arXiv:2302.13312v1 [math.CO] 26 Feb 2023

将平面图的边划分为线性森林和一个匹配

Marthe Bonamy* Jadwiga Czyżewska† Łukasz Kowalik† Michał Pilipczuk†

摘要

我们证明，任何最大度不超过 9 的平面图，其边都可以划分为 4 个线性森林和一个匹配。结合已知结果，这意味着任何最大度为奇数的平面图 G ，其边 $\Delta \geq 9$ 都可以划分为 $\frac{\Delta-1}{2}$ 个线性森林和一个匹配。这加强了众所周知的结果：该类图的色指数为 Δ [Vizing, 1965]且线性森林度至多为 $\lceil (\Delta+1)/2 \rceil$ [Wu, 1999]。

1 引言

线性森林 是这样一种森林，其中每个连通分支都是一条路径。图 G 的线性森林度 la(G) 是指图 G中覆盖整个G的线性森林所需的最少数量。该参数由 Harary [8] 于 1970 年引入，如今确定各种图类的这一参数值已成为重要的研究领域。

请注意，由于匹配是线性森林，线性森林度介于色指数（划分为匹配）与森林度（划分为森林）之间。它与色指数的联系可能比表面上看起来更深；具体而言，有人猜想线性森林度也有类似于 Vizing 定理的结果。这个类似结果称为线性森林度猜想 [1, 3]，其内容是：对于每个图 G，都有 $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil \leq$ la(G) $\leq \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$（下界显然成立）。该猜想已对 $\Delta \in \{3,4,5,6,8,10\}$ [1, 2, 6, 7]、完全二部图 [1]、平面图 [11, 12] 以及最近的 3-退化图 [4] 得到证明。

在这篇论 文中，我们聚焦于平面图。Cygan 等人 [5] 证明了以下定理 .

定理 1 ([5]). 对于任意最大度为 $\Delta \geq 9$ 的平面图 G，我们有 $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$。

他们提出了以下猜想。

猜想1 (平面图线性森林度猜想 [5]). 对于任意最大度为 $\Delta \geq 5$ 的平面图 G，我们有 $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$。

注意，猜想1蕴含维辛平面图猜想 [10]，：任意最大度为 $\Delta \geq 6$ 的平面图 G 的色指数为 Δ （目前仅在$\Delta = 6$的情形下仍是未解问题）。

*法国波尔多大学 LaBRI
†华沙大学，波兰

对于所有奇数 Δ，等式 $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ 均成立，这可由较弱的上界 $\mathrm{la}(G) \leq \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$ [11, 12] 推出。显然，奇数情形提供了更多自由度，因为此时对于每个顶点 v，至少存在一个线性森林，使得与 v关联的边至多有一条。本文的研究动机是：我们能否利用这一自由度得到更紧的结果？更具体地说，我们提出以下猜想。

猜想 2. 对于任意最大度为奇数 $\Delta \geq 7$ 的平面图 G，其边集 G 可以划分为 $\frac{\Delta-1}{2}$ 个线性森林和一个匹配。

注意，猜想 2 无法推广到 $\Delta \in \{3, 5\}$。这是因为猜想 2 蕴含所讨论的图的色指数为 Δ（给每个线性森林中的边用两种颜色着色，而匹配构成最后一种颜色）。然而，众所周知，将 4-团和二十面体各自的一条边细分后，所得图的色指数为 $\Delta + 1$[10]。

另一方面，已有结果蕴含猜想 2 对 $\Delta \geq 11$ 成立。事实上，取 Δ 对 G 的边着色；根据 Vizing [10] 的一个定理，这种着色存在。令 M 为该着色中任意一种颜色所形成的匹配。那么 $G - M$ 的最大度为 $\Delta - 1$，这是一个偶数。将匹配 M 与根据定理 1 得到的、把 $G - M$ 划分为 $(\Delta(G) - 1)/2$ 个线性森林的方法结合起来，即可得出结论。

因此，猜想 2 仅剩下两个未解决的情形：$\Delta = 7$ 和 $\Delta = 9$。在本文中，我们解决后一个情形，具体如下。

定理 2。 对于任意最大度为 $\Delta(G) \leq 9$ 的平面图 G，我们可以将 G 的边划分为四个线性森林和一个匹配。

注意到，定理 2 加强了众所周知的结果：该类图的色指数为 Δ [Vizing, 1965] 且线性森林度至多为 $\lceil (\Delta + 1)/2 \rceil$ [Wu 1999]。将定理 2 与定理 1 以及上述针对猜想 2 的情形 $\Delta \geq 11$ 所采用的论证相结合，我们得到以下推论。

推论 1。 设 G 为最大度为 $\Delta(G) \geq 9$ 的平面图。如果 $\Delta(G)$ 为偶数，则 G 的边可以划分为 $\Delta(G)/2$ 个线性森林。如果 $\Delta(G)$ 为奇数，则 G 的边可以划分为 $(\Delta(G) - 1)/2$ 个线性森林和一个匹配。

定理 2 采用放电法证明；如今，放电法已成为平面图着色中的标准工具。证明思路概述如下。我们找出 10 种不能出现在极小反例中的构型，也就是说，这些构型是可约的。接着，我们证明欧拉公式意味着极小反例必定包含其中一种构型。遗憾的是，与边着色或“纯粹”的线性森林度相比，我们这种着色方式所体现的对称性要弱得多。这是因为在我们的情形中，一种颜色对应的要么是线性森林，要么是匹配。因此，对这些构型的可约性证明比通常情况更加冗长繁琐。正因如此，我们这里只为其中两种构型提供传统的手工证明，其余构型是否可约则由计算机程序验证。

该程序已针对多种构型进行了广泛测试。我们比较了两种不同实现的结果：一种使用 C++ 编写，另一种使用 Python 编写。Python 实现（150 行代码，不含注释）以易读性为优化目标，并已在 GitHub 仓库 https://github.com/lkowalik/linear-arboricity 中公开。我们在第 4 节（以及代码中的注释）中详细介绍了该程序。

2 预备知识

本文中的所有图都是简单图，即不含重边或环。我们将长度为 3 的圈称为三角形。

对于图 G 及其顶点 v，用 $d_G(v)$ 表示 G 中 v 的度；若上下文明确，则省略下标。度为 d 的顶点称为 d-顶点。记号 d^+-顶点（分别为 d^--顶点）表示该顶点的度至少（分别至多）为 d。

与顶点 v 相邻且度为 d 的邻点称为 v 的 d-邻点。与顶点 v 相邻且度至少（分别至多）为 d 的邻点称为 v 的 d^+-邻点（分别为 d^--邻点）。给定两个顶点 u 和 v，若边 (u,v) 恰好属于 2 个（分别恰好属于 1 个）三角形，则顶点 u 是 v 的 弱邻点（分别为 半弱邻点）。

令 $\ell(f)$ 表示与面 f 关联的边数。若 $\ell(f) \geq 4$，则面 big。

与面 f 对应的面步 w，是由所有与 f关联的边所诱导的最短闭游走。

设 f 为一个面，且 $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ 是 f，$v_\ell = v_0$ 的面步。那么，对每个$i = 0,\ldots,\ell-1$，三元组 $s = (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$ 称为一个 v_i-线段，或简称线段（下标按模 ℓ 计算）。s 的长度定义为 f 的长度。我们称 v_i与 s关联。需要强调的是，v_{i-1}, v_{i+1} 与 s不关联。三角形线段 是指满足 x 与 z由一条边相连的线段 $s = (x, y, z)$。

注意，若 v 不是割点，则 v-线段与关联于 v 的面之间存在一一对应关系。当 v 是割点时，v-线段 (x, v, y) 可视为与边 vx 和 vy 关联的面的一部分区域。

3 定理 2 的证明

设 $\mathcal{G}$ 是一族极小反例，即 $G \in \mathcal{G}$ 若 G 是一个简单平面图，具有 $\Delta(G) \leq 9$，其边无法划分为四个线性森林和一个匹配；并且在这类图中，G 的边数最少。

