arXiv:2302.13266v1 [math.GR] 26 Feb 2023

算术群的有限可生成非刚性

Amir Y. Weiss Behar

Abstract. 我们证明，对于典型的高秩算术格 Γ，存在$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$有限指数子群 Γ_1 和 Γ_2，使得 $\Gamma_1 \not\cong \Gamma_2$，而 $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$。但这条规律也有例外。

1. 引言

设 Γ 是一个有限生成剩余有限群。若对于某个有限生成剩余有限群 Λ，只要 $\Lambda \cong \Gamma$，就有 $\widehat{\ }\Lambda \cong \Gamma$，则称 Γ 是有限生成拓扑下-$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$刚性的。这里，Γ（分别为 Λ）表示 Γ（分别为 Λ）的剩余有限完备化。

直到最近，在有限生成拓扑下刚性的群还都只是“小”群（即不含非阿贝尔自由子群的群）。最近，在一项开创性工作中，Bridson、McReynolds、Reid 和 Spitler 首次给出了“大”群的例子，这些群在有限生成拓扑下刚性，其中包括一些双曲三维流形的基本群 [**3**] 以及一些三角群 [**2**]。

半单李群的算术子群不一定在有限生成拓扑下刚性（[**1**],[**7**]）。一个著名的未决问题是：

$$\text{For } n \geq 2, \text{ is } SL_n(\mathbb{Z}) \text{ profinitely rigid?}$$

虽然我们不会回答这个问题，但我们将证明，这些群存在有限指数子群（至少当 $n \geq 3$ 时）并非在有限生成拓扑下刚性。事实上，我们将证明一个更为一般的结果：

Theorem 1.1（主定理）。设 k 是一个数域，G 是一个连通、单连通、绝对几乎单的 k-线性代数群，具有高 ∞-秩，并且 G(k) 满足同余子群性质，且 $\Gamma \subseteq$ G(k) 是一个算术子群。

（1）除非 G 属于 G_2、F_4 或 E_8，并且 $k = \mathbb{Q}$、Γ 拥有无穷多对有限指数子群 Γ_1 和 Γ_2，这些子群彼此不同构，但其剩余有限完备化同构。（2）这些例外情形确实是例外；在这些情形下，根本不存在这样的子群对。事实上，如果 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq$ G($\mathbb{Q}$) 是具有同构有限生成群的有限商完备化的算术子群，那么 Γ_1 和 Γ_2 同构。

请注意，我们通过证明每个这样的 Γ 都有一个有限指数子群 Γ_1，而该子群并非$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$在有限生成拓扑下刚性，从而表明了这一点；具体来说，对于某个 Γ_2， $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ 与其可公度。这补充了 [**7**], [**1**] 和 [**9**] 的结果，后者给出了有限生成拓扑下同构但不可公度的算术群实例。

为了说明我们的方法，下面仅针对 $\Gamma = SL_4(\mathbb{Z})$（方法 A 和 B）以及 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$（方法 C）介绍这些方法。

方法 A：利用单连通形式的中心：设 $2 \neq p$、q 是两个不同的素数，并设 Λ 是对应于 pq的主同余子群$\frown$。令 ρ_p 为 $SL_4(\mathbb{Z}) \cong \prod_r SL_4(\mathbb{Z}_r)$的元素，它在赋值 $r \neq p$ 处取值为 1，并在赋值 p处取值为 -1；类似地定义$\frown$ $\frown\rho_q$。定义 $\Gamma_1 := \langle \Lambda, \rho_p \rangle \cap SL_4(\mathbb{Z})$以及 $\Gamma_2 := \langle \Lambda, \rho_q \rangle \cap SL_4(\mathbb{Z})$。于是$\frown$ $\frown$ $\frown\Gamma_1 \cong \Lambda \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \Gamma_2$，但 Γ_1和 Γ_2不可能同构。详情见 3.1。

方法 B：使用非平凡的 Dynkin 自同构：令 2、$3 \neq p$、q 为两个不同的素数。考虑 $SL_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 的以下极大抛物子群。

$$P_{1,p} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{2,p} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}$$

类似地，定义 $SL_4(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ 的极大抛物子群 $P_{1,\ q}$ 和 $P_{2,\ q}$。现在，令 Γ_1 为对应于 $P_{1,\ p}$ 模 p、$P_{1,\ q}$ 模 q 且模 3 下平凡的同余子群，并令 Γ_2 为对应于 $P_{1,\ p}$ 模 p、$P_{2,\ q}$ 模 q 且模 3 下平凡的同余子群。那么，Γ_1 和 Γ_2 的剩余有限完备化通过 $SL_4(\mathbb{Z})$ 的一个自同构同构：该自同构在赋值 q 处是非平凡的 Dynkin 自同构，在其他地方则为恒等自同构，但它们本身不可能同构。详情见 4.1。

方法 C：使用数域：令 $2 \neq p$、q 为两个不同的素数，使得 2 在 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{Q}_q$ 中是平方，因此 p 和 q 在 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 中完全分裂。令 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 和 $\mathfrak{p}_1$、$\mathfrak{p}_2|p$、$\mathfrak{q}_1$、$\mathfrak{q}_2|q$ 分别为位于 p 和 q 之上的素数。令 Γ_1 为对应于 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ 的主同余子群，令 Γ_2 为对应于 $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_1$ 的主同余子群。由于 $SL_2(\mathcal{O})$ 的同余核是平凡的，$\widehat{SL_2\ \mathcal{O}}(\ ) \cong \left(\prod_{l \neq p,q} SL_2(\mathcal{O}_l)\right) \times \prod_{i=1}^{2} (SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}) \times SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{q}_i}))$，其中对于一个素数 $l \neq p$，q、$\mathcal{O}_l$ 是相对于位于 l 之上的素数对 $\mathcal{O}$ 的完备化。于是，$\widehat{\Gamma_1}$ 和 $\widehat{\Gamma_2}$ 的拟有限完备化通过 $\widehat{SL_2\ \ \ }(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ 的自同构同构，该自同构将位 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 换位。但 Γ_1 和 Γ_2 不可能

