arXiv:2302.13412v1 [math.LO] 26 Feb 2023

林德斯特伦对抽象逻辑系统的可刻画性

基于测度的解析结构

Krystian JOBCZYK 和 Mirna DŽAMONJA

2023年2月28日

摘要

1969年，Per Lindstrøm 证明了著名的定理，刻画了一级逻辑，并为离散结构形式理论的一级可定义性确立了判据。K. J. Barwise、S. S helah、J. Väänänen 等人将林德斯特伦的可刻画性研究计划拓展到无穷逻辑系统类，其中包括 M. Džamonja 和 J. Väänänen 最近发表的一篇关于Karp链逻辑的论文。该逻辑满足插值性质和良序的不可定义性，并且在具有这些性质的逻辑系统类中是极大的。链逻辑的新颖之处在于其可满足性的新定义。在本文中，我们为林德斯特伦式的谓词逻辑系统类型可刻画性提供了一个框架；这些系统在具有基于测度的对象的模型（解析结构）中进行语义解释。具体而言，Hájek 的积分逻辑被重新定义为一种具有新型 Hájek 可满足性的抽象逻辑，并且它是用于描述具有勒贝格积分的解析结构、同时满足紧致性、初等链条件和弱否定的逻辑系统类中的极大逻辑。

关键词：林德斯特伦可刻画性、抽象逻辑、解析结构、测度、勒贝格积分

1 引言

在 Lindstrom (1969) 中，Per Lindstrøm 根据其此前在 Lindstrom (1966) 中对所谓Lindsrøm量词的研究，详细阐述了形式理论的一阶可刻画性标准。根据这一结果，当一个逻辑系统同时满足紧致性定理和向下Skolem-Loewenheim定理时，它与一阶（初等）逻辑具有相同的表达能力。Lindstrøm 定理的纯语义证明开启了所谓抽象模型论的研究；这一领域最初在 Barwise (1977) 中以公理化方式加以描述，并在 Barwise (1985)、Ebbinghaus (1985) 以及许多其他论文和专著中得到广泛阐述。

本质上，林德斯特伦在 20 世纪 60 年代的研究成果，深刻影响了抽象模型论概念框架中的两条并行研究路径。第一条路径——秉承 Lindstrom（1966）研究成果的精神而重新兴起——涉及无穷逻辑——近期 Dzamonja（2021）在一定程度上结合 Shelah（2012）对 Shelah 的无穷逻辑的讨论对此有所论述——

以及最初由 Mostowski（1957）引入、并在 Barwise（1981）等文献中得到广泛讨论的广义量词。第二条研究路径则聚焦 Lindstrom (1969) 提出的林德斯特伦定理本身，包括对该定理的所有重构尝试。

林德斯特伦定理已推广至各种逻辑系统，例如 Benthem（2007）和 De Rijke（1995）中的模态逻辑系统。与此同时，证明过程中的很大一部分方法也融入了函数分析的模型论结构之中，这得益于 Henson（1975，1986）提出的思想。本着同样的精神，Iovino（2001）和 Caicedo（2014）阐述了针对解析结构的一种林德斯特伦式刻画，其中采用了一种新的近似满足关系。

1.1 论文的动机与目标

尽管自 20 世纪 70 年代早期的研究以来，对（甚至是复杂的）解析结构（如巴拿赫空间）的模型论处理似乎已相当成熟，例如 Henson（1975，1986）和 Shelah（1978）的研究，但林德斯特伦式的解析结构刻画仅针对少数几类结构得到阐述，例如连续度量空间（Ben Yacov（2008）；Caicedo（2014））。更确切地说，极大性逻辑和林德斯特伦定理在此针对所谓的 Pavelka-Lukasiewicz 逻辑得以确立，这归功于 Hajek（1998）。遗憾的是，迄今尚未有人尝试基于测度对解析结构进行一阶可刻画性研究。具体而言，我们尚不了解适用于描述基于勒贝格测度，或更一般地说，基于拉东测度的带积分解析结构的恰当极大逻辑。值得庆幸的是，Hajek（1998）已提出了一个便于构建此类逻辑的形式化桥梁，即所谓的有积分的有理 Pavelka 谓词逻辑。为简便起见，本文将其称为 Hájek 积分逻辑。

鉴于这一缺失与不足，本文旨在：

- 提出一种基于抽象逻辑概念的 Hájek 积分逻辑（HLI）新描述，

- 为与抽象逻辑相关、先前针对 HLI 定义的适当“最小”逻辑，制定并证明 Lindsrøm 型定理。

本文是会议论文 Jobczyk（2021）的扩展和修订版本。

2 论文分析的术语框架

在进入论文的主体部分之前，我们先提出一个一般性的概念框架，以便进行进一步分析。首先，回顾给定签名的抽象逻辑的形式定义及若干密切相关的概念。其次，将从句法和语义两个方面介绍 Hájek 积分逻辑——所谓 Pavelka-Hájek 谓词逻辑的一种独特扩张。

2.1 抽象逻辑及其模型论性质

抽象逻辑的形式定义是抽象模型论的核心概念，由 P. Lindstrøm 在其著名著作 Lindstrom (1969) 中详细阐述。本文对这一概念的阐释融入了 Iovino (2001) 的方法。

定义 1. 逻辑 $\mathcal{L}$ 是一个三元组 ($\mathcal{K}$, $Sent_{\mathcal{L}}$, $\models_{\mathcal{K}}$)，其中 $\mathcal{K}$ 是给定类型的结构类[1]，在同构、重命名和约化结构下封闭；$Sent_{\mathcal{L}}$ 是一个函数，它为每个词汇表 S 指定一个集合 $Sent_{\mathcal{L}}(S)$，即 $\mathcal{L}$ 的 $\mathcal{S}$-句子集合；$\models_{\mathcal{L}}$ 是一个满足关系，且满足以下条件：