3.1 极小反例的结构

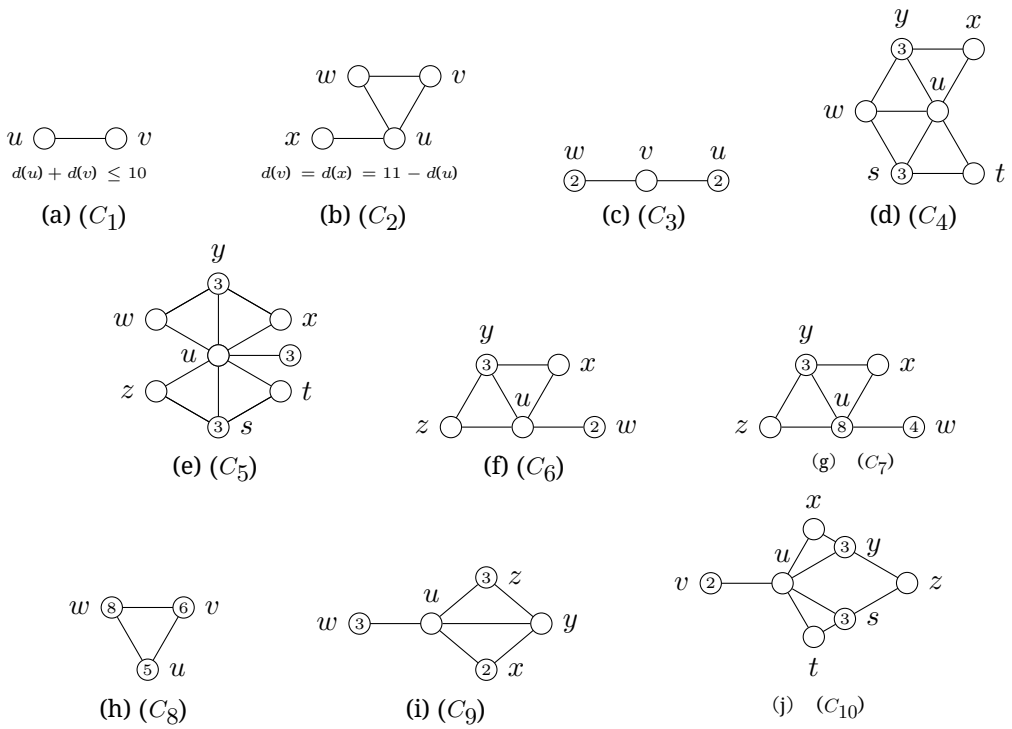
。我们定义构型 (C_1) 到 (C_{10})（见图1）。

- (C_1) 是一条边 uv，具有 $d(u) + d(v) \leq 10$。
- (C_2) 是一个三角形线段（u，v，w），其中 u 还有另一个邻点 x，使得 $d(v) = d(x) = 11 - d(u)$。
- (C_3) 是一个有两个 2-邻点的顶点。
- (C_4) 是一个邻点为 x、y、w、s、t 的顶点 u，其中 $d(y) = d(s) = 3$，且 $xywst$ 是一条路径。
- (C_5)是一个有三个 3-邻点的顶点 u，其中至少两个是弱的，并且 u 是 u 的任意一对弱 3-邻点的唯一公共邻点。
- (C_6) 是一个既有弱 3-邻点又有 2-邻点的顶点 u。
- (C_7) 是一个度为8的顶点 u，它既有一个弱 3-邻点，也有一个4-邻点。

• (C_8) 是一个三角形（u, v, w），其中 d（u）≤ 5, d（v）≤ 6, d（w）≤ 8。

• （C_9）是一个顶点 u，它有 3 个邻点 w 和 z、一个 2-邻点 x，以及一个邻点 y，后者同时与 z 和 x相邻。

• （C_{10}）是一个顶点 u，其邻点为 v、x、y、z、s和 t，其中 d（v）$=2$、d（y）$=d$（s）$=3$、y和 s 有一个除 u以外的公共邻点 z；x 与 y 相邻，而 t 与s相邻。



Figu图1：可约构型。上方绘出的顶点两两不同 .

这里特别强调，构型被定义为图（可理解为 $G \in \mathcal{G}$ 的子图），而非图的平面嵌入。因此，例如，当我们写 G 包含 (C_2) 时，并不意味着三角形 (u, v, w) 围成一个三角面。

现在我们给出构型 (C_1) 和 (C_3) 可约的人工证明。在这些证明中，我们使用如下常见记号。我们将线性森林划分和一个匹配视为着色，即函数 $c\colon E(G) \to \{0, \ldots, 4\}$，使得对于 $i = 1, \ldots, 4$，有 $c^{-1}(i)$ 是一个线性森林，而 $c^{-1}(0)$ 是一个匹配。用 $d_i(c, v)$ 表示在着色 c 中与 v 相接且被着为 i 的边数。

引理 1。对于每个 $G \in \mathcal{G}$，图 G 不包含构型 (C_1)。

证明。反设存在一条边 uv，使得 $d(u) + d(v) \le 10$。令 G' 为从 G中删除边 uv后得到的平面图。由于 G是一个极小反例，因此 G'存在一个着色 c'。

现在我们将 c' 扩展为 c 的一个着色 G，从而得到矛盾。需要考虑两种情形。如果存在一种颜色 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$，使得 $d_i(c', u) + d_i(c', v) \le 1$，我们就令 $c(uv) = i$。

那么 $d_i(c,u) = 1$，且 $d_i(c,v) \leq 2$，反之亦然，因此颜色 i 的边仍构成若干路径，而 c 符合要求。因此，我们可以假设，对于每种颜色 $i \in \{1,2,3,4\}$，都有$d_i(c',u) + d_i(c',v) = 2$。于是，由于 $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) \leq 8$，可得 $d_0(c',u) = d_0(c',v) = 0$。我们只需令 $c(uv) = 0$。 □

推论 2. 对于每个 $G \in \mathcal{G}$，图 G 不含 1-顶点。

证明. 由引理 1 可立即得出，因为 $\Delta(G) \leq 9$。 □

引理 2. 对于每个 $G \in \mathcal{G}$，若图 G 不含 (C_2)，则 G 不含构型 (C_3)。

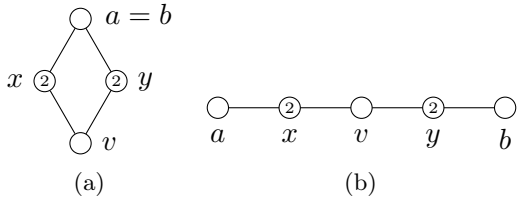


图 2：构型 (C_3) 出现时的两种可能情形。

证明. 反设顶点 v 有两个 2-邻点，分别为 x 和 y。设a（分别为 b）是 x（分别为 y）除 v 以外的邻点。注意，a 可能与 b 重合（见图 2）。

我们考虑两种情形。

1. $a = b$

   考虑 $G' = (G - x) \cup \{av\}$。注意，$d_{G'}(v) = d_G(v) = 9$，因为在 G 中排除了 (C_1)。此外，G' 是简单的，因为若 $av \in E(G)$，则 G 包含 (C_2)（三角形 (v,x,a) 和边 vy）。根据 G 的极小性，存在 G'的着色 c'。现在定义 G的着色 c。对于每条边 $e \in E(G) \setminus \{ax, ay, vx, vy\}$，令 $c(e) = c'(e)$。令 α, β, γ 分别为 c' 中 ay, yv, av 的颜色。令 $c(ay) = \alpha$, $c(yv) = \gamma$,$c(ax) = \gamma$ 以及 $c(xv) = \beta$。注意，对于$i = 0, \ldots, 4$，$d_i(c',v) = d_i(c,v)$，且 $d_i(c',a) = d_i(c,a)$。此外，对于 $i = 1, 2, 3, 4$，$d_i(c,x)$、$d_i(c,y)$ 均不大于 2；而 $d_0(c,x)$、$d_0(c,y)$ 均不大于 1，否则 c' 将包含颜色为 0 的关联边。因此，只需证明 c中不存在单色圈。

