \Phi(D)$，对于某个 i以及某个 $r \in \{p, q\}$，数 r 整除 $|U_i/Z|$。由此可知， U_i/Z 是一个阿贝尔群，矛盾。因此 $U^G \cap D = 1$，所以由

$$U^G \simeq U^G/(U^G \cap D) \simeq U^G D/D$$

我们得到 U^G是一个 M-群。于是由 [24]中的引理 2.4.1 和定理 2.4.4可知，$U(U^G \cap R)/(U^G \cap R)$ 是 p的 Sylow 子群，因此 $U^G/(U^G \cap R)$ 的 $U(U^G \cap R)$ 是一个循环的 Sylow$p$-子群。由此可知，要么 $U(U^G \cap R) = U$，要么 $U(U^G \cap R) = U^G \cap R$。在前一种情况下，我们有 $U^G \cap R = V$，这根据断言（3）是不可能的，因此 $U(U^G \cap R) = U^G \cap R$，从而 U是 G的次正规子群，这与断言 (7) 矛盾。因此我们得到（8）。

（9） $U \not\leq D$。

假设 $U \leq D$。由断言 (7)可得 $U \not\leq Z$，进而由断言 (8)和引理 5.10(1)(2)(5)，存在某个 i 使得 $U \simeq UZ/Z = U_i/Z$，因此 $UZ = U_i$，矛盾。故有（9）。

（10） $O_p(D) = 1$。

假设 G 有一个阶为 p的正规子群 $Z_p \leq Z$。由断言 (7)， Z_pU 不是 G 的次正规子群；并且由断言 (8)和$(Z_pU)^G = Z_pU^G$，有$(Z_pU)_G = Z_p$，于是

$$G/Z_p = Z_pU^G/Z_p \times K/Z_p,$$

其中 Z_pU^G/Z_p是一个阶为 p^aq^b且其阶与 $|K/Z_p|$互素的非阿贝尔 P-群。因此， G/Z_p、 D/Z_p和 D 都是 $\{p, q\}$-可解的，其中 p 整除 $|D/Z_p|$。因此 $O_p(D/Z) \neq 1$。这个矛盾完成了该断言的证明。

(11) $DU = D \times U$。特别地，对于 G中包含在 D内的每个正规子群 N， NU在 G中都不是次正规子群。

鉴于断言（8）和（9），只需证明对于所有 i， $U_i \leq N_G(U)$。

设 $E = U_iU$，并令

$$U = E_0 < E_1 < \cdots < E_{t-1} < E_t = E$$

为一条子群链，使得对于 $i = 1$，....., t， E_{i-1}是 E_i的极大模子群；而对于$M = E_{t-1}$，我们有 $M = U(M \cap U_i)$，并且或者 $M = E_{t-1}$是 E的极大正规子群，或者 M是 E 的极大子群，且 E/M_E 是阶为 qr 的非阿贝尔群，其中 q和 r是某些素数。

首先假设 M 是 E的正规子群。由 $E = U_iU = U_iM$ 可知， $E/M \simeq U_i/(M \cap U_i)$ 是一个单群，因此 $M \cap U_i = Z$，进而由断言 (7) 得出 $U \cap U_i = 1$。然后，根据弗拉蒂尼论证，$E = MN_E(U) = ZN_E(U)$。但由于 $Z \leq \Phi(U_i)$，所以 $Z \leq \Phi(E)$。因此 $N_E(U) = E$，故 $U_i \leq N_G(U)$。

最后，假设 E/M_E 是一个阶为 qr的非阿贝尔群。则 $U_i/(U_i \cap M_E)$ 可解，因此由于 U_i 是完美群，$U_i = U_i \cap M_E$。因此 U_i、$U \leq M$，于是 $M = E$，矛盾。故得（11）。

(12) U^G不是非阿贝尔 P群。

假设 $U^G = Q \rtimes U$是一个类型为（q,p）的非阿贝尔 P群，并令 $\pi = \{q,p\}$。令$S = U^G \cap D$。根据 [24]中的断言 (9)和引理 2.2.2，$U \not\leq S$，因此 $S \leq O_q(D) \leq Z(D)$。此外，断言（11）表明 $S \neq Q$，因此根据 [24, 引理 2.2.2]，$DU^G/D \simeq U^G/S$是一个类型为（q,p）的非阿贝尔 P群。根据断言（8）和（11），$(DU)_G = D$，因此 $G/D = DU^G/D \times K/D$，其中 $DU^G/D = O_\pi(G/D)$且 $K/D = O_{\pi'}(G/D)$，所以 G/D是 π-可分解的。

令 E 为 G中 N 的极小补子。于是 $E \cap D \leq \Phi(E)$，因此 E 可解且可作 π-分解，也就是说，$E = O_\pi(E) \times O_{\pi'}(E)$，因为 $G/D \simeq E/(E \cap D)$。