1. $S \subseteq S^{'}$, then $Sent_{\mathcal{L}}(S) \subseteq Sent_{\mathcal{L}}(S^{'})$ (monotonicity of $Sent_{\mathcal{L}}$-operator),

2. 如果 $M \models_{\mathcal{L}} \phi$（公式 ϕ 与 M 仍处于 $\models$-关系中），那么存在一个词汇表 S，使得 M 是 $\mathcal{K}$ 中的一个 S-结构，且 ϕ 是一个 S-句子。

3.（同构性质）如果 $M \sim N$ 是 $\mathcal{K}$ 中的同构结构，且 ϕ 是一个 S-句子，那么 $\phi^N = \phi^M$。

4.（约化性质）如果 $S \subseteq S^{'}$，其中 S 和 $S^{'}$ 都是词汇表，且 M 是 $\mathcal{K}$ 中的一个 $S^{'}$-结构，那么

$$M \models_{\mathcal{L}} \phi \text{ if and only if } (M|S) \models_{\mathcal{L}} \phi.$$

5.（重命名性质）如果 $\rho: \ S \to S^{'}$ 是词汇表 S 与 $S^{'}$ 之间的重命名，那么对于每个 S-句子 ϕ，存在 $S^{'}$-句子 ϕ^{ρ}，使得

$$M \models_{\mathcal{L}} \phi \text{ if and only if } M^{\rho} \models_{\mathcal{L}} \phi^{\rho},$$

对于结构类 $\mathcal{K}$[2] 中的每个 S-结构 M。

通常，如果 $M \models_{\mathcal{L}} \phi$，我们称 ϕ 在 M 中得到满足，并称 M 是 ϕ 的一个模型。

定义 2. 如果对于所有 $\mathcal{L}$-句子 ϕ、ψ，都存在一个 $\mathcal{L}$-句子 $\phi \wedge \psi$，使得

$$M \models_{\mathcal{L}} \phi \wedge M \models_{\mathcal{L}} \psi \text{ if and only if } M \models_{\mathcal{L}} \psi \wedge \phi.$$

定义 3. 如果对于所有 $\mathcal{L}$-句子 ϕ:

$$M \models_{\mathcal{L}} \neg\phi \text{ if and only if } M \not\models_{\mathcal{L}} \phi, \tag{1}$$

对于 $\mathcal{K}$ 中的所有 M-结构。

抽象逻辑的一般定义 $\mathcal{L}$ 使我们能够定义一个关于$\mathcal{L}$的（形式）理论 T。

[1] P. Lindstrom 在 Lindstrom (1966) 中研究了经典结构，即离散结构。Caicedo（2014）研究了连续度量结构。[2] 和往常一样，M^{ρ} 表示由 M-结构经由 $\rho^{'}$ 转换而得到的 $S^{'}$-结构。

定义 4。设 $\mathcal{L}$ 为一种抽象逻辑，设 S 为一个词汇表。 S-理论（或简称：理论） T 是 $\mathcal{L}$的所有 S-句子组成的集合。

定义 5. 设 T 是 $\mathcal{L}$ 的一个 S-理论。若还存在 M 使其为 $\mathcal{K}$ 中满足 $M \models_{\mathcal{L}} \phi$ 的一个 S-结构，且对每个 $\phi \in T$ 都成立，则 M 是 T 的一个模型，记作 $M \models_{\mathcal{L}} T$。

定理 1. 若 T 一致，则它有一个模型。

2.2 从卢卡西维茨逻辑到 Hájek 积分逻辑

在 Caicedo（2014）中，抽象逻辑在模型论描述中的概念框架被用于描述以卢卡西维茨逻辑为基础的帕维尔卡-哈耶克逻辑（包括命题变体和谓词变体）。本章第二部分介绍了 Hajek（1998）提出的 Hájek 积分逻辑，它是谓词 Pavelka-Hájek 逻辑的一个扩张。Iovino (2001) 已经基于抽象逻辑概念，以概念框架的形式描述了帕维尔卡-哈耶克逻辑的两种变体；而 Hájek 积分逻辑本身仍将按照 Hajek（1998）的经典方式加以介绍。第 3 节和第 4 节将进一步阐述适用于该逻辑、基于抽象逻辑概念的工具体系。

2.2.1 Pavelka 有理逻辑

谓词帕维尔卡有理逻辑（PrePRL）是（谓词）无穷值卢卡西维茨逻辑的保守扩张——该逻辑由 Sheperdson（2000）提出——并通过为 [0,1] 中的有理数关联真值常量来扩展这一系统。

命题无穷值卢卡西维茨逻辑与作为命题逻辑系统的 Pavelka 有理逻辑（PRL）之间存在类似的关系，而后者是本段的主要讨论对象。这种相似性体现在将 PRL 定义为抽象逻辑的方式上。事实上，PRL 的适当结构类由连续度量结构类构成，而后者是卢卡西维茨逻辑的适当结构类——见 Caicedo（2014）。此外，PRL 语言中的谓词取值于闭区间 $[0, 1]$。

由于 PRL 具有模糊性，通常用于赋值的 $\models$ 关系 $\mathcal{V}$ 将被 $\mathcal{V}$ 赋值取代；这种赋值是 Hajek（1998）所定义的所谓真值度的对应概念，并发挥着“模糊满足关系”的作用。作为一种抽象逻辑，PRL 分两步引入。首先，提出其“替代形式”——弱帕维尔卡有理逻辑（WPRL），作为正式构建 PRL 的基础。

