arXiv:2302.13388v1 [math.ST] 26 Feb 2023

具有光滑特征值的多维平稳时间序列的谱密度因子分解

TAM´AS SZABADOS

Abstract. 本文旨在给出经典一维光滑谱密度情形的多维版本。光滑谱密度为谱密度的因子分解以及计算正则弱平稳时间序列的 Wold表示的组成部分提供了一种显式方法。这些组成部分对于给出时间序列的最佳线性预测非常重要。

1. Introduction

设 $\mathrm{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$，$t \in \mathbb{Z}$，是一个 d 维弱平稳时间序列，其中每个 X_t^j 都是同一概率空间（Ω $\mathcal{F}, \mathbb{P}$）上的复值随机变量。它是一个二阶过程，并且在此意义下是平移不变过程：

$$\mathbb{E}\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^d, \qquad \mathbb{E}((\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t^* - \boldsymbol{\mu}^*)) = \boldsymbol{C}(h) \in \mathbb{C}^{d\times d}, \qquad \forall t, h \in \mathbb{Z},$$

其中 $\boldsymbol{C}(h)$，$h \in \mathbb{Z}$，是该过程的半正定协方差矩阵函数。不失一般性，以下假设 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$。

因此，所考虑的随机变量将是 d 维、平方可积、零期望复随机向量，其分量属于希尔伯特空间 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$。然而，随机向量 X 和 Y 的正交性由更强的关系 $\mathrm{X} \perp \mathrm{Y} \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}^*) = \boldsymbol{O}$ 定义。

$\{\mathrm{X}_t\}$ 在时刻 $n \in \mathbb{Z}$ 之前的过去，是 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中由该过程各分量的过去值和当前值的闭线性张成：

$$H_n^- := \overline{\mathrm{span}}\{X_\gamma^\ell : \ell = 1, \dots, d; t \le n\}.$$

$\{\mathrm{X}_t\}$ 的远过去为 $H_{-\infty} := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} H_n^-$。如果 $\{\mathrm{X}_t\}$ 满足 $H_{-\infty} = \{0\}$，则称该过程为正则过程；如果 $H_{-\infty} = H(\mathrm{X}) := \mathrm{span}\{\mathrm{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$，则称其为奇异过程。当然，在这两个极端情况之间还存在一系列情形。

奇异过程也称为确定性过程，参见 Brockwell、Davis和Fienberg（1991）：基于过去 H_0^-，未来值 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots$ 可以用零均方误差进行预测。另一方面，正则过程也称为纯非确定性过程，因为其行为完全受随机新息影响。因此，在已知 H_0^- 的情况下，未来值 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots$ 只能以正均方误差 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ 进行预测，并且 $\lim_{t\to\infty} \sigma_t^2 = \|\mathrm{X}_0\|^2$。这说明了为什么研究正则时间序列是理论和应用领域的首要目标。Wold分解证明，任何非奇异

Key words and phrases. 多维平稳时间序列、光滑谱密度、谱因子、最佳线性预测；MSC2020：62M10、60G10、60G12。

过程都可以分解为一个非零正则过程与一个奇异过程的正交和。这也说明了研究正则过程为何重要。

Wold分解意味着（参见 Rozanov (1967) 和 Wiener和Masani (1957) 等经典文献），当且仅当 $\{\mathbf{X}_t\}$ 是正则的，$\{\mathbf{X}_t\}$ 才能写成因果无限移动平均（即 Wold表示）

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{b}(j)\boldsymbol{\xi}_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \qquad \boldsymbol{b}(j) \in \mathbb{C}^{d\times r}, \tag{1.1}$$

其中 $\{\boldsymbol{\xi}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是一个 r 维（$r \le d$）正交归一白噪声序列：$\mathbb{E}\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{0}$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_s\boldsymbol{\xi}_t^*) = \delta_{st}\boldsymbol{I}_r$，$\boldsymbol{I}_r$ 是单位矩阵。上述 Wold表示中的白噪声过程 $\{\boldsymbol{\xi}_t\}$ 在乘以一个常数酉矩阵后仍保持不变，因此称为该正则时间序列的基本过程。

Wold表示的一个重要用途是，可以据此给出最佳线性 h 步超前预测 $\mathbf{X}_h$ 。如果当前时刻为 0，那么将 $\mathbf{X}_h$ 正交投影到过去 $H_0^-(\mathbf{X})$ 上，得到

$$\hat{\mathbf{X}}_h = \sum_{j=h}^{\infty} \boldsymbol{b}(j)\boldsymbol{\xi}_{h-j} = \sum_{k=-\infty}^{0} \boldsymbol{b}(h-k)\boldsymbol{\xi}_k. \tag{1.2}$$