   假设 C 在 c中含有一个单色圈。那么 C 包含 ax、ay、bx、by中的一条边，否则 C 在 c'中就是单色的，这就导致矛盾。由于 $d_G(x) = 2$且 $d_G(y) = 2$，可知 C 包含路径 axv 或 ayv。不妨由对称性假设是前者。因此，$\beta = \gamma$ 和 C 由 γ着色。于是 C 包含 vy（因为vy 由 γ着色）。由于 $d_G(y) = 2$，也有 $ya \in C$。因此，$\alpha = \gamma$。由此可得 $\alpha = \beta = \gamma$，且三角形 ayv 在 c'中是单色的，这就导致矛盾。

2. $a \neq b$

   由于我们排除了构型（C_1），$d(v) = 9$。注意，由于我们排除了构型（C_2），G既不包含边 av，也不包含vb。考虑一个简单图 $G' = G \setminus \{x,y\} \cup \{av, vb\}$。根据 G 的极小性，存在 G'的一个着色 c'。现在我们定义G的一个着色。对于每条边 $e \in E(G) \setminus \{ax, xv, vy, yb\}$，我们令 $c(e) = c'(e)$。令 α 和 β 分别为

	$a \le 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a \ge 7$			
				$b \le 4$	$b = 5$		$b \ge 6$
					$c = 6$	$c \ge 7$	
$m(b,a,c)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

表1：根据规则4定义权重再分配的表格。我们考虑 $b \le c$ ，并令$m(c,a,b) = m(b,a,c)$。注意，规则4中未使用情形 $b = c = 5$ ，因为这意味着边 vw 与引理 1矛盾。

av 和 vb的颜色。我们可以令 $c(ax) = \alpha$、 $c(xv) = \beta$、 $c(vy) = \alpha$、 $c(yb) = \beta$。注意，对于 $i = 0$，.....，4， $d_i(c', v) = d_i(c, v)$ $d_i(c', a) = d_i(c, a)$ $d_i(c', b) = d_i(c, b)$。此外，对于 $i = 1$、2、3、4， $d_i(c, x)$ $d_i(c, y)$ 不大于2，而 $d_0(c, x)$ $d_0(c, y)$ 不大于1；否则， c' 包含颜色为0的关联边。

我们还断言， c中不存在单色圈。事实上，如果存在由颜色 α （分别为 β）的边构成的圈，那么它会经过 x 和 y，因此 $\alpha = \beta$ ，且 c'中存在一个单色圈，这就产生了矛盾。

□

引理 3. 对于每个 $G \in \mathcal{G}$， 图 G 均不包含构型(C_2) 和(C_4)至(C_{10})。

证明。 此证明通过计算机程序完成，详情请参见第 4 节。 □

3.2 不存在极小反例

初始电荷。我们考虑 $G \in \mathcal{G}$ 的一个平面嵌入 $\mathcal{M} = (V, E, F)$，并为每个顶点 v 赋予电荷 $\mathrm{ch}(v) = d(v) - 4$ ，为每个面 f 赋予电荷 $\mathrm{ch}(f) = \ell(f) - 4$ 。

放电规则我们引入以下四条放电规则：

- **规则1**适用于邻点 v 的度为 2 的顶点 u 。此时， u 向 v 发送 1。
- **规则 2**适用于邻点 v 的度为 3 的顶点 u 。此时， u 向 v 发送 $\frac{1}{3}$ 。
- **规则 3**适用于长度为 5^+ 的面 f 及其线段 (x, y, z)。若 $d(x) = d(z) = 3$，则 f 通过 (x, y, z) 向 y 发送 $\frac{2}{3}$。若 $d(x) = 2$ 或 $d(z) = 2$，则 f 通过 (x, y, z) 向 y 发送 $\frac{1}{2}$。
- **规则4** 适用于与三角面 $f = (v, u, w)$相接的顶点 u。然后， u通过线段 (v, u, w)向 f发送$m(d(v), d(u), d(w))$，如表1所述。

在规则 3 中，我们将电荷从面传给线段，再由线段将电荷传给顶点。此时这样做或许显得过于复杂，但在证明中会派上用场。下文将证明，应用这些规则后，每个面和每个顶点的最终电荷均非负。

引理 4. 设 G 是属于族 $\mathcal{G}$ 的图， $\mathcal{M}$ 是其平面嵌入。那么，对 G应用放电规则后， $\mathcal{M}$ 的每个面 f 的最终电荷均非负。

证明。 令 f 为 $\mathcal{M}$的一个面。回顾一下，我们用 $\ell(f)$表示 f的长度。我们考虑以下情形。

- $\ell(f) = 3$
  f 的初始电荷为 -1。根据规则4，它会按照边界上顶点的度，从这些顶点接收电荷。根据 f 上顶点按度排序后的度序列，考虑几个子情形（注意，由于排除了（C_1），这些是唯一可能出现的三角形）：

  $-(4^-, 7^+, 7^+)$。 7^+ 个顶点向 f发送 $1\,2$，因此它收到的电荷为 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$。$-$ $(5, 6, 8^-)$。根据（C_8），这些三角形不予考虑。$-(5, 6, 9)$。于是， f 从其顶点处收到 $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = 1$ 。$-(5, 7^+, 7^+)$。于是， f 从其顶点处收到 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$ 。$-(6^+, 6^+, 6^+)$。于是， f 从其顶点处至少收到 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 。

  在每种情形下， f 至少收到 1 单位电荷，因此其最终电荷非负。

- $\ell(f) = 4$ f 的初始电荷和最终电荷均为 0，因为它既不发送也不接收任何电荷。

- $\ell(f) = 5$
  f 的初始电荷为 1。注意，由于排除了（C_1）、（C_3）和 1-度顶点，f 的边界上要么有两个度为 3 的顶点，要么至多有一个度为 2 的顶点。在这些情况下，根据规则 3， f 分别发送$2\,3$ 或至多 $2 \cdot \frac{1}{2}$。¯ 这两种情况下，其最终电荷都仍然非负。

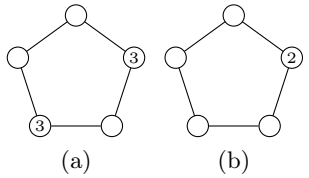


图 3：向顶点发送任意电荷的 5-面

- $\ell(f) \geq 6$
  我们将证明以下断言。

  断言 1. f 最多传递 $\ell(f)/3$ 的电荷。

  证明。 我们按如下方式实施规则 3。

面 f 向其边界上的每条边发送 $\frac{1}{3}$。接下来，对于边界上的每条边 $e = uv$，我们执行以下操作。设 $xuvy$ 是 f的面步片段。若 v是一个 2 度或 3 度顶点，则 e通过 (x, u, v) 向 u 发送 $\frac{1}{3}$。类似地，若 u 是一个 2 度或 3 度顶点，则 e通过 (u, v, y) 向 v 发送 $\frac{1}{3}$。否则， e分别通过 (x, u, v) 和 (u, v, y) 向 u和 v各发送 $\frac{1}{6}$。

注意到每条边发送的电荷至多为 $\frac{1}{3}$，因为 3-顶点之间不能由一条边连接，这是由于排除了 (C_1)。因此，只需证明：对于每条线段$s = (u, v, w)$，如果 v满足规则 3 的条件，那么 v就能从s获得适当的电荷。事实上，如果 $d(u) = d(w) = 3$，那么 v 通过 s 分别从 uv 和 vw获得 $\frac{1}{3}$，因此按照要求获得 $\frac{2}{3}$。否则， $d(u) = 2$ 或 $d(w) = 2$，不妨设后者成立。于是， v通过 s 从 vw 获得 $\frac{1}{3}$，并通过 s从 vu 至少获得 $\frac{1}{6}$，因此 v 通过s至少获得 $\frac{1}{2}$，符合要求。」