同构。详情见 3.2。

主定理通过将上述方法推广到更一般的算术格而得以证明（事实上，真正需要的只有方法 A 和方法 C）。

本文结构如下：在第 §2 节介绍一些预备知识后，我们将在第 §3 节推广方法 A 和方法 C，从而证明主定理的第一部分。在第 §4 节中，我们将详细阐述方法 B，最后在第 §5 节中证明例外情形确实是例外，由此完成主定理的证明。在第 §6 节中，我们将给出主定理一个更强、更一般的版本，指出该定理适用于 S-算术群，而不仅仅适用于算术群。此外，我们可以找到任意（有限）多个彼此不同构的子群，它们具有同构的有限生成群的有限商完备化（而不只是成对的子群）。

致谢。本文是作者在希伯来大学攻读博士期间所撰博士论文的一部分。对于提出上述课题并给予宝贵指导、建议和见解，我由衷感谢我的导师 Alexander Lubotzky 和 Shahar Mozes。在撰写本文期间，我获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划（资助协议编号 882751）提供的资助，以及 2019/19 年 ISF-Moked 基金的资助。

2. 预备知识

下文始终假设 k 是一个数域。k 的赋值集合记为 $V(k)$，它是阿基米德位集合 $V_\infty(k)$ 与有限处集合 $V_f(k)$ 的并集。k 在 $v \in V(k)$ 处的完备化记为 k_v。令 $\mathcal{O}_k$ 表示 k 的整数环；对于有限处 $v \in V_f(k)$，记 $\mathcal{O}_{k,v}$ 为 k_v 的整数环。有限阿代尔环 $\mathbb{A}_k^f = \prod_{v\in V_f(k)}^* k_v := \{(x_v)_v \in \prod_{v\in V_f(k)} k_v : x_v \in \mathcal{O}_{k,v} \text{ 对除有限多个赋值 } \}$ 外的所有情形而言，是所有有限完备化的受限直积。如果根据上下文可以明确 k，则在上述所有记号中省略字母 k。

Let 设 G 是一个连通、单连通、绝对几乎单的 k-线性代数群，并固定一个忠实的 k-表示 ρ：G $\to GL(n_\rho)$。若子群 $\Gamma \subseteq$ G(k) 与 G($\mathcal{O}$) 可公度，则称其为算术群（关于算术群的更多细节，见 [**12**] 和 [**14**]）。我们通常将 G 写作 G 的伴随形式（即泛形式），并记 π : G $\to$ G 为泛覆盖映射；它是一个中心等ogeny，且 C := ker $\pi = \mathcal{Z}$(G) 是一个有限群。G 的 $V_\infty(k)$-秩为 $\text{rank}_{V_\infty(k)}\text{G} := \sum_{v\in V_\infty(k)} \text{rank}_{k_v}\text{G}$，其中 rank_{k_v}G 是一个极大 k_v-分裂环面的维数；如果其 $V_\infty(k)$-秩为 ≥ 2，则称 G 具有高 ∞-秩。

我们将以相当微妙的方式运用 Margulis 超刚性。我们使用的具体版本如下：

Theorem 2.1（Margulis 超刚性）。设 G 具有高 ∞秩，并令 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq$ G(k) 为算术子群。进一步假设 $\Gamma_i \cap$ C(k) $= 1$。如果

$\varphi:\Gamma_1\to\Gamma_2$ 是一个同构，则存在唯一的 k-自同构 Φ of $\tilde{G}$，以及唯一的自同构 σ of k，使得对于每个 $\gamma\in\Gamma_1$，都有 $\varphi(\gamma)=\Phi(\sigma^0(\gamma))$，其中 σ^0 是由 σ诱导的 $\tilde{G}(k)$ 的自同构。

Proof. 通过万有覆盖映射 $\pi:G\to G$ 将 Γ_1 与 Γ_2 识别为伴随群 $G(k)$ 的算术子群后，Margulis 超刚性 [**11**, 定理 VIII.3.6.(ii)] 表明，同构 φ 可以扩张为 $Res_{k/\mathbb{Q}}G$ 的一个自同构。根据限制标量函子的性质，这样的自同构必为 $\Phi\circ\sigma^0$ 的形式，其中 Φ 是 G 的一个 k-自同构，而 k [**6**, 是域 σ 的一个自同构（命题 A.5. 14]）。此外，伴随形式 G 的 k-自同构Φ 可解释为万有$\tilde{}$形式 G 的一个 k-自同构，因此定理得证。□

若 σ 是 k的一个自同构，它会诱导 k的（有限多个）位的一个置换，进而通过按 σ置换各因子，诱导阿代尔群 $\tilde{G}(\mathbb{A}_k^f)$ 的一个自同构，记为 $\sigma^0_{\mathbb{A}}$。若 Φ 是 $\tilde{G}$ 的一个 k-自同构，则对 $\tilde{}$ $\tilde{}$的每个有限赋值 v，它$\tilde{}$ $\tilde{}$会诱导一个唯一的 k_v-自同构 $\Phi_v:G(k_v)\to G(k_v)$；而乘积 $(\Phi_v)_v:\prod_v G(k_v)\to\prod_v G(k_v)$ 限制为一个自同构$\Phi_{\mathbb{A}}$：$\tilde{G}(\mathbb{A}_k^f)\to\tilde{G}(\mathbb{A}_k^f)$ [**14**, §5]。显然，对于每个 $\gamma\in\tilde{G}(k)\tilde{}$，都有 $\Phi(\sigma^0(\gamma))=\Phi_{\mathbb{A}}(\sigma^0_{\mathbb{A}}(\gamma))$（我们将有理点群 $G(k)$ 与其在阿代尔点群 $\tilde{G}(\mathbb{A}_k^f)$ 中的对角嵌入相认）；并且该自同构具有此性质且唯一。因此得到以下推论：