Wold表示的另一种写法是

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{\eta}_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \qquad \boldsymbol{a}(j) \in \mathbb{C}^{d\times d}, \tag{1.3}$$

其中，$\{\boldsymbol{\eta}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是 d维的新息白噪声过程：

$$\boldsymbol{\eta}_t := \mathbf{X}_t - \mathrm{Proj}_{H_{t-1}^-}\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

$\mathbb{E}\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{0}$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\eta}_s\boldsymbol{\eta}_t^*) = \delta_{st}\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个秩为 r的 $d \times d$ 非负定矩阵。

同样经典的是，任何弱平稳过程都具有定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的非负定谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$，使得

$$\boldsymbol{C}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} d\boldsymbol{F}(\omega), \qquad h \in \mathbb{Z}.$$

当且仅当 $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}$、谱密度 $\boldsymbol{f}$ 几乎处处具有常秩 r，并且可以分解为如下形式时，$\{\mathbf{X}_t\}$ 是正则的，参见例如Rozanov（1967）以及Wiener和Masani（1957）。

$$\boldsymbol{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\phi}^*(\omega), \quad \boldsymbol{\phi}(\omega) = [\phi_{k\ell}(\omega)]_{d\times r}, \quad \text{for a.e. } \omega \in [-\pi, \pi], \tag{1.5}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{b}}(j)e^{-ij\omega}, \quad \|\boldsymbol{\phi}\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{\boldsymbol{b}}(j)\|^2 < \infty, \tag{1.6}$$

$\|\cdot\|$ 表示谱范数。这里的系数序列 $\{\boldsymbol{b}(j)\}$ 不一定与 Wold分解中的相同。此外，

$$\boldsymbol{\phi}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}(e^{-i\omega}), \quad \omega \in (-\pi, \pi], \quad \boldsymbol{\Phi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{b}}(j)z^j, \quad z \in D, \tag{1.7}$$

因此，解析矩阵函数 $\boldsymbol{\Phi}(z) = [\Phi_{jk}(z)]_{d\times r}$ 的各个元素都是开单位圆盘 D 中的解析函数，并且在单位圆 D 上属于类 $L^2(T)$

T，因此，它们属于哈代空间 H^2。记作 $\mathbf{\Phi} \in H^2_{d\times r}$，或简写为 $\mathbf{\Phi} \in H^2$。

回顾一下，哈代空间 H^p, $0 < p \leq \infty$ 表示所有在 D 上解析的函数 f 所构成的空间，这些函数在所有圆周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $0 < r < 1$ 上的 L^p 范数均有界，参见 Rudin（2006，第 17.7 定义）。若 $p \geq 1$，则等价地，H^p 是由所有满足下述条件的函数 $f \in L^p(T)$ 构成的巴拿赫空间

$$f(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\omega}, \qquad \omega \in [-\pi, \pi],$$

因此，$f(e^{i\omega})$ 的傅里叶级数是单边的，$a_n = 0$ 当 $n < 0$ 时如此，参见 Fuhrmann（2014，第 II.12 节）。注意，在公式（1.6）和（1.7）中，指数上有一个负号：这是一个约定，后文也将沿用。

Hardy 空间的一个特别重要的特例是 H^2，它是一个希尔伯特空间，并且通过傅里叶变换与范数平方为下式的序列空间 ℓ^2 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 等距同构

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

对于一维时间序列 $\{X_t\}$ ($d = 1$)，Kolmogorov（1941）给出了一个相当简单的正则性充要条件：

(1) $\{X_t\}$ 具有绝对连续的谱测度，其密度为 f；(2) $\log f \in L^1$，即 $\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\omega) d\omega > -\infty$。

于是 Kolmogorov–Szeg″o 公式也成立：

$$\sigma^2 = 2\pi \exp \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\omega) \frac{d\omega}{2\pi},$$

其中 σ^2 是新息 η_t 的方差：$= X_t - \text{Proj}_{H_{t-1}^-} X_t$，也就是一步超前预测的方差。

对于具有满秩的多维时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$，也就是说，当 $\boldsymbol{f}$几乎处处具有满秩时：$r = d$，由（1.4）定义的新息 $\boldsymbol{\eta}_t$ 也具有满秩d，存在类似的简单正则性充要条件，参见 Rozanov（1967）以及 Wiener和Masani（1957）：

(1) $\{\mathrm{X}_t\}$ 具有绝对连续谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$，其密度矩阵为 $\boldsymbol{f}$；(2) $\log\det \boldsymbol{f} \in L^1$，即 $\int_{-\pi}^{\pi} \log\det \boldsymbol{f}(\omega) d\omega > -\infty$。