由于 f的初始电荷为 $\ell(f) - 2$，并且每当 $\ell(f) \geq 6$时， $\ell(f) - 2 - \ell(f)/3 \geq 0$，故引理 4 的证明得证。

□

引理5. 设 G 是属于族 $\mathcal{G}$的图。那么，对 G应用放电规则后，每个顶点 v 的最终电荷均非负。

证明. 设 v 是 G中的一个顶点。下面陈述一些由放电规则可知的简单观察，这些观察将在下文中频繁用到。

观察1. 顶点 v 不会向与其关联的非三角形线段发送电荷。

观察2. 顶点 v 向与其关联的三角形线段发送的电荷至多为$\frac{1}{2}$。

观察3. 顶点 v 向不含 5-顶点的关联三角形线段发送的电荷至多为$\frac{1}{3}$。

下文将根据 v的度分情形讨论。

假设 $d(v) \leq 1$。根据推论 2， G中不存在这类顶点。

假设 $d(v) = 2$。 v 的初始电荷为 -2。根据规则 1 v 从两个邻点各接收 1，且由于它不传出任何电荷，其最终电荷为 0。

假设 $d(v) = 3$。 v 的初始电荷为 -1。根据规则 2 v 从三个邻点各接收 $\frac{1}{3}$，且由于它不传出任何电荷，其最终电荷为 0。

假设 $d(v) = 4$。 v 的初始电荷和最终电荷均为 0，因为它既不传出也不接收任何电荷。

假设 $d(v) = 5$。顶点 v 仅根据规则4向关联的三角形线段传出电荷。因此，每条与 v 关联的线段从 v接收的电荷至多为 $\frac{1}{5}$。因此， v 传出的电荷至多为 $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$，其最终电荷非负。

假设 $d(v) = 6$。 v 的初始电荷为 2。顶点 v 仅根据规则4向与其相邻的三角形线段传递电荷。因此，每条与 v 相邻的线段从 v处至多收到$\frac{1}{3}$。

因此， v 最多传递 $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ ，其最终电荷非负。

假设 $d(v) = 7$。 v 的初始电荷为 3。顶点 v 根据规则4，仅向与其关联的三角形线段发送电荷。我们声称， v 至多关联两条各自包含一个4-顶点的三角形线段。事实上，如果 v 关联一条包含4-顶点的三角形线段，那么 v 就不能有其他4-邻点，因为构型 (C_2) 已被排除。因此，每条这样的线段都包含边 vx，而具有此性质的线段至多有两条。

根据规则， 4 v 向包含4-顶点的三角形线段发送 $\frac{1}{2}$ ，向其余每条线段至多发送 $\frac{2}{5}$ （由 (C_8) 可知，三角形线段 (7, 6, 5) 已被排除）。因此， v向线段发送的电荷至多为 $2 \cdot \frac{1}{2} + (7-2)\frac{2}{5} = 3$ ，故其最终电荷非负。

假设 $d(v) = 8$。 v 的初始电荷为 4。根据 (C_1)， v 不能有 2-邻点，因此按照规则 3 和规则 4， v仅向三角形线段和 3-顶点传递电荷。我们考虑以下情形：

1. 存在一个弱 3-邻点 a。
   根据 (C_2) 和 (C_7)， v 除 a外没有其他 4^--邻点。该观察结果与 (C_8) 一起表明， v 向 a传递 $\frac{1}{3}$ ，向包含 a 的两个关联三角形线段中的每一条传递 $\frac{1}{2}$ ，并至多向其余每条线段传递 $\frac{2}{5}$ 。因此， v 至多传递
   $$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5}(8-2) = 3\frac{11}{15} \leq 4.$$
2. 存在一个半弱3-邻点 a。
   根据 (C_2)， v 没有更多 3-邻点。由于 a 是半弱邻点， v 至多关联 7 条三角形线段。因此， v 至多传递
   $$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(8-1) = 3\frac{5}{6} \leq 4.$$
3. 不存在弱或半弱 3-邻点。
   令 k 为 v 的 3-邻点数。对于每个这样的 3-邻点 a ，恰有两条包含 a 的非三角形 v-线段。由于每条非三角形 v-线段至多包含 v 的两个 3-邻点，因此至少有 k 条非三角形 v-线段，所以 v 至多发送：
   $$\frac{1}{3}k + \frac{1}{2}(8-k) = 4 - \frac{1}{6}k \leq 4.$$

在每种情形下， v 向相邻顶点和线段至多发送 4。因此，其最终电荷仍为非负。

最后，假设 $d(v) = 9$。 v 的初始电荷为 5。我们考虑若干情形：**情形 1** v 没有 2-邻点。
令 $n_{3_{1,0}}$ 为 v 中非弱 3-邻点的数量，并令 $\mathcal{S}$ 为非三角形 v-线段的集合。注意， v 的任意一对 3-邻点都不可能相邻，因为排除了 (C_1)。我们断言

$$|\mathcal{S}| \geq \left\lceil \frac{n_{3_{1,0}}}{2} \right\rceil . \tag{1}$$

事实上，每个非弱3-邻点至少属于一条非三角形的 v-线段，而每条非三角形的 v-线段至多包含两个这样的 3-邻点。
令 n_{3_2} 为 v的弱 3-邻点的数量。由（C_5）可得上界 $n_{3_2} \leq 2$。我们将根据 n_{3_2}考虑三种子情形。

情形1。**1** $n_{3_2}=0$

首先，假设 $n_{3_{1,\ 0}}=8$。那么， v 至多有一个 8^+-邻点，因此，由于（C_1）被排除， v至多关联两条三角形线段。总计而言， v 至多发送

$$8\cdot\tfrac{1}{3}+2\cdot\tfrac{1}{2}=3\tfrac{2}{3},$$

这小于初始电荷。因此，设 $n_{3_{1,\ 0}}\neq 8$。则 v向相邻顶点和线段至多发送 $\frac{1}{3}n_{3_{1,\ 0}}+\frac{1}{2}(9-|\mathcal{S}|)$，因此其最终电荷至少为

$$5-\tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}}-\tfrac{1}{2}(9-|\mathcal{S}|)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}|\mathcal{S}|-\tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}}\overset{(1)}{\geq}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left\lceil\tfrac{n_{3_{1,0}}}{2}\right\rceil-\tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}}.$$

当 $n_{3_{1,\ 0}}$为奇数时，我们得到 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^{n_{3_{1,\ 0}}+1}-\frac{1}{3}n_{3_{1,\ 0}}=\frac{3}{4}-{}^{n_{3_1}}{}_{,\ 0}12$，当 $n_{3_{1,\ 0}}\leq 9$时其非负。当 $n_{3_{1,\ 0}}$为偶数时，我们得到 $\frac{1}{2}+{}^{n_{3_{1,\ 4}}}{}_0-\frac{1}{3}n_{3_{1,\ 0}}=\frac{1}{2}-{}^{n_{3_1}}{}_{,\ 0}12$。由于 $n_{3_{1,\ 0}}\neq 8$，剩下的是偶数$n_{3_{1,\ 0}}\leq 6$，于是 $\frac{1}{2}-{}^{n_{3_1}}{}_{,\ 12}{}^0\geq 0$，如所要求。