Corollary 2.2. 在满足前述定理假设的条件下，若 $\varphi:\Gamma_1\to\Gamma_2$ 是一个同构，则存在唯一的阿代尔群 $\tilde{G}(\mathbb{A}_k^f)$ 的自同构 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 和 $\sigma^0_{\mathbb{A}}$，使得 $\sigma^0_{\mathbb{A}}$ 由 k的一个自同构诱导，而 $\Phi_{\mathbb{A}}$由 $\tilde{G}$ 的一个 k-自同构诱导，并且对每个 $\gamma\in\Gamma_1$，均有 $\varphi(\gamma)=\Phi_{\mathbb{A}}(\sigma^0_{\mathbb{A}}(\gamma))$。

我们还需要一个阿代尔版本的 Margulis 超刚性，该版本由 Kammeyer 和 Kionke 陈述并证明，见 [**8**, 定理 3.2]:

Theorem 2.3. 设 G 是一个连通、绝对几乎单的 $\mathbb{Q}$-线性代数群，具有高 ∞-秩，且 $\Gamma\subseteq G(\mathbb{Q})$ 是一个算术子群。若 $\varphi:\Gamma\to G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^f)$ 是一个同态，且 $\varphi(\Gamma)$ 有非空内点，则存在阿代尔群之间的同态 $\eta:G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^f)\to G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^f)$，以及一个群同态 $\nu:\Gamma\to\mathcal{Z}(G)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^f)$，其像有限，使得对所有 $\gamma\in\Gamma$，均有 $\varphi(\gamma)=\nu(\gamma)\eta(\gamma)$。此外，$\eta$ 和 ν 由此条件唯一确定。

2.1. 副有限群与同余子群性质。族 $(\{G_i\}_{i\in I},\{\phi_{i,j}\}_{i\geq j\in I})$ 是有限群在有向集 I 上的逆系统，若 G_i 是有限群，$\phi_{i,\,j}:G_i\to G_j$ 是群同态（当 $i\geq j$ 时），并且对每个 $i\geq j\geq k$ 和 $\phi_{ii}=id_{G_i}\ \forall i$，$\phi_{i,\,k}=\phi_{j,\,k}\phi_{i,\,j}$。若一个群 G 是某个有向集上有限群逆系统的逆极限，则称其为副有限群。副有限群是紧致、豪斯多夫且全不连通的拓扑群，副有限群之间的映射是群的连续同态。

Example 2.4（剩余有限完备化）。设 Γ 是有限生成群，$\mathcal{N}$ 是 Γ 的有限指数正规子群集；对于 $M, N \in \mathcal{N}$，规定当 $N \subseteq M$ 时 $M \leq N$，则它是一个有向集。考虑自然商同态 $\phi_{N,\ M}$: $\Gamma/N \to \Gamma/M$，则副有限群 $\Gamma = \lim_{\longleftarrow N \in \mathcal{N}} \Gamma/N$ 称为 Γ 的剩余有限完备化。

剩余有限完备化 Γ 与集合 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 所包含的 Γ 有限商群的同构类，以下述方式包含相同的信息：

Theorem 2.5. *[18, 定理 3.2.2 与 3.2.7]* 若 Γ和 Λ 是两个有限生成剩余有限群，则 $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Lambda)$ 当且仅当 $\Gamma \cong \Lambda$

存在一个自然映射 ι: $\Gamma \to \Gamma$，定义为 $\gamma \mapsto (\gamma N)_N$。该映射是单射当且仅当 Γ 是剩余有限的；在这种情况下，我们将 Γ 与其像 $\iota(\Gamma)$ 等同。

有序对 (Γ, ι) 满足泛性质：$\iota(\Gamma)$ 在 Γ 中稠密；对于任意有限生成完备群 P 以及任意同态 φ : $\Gamma \to P$，存在唯一的有限生成完备群同态 $\hat{\varphi}$: $\Gamma \to P$，使得 $\phi \circ \iota = \varphi$。

Γ 以及有限指数子群之间存在紧密联系

Proposition 2.6. *[18, 命题 3.2。2]* 设 Γ 是一个有限生成的残余有限群，那么 Γ 的所有有限指数子群组成的集合 $\mathcal{X}$ 与 Γ的所有有限指数子群组成的集合 $\mathcal{Y}$ 之间存在一一对应关系，具体为

$$X \mapsto \overline{X}, \quad X \in \mathcal{X}$$
$$Y \mapsto Y \cap \Gamma, \quad Y \in \mathcal{Y}$$

其中 $\overline{X}$ 表示 X 在 Γ中的闭包。此外，该双射保持正规性、指数和商群。

Example 2.7（同余完备化）。设 Γ 是$\tilde{\mathrm{G}}(k)$的一个算术子群。考虑由所有同余子群组成的集合 $\mathcal{C}$，即包含$\tilde{\Gamma}[\mathcal{I}] := \Gamma \cap \ker(\phi_{\mathcal{I}} : \mathrm{G}(\mathcal{O}_k) \to \mathrm{G}(\mathcal{O}_k/\mathcal{I}))$的子群，其中 $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{O}_k$是某个理想，$\phi_{\mathcal{I}}$ 是模 $\mathcal{I}$的约化映射。与剩余有限完备化中一样，$\mathcal{C}$ 按包含关系的反向构成一个有向集，并可相对于该逆系统构造 Γ 的同余完备 $\overline{\Gamma}$。

因此，存在一个从剩余有限完备化到同余完备的满射 $\Gamma \to \overline{\Gamma}$。称 $C(\Gamma)$ 为该映射的核，即同余核。若群 Γ 的同余核 $C(\Gamma)$ 是有限群，则称该群具有同余子群性质。容易看出，$\tilde{\ }$同余子群性质实际上是环境群 G 和域 k的性质。

Serre 的猜想是算术子群，则 $\mathrm{rank}(\Gamma)$ 是平凡群，或同构于 $\tilde{\mathrm{G}}$ 的单位根子群。该猜想已在许多情形下得到证明，例如，所有各向同性情形 [**17**] 以及所有 B_n、C_n、D_n 型各向异性群（某些 D_4 的三歧同构形式除外）、E_7、E_8、F_4 和 G_2 型各向异性群（[**14**, 第 9], [**16**] 章）。