定义6. 弱帕维尔卡有理逻辑（WPRL）[3] 是一个三元组

($\mathcal{K}$、 $Sent_{\mathcal{WPRL}}$、 $\mathcal{V}$)，其中 $\mathcal{K}$ 构成一个在同构、重命名和约化结构下封闭的度量连续结构类， $Sent_{\mathcal{L}}$ 是一个函数，它为每个词汇表 S 赋予一个集合 $Sent_{\mathcal{WPRL}}(S)$，即由 $\mathcal{L}$ 的 $\mathcal{S}$-句子组成的集合，使其满足以下条件：

[3]虽然当前定义在定义1.10中作为定义[0,1]值逻辑而引入，但文献中尚未使用过这个名称。参见：Caicedo（2014），第1175–1176页。

1. $S \subseteq S'$，则 $Sent_{\mathcal{WPRL}}(S) \subseteq Sent_{\mathcal{WPRL}}(S')$。2. 关系 $\mathcal{V}$ 为每一对(ϕ、 M)赋予一个实数 $\phi^M \in [0,1]$，其中 ϕ 是 S-句子， M 是 $\mathcal{K}$ 中的 S-结构。3.（WPRL 的同构性质）如果 $M \sim N$ 且它们在度量意义下同构，并且 ϕ 是 $\mathcal{WPRL}$ 的 S-句子，则 $\phi^M = \phi^N$。4.（WPRL 的约化性质）如果 $S \subseteq S'$，其中 S 和 S' 都是词汇表，且 M 是 $\mathcal{K}$ 中的 S'-结构， ϕ 是 S-句子，则 $\phi^M = \phi^{M\restriction S}$ （$M \restriction S$表示将 M 约化为 S）。5.（WPRL 的重命名性质）如果 ρ： $S \to S'$ 是词汇表 S 和 S'之间的重命名，那么对于每个 S-句子 ϕ，存在一个 S'-句子 ϕ^ρ，使得$\phi^M = (\phi^\rho)^{M^\rho}$ 对于结构类 $\mathcal{K}$[4]中的每个 S-结构 M。

定义 7. 若 M 是由 $\mathcal{K}$、 $\phi \in Sent_{\mathcal{WPRL}}$ 和 $\phi^M = 1$ 构成的 S-结构，则称 M 满足 ϕ，并记作 $M \models_{\mathcal{WPRL}} \phi$。

有时我们会用 e 代替 $\mathcal{V}$ 来表示同一个赋值，尤其是在讨论 PRL 公式的真值[5]时。

为了基于 WPRL 对 PRL 作补充定义，需要在某些联结词下封闭抽象逻辑（$\mathcal{K}$、 $Sent_{\mathcal{WPRL}}$、 $\mathcal{V}$）。对于每种基于卢卡西维茨逻辑的 [0,1] 值逻辑而言，关键联结词是所谓的卢卡西维奇蕴涵。它是一个从 $[0,1]^2$ 到 $[0,1]$ 的函数，由以下子句定义：

$$x \to_L y = \min\{1 - x + y, 1\}. \tag{2}$$

值得注意的是，当且仅当 $x \leq y$ 时， $x \to_L y = 1$。

定义 8. 当且仅当对于每个词汇表 S，以下条件成立时，我们称 [0,1] 值逻辑 $\mathcal{L}$ 在基本联结词下封闭：

1. 若 $\phi, \psi \in Sent_{\mathcal{L}}(S)$，则存在一个句子 $\phi \to_L \psi \in Sent_{\mathcal{L}}(S)$，使得对于每个 S-结构 M，$(\phi \to_L \psi)^M$ 当且仅当 $\phi^M \to_L \psi^M$。2. 对于每个元素 $r \in [0,1]$，集合 $Sent_{\mathcal{L}}(S)$ 中都包含一个具有常真值 r 的句子，称为 $\mathcal{L}$ 的常元，记作 $\bar{r}$，即 $e(\bar{r}) = r$。

定义了基本联结词下的闭合性之后，我们就可以如下将 Pavelka 有理逻辑定义为一种抽象逻辑。

定义9. Pavelka理性逻辑（PRL）是一个三元组（$\mathcal{K}$, $Sent_{\mathcal{WPRL}}$, $\mathcal{V}$），其定义如定义6所述，并且对基本联结词封闭。

[4]按照惯例， M^ρ 表示由 M-结构经由 ρ' 转换而得到的 S'-结构。[5]不难看出，这种抽象Pavelka理性逻辑的定义在结构上类似于许多模糊逻辑系统的语义的基于Kripke框架的描述，例如Hajek（1998）提出的 S5[0,1]。事实上，这些系统的语义通常由三元组给出：(W, R, e)，其中 W 是一个非空状态集， R 是可达关系 $\subseteq W \times W$，而 e： $\mathcal{L} \to [0,1]$ 是针对给定模糊逻辑系统的给定语言的赋值函数。

从公式的 [0,1]-赋值角度来看，以下观察似乎值得注意。

备注 1. 设 M 是抽象逻辑 $\mathcal{L} = \mathcal{PRL}$的 S-结构。那么对于任意$\phi \in Sent_{\mathcal{PRL}}(S)$，以下结论成立：

1. $M \models_{\mathcal{L}} \phi \to_L \bar{r} \iff \phi^M \to r$（或者： $e(\bar{r} \to_L \phi) = 1 \iff e(\phi) \geq r$）。
2. $M \models_{\mathcal{L}} \bar{r} \to_L \phi \iff r \to_L \phi^M$ （或者： $e(\phi \to_L \bar{r}) = 1 \iff e(\bar{r}) \geq \phi$）。

注意，对于每个 S-结构 M，都有[6]:

$$(\neg\phi)^M = 1 - \phi^M,\ (\phi \vee \psi)^M = \min\{\phi^M, \psi^M\},\ (\phi \wedge \psi)^M = \max\{\phi^M, \psi^M\}.$$