于是，d维 Kolmogorov–Szeg″o 公式也成立：

$$\det \mathbf{\Sigma} = (2\pi)^d \exp \int_{-\pi}^{\pi} \log\det \boldsymbol{f}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{1.8}$$

其中，$\mathbf{\Sigma}$ 是由 (1.4) 定义的新息 $\boldsymbol{\eta}_t$ 的协方差矩阵。

另一方面，正则时间序列的一般情形更为复杂。据我所知，已有的结果是 Rozanov (1967, 定理 8.1)：d维平稳时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ 是正则的，且秩为 r $1 \leq r \leq d$，当且仅当以下每个条件都成立：

(1) 它具有绝对连续谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$，其密度矩阵 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的秩为 r，几乎处处对 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 成立。

(2) 密度矩阵 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 有一个主子式 $M(\omega) = \det[f_{i_p j_q}(\omega)]_{p,\ q=1}^{r}$，该主子式几乎处处非零，并且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log M(\omega) d\omega > -\infty.$$

(3) 令 $M_{k\ell}(\omega)$ 表示由 $M(\omega)$ 将第 ℓ 行替换为行 $[f_{ki_p}(\omega)]_{p=1}^{r}$ 后得到的行列式。则函数 $\gamma_{k\ell}(e^{-i\omega}) = M_{k\ell}(\omega)/M(\omega)$ 是 Nevanlinna 类 N 中函数的边界值。

引用文献中立即指出："遗憾的是，目前没有通用方法能够根据函数 $\gamma(z)$ 的边界值 $\gamma(e^{-i\omega})$ 判断它是否属于类 N。"

回顾一下，Nevanlinna 类 N 由所有在开单位球 D 内解析的函数 f 组成，这些函数都可以写成比值 $f = f_1/f_2$, $f_1 \in H^p$, $f_2 \in H^q$,$p, q > 0$，其中 H^p 和 H^q 表示 Hardy 空间，参见 Nikolski （1991，定义 3.3.1）。

本文旨在将一维情形下关于正则性的一个著名充分条件，以及在谱密度光滑时求取 H^2 谱因子的方法，推广到多维情形。

2. Generic regular processes

若可能，求取 H^2 谱因子的一种简单思路是对谱密度矩阵进行谱分解。（请注意，此处"谱"一词有两种不同含义：一方面，我们将时间序列的谱密度视为傅里叶谱；另一方面，我们根据特征值和特征向量对矩阵进行谱分解。）

因此，设 $\{\mathrm{X}_t\}$ 是一个 d维平稳时间序列，并假设其谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$ 相对于密度矩阵 $\boldsymbol{f}(\omega)$绝对连续，且该密度矩阵的秩为 r, $1 \le r \le d$，对几乎处处的 $\omega \in [-\pi, \pi]$成立。对自伴、非负定矩阵 $\boldsymbol{f}(\omega)$作简约谱分解:

$$\boldsymbol{f}(\omega) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\omega) \mathbf{u}_j(\omega) \mathbf{u}_j^*(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}(\omega) \boldsymbol{\Lambda}_r(\omega) \tilde{\boldsymbol{U}}^*(\omega), \tag{2.1}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega) = \mathrm{diag}[\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_r(\omega)], \quad \lambda_1(\omega) \ge \cdots \ge \lambda_r(\omega) > 0, \tag{2.2}$$

对于几乎处处的 $\omega \in [-\pi, \pi]$, $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的非零特征值构成的对角矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\omega) = [\mathbf{u}_1(\omega), \dots, \mathbf{u}_r(\omega)] \in \mathbb{C}^{d \times r}$$

是由相应右特征向量构成的次酉矩阵；即使所有特征值均不相同，它也不唯一。于是，仍有

$$\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}^*(\omega) \boldsymbol{f}(\omega) \tilde{\boldsymbol{U}}(\omega). \tag{2.3}$$

矩阵函数 $\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega)$ 是自伴正定函数，并且

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega)) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{f}(\omega)),$$

其中 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 是有限谱测度的密度函数。这表明，$\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分有限。因此，$\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega)$ 可以视为

满秩正则过程的谱密度函数。因此，它可以进行因子分解；事实上，我们可以取其一个极小相位 H^2 谱因子 $\boldsymbol{D}_r(\omega)$：

$$\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{D}_r(\omega)\boldsymbol{D}_r(\omega), \tag{2.4}$$

其中， $\boldsymbol{D}_r(\omega)$ 是一个对角矩阵。

于是，一种简单的因子分解 $\boldsymbol{f}$ 方法是选择

$$\boldsymbol{\phi}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}(\omega)\boldsymbol{D}_r(\omega)\boldsymbol{A}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}(\omega)\boldsymbol{A}(\omega)\boldsymbol{D}_r(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{A}}(\omega)\boldsymbol{D}_r(\omega), \tag{2.5}$$