情形1.2 $n_{\ 3_2}=1$

注意，$n_{3_{1,\ 0}}\leq 6$。事实上， v 有九个邻点，其中一个是弱 3-邻点，而根据（C_1），它与 v 共有的邻点的度为 8^+。

断言 2. 如果$n_{3_{1,\ 0}}=4$，那么 v 的最终电荷非负。

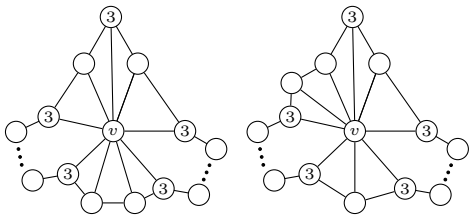


图 4: $|\mathcal{S}|=2$、 $n_{3_2}=1$ 和n_{3_1}对应的 v邻点的可能构型$_{,\ 0}=4$

证明。注意， v 恰有五个 3-邻点。回忆一下， $|\mathcal{S}|\geq\left\lceil{}^{n_{3_1}}{}_{,\ 0}{}_2\right\rceil$。因此， $|\mathcal{S}|\geq 2$。假设 $|\mathcal{S}|=2$。由于$n_{3_{1,\ 0}}=4$，且这四个 3-邻点中的每一个都至少属于一个非三角形 v-线段，因此两个非三角形线段各包含 v的两个半弱 3-邻点。因此，我们分两种情形讨论——见图 4a 和图 4b，因为它们是仅有的可能构型。在两种情形下，根据（C_1）， v 属于一个度序列为（8^+,9,8^+）的线段，而该线段仅从 v获得$_{1\ 3}$ 的电荷。

那么 v 至多发送

$$6\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+5\cdot\tfrac{1}{3}=5.$$

最后，假设 $|\mathcal{S}|\geq 3$。那么， v 至多发送

$$\tfrac{1}{2}(9-|\mathcal{S}|)+5\cdot\tfrac{1}{3}=6\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}|\mathcal{S}|\leq 6\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\cdot 3=4\tfrac{2}{3}\leq 5.$$

□

断言3. 若 $n_{3_{1,0}}=6$ v 的最终电荷非负。

证明. 对于 $n_{3_{1,0}} = 6$ v 的邻域由一个弱 3-邻点、它的两个 8^+-邻点，以及六个非弱的 3-邻点组成。特别地，这六个非弱 3-邻点在 v 周围依次相邻。由（C_1）可知，对于这六个邻点中的任意一对 x, y，线段（x, v, y）不是三角形。因此， $|S| \geq 5$。

那么， v 至多发送

$$7 \cdot \tfrac{1}{3} + (9 - |S|) \cdot \tfrac{1}{2} = 4\tfrac{1}{3} < 5.$$

□

现在我们将证明，在其余情形下， v 的最终电荷也非负。顶点 v向相邻顶点和线段至多发送$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}n_{3_{1,0}} + \frac{1}{2}(9 - |S|)$，因此其最终电荷至少为

$$5 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}} - \tfrac{1}{2}(9 - |S|) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}|S| - \tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}} \overset{(1)}{\geq} \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\left\lceil \tfrac{n_{3_{1,0}}}{2} \right\rceil - \tfrac{1}{3}n_{3_{1,0}}.$$

对于奇数$n_{3_{1,0}}$，此值等于 $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}^{n_{3_1}}{}_{,0}{}^{+1} - \frac{1}{3}n_{3_1,0} = \frac{5}{12} - {}^{n_{3_1}}{}_{,0}\,12$，当$n_{3_{1,0}} \leq 5$时非负。对于偶数$n_{3_{1,0}}$，此值等于 $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}^{n_{3_1}}{}_{,2}{}^{0} - \frac{1}{3}n_{3_{1,0}} = \frac{1}{6} - {}^{n_{3_1}}{}_{,0}\,12$，当$n_{3_{1,0}} \leq 2$时非负。由于$n_{3_{1,0}} \leq 6$，这些就是命题2和命题3未涵盖的全部情形。

情形1。**3** $n_{3_2} = 2$令 a、 b 为 v的弱 3-邻点。

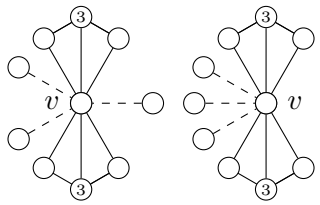


图5：与 v相 incident 的顶点的可能构型

断言4。 在此情形下， v 至少与一个不包含 5^-顶点的三角形线段相 *incident*，或至少与一个非三角形段相 *incident*。

证明。 由（C_4）可知，两个弱 3-邻点 a 和 b 除 v外没有公共邻点，因此 v 恰有三个邻点既不是 a，也不是 b，也不是 a、 b的邻点。令 C 为这类顶点的集合。 C 中的顶点围绕 v排列的方式有两种：要么恰有两个彼此相邻（见图5a），要么它们全部彼此相邻（见图5b）。

假设与 v 相 incident 的所有线段都是三角形线段，否则结论已得。在情形（a）中， C 中的两个相邻顶点互为邻点，因此由（C_1）可知，其中一个顶点（记为 x）的度至少为6。取 x、 v 以及 v、 x和 a 或 b 的公共邻点，即可得到断言中的三角形线段。

在情形（b）中，所求的三角形线段由 v 以及 a 和 b的邻点构成。 □

根据规则4，v 向每个不含度为5-的顶点的三角形线段发送 $\frac{1}{3}$，如果存在这样的线段。此外，v 不向非三角形线段发送任何电荷。因此，根据命题 4 v向三角形线段发送的电荷至多为 $\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{2}$。另外，根据（$C_1$）和（$C_5$），$v$ 向 a 和 b发送 $2\cdot\frac{1}{3}$，而不向其他邻点发送更多电荷。因此，v 发送的总电荷至多为

$$2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{2}=5.$$

情形 2 v 有一个 2-邻点。
根据（C_3），v 恰有一个 2-邻点，记作 a。根据（C_6），v 没有弱 3-邻点。在接下来的段落中，我们研究 v 的 3-邻点数量与非三角形 v-线段数量之间的关系。

我们引入以下记号。设 $\mathcal{N}_3$ 为 v的 3-邻点集合。对于线段s，令 $n_3(s)$表示 s中的 3-顶点数量。令 $\mathcal{S}$ 为所有非三角形 v-线段的集合，并令 $\mathcal{S}^i$ 为与 v 关联的长度为 i的线段集合（回顾一下，线段的长度定义为它所属的面的长度）。此外，我们定义

- $\mathcal{S}_d=\{s\in\mathcal{S}\mid s \text{ contains a } d\text{-neighbour of } v\}$,
- $\mathcal{S}_{d,d'}=\{(x,v,y)\in\mathcal{S}\mid\{d_G(x),d_G(y)\}=\{d,d'\}\}$

例如，$\mathcal{S}_3$ 是包含 v 的一个 3-邻点的线段集合（注意，它也可能包含一个 2-邻点或另一个 3-邻点）。我们将此记号自然地推广到度下界，例如，$\mathcal{S}_{2,\ 4^+}$ 是包含 v的恰好一个 2-邻点和一个 4^+-邻点的线段集合。

我们还定义 $\mathcal{S}_l^d=\mathcal{S}^d\cap\mathcal{S}_l$，例如 $\mathcal{S}_3^{5+}{}_{,\ 4+}=\mathcal{S}^{5+}\cap\mathcal{S}_{3,\ 4+}$。此外，令

$$\mathcal{N}_3^*=\{x\in\mathcal{N}_3\mid \text{if } x \text{ belongs to } s\in\mathcal{S},\ \text{then } s\in\mathcal{S}_3^4\cup\mathcal{S}_{3,4+}^{5+}\}.$$

我们还将上述记号用于任意子图 G'（属于图 G）和顶点$v'\in V(G')$，例如，$\mathcal{S}(G',\ v')$ 是所有非三角形 v'-线段的集合，$\mathcal{S}_d(G',\ v')=\{s\in\mathcal{S}(G',\ v')\mid s$ 含有一个 $v'\}$ 的 d-邻点，等等。

断言5. 设 G' 是 G的一个子图，v' 是 G' 的一个顶点，且 v' 没有弱3-邻点，并且它不与一个4-面关联，该面边界上有两个半弱3-邻点。则

$$|\mathcal{N}_3^*(G',v')|\le\tfrac{3}{2}|\mathcal{S}_3^4(G',v')\cup\mathcal{S}_{3,4+}^{5+}(G',v')|.$$