首先，假设 $\pi \cap \pi(D) = \emptyset$，并令 G_r 为 E 的一个 Sylow r-子群，其中 $r \in \pi$。那么 G_r 是 G 的一个 Sylow r- 子群，因此 E 有一个 Hall π- 子群 H，因为 E 可解且对所有 $x \in G$，$U^G = Q \times U \leq H^x$。于是，根据条件 (i)，对于 G 中的每个 r-元素 x，其中 $r \in \pi$，U 在 $\langle x$ 中是模的，因为 $H \simeq DH/D$ 是一个 M-群。

现在令 $x \in G_r$，其中 $r \notin \pi$。那么对于 D 的某个 Sylow r-子群 D_r、E 的某个 Sylow r-子群 E_r 以及某个 $y \in G$，有 $G_r = D_r E_r^y$。因此 $x = de$，其中 $d \in D_r$ 且 $e \in E_r^y$。现在注意，对任意 $u \in U$，都有 $d^{-1}u^{-1}du \in D \cap U^G = 1$，所以 $D \in C_G(U)$。另一方面，e 是 π-可分群 E^y 的一个 π'-元素，因此 $e \in C_G(U)$。所以 $x \in C_G(U)$，从而 U 在 $\langle x$ 中正规，$U\rangle$。因此，根据定理 5.1，U 在 G 中是模的。 $[24, 13],$，矛盾。最后，如果 $\pi \cap \pi(D) \neq \emptyset$，那么根据条件 (iii)，$U$ 在 G 中是模的。这个矛盾完成了断言的证明。

最终矛盾。由断言 (5)、（7）、（9）和断言（11）可知，$E = C_q U = C_q \times U$ 在 G 中不是次正规子群；结合断言 (8)，$E_G = C_{q^\circ}$ 因此 $G/E_G = E^G/E_G \times K/E_G$，其中

$$E^G/E_G = C_q U^G/C_q \simeq U^G/(C_q \cap U^G)$$

根据引理 5.11，它是一个与 $|K/C_q|$ 互素阶的非阿贝尔 P群。因此，G 是一个 π-可解群，其中 $\pi = \pi(U^G/(C_q \cap U^G))$。于是 D/C_q是 π-可解的。但 $C_q \leq \Phi(D)$，所以 q整除 $|D/C_q|$。因此，q 不整除 $|C_q U^G/C_q|$。

若 $C_q \cap U^G = 1$，则 $U^G \simeq C_q U^G/C_q$是一个非阿贝尔 P群，这与断言 (12) 矛盾，所以 $C_q \leq U^G$。于是 C_q是 U^G的一个 Sylow q子群。因此 $U^G = C_q \rtimes (R \rtimes U)$，其中 $R \rtimes U \simeq U^G/C_q$是一个非阿贝尔 P群。令 $C = C_{UG}(C_q)$。由断言（11）得 $U \leq C$，因此根据 [24]中的引理 2.2.2，$R \rtimes U = U^{R \rtimes U} \leq C$。于是 $C_q \leq Z(U^G)$。因此 $U^G = C_q \times (R \rtimes U)$，其中 $R \rtimes U$是 U^G的特征子群，因而它是 G的正规子群。但此时 $U^G = R \rtimes U \neq C_q \rtimes (R \rtimes U)$，矛盾。

定理得证。

参考文献

[1] A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero、M. Asaad，《有限群的乘积》，Walter de Gruyter，柏林—纽约，2010年。[2] A. Ballester-Bolinches、J.C. Beidleman、H. Heineken，Sylow子群与次正规子群可置换的群，纪念Reinhold Baer（1902—1979）专号。《伊利诺伊数学杂志》，47(1-2)（2003年），63–69。[3] W. Gasch¨utz，正规性具有传递性的群，《纯粹与应用数学杂志》，198（1957），87–92。[4] D.J.S. Robinson，可置换性为传递关系的有限群的结构，《澳大利亚数学会杂志》，70（2001），143–159。[5] A.N. Skiba，关于有限群的 σ-性质 I，《物理、数学与技术问题》，4(21)（2014），89–96。[6] A.N. Skiba，关于有限群的 σ-次正规与 σ-可置换子群，《代数学杂志》，436（2015），1–16。[7] A.N. Skiba，霍尔定理的一个推广，《代数学及其应用》，15(4)（2015），21–36。[8] A.N. Skiba，有限部分可解群理论中的一些结果，Commun. Math. Stat.，4(3)（2016），281–309。[9] A.N. Skiba，有限 σ-可解 $P\sigma T$-群的一些刻画，《代数学杂志》，495(1)（2018），114–129。[10] W. Guo、A.N. Skiba，关于 σ-超可解群及 CLT-群的一个推广，《代数学杂志》，512（2018），92–108。[11] X.F. Zhang、W. Guo、I.N. Safonova、A.N. Skiba，有限 $P\sigma T$-群的罗宾逊描述，《代数学杂志》（2023年1月投稿）。[12] N.M. Adarchenko，有限 σ-可解 $P\sigma T$-群的新刻画 / N.M. Adarchenko //《代数与离散数学》，29(1)（2020），33–41。[13] A.N. Skiba，由形成菲廷集定义的子群格的子格，《代数学杂志》，550（2020），69–85。[14] A-Ming Liu、W. Guo、I.N. Safonova、A.N. Skiba，某些 σ-可解群的 G-覆盖子群系，《代数学杂志》，585（2021），280–293。