其中， $\boldsymbol{A}(\omega) = \mathrm{diag}[a_1(\omega) \ldots, a_r(\omega)]$, 每个 $a_k(\omega)$ 都是定义在上 $[-\pi, \pi]$ 的可测函数，满足对于任意 ω均有 $|a_k(\omega)| = 1$ ，但除此之外可以任意取值； $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{A}}(\omega)$ 仍表示 $\boldsymbol{f}$ 的特征向量组成的次酉矩阵，其排列顺序与特征值的排列顺序相同。

据我所知，对于任意正则时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ ，尚不清楚是否存在这样的矩阵值函数 $\boldsymbol{A}(\omega)$，使得由 (2.5) 定义的 $\boldsymbol{\phi}(\omega)$ 的傅里叶级数只含 $e^{-i\omega}$ 的非负次幂。等价地，是否存在一个 H^2 解析矩阵函数 $\boldsymbol{\Phi}(z)$，其边界值为上述谱因子 $\boldsymbol{\phi}(\omega)$，并具有某个 $\boldsymbol{A}(\omega)$，如公式 (1.5)–(1.7) 所示?

定理 2.1。参见 [9, 定理 2.1] 和 [10, 定理 2.1]。

(a) 假设一个 d 维平稳时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ 是秩为 r、 $1 \le r \le d$ 的正则过程。那么，对于由 (2.2) 定义的 $\boldsymbol{\Lambda}_r(\omega)$，有 $\log\det\boldsymbol{\Lambda}_r \in L^1 = L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}, d\omega)$，等价地，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \lambda_r(\omega)\, d\omega > -\infty. \tag{2.6}$$

（b）此外，若假设正则时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ 具有形如（2.5）的一个 H^2 谱因子，则下述陈述也成立：

˜在（2.1）中 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的谱分解中出现的次酉矩阵函数 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 可以选取为属于哈代空间$H^\infty \subset H^2$，因此

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}(j)e^{-ij\omega}, \quad \boldsymbol{\psi}(j) \in \mathbb{C}^{d\times r}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \|\boldsymbol{\psi}(j)\|^2 < \infty. \tag{2.7}$$

˜在这种情况下，可以称 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 为内矩阵函数。

下一个定理给出了一个一般弱平稳时间序列具备正则性的充分条件；请与上文定理 2.1 的陈述作比较。注意，下一个定理中的假设（1）和（2）也是正则性的必要条件。只有假设（3）尚不知是否为必要条件。我们认为，与上文引用的 Rozanov 定理中的条件相比，这些假设在实践中更容易检验。根据公式（2.5），检验假设（3）意味着：对于 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的每个特征向量 $\mathrm{u}_k(\omega)$，我们要寻找一个模为单位值的复函数乘子$a_k(\omega)$，使其结果为一个 H^∞ 函数。

定理 2.2。参见 [9, 定理 2.1] 和 [10, 定理 2.2]。

设 $\{\mathrm{X}_t\}$ 为一个 d维时间序列。若满足以下三个条件，则称其为秩 $r \le d$ 的正则时间序列。

（1）它具有绝对连续谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$，其密度矩阵 $\boldsymbol{f}$（ω）对几乎所有 $\omega \in [-\pi, \pi]$均具有秩 r。（2）对于由（2.2）定义的 $\boldsymbol{\Lambda}_r$（ω），有 log det $\boldsymbol{\Lambda}_r \in L^1 = L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}, d\omega)$，等价地，（2.6）成立。˜（3）在（2.1）中 $\boldsymbol{f}$（ω）的谱分解中出现的次酉矩阵函数 $\boldsymbol{U}$（ω）可选取为属于哈代空间 $H^\infty \subset H^2$，因此（2.7）成立。

接下来，我们讨论一般平稳时间序列 $\{\mathbf{X}_t\}$ 正则性的另一个充分条件。这个充分条件的一个优点是，它也给出了 $\{\mathbf{X}_t\}$ 的 Wold表示。我们先从谱密度$\boldsymbol{f}$的因子分解 (1.5)、(1.6) 所给出的正则性的充要条件说起，其中 $d \times r$ 谱因子 $\boldsymbol{\phi}$ 属于 H^2。

利用奇异值分解（SVD），我们可以写成

$$\boldsymbol{\phi}(\omega) = \boldsymbol{V}(\omega)\boldsymbol{S}(\omega)\boldsymbol{U}^*(\omega),$$