2.2. 数论引理。

LEMMA 2.8. 设 G 是一个连通、单连通、绝对几乎单的 k-线性代数群。存在无穷多个有限处 $v \in V_f(k)$，使得 G 在 k_v 上分裂。此外，可以假设对于这些赋值，$C(\mathcal{O}_v) = C(\mathbb{C})$。

PROOF. 存在一个有限伽罗瓦域扩张 k'/k，使得 G 在k' 上分裂，且 $C(k') = C(\mathbb{C})$。根据切博塔廖夫密度定理 [**13**, 推论 13.6], ，存在无穷多个素数 $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_k$，它们在 k' 中完全分裂。特别地，如果这样的素数位于一个素数 $\mathfrak{p}' \subseteq \mathcal{O}_{k'}$ 之下，那么 $k_v \cong k'_{v'}$，其中 v 和 v' 分别是与素数 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{p}'$ 对应的赋值。因此，对于这样的赋值 v，$\tilde{G}$ 在 k_v 上分裂。
此外，由于中心 $C(k')$ 是有限的，对于除有限多个赋值之外的所有赋值，$C(k') = C(\mathcal{O}_{k',\, v'})$。因此，存在无穷多个赋值 $v \in V_f(k)$，使得 $C(\mathcal{O}_{k,\, v}) = C(\mathbb{C})\tilde{}$，且 G 在 k_v上分裂。□

3. 主定理的第一部分——存在性

本节将证明定理 1.1 的第一部分，即存在性部分；它将由以下两个定理推出。

THEOREM 3.1. 设 $\Gamma \subseteq G(k)$ 是一个算术子群。假设 G 具有同余子群性质，且其型不同于 E_8、F_4 或 G_2。那么存在两个不同构的有限指数子群 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq \Gamma$，它们具有同构的有限生成群的有限商完备化。

PROOF. （沿用方法 A）取一个有限指数子群后，不妨假设存在一个有限素数集 S 以及一个紧开子群 $\Lambda \subseteq \prod_{v\in S} G(k_v)$，它与 $\prod_{v\in S} G(\mathcal{O}_v)$ 可公度，使得

$$\widehat{\Gamma} = \overline{\Gamma} \cong \Lambda \times \prod_{v\notin S} \check{\mathbf{G}}(\mathcal{O}_v). \tag{1}$$

事实上，同余核 $C(\Gamma) \subseteq \Gamma$ 是有限的，因此可以找到一个上述形式的有限指数子群 $\Gamma'^P \subseteq \widehat{\Gamma}$。由命题 2.6，存在一个有限指数子群 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，使得 $\widehat{\Gamma'} = \Gamma'^P$。令 $\pi : \tilde{G} \to G$ 为到伴随形式 G 的典范中心等基。再次取一个有限指数子群后，可以假设 $\Gamma \cap C(k) = \{1\}$，并且 Γ 仍具有与 (1) 相同的形式。

令 S_Q 为所有位于 S 中某个赋值之下的有理素数的集合，并令$S_{\text{full}} = \{v : \text{对于某个 } p \in S_Q\}$，有 $v|p$。根据引理 2.8，可以找到两个分别位于不同有理素数 p 和 q 之上的赋值 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{q} \notin S_{\text{full}}$，使得 $C(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) = C(\mathcal{O}_\mathfrak{q}) = C(\mathbb{C})$，因此还存在同阶的元素 $1 \neq \rho_\mathfrak{p} \in C(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ 和 $1 \neq \rho_\mathfrak{q} \in C(\mathcal{O}_\mathfrak{q})$。对于每个 $v|p$、q，令 Δ_v 为 $\tilde{G}(\mathcal{O}_v)$ 的一个有限指数子群，满足 $C(\mathcal{O}_v) \cap \Delta_v = \{1\}$。定义 $\epsilon_\mathfrak{p} = (\epsilon_{\mathfrak{p},w})_w$、$\epsilon_q = (\epsilon_{\mathfrak{q},w})_w \in \Gamma$，其中

$$\epsilon_{\mathfrak{p},w} := \begin{cases} 1 & \text{if } w \neq \mathfrak{p} \\ \rho_\mathfrak{p} & \text{if } w = \mathfrak{p} \end{cases}, \quad \epsilon_{\mathfrak{q},w} := \begin{cases} 1 & \text{if } w \neq \mathfrak{q} \\ \rho_\mathfrak{q} & \text{if } w = \mathfrak{q} \end{cases}$$

现在我们定义 Γ 的以下子群:

$$\Delta = \Lambda \times \prod_{v\notin S,\, v\nmid p,\, v\nmid q} \tilde{\mathbf{G}}(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v|p \text{ or } v|q} \Delta_v$$

$$\Delta_1 = \langle \Delta, \epsilon_{\mathfrak{p}} \rangle \cong \Delta \times \langle \epsilon_{\mathfrak{p}} \rangle$$

$$\Delta_2 = \langle \Delta, \epsilon_{\mathfrak{q}} \rangle \cong \Delta \times \langle \epsilon_{\mathfrak{q}} \rangle$$

显然， Δ_1 和 Δ_2 是 Γ的同构有限指数子群。根据命题 2.6，存在有限指数子群 $\Gamma_i \subseteq \Gamma$，使得对于 $i = 1$，2，有 $\Gamma_i = \Delta_i$。我们将通过证明 Γ_1 和 Γ_2 不可能同构来完成证明。