值得特别强调的是，每个 $\phi \in Sent_{\mathcal{PRL}}$ 的真值都由集合决定

$$\{r \in \mathcal{Q} \cap [0,1] : M \models_{\mathcal{PRL}} \phi \to_L \bar{r}\} = \{r \in \mathcal{Q} \cap [0,1] : e(\bar{r} \to_L \phi) = 1\} \quad (3)$$

或由集合决定

$$\{r \in \mathcal{Q} \cap [0,1] : M \models_{\mathcal{PRL}} \bar{r} \to_L \phi\}^{7}. \quad (4)$$

这基于以下观察：公式的真值（通过模糊评价得到）并非过于假，即其真值至少等于 r（如果 $\bar{r} \to_L \phi$）。类似地，如果 $\phi \to_L \bar{r}$，那么 ϕ 的真值并非过于真，即其真值至多等于 r。

2.2.2 谓词帕维尔卡有理逻辑（PrePRL）

谓词帕维尔卡有理逻辑（PrePRL）构成了 Pavelka 有理逻辑的谓词扩展：将 PRL 的命题语言替换为谓词语言即可得到该逻辑。本段旨在通过构造适当的结构类和一组新的句子，对 PrePRL 进行基于抽象逻辑的描述——这些句子源于每种谓词语言中的项和公式分类。构造本身将通过说明构造的方向以及所构造结构的性质来展开。

I. 几点说明。在详细介绍构造之前，应先对该构造的方向以及结构本身的性质作出一些说明。

[6]这些性质对应于 Hajek（1998）对 PRL 的基于公理的描述：1.（$\bar{r} \to \bar{s} \equiv r \Rightarrow s$）
2. $\neg\bar{r} \equiv 1 \stackrel{-}{} r$

[7]显然，可以使用 $\leq$-关系重新表述这些集合的定义。

1. 尽管多数二值谓词逻辑会将谓词“=”纳入其公式中，并在语义上将其解释为同一关系，但多值谓词逻辑系统应有意纳入符号“≈”，并在语义中将其解释为作为模糊同一性的相似关系。PrePRL 就是这类系统的一个例子。

2. 同时，我们通常有两种方式可以形式化地把握谓词语言中的“=”关系符号。第一种方式依赖于列举其形式性质：自反性、对称性和传递性——这种方式源于这样一种观察：它构成的恰好是一个等价关系。另一种更强的方式，则依赖于为谓词语言中的公式定义适当的同余关系[8]。

更确切地说，对于变元符号 x_1、$\ldots x_n$ 和 y_1、.....、y_n，“=”关系符号由以下合取给出：对于每个 n 元运算符号 f，相应的同余关系为：

$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots x_n = y_n) \rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n). \tag{5}$$

对于 n 元谓词 P，则有：

$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots x_n = y_n) \rightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow_L P(y_1, \ldots, y_n)). \tag{6}$$

同余这一概念——作为同一性的模糊对应物——也可用于把握“≈”关系符号，其语义解释为相似关系，如下所示：

$$(x_1 \approx y_1 \wedge \ldots x_n \approx y_n) \rightarrow_L (f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(y_1, \ldots, y_n). \tag{7}$$

对于 n 元谓词 P，则有：

$$(x_1 \approx y_1 \wedge \ldots x_n \approx y_n) \rightarrow_L (P(x_1, \ldots, x_n) \approx P(y_1, \ldots, y_n)). \tag{8}$$

II. PrePRL 作为一种抽象逻辑。为了基于抽象逻辑概念来描述 PrePRL，我们重申：PRL 在语义上由满足 1-Lipschitz 条件的连续度量空间表示（参见 Caicedo（2014年），第 1173、1179 页。）[9]。

定义 10。1-Lipschitz 条件。设 S 是连续度量结构的一个类，且 M 是这样的 S-结构。对于所有 n 元谓词 P、所有 n 元函数符号 f、$\bar{a} = a_1$、$\ldots a_n \in M$、$b = b_1$、$\ldots b_n \in M$

$$d(f(\bar{a}), f(\bar{b})), \leq \sup_{1 \leq i \leq n} d(a_i, b_i), \tag{9}$$

$$d(P(\bar{a}), P(\bar{a})) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} d(a_i, b_i). \tag{10}$$

与此同时，相似关系 $x \approx y$ 对应于距离 $d(x, y)$，使得 $d(x, y) = 1 - x \approx y$，即这两个关系互为否定[10]。由此可推得唯一的基于相似性的 Lipschitz 条件，其形式如下。

[8]请注意，每个同余都是唯一的等价关系。这说明了为何这种方法可以被称为较强的方法。[9]论文作者对 Łukasiewicz-Pavelka 逻辑的评价是：[10]从这样的观察来看，这一点是可以解释的：两个元素 x 和 y 之间的距离越大，它们的相似性就越小，反之亦然。

定义 11. 基于相似性的 Lipschitz 条件[11]。设 f 为一个函数符号，S - 为具有相似关系 $\approx$ 的结构类， M 为一个 S-结构，且 $\bar{a} = a_1$，....., $a_n \in M$ 和 $b = b_1$，....., $b_n \in M$。则有：

$$(\bar{a} \approx \bar{b}) \leq \inf_{1 \leq i \leq n} \{f(a_i) \approx f(b_i)\}^{12}. \tag{11}$$

因此，PrePRL 的适当 S类是由连续、基于相似度的 Lipschitz 结构构成的类。

既然已经确定了 PrePRL 的适当结构类，我们便可以引入一组 PrePRL 语句 $Sent_{\mathcal{PV}|\mathcal{PRL}}$ ——其定义方式类似于谓词语言中的公式集。更准确地说，我们将$Sent_{\mathcal{PV}|\mathcal{PRL}}$ 视为 $\mathcal{L}(PrePRL)$ 的公式集；按照通常方式，该公式集由$\mathcal{L}(PrePRL)$中的项构成。