证明。我们使用放电论证。每条线段 $s\in\mathcal{S}_3^4(G',\ v')\cup\mathcal{S}_3^{5+}{}_{,\ 4+}(G',\ v')$ 按照以下规则传递电荷:

考虑线段 $s=(x,v',y)\in\mathcal{S}_3^4(G',v')\cup\mathcal{S}_3^{5+}{}_{,4+}(G',v')$。首先假设 s 包含一个半弱3-邻点，记为 x。根据我们的假设，y 不是半弱3-邻点。于是，s 向 x 发送 1，并向 y 发送 $1\,2$。否则，假设在我们的平面嵌入中，按照围绕 v 的顺时针次序，在 v 的邻点中，x 恰好位于 y 之前。于是，s 向 y 发送 1，并向 x 发送 $1\,2$。

注意到，要证明该断言，只需证明：（i）每个顶点 $x\in\mathcal{N}_3^*(G',v')$ 至少得到 1 个电荷；并且（ii）$\mathcal{S}_3^4(G',v')\cup\mathcal{S}_3^{5+}{}_{,4+}(G',v')$ 的每条线段发送的电荷至多为 $3\,2$。

考虑 $x\in\mathcal{N}_3^*(G',v')$。如果 x与来自 $\mathcal{S}(G',v')$ 的两条线段关联，那么 x从每条线段至少获得 $1\,2$，因此总共至少获得 1 个电荷。否则，由于排除了弱 3-邻点，x 恰好与来自 $x\in\mathcal{N}_3^*(G',v')$ 的一条线段关联，

因为弱 3-邻点已被排除。因此， x 是一个半弱 3-邻点，并从该关联线段获得 1 个电荷，所以（i）成立。对于（ii），只需证明来自 $\mathcal{S}_3^4(G',v') \cup \mathcal{S}_{3\ ,4^+}^{5^+}(G',v')$ 的每条线段，其边界上至多有一个 v 的半弱 3-邻点。事实上，根据定义，来自 $\mathcal{S}_{3\ ,4^+}^{5^+}(G',v')$ 的一条线段恰好有一个，而长度为 4 的线段不可能与两个半弱 3-邻点关联，这是由我们的假设得到的。 □

Cla情形6。 如果 $|\mathcal{S}_{2,\ 4^+}^4 \cup \mathcal{S}_2^{5+} \cup \mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+} \cup \mathcal{S}_{4^+,\ 4^+}| \geq 1$，那么 v 的最终电荷非负。

证明。 注意，$|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_{2,\ 4^+}^4| + |\mathcal{S}_2^{5+}| + |\mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+}| + |\mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3\ ,\ 4+}^{5+}| + |\mathcal{S}_{4^+,\ 4^+}|$。考虑一个 3-邻点$x \in \mathcal{N}_3 \setminus \mathcal{N}_{3^\circ}^*$。根据 ($C_6$)，$x$ 不是弱 3-邻点，因此它至少与一条线段 $s \in \mathcal{S}$关联。由于 $x \in \mathcal{N}_3 \setminus \mathcal{N}_3^*$，我们可以选取 s，使得 $s \in \mathcal{S}_3 \setminus (\mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3\ ,\ 4+}^{5+}) \subseteq \mathcal{S}_2^{5+} \cup \mathcal{S}_{3\ ,\ 3^\circ}^{5+}$ 与来自 $\mathcal{S}_2^{5+}$的线段关联的此类 x 至多有 $|\mathcal{S}_2^{5+}|$ 个；来自 $\mathcal{S}_{3\,3,}^{5+}$ 的此类 x 至多有 $2|\mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+}|$ 个。因此，$|\mathcal{N}_3 \setminus \mathcal{N}_3^*| \leq |\mathcal{S}_2^{5+}| + 2|\mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+}|$。由断言5（应用于 $G' = G$ 和 $v' = v$；注意，假设均满足，因为 (C_6 C_{10} $|\mathcal{N}_3| \leq$) 和 ( ) 均被排除），$|\mathcal{S}_2^{5+}| + 2|\mathcal{S}_{3\,3}^{5+}| + \frac{3}{2}|\mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3\,4+}^{5+}|$ 可得 , , 。

因此， v 至多发送

$$1 + \tfrac{1}{3}|\mathcal{N}_3| + \tfrac{1}{2}(9 - |\mathcal{S}|) = 5\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}|\mathcal{N}_3| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}| \leq\leq 5\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(|\mathcal{S}_2^{5+}| + 2|\mathcal{S}_{3\ ,3}^{5+}| + \tfrac{3}{2}|\mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3\ ,4+}^{5+}|\right) - \tfrac{1}{2}(|\mathcal{S}_{2,\ 4^+}^4| + |\mathcal{S}_2^{5+}| + |\mathcal{S}_{3\ ,3}^{5+}| + |\mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3\ ,4+}^{5+}| + |\mathcal{S}_{4^+,4^+}|) = 5\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}|\mathcal{S}_2^{5+}| + \tfrac{1}{6}|\mathcal{S}_{3\ ,3}^{5+}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{4^+,4^+}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{2,4^+}^4|. \tag{2}$$

初始电荷加上 v 根据规则 3 从线段获得的电荷，等于

$$5 + \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_2^{5+}| + \tfrac{2}{3}|\mathcal{S}_{3,3}^{5+}|.$$

因此， v 处的最终电荷至少为

$$\left(5 + \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_2^{5+}| + \tfrac{2}{3}|\mathcal{S}_{3,3}^{5+}|\right) - \left(5\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}|\mathcal{S}_2^{5+}| + \tfrac{1}{6}|\mathcal{S}_{3,3}^{5+}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{4^+,4^+}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{2,4^+}^4|\right) = \tfrac{2}{3}|\mathcal{S}_2^{5+}| + \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{3,3}^{5+}| + \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{4^+,4^+}| + \tfrac{1}{2}|\mathcal{S}_{2,4^+}^4| - \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

当 $|\mathcal{S}_{2,\ 4^+}^4 \cup \mathcal{S}_2^{5+} \cup \mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+} \cup \mathcal{S}_{4^+,\ 4^+}| \geq 1$ 时，该值非负。 □

由于我们排除了 (C_6)、(C_{10})，根据断言 6，我们可以假设 $\mathcal{S}_2^{5+} = \mathcal{S}_{3\ ,\ 3}^{5+} = \mathcal{S}_{4^+,\ 4^+} = S_{2,\ 4^+}^4 = \emptyset.$。换句话说，

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3^4 \cup \mathcal{S}_{3,4^+}^{5+} \tag{4}$$

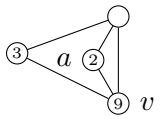
因此 $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_{3^\circ}^*$

我们考虑两种子情形。（回想一下， a 是 v 唯一的 2-邻点。）

情形2。 1 a 至少与一条三角形线段相邻。
由于 G 是简单的， a 恰好与一条非三角形段（记为 s）和一条三角形线段相邻。根据（4），s 的长度为4，且 s 包含一个3-邻点。 s中的3-邻点必须与 $\mathcal{S}$中的另一条线段相邻，否则就会得到被排除构型（C_6）。因此， $|\mathcal{S}| \geq 2$。

注意，根据 (C_9) v 不再有 3-邻点。因此， v 最多发送

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}(9 - |\mathcal{S}|) \leq 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}(9 - 2) = 4\tfrac{5}{6},$$



(a)

图6：恰好属于一个三角形的 a的构型

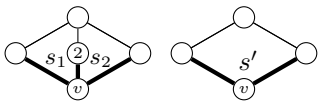
这小于初始电荷。因此， v 的最终电荷非负。

情形2。**2** a 不与任何三角形线段关联。

断言7. $_{3\ 2}(|\mathcal{S}|-1) \geq n_3$

证明。 考虑从 G 中移除顶点 a后得到的子图 G' 。根据我们的假设， a 与 G中的两条非三角形线段关联，由于根据定义$\mathcal{S}_3^{5+}{}_{,4^+} \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$，由(4)可知它们的长度均为4。随后，在从 G 得到 G' 的过程中，我们移除两条长度为4的线段，记为 s_1、 s_2 ，并新建一条长度也为4的线段 s'（见图7）。由(4)可知， $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_3^4(G,v)$，因此 $s' \in \mathcal{S}_3^4(G',v)$。换言之

$$\mathcal{S}_3^4(G',v) \cup \mathcal{S}_{3,4+}^{5+}(G',v) = \mathcal{S}(G,v) \setminus \{s_1,s_2\} \cup \{s'\}. \tag{5}$$