反设存在同构 φ： $\Gamma_1 \to \Gamma_2$。根据推论 2.2，存在唯一的阿代尔自同构 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 和 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$，它们作用于 $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_k^f)$，使得 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$ 由 k 的一个自同构诱导，而 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 由$\tilde{\mathbf{G}}$ 的一个 k-自同构诱导，并且对于每个 $\gamma \in \Gamma_1$，有 $\varphi(\gamma) = \Phi_{\mathbb{A}}(\sigma_{\mathbb{A}}^0(\gamma))$。取闭包可推出$\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{(\tilde{\varphi}_{\mathbb{A}} \circ \sigma_{\mathbb{A}})(\Gamma_1)} = \Gamma_2$。另一方面，有限生成$\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{\Gamma_1}$完备化之间的诱导映射 $\widehat{\varphi}$： $\widehat{\Gamma_1} \to \Gamma_2$ 是唯一满足对于每个 $\gamma \in \Gamma_1$有 $\widehat{\varphi}(\gamma) = \varphi(\gamma)$的映射。因此，必有 $\widehat{\varphi} \equiv (\tilde{\varphi}_{\mathbb{A}} \circ \sigma_{\mathbb{A}})|_{\widehat{\Gamma_1}}$。特别地，这意味着$\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{\Gamma_1}$的第 $\mathfrak{p}$个赋值被同构映射到 Γ_2的第 $\sigma(\mathfrak{p})$个赋值。这是矛盾$\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{\Gamma_1}$，因为 $\sigma(\mathfrak{p})|p$，所以 Γ_2 的第 $\sigma(\mathfrak{p})$个赋值是无中心的，而 Γ_1 的第 $\mathfrak{p}$个赋值具有非平凡中心。□

THEOREM 3.2. 设 $\Gamma \subseteq \mathbf{G}(k)$ 是一个算术子群。进一步假设$\tilde{\mathbf{G}}(k)$ 具有同余子群性质，并且 k 是一个维数为$d \geq 2$、定义在 $\mathbb{Q}$上的数域。那么存在两个不同构的有限指数子群 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$，它们具有同构的有限生成群的有限商完备化。

PROOF. （沿用方法 C）和之前一样，通过转到一个有限指数子$\widehat{\Gamma}$ $\overline{\Gamma}$ $\tilde{\mathbf{G}}$群，我们可以假设 $\Gamma \cap \mathbf{C}(k) = \{1\}$ 并且 $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda \times \prod_{v\notin S} \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$，其中$\tilde{\Lambda}$ $\tilde{\Lambda}$是某个有限个赋值的集合，且$\Lambda \subseteq \prod_{v\in S} \mathbf{G}(k_v)$ 与 $\prod_{v\in S} \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ 可公度。令 S_Q 和 S_{full} 与之前相同。由切博塔廖夫密度定理，存在无穷多个在 k [**13**, 中完全分裂的有理素数。推论 13.6], 取两个不同的此类素数 p, $q \notin S_Q$。设 $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_d | p$ 和 $\mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_d | q$。对于 $i = 1$，令 2、$\Gamma_i := \Gamma(\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_1)$ 为模 $\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_1$ 的主同余子群，则显然$\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{\Gamma_1} \cong \Gamma_2$。

根据推论 2.2，若 Γ_1 和 Γ_2 同构，则存在唯一的 $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_k^f)$ 的阿代尔自同构 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 和 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$，使得 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$ 由 k 的一个自同构诱导，且 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 由 $\tilde{\mathbf{G}}$ 的一个 k-自同构诱导，并且对每个 $\gamma \in \Gamma_1$，都有 $\varphi(\gamma) = \Phi_{\mathbb{A}}(\sigma_{\mathbb{A}}^0(\gamma))\widehat{\Gamma_1}$ $\widehat{\Gamma_1}$。取闭包后可推出 $(\tilde{\varphi}_{\mathbb{A}} \circ \sigma_{\mathbb{A}})(\Gamma_1) = \Gamma_2$。由于 $\sigma_{\mathbb{A}}$ 通过置换各赋值起作用，而 $\tilde{\varphi}_{\mathbb{A}}$ 则逐赋值起作用，因此必有 $\sigma_{\mathbb{A}}$： $\mathfrak{p}_1 \mapsto \mathfrak{p}_1$。我们断言这样的 σ 必定是平凡的，由此即可完成证明。

事实上，设 N 是 k, $G := Gal(N/\mathbb{Q})$ $H := Gal(N/k)$ 的伽罗瓦闭包，设 $\mathfrak{r}$ 是位于 $\mathfrak{p}_1$ 上方的一个素数， $G_{\mathfrak{r}}$ 是它的分解群。由 $H\sigma G_{\mathfrak{r}} \mapsto \sigma\mathfrak{p}_1$ 给出的对应关系 $H\backslash G/G_{\mathfrak{r}} \to \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_d\}$ 是一个一一对应（G-集之间），因此 $G_{\mathfrak{r}}$ 必为平凡群。于是， $Aut(k)$ 在素数集 $\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_d\}$ 上自由作用，正如所需。□

4. 另一组例子

以下定理并非主定理证明所必需，但沿用方法 B，它给出了更多算术群在有限生成拓扑下不刚性的例子。

THEOREM 4.1. 设 $\Gamma \subseteq \mathbf{G}(k)$ 是一个算术子群。进一步假设 $\mathbf{G}$ 具有：1）同余子群性质；2）类型为 A_n, D_n 或 E_6；以及 3）存在一个阿基米德赋值 k_v，使得 $\mathrm{rank}_{k_v}\mathbf{G} \geq 2$。那么，存在两个不同构的有限指数子群 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$，它们的剩余有限完备化同构。

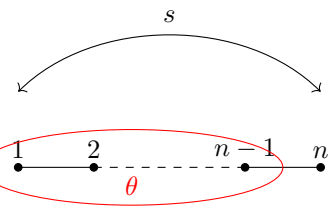
注意，A_n, D_n, E_6 恰好是具有非平凡对称性的 Dynkin 图类型。

PROOF. （采用方法 B）和之前一样，通过转到一个有限指数子群，我们可以假设 $\Gamma \cap \mathbf{C}(k) = \{1\}$，且 $\Gamma = \Gamma = \Lambda \times \prod_{v \notin S} \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$，其中是一个有限个赋值的集合 S，而 $\Lambda \subseteq \prod_{v \in S} \mathbf{G}(k_v)$ 与 $\prod_{v \in S} \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ 可公度。