其中 $\boldsymbol{V}$(ω) 是一个 $d \times r$ 次酉矩阵，$\boldsymbol{U}$(ω) 是一个 $r \times r$ 酉矩阵，$\boldsymbol{S}$(ω) =diag$[s_1, s_2, \ldots, s_r]$ 是一个由正奇异值 $s_1 \geq s_2 \geq$ 构成的 $r \times r$ 对角矩阵
$\cdots \geq s_r$，对几乎处处的 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 成立。显然，对于 $j = 1$，.....，r，有 $s_j = \sqrt{\lambda_j}$。

当 $d > r$ 时，$\boldsymbol{\phi}$(ω) 的（广义）逆并不唯一。设 $\boldsymbol{\psi}$(ω) 是 $\boldsymbol{\phi}$(ω) 的 Moore–Penrose逆:

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) := \boldsymbol{U}(\omega)\boldsymbol{S}^{-1}(\omega)\boldsymbol{V}^*(\omega), \quad \boldsymbol{\psi}(\omega)\boldsymbol{\phi}(\omega) = \boldsymbol{I}_r, \quad \text{a.e.} \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \tag{2.8}$$

我们还需要平稳时间序列的谱（Cram´er）表示

$$\mathbf{X}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} d\mathbf{Z}_\omega, \quad t \in \mathbb{Z},$$

其中，$\{\mathbf{Z}_\omega\}$ 是一个具有正交增量的随机过程，它通过希尔伯特空间 $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}$, tr($d\boldsymbol{F}$)) 与 H(X) $\subset L^2$(Ω $\mathcal{F}, \mathbb{P}$) 之间的等距性获得。

定理 2.3。假设某个 d 维弱平稳时间序列 $\{\mathbf{X}_t\}$ 的谱测度关于测度 $\boldsymbol{f}$ 绝对连续，且具有常秩 r, $1 \leq r \leq d$ 的密度。此外，假设存在有限常数 M，使得$\|\boldsymbol{f}(\omega)\| \leq M$ 对所有 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 均成立，并且 $\boldsymbol{f}$ 具有因子分解 $f = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^*$，其中 $\boldsymbol{\phi} \in H^2$，其 Moore–Penrose逆 $\boldsymbol{\psi} \in H^2$ 也存在。

那么，该时间序列是正则的，其基本白噪声过程可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega) d\mathbf{Z}_\omega \tag{2.9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\gamma}(k)\mathbf{X}_{t-k} \qquad (t \in \mathbb{Z}), \tag{2.10}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\gamma}(k)e^{-ik\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega)d\omega \tag{2.11}$$

是 $\boldsymbol{\psi}$ 的傅里叶级数，在 L^2 意义下收敛。

Wold表示的系数序列 $\{\boldsymbol{b}(j)\}$ 由以下 L^2收敛傅里叶级数给出

$$\boldsymbol{\phi}(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{b}(j)e^{-ij\omega},\quad \boldsymbol{b}(j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\omega}\boldsymbol{\phi}(\omega)d\omega. \tag{2.12}$$

证明。根据假设，由 (1.5) 和 (1.6) 显然可知 $\{\mathbf{X}_t\}$ 的正则性。

首先，让我们验证随机积分 (2.9) 是正确的，也就是说， $\boldsymbol{\psi}$ 的分量属于 $L^2([-\pi,\pi],\mathcal{B},\mathrm{tr}(d\boldsymbol{F}))$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{\psi}(\omega)\boldsymbol{f}(\omega)\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{\psi}(\omega)\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\phi}^*(\omega)\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega=\boldsymbol{I}_r.$$

这也证明了

$$\boldsymbol{\xi}_t=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega)d\mathbf{Z}_\omega=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\gamma}(k)e^{-ik\omega}d\mathbf{Z}_\omega=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\gamma}(k)\mathbf{X}_{t-k}.$$

其次，利用上文提到的等距性，检验由 (2.9) 定义的序列是正交归一的:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_n\boldsymbol{\xi}_m^*)&=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega)\boldsymbol{f}(\omega)e^{-im\omega}\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega)\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\phi}^*(\omega)\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega=\delta_{n,m}\boldsymbol{I}_r.\end{aligned}$$

第三，证明对于任意 $k>0$， $\boldsymbol{\xi}_n$ 与过去 $H_{n-k}^-(\mathbf{X})$ 正交:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n-k}\boldsymbol{\xi}_n^*)&=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)\omega}\boldsymbol{f}(\omega)e^{-in\omega}\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\omega}\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\phi}^*(\omega)\boldsymbol{\psi}^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\omega}\boldsymbol{\phi}(\omega)d\omega=\mathbf{0}_{d\times r}\end{aligned}$$