定义 12。（ $\mathcal{L}(PrePRL)$ 的项。）假设给定一个（某种类型的）结构类 S，并且 I 是一个非空指标集。 $\mathcal{L}(PrePRL)$ 的 S项集 $Tm_{\mathcal{L}(PrePRL)}$归纳定义如下：

$$Tm_0 = X \cup C, \tag{12}$$

其中， X 是一个有限变量集，而 C 是一个常元集，

$$Tm_{l+1} = Tm_l \cup \{\langle f_j(t_1, \ldots, t_m)\rangle\}, \tag{13}$$

其中， f_j 是一个 j元函数符号，适用于 $j \in I$，并且

$$Tm = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Tm_l. \tag{14}$$

定义 13。（ $\mathcal{L}(PrePRL)$ 的公式）。假设给定了一个具有 S-模型 M 的结构类（类型为 S），令 I 为一个（非空）指标集，令 P_i 为第 i 个 n 元谓词，并令 $\widehat{r}$ 为有理数 r 的常量符号。集合 $Form_{\mathcal{L}(PrePRL)}$按如下方式归纳定义：

$$\begin{aligned} Fm_0 = \{\langle t, \approx, s\rangle : t, s \in Tm_{\mathcal{L}(PrePRL)}\} \cup \\ \cup\{P_i(t_1, \ldots, t_n) : i \in I \text{ and } t_1, \ldots t_n \in Tm\} \\ \cup\{\widehat{r} : \widehat{r}^M = r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Fm_{l+1} = Fm_l \cup \{\neg F : F \in Fm_l\} \cup \\ \cup\{F \to_L G : F, G \in Fm_l\} \cup \\ \cup\{\forall_{x_n} F : F \in Fm_l \text{ and } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

[11]事实上，我们可以将这一性质称为反压缩[12]。直接根据关系 $d\ x\ y\ = 1 - x \approx y \qquad f \quad \approx f \quad \leq sup_{1 \leq i \leq n}\{a_i \approx (,),$ 可以推断出$(\bar{a})\ (\bar{b})$。经过一 $b_i\}$ 些修改后，它也允许我们推断出上述条件。

在建立了公式类 $\mathcal{L}(PrePRL)$ 之后，我们便可以将 PrePRL 定义为一种抽象逻辑。

定义 14。（谓词帕维尔卡有理逻辑（PrePRL）。）设 S 为谓词词汇表。谓词帕维尔卡有理逻辑是一个三元组（$\mathcal{K}$， $Sent_{PrePRL}$， $\mathcal{V}$），其中：

a) $\mathcal{K}$ 是一个连续的基于相似性的利普希茨结构类，在重命名、约化结构和同构下封闭，

b) $Sent_{PrePRL}(S)$ 是 $\mathcal{L}$(PrePRL) 的公式类——如定义 13 中所定义，

c) 对每一对（ϕ， M）指定一个关系 $\mathcal{V}$，其中 ϕ 是 S-句子， M 是 $\mathcal{K}$ 中的 S-结构， $\phi^M \in [0,1]$ 为实数，

该关系在基本联结词和存在（广义）量词下封闭。

3 Hajek 积分逻辑

本节从句法和语义两方面介绍 HLI。由于 Hajek（1998）对其进行了公理化描述，因此 HLI 是谓词帕维尔卡有理逻辑的扩张（参见：Hajek （ 1998 ）；Caicedo （ 2014 ））。这一描述将成为一个便捷的切入点，帮助我们将该系统重新表述为一种抽象逻辑。

I. HLI语法。 HLI 在 Hajek（1998）中通过语言 $\mathcal{L}(HLI)$从句法和语义两方面定义，该语言由以下语法给出：

$$\phi := \phi|\neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \veebar \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \& \psi \mid \forall_x \phi \mid \int \phi \mathrm{d}x \mid^{13}$$

$$\forall_x \phi = \forall_y \psi \mid \int \phi \mathrm{d}x = \int \psi \mathrm{d}y.$$

换言之， $\mathcal{L}(HLI)$扩展了 PrePRL语言的重要部分（其中 $\approx$符号被“=”替换）[14]，加入了一个新的量词 $\int$（读作“很可能”），并通过以下条款扩展了 PrePRL 公式的定义：若 ϕ 是一个公式，且 x 是一个变元，则 $\int \phi \mathrm{d}x$。 HLI 在 $\mathcal{L}(HLI)$中由以下内容在句法上确定：

- 公理：

  (μ1) $\int v \mathrm{d}x \equiv v$ for v not not containing x freely,

[14]这种修改的含义可从另一种表示模糊性的方法中看出；该方法构成了 HLI 的一项基础性概念构想。模糊性不再那么显式，而是例如通过该系统公式的真值表现出来。[15]事实上，在上一章定义 PrePRL 时，我们谈到了卢卡西维奇蕴涵 $\rightarrow_L$，它既可以用 $\neg$ 和强析取 $\veebar$ 来定义，也可以用 $\neg$ 和强合取 & 来定义。

($\mu 2$) $\int(\neg\phi)\mathrm{d}x \equiv \neg\int\phi\mathrm{d}x$,

($\mu 3$) $\int(\phi\to\psi)\mathrm{d}x \equiv \int\phi\mathrm{d}x\to\int\psi\mathrm{d}x$,

($\mu 4$) $\int(\phi \veebar \psi)\mathrm{d}x \equiv \Big((\int\phi\mathrm{d}x\to\int(\phi\&\psi)\mathrm{d}x)\to\int\psi\mathrm{d}x\Big)$,

(μ**5**) $\int(\int\phi\mathrm{d}x)\mathrm{d}y \equiv \int(\int\phi\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

• 推理规则：肯定前件式、代换、全称化以及

$$\frac{\phi}{\int\phi\mathrm{d}x}\ ,\ \frac{\phi\to\psi}{\int\phi\mathrm{d}x\to\int\psi\mathrm{d}x}.$$