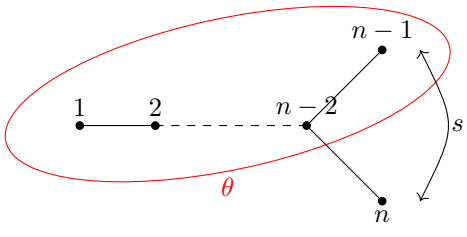
根据引理 2.8，可以找到两个不同的素数 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{q} \notin S_{\mathrm{full}}$（其中 $S_{\mathrm{full}} \supseteq S$ 如上一节所述），它们分别位于不同的有理素数之上，并且使得 $\mathbf{G}$ 在 $k_{\mathfrak{p}}$ 和 $k_{\mathfrak{q}}$ 上都分裂。为 $\mathbf{G}(k_{\mathfrak{p}})$ 和 $\mathbf{G}(k_{\mathfrak{q}})$ 固定根系，并令 Σ 表示这两个群中所对应的单根集合。对于 $v = \mathfrak{p}$、$\mathfrak{q}$，约化映射 将 $\pi_v : \mathbf{G}(\mathcal{O}_v) \to \mathbf{G}(\mathcal{O}_v/v)$ 映到满射，而 $G_v := \mathbf{G}(\mathcal{O}_v/v)$ 是与 $\mathbf{G}$ 具有相同类型、定义在剩余域上的分裂普遍 Chevalley 群。我们所固定的根系为 G_v 定义了相应的根系。

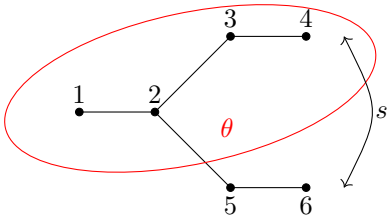
对于所涉及的每一种类型，都存在 Dynkin 图的非平凡对称 s，选取一个在 s 下不保持不变的子集 $\theta \subseteq \Sigma$，例如：

A_n :



D_n :





E_6：

Dynkin 图的对称 s 诱导出 G_v [**21**,的一个同构 φ_v，即推论至定理 29]。对于单根的一个子集 $R \subseteq \Sigma$，令 $P_{v,R}$ 为与 R对应的 G_v 的抛物子群，则 $P_{v,\theta}$ 和 $P_{v,s\theta}$ 在 G_v中不共轭，但通过 φ_v同构。

现在，令 $\pi\colon \Gamma \to G_{\mathfrak{p}} \times G_{\mathfrak{q}}$ 为模 $\mathfrak{pq}$ 的典范约化映射。考虑以下两个同余子群

$$\Gamma_1 := \pi^{-1}(P_{\mathfrak{p},\theta} \times P_{\mathfrak{q},\theta});$$
$$\Gamma_2 := \pi^{-1}(P_{\mathfrak{p},s\theta} \times P_{\mathfrak{q},\theta}).$$

于是，Γ_1 和 Γ_2 通过 $\Phi := (\Phi_v)_v$ 同构，其中 $\Phi_v \equiv id$ 对于 $v \neq \mathfrak{p}$ 成立，而 $\Phi_{\mathfrak{p}}$ 是由 Dynkin 图的非平凡对称 s 诱导的 $\mathbf{G}(k_{\mathfrak{p}})$ 的同构。接下来只需证明 Γ_1 和 Γ_2 不可能同构。

反设存在一个同构 $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$。根据推论 2.2，存在唯一的 $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k^f)$ 的阿代尔自同构 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 和 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$，使得 $\sigma_{\mathbb{A}}^0$ 由 k 的一个自同构诱导，而 $\Phi_{\mathbb{A}}$ 由 $\mathbf{G}$ 的一个 k-自同构诱导，并且对每个 $\gamma \in \Gamma_1$，均有 $\varphi(\gamma) = \Phi_{\mathbb{A}}(\sigma_{\mathbb{A}}^0(\gamma))$。此外，$\Phi_{\mathbb{A}}$ 具有如下形式：$C_g \cdot \omega_{\mathbb{A}}$，其中 C_g 是由某个 $g \in \mathbf{G}(\overline{k})$ 给出的共轭，ω 是来自 Dynkin 图对称的外自同构，而 $\omega_{\mathbb{A}}$ 仅在每个赋值处作用为 ω。特别地，$\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\mathfrak{p},\theta})$ 被映射到 $g\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\sigma(\mathfrak{p}),\omega\theta})g^{-1}$，而 $\pi_{\mathfrak{q}}^{-1}(P_{\mathfrak{q},\theta})$ 被映射到 $g\pi_{\mathfrak{q}}^{-1}(P_{\sigma(\mathfrak{q}),\omega\theta})g^{-1}$。根据我们对 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 的选择，必有 $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ 且 $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$。

我们有 $g^{-1}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\mathfrak{p},\theta})g = \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\mathfrak{p},\omega\theta})$，从两侧乘以 $\mathbf{G}(k)$ 中的元素 g，可以假设 g 的共轭作用保持在证明开始时固定的根系。若 $\theta \neq \omega\theta$，令 α 为 $\omega\theta \backslash \theta$ 中的一个单根，则 g 对单参数幺幂子群 U_α 的作用必定是乘以某个 f_α 的标量乘法，且 $\mathrm{val}_{\mathfrak{p}}(f_\alpha) = 1$。因此，它对相反的单参数幺幂子群 $U_{-\alpha}$ 的作用是乘以 $1/f_\alpha$ 的标量乘法，但此时 $g^{-1}\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\mathfrak{p},\theta})g \not\subseteq \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_{\mathfrak{p},\omega\theta})$。因此，$\theta$ 必须等于 $\omega\theta$。同样的论证表明 $\omega\theta = s\theta$，从而 $\theta = \omega\theta = s\theta$。然而，$\theta$ 被选为在 s 下不变，这就产生了矛盾。□

5. 主定理的第二部分——例外情形

LEMMA 5.1. 设 G 是一个连通、单连通且绝对几乎单的 $\mathbb{Q}$-线性代数群，其类型为 E_8、F_4 或 G_2。那么，对于每个 p，G 都在 $\mathbb{Q}_p$ 上分裂。