对于任意 $k>0$，因为 $\boldsymbol{\phi}\in H^2$，所以其负指标的傅里叶系数均为零。

第四，考察当 $n\in\mathbb{Z}$ 时的 $\boldsymbol{\xi}_n\in H_n^-(\mathbf{X})$。由于平稳性，只需证明 $\boldsymbol{\xi}_0\in H_0^-(\mathbf{X})$。由于 $H_0^-(\mathbf{X})$ 是 $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 中由所有形如 $\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k\mathbf{X}_{-k}$ 的有限线性组合的各分量所构成的闭包，根据等距性，这等价于证明 $\boldsymbol{\psi}$ 属于 $L^2([-\pi,\pi],\mathcal{B},\mathrm{tr}(d\boldsymbol{F}))$ 中所有形如 $\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k e^{-ik\omega}$ 的有限线性组合所构成的闭包。

我们假设 $\boldsymbol{\psi}\in H^2$，这意味着 $\boldsymbol{\psi}$ 有一个单边傅里叶级数 (2.11)，它在 $L^2([-\pi,\pi],\mathcal{B},d\omega)$ 中收敛，其中 $d\omega$ 表示勒贝格测度。然后，利用对 $\|\boldsymbol{f}\|$有界性的假设，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k e^{-ik\omega}-\boldsymbol{\psi}(\omega)\right)\boldsymbol{f}(\omega)\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k^* e^{ik\omega}-\boldsymbol{\psi}^*(\omega)\right)\right\|d\omega\\\le&\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k e^{-ik\omega}-\boldsymbol{\psi}(\omega)\right\|\|\boldsymbol{f}(\omega)\|\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k^* e^{ik\omega}-\boldsymbol{\psi}^*(\omega)\right\|d\omega\\\le&M\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\gamma}_k e^{-ik\omega}-\boldsymbol{\psi}(\omega)\right\|^2d\omega,\end{aligned}$$

当 $N \to \infty$ 时，该式趋于 0。这表明 $\boldsymbol{\xi}_0 \in H_0^-(\mathrm{X})$。

第五，由 (2.8) 可知，

$$(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{I}_d)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\phi}^* - \boldsymbol{I}_d) = (\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{I}_d)\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\phi}^* - \boldsymbol{I}_d) = \boldsymbol{0}_{d\times d}, \tag{2.13}$$

几乎处处成立于 $[-\pi,\pi]$。因此，差

$$\Delta_t := \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\psi}(\omega)d\mathbf{Z}_\omega - \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}d\mathbf{Z}_\omega$$

在 $H(\mathrm{X})$ 中与自身正交，因此它是零向量。然后由 (2.9) 和 (2.12)，

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_t &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}d\mathbf{Z}_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\boldsymbol{\phi}(\omega)\boldsymbol{\psi}(\omega)d\mathbf{Z}_\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{b}(j)e^{-ij\omega}\boldsymbol{\psi}(\omega)d\mathbf{Z}_\omega = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{b}(j)\boldsymbol{\xi}_{t-j}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

方程 (2.13) 表明，$\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\psi}$ 的每个元素都属于 $L^2([-\pi,\pi], \mathcal{B}, \mathrm{tr}(d\boldsymbol{F}))$，因此该空间与 $H(\mathrm{X})$ 之间的等距性证明了 (2.14)。

最后，前述步骤表明，对于任意时刻 $n \in \mathbb{Z}$，序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_t\}$ 的创新空间相同，因此过去 $H_n^-(\mathrm{X})$ 和 $H_n^-(\boldsymbol{\xi})$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 也相同。由此，(2.14) 给出了 $\{\mathrm{X}_t\}$ 的 Wold表示。□

3. Smooth eigenvalues of the spectral density

在一维情形下，有一个众所周知的正则性充分条件，它同时给出了 H^2 谱因子的公式，以及白噪声序列和 Wold 分解 (1.1) 中系数的公式。这个条件是假设过程的谱密度$f(\omega) > 0$对任意 $\omega \in [-\pi,\pi]$连续可微，参见例如 [5, 第 76] 页或 [1, 第 2.8 小节2]。

这个充分条件可以部分推广到多维情形。当一个正则 d维时间序列 $\{\mathrm{X}_t\}$ 具有形式为 (2.5) 的 H^2 谱因子˜时，等价地，当其在 (2.1) 中的 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 谱分解所出现的次酉矩阵函数 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 可以选取为属于哈代空间 $H^\infty \subset H^2$时，谱密度 $\boldsymbol{f}$ 非零特征值的光滑性 H^2 会给出 H^2 谱因子的公式。