定义 15. HLI——在语言 $\mathcal{L}(HLI)$中——定义为由公理（$\mu 1$）-（$\mu 5$）组成，并且在上述“积分”推理规则及 PrePRL 的推理规则（MP 和全称化）下封闭的最小逻辑系统。

例. 1. $\int(\int\neg\phi\veebar\psi\mathrm{d}x)\mathrm{dy}$ 是一个良基的 $\mathcal{L}(HLI)$公式，但 $\int\phi\mathrm{d}x+\int\psi\mathrm{dx}$ 不是[16]。2. $\forall_x\phi=\forall_y\psi$ 是一个合法的 $\mathcal{L}(HLI)$公式，但 $\phi=\psi$ 不是。此公式不允许使用，因为“=”只能用于量词。

II. 语义——Hajek（1998），第 238-240 页。HLI 的语义——Hajek（1998）第 238-240 页中所述——是通过所谓的一般形式的概率模型来阐释的：

$$M=\langle|M|,R_1^M,\dots R_k^M,f_1^M,\dots,f_n^M,c_1,\dots,c_l,\mu\rangle, \tag{15}$$

其中，$|M|$是一个可数集或有限集（模型论域），R_i^M、f_j^M，对于 $i\in 1$，.....，k、$j\in 1$，.....，l，分别按照通常方式（在实单位 $[0,1]$上）解释谓词和函数符号，并且 c_1^M、.....、c_m^M以同样方式在实单位 $[0,1]$ 上解释常元符号，而 μ 是 M[17]上的概率测度

事实上，适合用于解释 HLI 的恰当模型必须是由 (18) 给出的弱概率模型的精化。我们需要考虑的不是 μ，而是积分公式的语义对应物。再说一遍，语义积分[18] 定义如下。

[16]然而，积分的可加性由公理刻画。例如，积分的有限可加性由（$\mu 4$）刻画。可以从通过适当的最小和最大范数对逻辑联结词进行语义解释的角度来理解这一点。[17]也就是说，μ 是一个将 $m\in|M|$ 赋予一个实数 $\mu(m)\in[0,1]$ 的函数μ 使得 $\sum_{m\in|M|}\mu m(m)=1$。对于任意子集 $A\subseteq|M|\mu\quad=\sum\{\mu\ m_1\ \mu\ m_2\ \dots\mu\ m_n\quad\langle m_1\ \dots\ m_n\rangle\in A\}$ (A) $=\sum_{m\in A}\mu$ ()。更一般地，如果 $A\subseteq|M|^n$，则（A） () () ()：，，。[18]在下文中，如果不会引起混淆，我们将简单地使用“积分”这一名称。

对于每个函数 f: $|M| \to [0,1]$，(勒贝格)积分 $\int f\mathrm{d}\mu$ 定义为$\sum_{n\in|M|} f(m)\mu(m)$。

更形式化地说，给定测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$，其中 $\mathcal{A}$构成了 X的子集所组成的一个 ρ-代数，那么每个满足 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$ 的有限两两不交族 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ 都称为 X的可测剖分。它使我们能够定义（给定）函数 f的勒贝格积分。

定义 16. 勒贝格积分[Hewitt],p.164. 设 f 是一个从 X到 $[0,\infty)$ 的任意函数。则 f 的勒贝格积分 $L(f)$ 定义如下。

$$L(f) = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in A_k\}\mu(A_k) : \{A_1, \ldots, A_n\} \text{ is a measurable dissection of X}\Big\}.$$

值得注意的是，若 f是二值的，即 $range(f) \subseteq \{0,1\}$，则 $\int f\mathrm{d}\mu = \mu(f^{-1}(1)) = \mu(\{m : f(m) = 1\})$（它是特征函数为 f 的集合的测度）。

现在将利用这些观察结果，在弱概率模型的 [0,1]-模糊子集的 $\mathcal{F}$-代数这一代数环境中定义“语义积分”[19]。其精确定义如下。

定义 17.（弱概率模型的 $\mathcal{F}$-代数。）设 M 是一个弱概率模型，其论域为 $|M|$。弱概率模型 M 的 $\mathcal{F}$-代数是由 $|M|$ 的 [0,1]-模糊子集[20] 构成的一个族，其中包含每个值为 $r \in [0,1]$ 的常值有理函数，并且对 $\Rightarrow$ 封闭（若 f、$g \in \mathcal{F}$，且 $h(a) = f(a) \Rightarrow g(a)$，对所有$a \in |M|$ 均成立，则 $h \in \mathcal{F}$。）[21]

定义 18。（语义积分）。Hajek（1998），第 240 页。假设给定了一个具有非空论域 $|M|$ 及其 $\mathcal{F}$-代数的弱概率模型 M。$\mathcal{F}$上的语义积分是一个映射 $\oint$，为每个 $f \in \mathcal{F}$ 关联其勒贝格积分——按照定义 16 中所述构造—— $\oint f\mathrm{d}x \in [0,1]$，并满足以下条件（如果 f、$g \in \mathcal{F}$、k_r是取值为 r 的常函数，$h : |M| \times |M| \to [0,1]$ 使得对于每个 a、$b \in |M|$，函数 $f_b(x) = h(x,b)$ 以及 $g_a(y) = h(a,y)$ 都属于 $\mathcal{F}$）：

$$\oint k_r\mathrm{d}x = r, \tag{16}$$

$$\oint (1-f)\mathrm{d}x = 1 - \oint f\mathrm{d}x, \tag{17}$$

[19]Hajek（1998）的作者们被称为“弱积分”，因为它们是所谓“弱模型”的组成部分。[20]请注意，这些集合由其特征函数确定，因此我们可以将它们视为函数，这也证明了这种定义方法是合理的。[21]由此可推知，$\mathcal{F}$在 $\neg\wedge$、$\vee$、$\veebar$下封闭。（参见：Hajek（1998），第240页。）这与 HLI 公式集合在相应联结词下的封闭性相吻合。

$$\oint(f \Rightarrow g(\mathrm{d}x \leq (\oint f\mathrm{d}x \Rightarrow \oint g\mathrm{d}x) \tag{18}$$

$$\oint(f \oplus g)\mathrm{d}x = \oint f\mathrm{d}x + \oint g\mathrm{d}x - \oint(f * g)\mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$\oint(\oint h\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \oint(\oint h\mathrm{d}y)\mathrm{d}x, \text{ if both sides defined.} \tag{20}$$