PROOF. 群 G 的 $\mathbb{Q}_p$ 形式由第一伽罗瓦上同调集 $H^1(\mathbb{Q}_p, Aut(\mathbf{G}))$ 分类。对于所考虑的群，泛形式与伴随形式重合，而且它们的 Dynkin 图没有任何对称性，因此$Aut(\mathbf{G}) \cong \mathbf{G}$。由于域 $\mathbb{Q}_p$ 是局部非阿基米德域，根据 [**14**, 定理 6.4]，伽罗瓦上同调群 $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbf{G})$ 是平凡的。因此，G 只有一种（在同构意义下）$\mathbb{Q}_p$ 形式；特别地，这种形式必定是分裂形式。□

REMARK. 如果 G 是一个 k-分裂的简单 k-线性代数群，那么 $\mathbf{G}(k)$ 的自同构群 $Aut(\mathbf{G}(k))$ 是完全已知的。具体而言，沿用 [**21**, 定理 30], 中的记号，每个自同构都可以写成内自同构、对角自同构、图自同构和域自同构的乘积。方法 B 使用了图自同构，方法 C 使用了域自同构。对角自同构群（模去内自同构后）与泛形式 [**21**, 的中心有关； 30], 定理后的练习中用到了这一点。因此，将讨论范围限制在例外情形中——即 G 的类型为E_8、F_4 或 G_2，且 $k = \mathbb{Q}$ （ $\mathbb{Q}_p$的情形也如此）——所有自同构都是内自同构。

THEOREM 5.2. 设 G 是一个连通、单连通且绝对几乎单的高 ∞-秩 $\mathbb{Q}$-线性代数群，其类型为 E_8、F_4 或 G_2。若 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ 是两个具有同构的有限生成群的有限商完备化的算术子群，则 Γ_1 和 Γ_2同构。

PROOF. 设 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ 是两个算术子群。如预备知识中所述，这些群的同余核是平凡的，因此可以写成$\widehat{\overline{\Gamma_i}} = \Gamma_i = \Lambda_i \times \prod_{p \notin S} \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$，其中 S 是一个有限集，并且 Λ_i 与 $\prod_{p \in S} \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ 可公度。设 $\Phi:\ \widehat{\overline{\Gamma_1}} \cong \widehat{\Gamma_1} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Gamma_2} \cong \widehat{\overline{\Gamma_2}} \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{A})$ 是两个群的剩余有限完备化之间的同构。根据阿代尔超刚性 2.3，存在唯一的阿代尔群同态

$$\tilde{\Phi} : \mathbf{G}(\mathbb{A}^f) \to \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$$

使得 $\tilde{\Phi}|_{\Gamma_1} \equiv \Phi \circ \iota|_{\Gamma_1}$，因为根据我们对~G 类型的假设，$\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ 是无中心的。此外，利用映射的唯一性，Φ 必须是一个同构，并且~$\Phi|_{\overline{\Gamma_1}} \equiv \Phi$。

~考虑同态 $\Phi_{p,\ q}:\ \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbf{G}(\mathbb{Q}_q)$，它们是复合映射

$$\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\iota_p} \mathbf{G}(\mathbb{A}^f) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} \mathbf{G}(\mathbb{A}^f) \xrightarrow{\pi_q} \mathbf{G}(\mathbb{Q}_q)$$

~包含映射在第 p 个赋值处的映射 Φ，以及投影到第 q 个赋值处的映射。这是从一个 p-adic 群到一个 q-adic 群的连续同态，因此如果 $p \neq q$，它必定是局部常值映射。所以其像是 $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_q)$ 的正规可数子群；特别地，它不是有限指数的，因此必定是平凡的 [**14**,

˜ ˜命题 3.17]。因此， $\Phi = (\Phi_{p,\ p})_p$ 由每个赋值处的一个同构给出，˜而 $\Phi_{p,\ p}$ 必定是由某个 $y'_p \in \mathsf{G}(\mathbb{Q}_p)$ 元素所作的共轭（见上文注记）。˜我们按如下方式截断 Φ ，

$$\text{write } y = (y_p)_p, \text{ where } y_p = \begin{cases} y_p = y'_p & p \in S \\ y_p = 1 & p \notin S \end{cases}.$$

根据我们对 S 的选择，通过 y 共轭仍是 $\overline{\Gamma_1}$ 与 $\overline{\Gamma_2}$ 之间的同构。根据强逼近定理 [**14**, 定理 7.12], ，存在某个 $g \in \mathsf{G}(\mathbb{Q})$，使得 $g \in y\overline{\Gamma_1}$。因此，通过 $g \in \mathsf{G}(\mathbb{Q})$ 共轭是 $\overline{\Gamma_1}$ 与 $\overline{\Gamma_2}$ 之间的同构。我们有 $\Gamma_i = \overline{\Gamma_i} \cap \mathsf{G}(\mathbb{Q})$，这意味着 Γ_1 与 Γ_2 可以通过 g 共轭，正如所需。□

6. 最后说明

我们的方法还可以进一步推广。例如，使用方法 A，我们可以找到 $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ 的有限指数子群，它们在有限生成拓扑下并不刚性。具体而言（对于 $p \neq 2$、3、5），以下 $SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ 的有限指数子群彼此不同构，但它们的有限生成群的有限商完备化相同：

$$\Gamma_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[1/p]) : \begin{matrix} b, c \equiv 0 \mod 3, 5 \\ a, d \equiv \pm 1 \mod 3 \\ a, d \equiv 1 \mod 5 \end{matrix} \right\};$$

$$\Gamma_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[1/p]) : \begin{matrix} b, c \equiv 0 \mod 3, 5 \\ a, d \equiv 1 \mod 3 \\ a, d \equiv \pm 1 \mod 5 \end{matrix} \right\}.$$

⌢ ⌢ ⌢事实上，正如 §3 中的情况， $\Gamma_1 \cong \Gamma(15)$ $\times\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \Gamma_2$，其中 $\Gamma(15)$ 是 Γ 的 15 级主合同子群。