定理 3.1。设 $\{\mathrm{X}_t\}$ 为一个 d 维时间序列。若满足以下三个条件，则它是秩为 $r \le d$ 的正则时间序列。

（1）它具有绝对连续谱测度矩阵 $d\boldsymbol{F}$，其密度矩阵 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 对几乎处处的 $\omega \in [-\pi,\pi]$ 都具有秩 r。（2） $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的每个非零特征值 $\lambda_j(\omega)$（$j = 1,\dots,r$）都是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微正函数。˜（3）在（2.1）中 $\boldsymbol{f}(\omega)$ 的谱分解中出现的次酉矩阵函数 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 可以选取为属于哈代空间 $H^\infty \subset H^2$，因此（2.7）成立。

此外，$\{\mathrm{X}_t\}$ 也满足定理 2.3 的条件，因此公式（2.9）–（2.12）给出了 $\{\mathrm{X}_t\}$ 的 Wold表示。

证明。条件 (2) 表明，每个 $\log\ \lambda_j(\omega)$ $(j = 1,\dots,r)$ 也是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数，因此可以将其展开为一致

收敛傅里叶级数

$$\log \lambda_j(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{j,n} e^{in\omega}, \quad \beta_{j,-n} = \bar{\beta}_{j,n}. \tag{3.1}$$

将其写为

$$\begin{aligned} \log \lambda_j(\omega) &= Q_j(\omega) + \bar{Q}_j(\omega) \\ &:= \left(\frac{1}{2}\beta_{j,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{j,n} e^{-in\omega} \right) + \left(\frac{1}{2}\beta_{j,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{j,n} e^{in\omega} \right). \end{aligned}$$

定义

$$\gamma_j(\omega) := \exp(Q_j(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\beta_{j,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{j,n} e^{-in\omega} \right)^k. \tag{3.2}$$

Then

$$\lambda_j(\omega) = \gamma_j(\omega)\bar{\gamma}_j(\omega) = \exp(Q_j(\omega)) \exp(\bar{Q}_j(\omega)), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{3.3}$$

注意，每个 $Q_j(\omega)$，因而每个 $\gamma_j(\omega)$（$j = 1, \ldots, r$）都是 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数，因此属于 $L^2(T)$。此外，每个 $Q_j(\omega)$，因而每个$\gamma_j(\omega)$的傅里叶级数中都只有 $e^{-i\omega}$ 的正幂。因此，每个 γ_j 都属于哈代空间 H^2。

将 (3.3) 代入 (2.1)：

$$\boldsymbol{f}(\omega) = \tilde{\boldsymbol{U}}(\omega) \operatorname{diag}[\gamma_1(\omega) \cdots \gamma_r(\omega)] \operatorname{diag}[\bar{\gamma}_1(\omega) \cdots \bar{\gamma}_r(\omega)] \tilde{\boldsymbol{U}}^*(\omega).$$

因此，我们可以取一个谱因子

$$\boldsymbol{\phi}(\omega) := \sqrt{2\pi}\tilde{\boldsymbol{U}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}(\omega), \quad \boldsymbol{\Gamma}(\omega) := \operatorname{diag}[\gamma_1(\omega) \cdots \gamma_r(\omega)]. \tag{3.4}$$

由于每个 $\gamma_j(\omega) \in H^2$，且由条件 (3) 可知，$\tilde{U}(\omega)$ 的每个元素都属于 H^∞，因此 $\boldsymbol{\phi}(\omega)$ 的每个元素都属于 H^2。这意味着 $\boldsymbol{\phi}$ 是一个如 (1.5) 和 (1.6) 中所述的 H^2 谱因子，因此 $\{\mathbf{X}_t\}$ 是正则的。

取 $\boldsymbol{\phi}$ 的 Moore–Penrose逆：

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) := \boldsymbol{\phi}^+(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\omega) \tilde{\boldsymbol{U}}^*(\omega), \quad \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\omega) := \operatorname{diag}[\gamma_1^{-1}(\omega), \ldots, \gamma_r^{-1}(\omega)],$$

其中每个 $\gamma_j^{-1}(\omega) = \exp(-Q_j(\omega))$，因此它也是连续的，且其傅里叶级数也只含有 $e^{-i\omega}$ 的正幂。这意味着 $\boldsymbol{\psi} \in H^2$。

最后，由于每个 $\lambda_j(\omega)$ 都是 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数，因而有界；并且由于 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 是次酉的，$\boldsymbol{U}(\omega)$ 的 ˜ ˜ 分量是有界函数，因此 $\|\boldsymbol{f}\|$ 有界。□

d维 Kolmogorov–Szeg˝o 公式 (1.8) 仅给出了满秩正则时间序列中新息的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的行列式。过程的秩 r 小于 d时，情况类似：

$$\det \boldsymbol{\Sigma}_r = (2\pi)^d \exp \int_{-\pi}^{\pi} \log \det \boldsymbol{\Lambda}_r(\omega) \frac{d\omega}{2\pi},$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}_r$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的 r 个非零特征值构成的对角矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}_r$ 是原时间序列的一个秩为 r 的 r维子过程的新息协方差矩阵，参见 [1, 推论 4.5] 或 [9, 推论 2.5]。