[15] Z. Wang, J. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba, 《 σ-可置换性的一种推广》, Commun. Math. Stat., 10 (2022年), 565–579.[16] C. Zhang, W. Guo, A-Ming Liu, 《有限 T群的一种推广》, Commun. Math. Stat., 10 (2022年), 153–162.[17] X. Zhu, C. Cao, W. Guo, 《有限 σ可解群中 σ-可置换性是一种传递关系》, Journal of Algebra and Its Applications, 18(4) (2019年), 1950064（11页）, doi: 10.1142/S0219498819500646.[18] A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera 和 V. P`erez-Calabuing, 《关于两类广义 T群》, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas, 即将发表.[19] R.K. Agrawal, 《次正规子群与所有 Sylow子群可置换的有限群》, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975年), 77–83.[20] A.N. Skiba, 《形成类代数》, 明斯克：Belarus Navuka，1997年.[21] S.F. Kamornikov, M.V. Selkin, 《子群函子与有限群类》, 明斯克：Belarus Navuka，2003年.[22] B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba, 《关于有限群可置换子群理论中的两个开放问题》, Publ. Math. Debrecen, 94 (3-4) (2019年), 477–491.[23] I.N. Safonova, A.N. Skiba, 《广义正规性是一种传递关系的有限群类》, 预印本，2023年.[24] R. Schmidt, 《群的子群格》, Walter de Gruyter，柏林，1994年.[25] K. Doerk, T. Hawkes, 《有限可解群》, Walter de Gruyter，柏林—纽约, 1992年.[26] B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba, 《有限群的 σ-拟正规子群》, Bull. Austral. Math. Soc., 99(3) (2019年), 413–420.[27] B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba, 《有限 PT群的一种推广》, Bull. Austral. Math. Soc., 97(3) (2018年), 396–405.[28] G. Zacher, 《有限可解群中组成子群与准正规子群重合的群》, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) 37 (1964年), 150–154[29] B. Huppert, 《有限群 I》, Springer-Verlag，柏林—海德堡—纽约，1967年.[30] A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, 《有限群类》, Springer-Verlag，多德雷赫特，2006年。

[31] O. Ore, 《有限阶群论的贡献》, Duke 数学杂志, 5 (1939), 431–460.[32] N. Ito, J. Sz´ep, 《关于有限群的准正规子群》, 数学科学学报, 23 (1962), 168–170.[33] R. Maier, P. Schmid, 《可置换子群在有限群中的嵌入》, 数学杂志, 131 (1973), 269–272.[34] J.G. Thompson, 《有限 p群的一个无核准正规子群例子》, 数学杂志, 96 (1973), 226–227.[35] A. Ballester-Bolinces, J.C. Beidleman 和 H. Heineken, 《某些群类的局部方法》, 代数通讯, 31 (2003), 5931–5942.[36] Z. Wang, W. Guo. I.N. Safonova, A.N. Skiba, 《子群的 σ-拟正规性是一种传递关系的有限可解群》, 数学札记（2023年2月提交）.[37] A. Frigerio, 《模子群性质具有传递性的有限群》, 威尼托科学、文学与艺术研究所, 数学与自然科学部学报, 132, (1973–1974年), 185–190.[38] I. Zimmermann, 《有限群的次模子群》, 数学杂志, 202 (1989), 545–557.[39] B.N. Knyagina, V.S. Monakhov, 《具有 Hall π子群的有限群的 π'性质》, 西伯利亚数学杂志, 522 (2011), 398–309.[40] L.A. Shemetkov, 《有限群的形成》, 莫斯科：Nauka, 物理与数学文献总编辑部, 1978年.[41] B. Huppert, N. Blackburn, 《有限群 III》, Springer-Verlag, 柏林、纽约, 1982年.[42] A.-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba, 《模性是一种传递关系的有限群》, 纯粹与应用代数（2023年1月提交）。