定义了"语义积分"后，我们便可以将所谓的弱概率模型定义为一种对概率模型略作修改的结构。

定义 19. 弱概率模型。每个如下类型的结构：

$$M = \langle |M|, R_1^M, \ldots R_k^M, f_1^M, \ldots, f_n^M, c_1, \ldots, c_l\,, \oint \rangle\,, \tag{21}$$

其中所有组成部分均按前文定义，且 $\oint$ 是定义在 M 的模糊子集的 $\mathcal{F}$-代数上的语义积分。

为了建立 HLI 公理与语义积分公理 (μ1)-(μ5) 之间的对应关系，我们需要在带有模糊联结词的 $\mathcal{L}(HLI)$ 表达式的标准真值函数 $\|\bullet\|_M$ 上，为积分型公式补充一条新的规则：

$$\|\int \phi\mathrm{d}x\|_M = \oint \|\phi\|_{M,v}\mathrm{d}x, \tag{22}$$

条件是 $\|\phi\|_M \in \mathcal{F}$。（否则未定义）。

4 迈向将 Hájek 积分逻辑视为抽象逻辑

为了将 HLI 描述为一种抽象逻辑（依据 Lindstrom (1966)；Caicedo（2014））, 并运用其 Lindstrøm 刻画，需要引入弱概率模型中 $\mathcal{L}(HLI)$ 公式的满足关系。本章将为 $\mathcal{L}(HLI)$ 引入一种新的满足关系，称为 Hájek 可满足性（符号表示为: $\models^H$）[22]。

按照标准方式，模糊逻辑公式 ϕ 在给定模型 $\mathcal{M}$的状态 w 中成立，当且仅当赋值函数e将 1（真值）赋给 w 中的 ϕ。形式上，

$$\mathcal{M}, w \models \phi \iff e(\phi, w) = 1. \tag{23}$$

对于所有 $\mathcal{L}(HLI)$-表达式，我们都保留这一标准且严格的约定；但对于带有"="的量词型表达式，鉴于积分量词表达式的性质，我们会放宽对弱概率模型中满足条件的要求。对于大多数由相应子句给出的 $\mathcal{L}(HLI)$-公式，这一约定体现在 Hájek 可满足性中，而这些子句是对（ 10 ）的扩展。

[22]本章的分析受到 Iovino 在 Iovino (2001) 中提出的思想启发。不过，Iovino 的思想针对的是满足关系的标准定义，并未像本文当前的考量那样融入分析性概念框架。

由于 &联结词，我们通过简短的推理来引入其定义。因为 $e(\phi\&\psi) = 1 \iff \max(0, e(\psi, w) + e(\phi, w) - 1) = 1$ 因为 $\|\phi\&\psi\|_M = \max\{0, x + y - 1\}$，我们可以推断必然成立：$e(\phi, w) + e(\psi, w) - 1 = 1 \iff e(\phi, w) = 1$ 且 $e(\psi, w) = 1$[23]。由此得到以下定义。

定义 20。（不含"="的 $\mathcal{L}(HLI)$-公式的 Hájek 满足关系。）设 $\mathcal{M}$ 为一个弱概率模型，$w \in |\mathcal{M}|$ 带有一个常元集 C。

1. $(\mathcal{M}, w) \models^H \phi \iff e(\phi, w) = 1$。2. $(\mathcal{M}, w) \models^H \neg\phi \iff e(\phi, w) = 0$。3. $(\mathcal{M}, w) \models^H \phi \wedge \psi \iff \min\{e(\psi, w)\ e(\phi, w)\}) = 1$[24]。4. $(\mathcal{M}, w) \models^H \phi \vee \phi \iff \max\{e(\psi, w)\ e(\phi, w)\}) = 1$. 5. $(\mathcal{M}, w) \models^H \phi\&\phi \iff e(\phi, w) = 1,\ e(\psi, w) = 1$。6. $(\mathcal{M}, w) \models^H \forall_x \phi(x) \iff \inf_{c\in C}\{e(\phi(c)\ w)\} = 1$. 7. $(\mathcal{M}, w) \models^H \exists_x \phi(x) \iff \sup_{c\in C}\{e(\phi(c)\ w)\} = 1$. 8. $(\mathcal{M}, w) \models^H \int \phi \mathrm{d}x \iff e(\int \phi \mathrm{d}x, w) = 1$[25]。

例。1. 假设在某个 w. p. 模型中，$e(\phi, w) = 0.9$ 和 $e(\psi, w) = 1$。显然，$\mathcal{M}, w \models^H \phi \vee \psi$，但既非 $\mathcal{M}, w \models^H \phi\&\psi$，也非 $\mathcal{M}, w \models^H \phi \wedge \psi$，因为在这些情况下，$e(\phi, w) = 0.9$ 违反了 Hájek 满足关系，这是由于 3) 和 4) 所致。