幸运的是，在定理 3.1 的条件下，正如下一个定理所示，可以通过类似的公式获得协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 本身。

定理 3.2。假设一个弱平稳的 d维时间序列满足定理 3.1 的条件。则该过程的新息的协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 可表示为

$$\mathbf{\Sigma} = 2\pi\boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{diag}\left[\exp\int_{-\pi}^{\pi}\log\lambda_j(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}\right]_{j=1,\dots,r}\boldsymbol{\psi}^*(0),$$

其中 λ_j, $j=1,\dots,r$ 是过程的谱密度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 的非零特征值， $\boldsymbol{U}(\omega)$ 是相应正交归一特征向量的 $d\times r$ 矩阵，并且

$$\boldsymbol{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\boldsymbol{U}}(\omega)d\omega. \tag{3.5}$$

证明。由（1.2）可得最佳一步线性预测的误差，同时，创新项为

$$\mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{X}}_1 = \boldsymbol{b}(0)\boldsymbol{\xi}_1,$$

利用 $\{\mathrm{X}_t\}$ 的 Wold分解。因此，创新项的协方差为

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}((\mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{X}}_1)(\mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{X}}_1)^*) = \boldsymbol{b}(0)\boldsymbol{b}^*(0).$$

根据（1.7），与 Wold分解对应的解析函数 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 满足 $\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{\Phi}(0)$。取傅里叶级数（2.7），令

$$\hat{\boldsymbol{U}}(z) := \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\psi}(j)z^j, \quad |z|\le 1.$$

此外，用（3.2）表示

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(z) := \mathrm{diag}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\beta_{j,0} + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\beta}_{j,n}z^n\right)^k\right]_{j=1,\dots,n}, \quad |z|\le 1.$$

现在利用 (3.4)，可得

$$\boldsymbol{\Phi}(z) = \sqrt{2\pi}\hat{\boldsymbol{U}}(z)\hat{\mathbf{\Gamma}}(z), \quad |z|\le 1,$$

and

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = \sqrt{2\pi}\hat{\boldsymbol{U}}(0)\hat{\mathbf{\Gamma}}(0) = \boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{diag}\left[\exp(\beta_{j,0}/2)\right]_{j=1,\dots,r}.$$

结合前述结果，

$$\mathbf{\Sigma} = 2\pi\boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{diag}\left[\exp(\beta_{j,0})\right]_{j=1,\dots,r}\boldsymbol{\psi}^*(0),$$

其中 $\boldsymbol{\psi}(0)$ 由 (3.5) 和 (3.1) 给出，

$$\beta_{j,0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\lambda_j(\omega)d\omega, \quad j=1,\dots,r.$$

至此，定理得证。 □

References

[1] Bolla, M. and Szabados, T.(2021 *Multidimensional Stationary Time Series: Dimension*). . CRC出版社, *Reduction and Prediction*
博卡拉顿。[2] Brockwell, P. J., Davis 1991 *Time Series: Theory and* , *Methods*
R. A. and Fienberg, S. E. ( ). . 施普林格，纽约。[3] Fuhrmann, P. A. (2014). *Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. Courier Corpora- tion.[4] Kolmogorov, A. N. (1941). 希尔伯特空间中的平稳序列。《莫斯科大学数学通报》（俄文），
2 6 1 40 *Selected works of A. N.* ( ): – 。英译本： , *Kolmogorov vol. II Probability Theory and Mathematical Statistics ed. A. N. Shiryayev*
, , 。228–271，施普林格，1992。[5] Lamperti, J.(1977). *Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory*. 施普林格，纽约。[6] Nikolski, N. (2019). *Hardy spaces*. 第179卷。剑桥大学出版社。[7] Rozanov, Y. A. (1967). *Stationary Random Processes*. Holden–Day，旧金山。[8] Rudin, W. (2006). *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw–Hill Education。
[9] Szabados, T. 2022 *J. Time Series Analysis* ( ). **43** 263 284
正则多维平稳过程。– 。[10] Szabados, T. (2022). 文章《正则多维平稳过程》的勘误。 *J. Time Series Analysis*, https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/ 10 1111 12670 . /
[11] Wiener N. and Masani P. 1957
jtsa. , , ( ). 多元随机过程的预测理论，I：正则性条件。 *Acta Mathematica* **98** 111–150。

Budapest University of Technology and Economics
Email address: szabados@math.bme.hu