(a) (b)

图7： G和 G'中的线段。

那么，由(4)和(5)可知， $\mathcal{S}(G',v) = \mathcal{S}_3^4(G',v) \cup \mathcal{S}_3^{5+}{}_{,4^+}(G',v)$，因此 $\mathcal{N}_3^*(G',v) = \mathcal{N}_3(G',v) = \mathcal{N}_3(G,v)$。

由于 G 不包含构型（C_6）和（C_{10}），因此在 G' 中，顶点 v 也没有弱 3-邻点，并且不与任何一个边界上有两个半弱 3-邻点的4-面关联（回想一下，构型定义为子图，因此如果 G' 包含（C_{10}），那么G也包含（C_{10}））。因此，我们可以对 G' 和 $v'=v$应用断言5。于是，由断言5以及等式（4）和（5），得到如下结果

$$|N_3(G,v)| \overset{(4)}{=} |\mathcal{N}_3^*(G',v)| \overset{\text{Claim 5}}{\leq} \tfrac{3}{2}|\mathcal{S}_3^4(G',v) \cup \mathcal{S}_{3,4^+}^{5+}(G',v)| \overset{(5)}{=} \tfrac{3}{2}\left(|\mathcal{S}(G,v)|-1\right).$$

□

顶点 v 向其2-邻点发送1，向其3-邻点发送$_{1\ 3}$ ，并向关联的三角形线段发送至多$_{1\ 2}$ 。因此，它最多发送

$$1 + \tfrac{1}{3}n_3 + \tfrac{1}{2}(9-|\mathcal{S}|) \leq 5\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}n_3 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}n_3+1) = 5$$

因此， v 的最终电荷仍为非负。 □

根据引理 4 和引理 5，每个面和每个顶点的最终电荷都为非负。由于应用放电规则时总电荷不变，我们得到$\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(\ell(f)-4)\geq 0$，因此 $4|E|-4|V|-4|F|\geq 0$。然而，根据欧拉公式 $|E|-|V|-|F|=-2$，矛盾。由此可知，极小反例不存在，因此我们证明了定理 2。

4 计算机辅助可约性

本节介绍用于引理 3 的计算机辅助证明的算法。

算法的输入包括一个图 H，它描述一个构型：一个图以及一个度函数 $d\colon V(H)\to\mathbb{N}$，用于描述图 G 中顶点 H 的度，例如，对于 (C_9) $d(x)=2$、$d(w)=d(z)=3$ 和 $d(y)=d(y)=9$。此外，输入还指定一条边 $e_H\in E(H)$，其含义将在下文解释。

我们先介绍程序 reduce.py 生成的证明结构，接着详细说明我们如何实现这类证明的搜索。

4.1 证明结构

证明结构很简单。我们从 G 中删去边 e_H，得到一个新图 G'；再用一种着色 c' 对图 G' 着色，而根据 G 的极小性，这种着色存在。接着，我们取消 $E(H)$ 中所有边的着色，目标是为所有边 G（连同 e_H）找到一个适当的着色 c，使得 $c|_{E(G)\setminus E(H)}=c'|_{E(G)\setminus E(H)}$。注意，这种证明结构适用于引理 1 的证明，但不适用于引理 2 的证明；事实上，构型 (C_3) 无法通过这种方式约化。

当然，即使是计算机也无法枚举 G' 的所有着色，因为我们不知道 G；尽管 H 是固定的，但可能的图 G 有无穷多个。我们转而枚举 G' 的某些着色类。这类着色由以下内容刻画：

- $\mathcal{C}=\{C_v\mid v\in V(H)\}$，其中 C_v 是 v 在 H 外部所关联的 $d_G(v)$ 条 $-d_H(v)$ 边的颜色多重集，对每个顶点 $v\in V(H)$ 都如此，
- 一个集合 $\mathcal{P}$，当且仅当满足以下条件时，它包含三元组 (i,u,v)（其中 $i\in\{1,2,3,4\}$ 和 $u,v\in V(H)$）：(1) u 和 v 在 $E(G)\setminus E(H)$ 中都恰好有一条关联边染成 i；(2) 在着色 c' 中，$E(G)\setminus E(H)$ 内存在一条 i 色路径连接 u 和 v。

注意，对于固定的构型 (H,d)，可能的集合 $\mathcal{P}$ 的数量有上界。因此，我们能够枚举 G' 的所有着色类。此外，我们声称，只需知道 c' 所属的类，就足以判断 $E(H)$ 的着色与 $c'|_{E(G)\setminus E(H)}$ 结合后是否构成 G 的合法着色。事实上，$\mathcal{C}$ 足以确保在组合着色中，H 的每个顶点处每种颜色 i 出现的次数都正确（即，$i=1$、2、3、4 至多出现两次，而 $i=0$ 至多出现一次）。这样的着色仍可能包含单色圈。然而，如果存在这样的圈 C，这意味着存在一种颜色 $i=1$、2、3、4，以及一组 i 色路径 $\mathcal{A}$（位于 $E(H)$ 中），还有另一组 i 色路径 $\mathcal{B}$（位于 $E(G)\setminus E(H)$ 中），使得 C 由交替取自 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的路径构成。显然，$\mathcal{P}$ 足以保证这种情况不会发生。

注意，构型内部边的着色，即 $c'|_{E(H)\setminus\{e_H\}}$，在这里并不需要。不过，我们确实会检查是否至少存在一种 c_{inner} 的着色 $E(H)\setminus\{e_H\}$，使其与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$一致，因为否则，$(\mathcal{C},\mathcal{P})$ 并不对应任何颜色

类，因此我们可以放心地跳过它。这里，一致意味着 c_{inner} 可以通过类 $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ 中的外部着色进行扩展，即：(1) 对于每个 $v \in V(H)$，多重集 $C_v \cup \{c_{\text{inner}}(vw) \mid vw \in E(H) \setminus \{e_H\}\}$ 中每种颜色至多出现两次，且颜色 0 至多出现一次；(2) 对于每个 $(i, u, v) \in \mathcal{P}$，都有 $i \in C_u \cap C_v$；(3) 将使用 c_{inner} 着色的图 $(V(H)\ E(H) \setminus \{e_H\})$ 通过 $\mathcal{P}$ 中与路径对应的着色边进行扩展后，不会得到单色圈。

我们将具有上述结构的可约性证明称为标准证明。

回顾一下，在我们的构型中，每个顶点的度在 G 中都有一个上界（例如，(C_9) 中顶点 w 的上界为 3 ）。对于某些顶点，这个上界似乎没有明确指定（例如，(C_9) 中顶点 u 的上界），但此时它就等于最大度，即 9。这些上界正是函数 d 的取值，而该函数是我们的程序输入的一部分。因此，可以认为程序只验证了度取值的一种特定选择（即最大取值）下的可约性。然而，如下面的引理所示，这也意味着对于任意度函数 $d'\colon V(G) \to \mathbb{N}$，只要对于每个 $v \in V(H)$，都有 $d_H(v) \leq d'(v) \leq d(v)$，同样可以推出可约性。该引理背后的证明直观应当是清楚的：对于构型 C 的标准可约性证明同样适用于构型 C'。

引理 6. 设 $C = (H, d)$ 和 $C' = (H, d')$ 是两个构型，并假设对每个顶点 $v \in V(H)$，都有 $d_H(v) \leq d'(v) \leq d(v)$。如果 C 可通过标准证明证明为可约，则 C'可约。