需要强调的是，目前尚不清楚 $SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ 本身是否在有限生成拓扑下刚性；事实上，有一些理由相信它是刚性的（例如参见 [**5**, §4]）。另一方面，维数稍微增加后，已有研究表明 $SL_4(\mathbb{Z}[1/p])$ 并非在有限生成拓扑下刚性 [**5**]。

我们想陈述一个更强的定理 1.1 版本，其中包含上述例子。首先，我们需要引入一些进一步的记号。设 $S \subseteq V(k)$ 是一个包含所有阿基米德位的有限个赋值的集合。数域 k 的 S-整数环为

$$\mathcal{O}_{k,S} := \{x \in k : v(x) \geq 0 \, \forall v \notin S\}$$

˜设 G 是一个连通、单连通、绝对几乎单的 k-线性代数˜群，并固定一个忠实的 k-表示 $\rho : \mathsf{G} \to GL(n_\rho)$。子群 $\Gamma \subseteq$ ˜ ˜$\mathsf{G}(k)$ 称为一个 S-算术子群，如果它与 $\mathsf{G}(\mathcal{O}_S)$ 可公度。如 §2 所述，存在一个从剩余有限完备化到同余完备的映射，记其核为 $C(\Gamma, S)$。如果 Γ 具有相对于 S的同余子群性质，即 $C(\Gamma, S)$ 是有限群，则称该群具有同余子群性质。再次强调，这实际上是环境群 G 、域 k 和集合 S的性质。本文中给出的证明均可沿用，从而得出：

THEOREM 6.1. 设 n 为正整数， k 为数域， S 为包含所有阿基米德位的˜赋值有限集，G 为连通、单连通˜且绝对几乎单的 k-线性代数群，并满足 $\sum_{v\in S}$ 秩$_{k_v}$G ≥ 2˜，且 G(k) 具有相对于 S的同余子群性质。˜ ˜设 $\Gamma \subseteq$ G(k) 为一个 S-算术子群。那么，除非 G 的类型为 G_2、 F_4 或 E_8且 $k = \mathbb{Q}$， Γ 存在无穷多个序列，每个序列都由两两不同构的有限指数子群 Γ_1、...、 Γ_n 组成，且这些子群具有同构的有限可生成完备化。

与主定理一样，这些例外情形确实是例外。此外，在这些情形下，若 Γ_1 是一个 S_1 算术子群，且 Γ_2 是一个 S_2 算术⌢ ⌢子群，并且 $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$，那么 $S_1 = S_2$ 和 $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$。

参考文献

[1] AKA, M. 具有同构有限商群的算术群。 *Journal of Algebra 352*, 1（2012）, 322–340。
[2] BRIDSON, M. R., MCREYNOLDS, D., REID, A. W., AND SPITLER, R. 三角群的副有限刚性。 *Bulletin of the London Mathematical Society 53*, 6（2021）, 1849–1862。[3] BRIDSON, M. R., MCREYNOLDS, D. B., REID, A. W., AND SPITLER, R. 绝对副有限刚性与双曲几何。 *Annals of Mathematics 192*, 3（2020）, 679–719。[4] BRIDSON, M. R., AND REID, A. W. 副有限刚性、克莱因群与余有限霍普夫性质。 *arXiv preprint arXiv:2107.14696*（2021）。
[5] CHEETHAM-WEST, T., LUBOTZKY, A., REID, A. W., AND SPITLER, R. FA 性质不是副有限性质。 *arXiv preprint arXiv:2212.08207*（2022）。[6] CONRAD, B., GABBER, O., AND PRASAD, G. *Pseudo-Reductive Groups*, 第26卷。剑桥大学出版社, 2015。[7] KAMMEYER, H., AND KIONKE, S. 高秩李群中格的副有限刚性。*arXiv preprint arXiv:2009.13442*（2020）。[8] KAMMEYER, H., AND KIONKE *Pacific*, S. *Journal of Mathematics 313* 1 2021 137 158
阿代尔超刚性与副有限孤立格。, （）, –。[9] KAMMEYER, H., AND SPITLER, R. 伽罗瓦上同调与副有限孤立谢瓦莱群。 *arXiv preprint arXiv:2301.11103*（2023）。[10] LUBOTZKY, A., AND SEGAL, D. *Subgroup Growth*, 第212卷。Birkh¨auser, 2003。[11] MARGULIS, G. A. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, 第17卷。Springer Science & Business Media, 1991。[12] MORRIS, D. W. 《算术群导论》。 *arXiv preprint math/0106063*（2001）。
[13] NEUKIRCH, J. *Algebraic Number Theory*, 第322卷。Springer Science & Business Media, 2013。[14] PLATONOV, V., AND RAPINCHUK, A. *Algebraic Groups and Number Theory*。学术出版社, 1993。[15] PLATONOV, V. P., AND TAVGEN', O. I. 关于群的有限生成完备化的格罗滕迪克问题。 *Soviet Math. Dokl. 33*（1986）。[16] PRASAD, G., AND RAPINCHUK, A. S. Bass、Milnor 和 Serre 的工作之后同余子群问题的发展。 *American Mathematical Society, Providence, RI*（2010）。
[17] RAGHUNATHAN, M. 关于同余子群问题, ii。 *Inventiones mathematicae 85*, 1 1986 73 117 （）, –。[18] RIBES, L., AND ZALESSKII, P. 《副有限群》。载于 *Profinite Groups*。Springer, 2000。[19] SERRE, J.-P. SL_2 的同余群问题。 *Annals of Mathematics*（1970）, 489–527。
[20] SPRINGER, T. *Linear Algebraic Groups*。Birkh¨auser, 马萨诸塞州波士顿, 1991。
[21] STEINBERG, R., FAULKNER, J., AND WILSON, R. *Lectures on Chevalley Groups*。耶鲁大学, 纽黑文, 1967。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus (Givat-Ram), The Hebrew University of Jerusalem, 9190401, Israel*Email address*: amir.behar@mail.huji.ac.il