证明。 假设 C' 出现在一个极小反例 $G \in \mathcal{G}$中。接下来，我们按照针对 C的标准可约性证明进行，也就是说，从 G 中移除与针对 C移除的相同的 H 的边 e 。由于 $G \in \mathcal{G}$，存在 $G' - e$的一个颜色着色 $c'\colon E(G) \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 。该着色定义了集合 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{P}'$，如上所述，其中 $\mathcal{C}' = \{C'_w \mid w \in V(H)\}$。对每个$v \in V(H)$，将 C_v 定义为 $d(v) - d_H(v)$ 颜色的任意多重集，使得

$$C'_v \subseteq C_v \subseteq \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4\} \setminus \{c'(vw) \mid vw \in E(H) \setminus \{e\}\}. \tag{6}$$

上文中，我们使用多重集的标准包含与差的概念。注意，至少存在一个适用于 C_v 的候选对象，因为 $|C'_v| = d'(v) - d_H(v)$ 且 $d'(v) \leq d(v)$。定义$\mathcal{C} = \{C_v \mid v \in V(H)\}$。

回顾一下，在针对 C 的标准可约性证明中，我们检查所有与 $E(H) \setminus \{e_H\}$ 的至少一种着色相容的着色类别。由于 $(\mathcal{C}', \mathcal{P}')$ 与$c'|_{E(H)\setminus\{e_H\}}$相容，根据 (6)，$(\mathcal{C}, \mathcal{P}')$ 也与 $c'|_{E(H)\setminus\{e_H\}}$ 相容。因此，类别 $(\mathcal{C}, \mathcal{P}')$ 已在针对 C 的标准可约性证明中检查过，而该证明给出了 c_{inner} 对$E(H)$ 的一种着色，这种着色可以通过 $(\mathcal{C}, \mathcal{P}')$ 中的任意着色扩展。但这意味着 c_{inner} 也可以通过 $c'|_{E(G)\setminus E(H)}$ 扩展，因为没有任何颜色在某个顶点上出现的次数超过要求，而且不存在单色圈。因此， G 可以着色，故它不是反例，矛盾。

□

4.2 实现

脚本 reduce.py 按如下方式生成 G' 的所有着色类别。首先，递归函数 generate_outside_colorings 会生成所有可能的集合 $\mathcal{C}$ （如第4.1节所述）。在递归的最底层，也就是 $\mathcal{C}$ 构造完成时，它会调用另一个递归函数 generate_outer_paths。该函数接着会生成所有可能的集合 $\mathcal{P}$。递归的最底层会构造出 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$ 。然后，一个

函数 color_inner 会被调用，用于检查是否至少存在一种 $E(H) \setminus e_H$ 的着色，使其与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$ 一致。如果不存在，则跳过这一对 $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$。否则，再次调用函数 color_inner，不过这次将参数 remove_edge 设为 false，从而强制该函数也为边 e_H 着色。函数 color_inner 是一个简单直接的递归函数，它会生成 $E(H) \setminus \{e_H\}$ 或 $E(H)$ 的所有着色，使得每个顶点上指定颜色的边数符合要求。此外，每为一条边 $e = ab$ 着色后，它都会检查该边是否与 $\mathcal{P}$ 中的一条路径闭合成圈；如果没有，则更新 $\mathcal{P}$，也就是说，要么将 $\mathcal{P}$ 中的两条路径连接起来（它们的端点分别位于 a 和 b），要么通过 e 延长 $\mathcal{P}$ 中的一条路径（其一个端点位于 a 或 b），要么将一条单边路径加入 $\mathcal{P}$。

编写代码时，我们优先考虑尽可能让代码易于理解。我们选择 Python 编程语言，因为它的代码可读性很高。为了让算法和论证保持简单，我们刻意没有利用颜色之间的对称性。代价是运行时间：对于最复杂的构型（C_5），程序耗时 149 小时（在单处理器 Intel Xeon CPU E5-2698 v4、2.20GHz 上运行）。其他构型所需时间从几秒到 94 分钟不等。

5 结论

我们证明了猜想 2 对于 $\Delta = 9$ 成立，但 $\Delta = 7$ 仍未解决。这将是对 Sanders 和 Zhao 的结果的一项有趣加强：他们证明了最大度为 7 的平面图属于 I 类 [9]。我们未能将我们的方法扩展到 $\Delta = 7$，并认为这需要一种性质更为整体的不同论证。事实上，当 $\Delta = 7$ 时，顶点所拥有的电荷更少，我们很快就会遇到包含负电荷元素的构型，而这些构型无法用程序生成的标准证明加以约化。当然，或许可以通过巧妙的放电规则绕过这一问题，但值得注意的是，即使对于 $\Delta = 8$，边着色（这是一个约束较少的问题）也尚无此类放电证明。

平面图线性森林度猜想（见 Cygan 等人 [5]）至今仍未解决。然而，本着本文的研究精神，可以考虑其较弱的版本。例如，对于最大度为 8 的平面图，边可以划分为 k 个线性森林和 $8 - 2k$ 个匹配时，k 的最大值是多少？目前，根据 Vizing 定理，我们知道 $k \geq 0$，但即使是 $k = 1$ 这种情形也尚未得到研究。

致谢

作者感谢 Marek Cygan，他实现了一个早期版本的计算机程序，用于在线性森林度研究背景下检验可约性。我们感谢 Arkadiusz Socała 在项目早期阶段参与讨论。我们也非常感谢审稿人认真审阅本文并提出诸多有益意见。

本研究是以下项目的一部分，这些项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划资助协议 677651（ŁK，项目 TOTAL）和 948057（ŁK、MP，项目 BOBR）下的资助。JC 和 ŁK 还获得了波兰科学与高等教育部项目 Szkoła Orłów 的支持，项目编号为 500-D110-06-0465160。

参考文献

[1] J. Akiyama、G. Exoo 和 F. Harary。图的覆盖与打包 III：循环与非循环不变量。*Math Slovaca*，30:405–417，1980。[2] J. Akiyama、G. Exoo 和 F. Harary。图的覆盖与打包 IV：线性森林度。*Networks*，11:69–72，1981。[3] Noga Alon。图的线性森林度。*Israel Journal of Mathematics*，62(3):311–325，1988。[4]Manu Basavaraju、Arijit Bishnu、Mathew C. Francis 和 Drimit Pattanayak。3-退化图的线性森林度猜想。载于 Isolde Adler 和 Haiko Müller 编，计算机科学中的图论概念 - 第 *46* 届国际研讨会，*WG 2020*，英国利兹，*2020* 年 *6* 月 *24—26* 日，修订版精选论文，第 12301 卷，《计算机科学讲义》，第 376–387 页。Springer，2020。doi:10.1007/978-3-030-60440-0_30.[5] Marek Cygan、Jianfeng Hou、Lukasz Kowalik、Borut Luzar 和 Jian-Liang Wu。平面图线性森林度猜想。《*J. Graph Theory*》，69(4):403–425，2012。doi:10.1002/jgt.20592。[6] H. Enomoto 和 B. Péroche。某些正则图的线性森林度。《*J. Graph Theory*》，8:309–324，1984。[7] Filip Guldan。10-正则图的线性森林度。*Math Slovaca*，36(3):225–228，1986。[8] Frank Harary。图的覆盖与打包 I。*Ann. N.Y. Acad. Sci*，175:198–205，1970。[9] Daniel P. Sanders 和 Yue Zhao。最大度为七的平面图属于 I 类。*J.Comb. Theory, Ser. B*，83(2):201–212，2001。doi:10.1006/jctb.2001.2047。[10] V. G. Vizing。具有给定色数的临界图。《*Diskret. Analiz*》，5:9–17，1965。[11] J. L. Wu。平面图的线性森林度。《*J. Graph Theory*》，31:129–134，1999。[12] J. L. Wu 和 Y. W. Wu。最大度为七的平面图的线性森林度为四。《*J. Graph Theory*》，58(3):210–220，2008。