2. 考虑一个模型 $\mathcal{M}$ with $\mathcal{C}$ with $C = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$，使得 $e(\phi(\bar{1})) = 0.5$、$e(\phi(\bar{2})) = 0$, 8 以及 $e(\phi(\bar{3})) = 1$。那么 $\mathcal{M} \models^H \exists_x \phi(x)$（因为 $\sup_{c\in C}\{e(\phi(c))\} = 1$），但 $\mathcal{M} \not\models^H \forall_x \phi(x)$（因为 $\inf_{c\in C}\{e(\phi(c))\} = 0.5 \neq 1$）。

接下来还需要补充定义"="在带有 $\mathcal{L}(HLI)$ 量词，尤其是积分量词时的 Hájek 可满足性。

4.1 Hájek 可满足性

对于使用带有 $\mathcal{L}(HLI)$ 量词的"="的 Hájek 可满足性，我们打算引入测度这一概念，这是由于勒贝格积分具有基于测度的性质。通俗地说，我们希望接受如下类型的 $\mathcal{L}(HLI)$-表达式

[23]这是由如下事实得出的：$e(\psi, w)\ e(\phi, w) \in [0, 1]$。也可以根据以下事实推导出这一结果：$\phi\&\psi$ 表示 $\neg(\phi \to \psi)$，因此 $e(\phi\&\psi w) = 1 \iff e(\neg(\phi \to \psi)\ w) = 1$，即 $e(\phi, w) = 1, e(\psi, w) = 1$。[24]显然，这一条件可以改写为条件 $e(\phi, w) = 1, e(\psi, w)$。然而，这种表述掩盖了该条件的由来。值得注意的是，满足关系本身并不受模糊联结词之间语义差异的影响[25]不应将这种情形与以下事实混为一谈：在某些界限内计算给定的勒贝格积分，所得值为 1。按照 Hájek（1998）第 238–241 页所述的这一概念，这个值在此处充当相应"积分表达式"的最高真值。

$\int f\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu$，如果适当的 $\mathcal{M}$-真值集合对于左侧和右侧积分表达式的 μ-测度几乎相同，则称其在弱概率模型中具有 Hájek 可满足性。Hájek 可满足性的定义将采用归纳方式——这是由于测度的复杂程度不断增加。首先，我们从狄拉克测度的情形开始，以便之后对该情形进行推广。

I. 在 $\{0,1\}$-狄拉克情形下，'='的 Hájek 可满足性。

为了运用 Hájek 可满足性，我们将采用稍作修改的勒贝格积分定义[26]:

$$D_f : \oint f\mathrm{d}\mu = \sum_{m\in M} f(m)\mu(\{m : f(m) = 1\}).$$

若 range(f)$\in \{0,1\}$，则可得

$$\oint f\mathrm{d}\mu = \mu\{x : f(x) = 1\} \cdot 1 = \mu\{f^{-1}(1)\}.$$

我们的意图是接受这样的说法：在给定的弱概率[27] 模型 $\mathcal{M}$ 中，对于一个赋值 v，形如 $\int f\mathrm{d}x = \int g\mathrm{d}x$ 的陈述在 $\{0,1\}$-狄拉克情形下是 Hájek 可满足的，当且仅当差集 $\{x : f(x) = 1\} - \{y : g(y) = 1\}$的测度任意小，并且 $\{y : g(y) = 1\} \subseteq \{x : f(x) = 1\}$[28]。事实上，与其可积函数 f 和 g 相对应的这两个集合，可能仅在一个数量非常有限、可以"忽略"的元素上有所不同。根据最后一个假设，以下结论应成立：

$$\forall\epsilon > 0\Big(\mu\Big(\{x : f(x) = 1\} - \{y : g(y) = 1\}\Big) < \epsilon\Big) \tag{24}$$

$$\iff \mathcal{M} \models^H \text{"}\int f\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu\text{"}. \tag{25}$$

由于 $\{x \in |M| : f(x) = 1\} = \|\phi\|_M$和 $\{x \in |M| : g(x) = 1\} = \|\psi\|_M$，对于某些与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别对应的ϕ 和 ψ，我们可以将第 (24)–(25) 行改写如下：

$$\forall\epsilon > 0\Big(\mu\Big(\|\phi\|_M - \|\psi\|_M\Big) < \epsilon\Big) \tag{26}$$

$$\iff \mathcal{M} \models^H \text{"}\int \phi\mathrm{d}\mu = \int \psi\mathrm{d}\mu\text{"}, \tag{27}$$

其中 $\|\phi\|$ 是给定模型 $\mathcal{M}$ 中 ϕ 的解释。

[26]事实上，它构成了定义 16 所给出的积分严格定义的一种近似。（参见：Hewitt（1969年），第 164 页。）[27]这类模型在整个推理过程中扮演着预期模型的角色——尽管文中并未明确提及。[28]为了阐明积分符号与其定义所依据的测度之间的关联，我们冒昧地重新使用该积分符号，而不使用 $\int f\mathrm{d}x$。

II. 非狄拉克情形下 '=' 的 Hájek 可满足性。本小节将介绍更一般的非狄拉克意义下 '=' 的 Hájek 可满足性。换言之，我们将讨论真值为 $\|\phi\| = \{x$ 的 $\mathcal{L}$ (HLI)-公式 ϕ : $f_\phi(x) \in A\}$，其中 A 可以属于 $[0,1]$, 的广类子集，而不再像之前那样仅限于单元素集合。具体而言，我们将考虑形如 $\{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha\}$ 的集合及其测度 $\mu\{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha\}$[29]。

为便于后续讨论，我们将采用以下修改后的定义 4 版本，用于定义（归一化）简单函数的勒贝格积分——该定义基于上述类型的集合:

$$\oint f \mathrm{d}\mu = \sum_{\rho_\alpha \in (0,1)} \rho_\alpha \cdot \mu\{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha\}, \tag{28}$$

其中，$\rho_\alpha \in (0,1)$ 是将 f 定义为简单函数的归一化系数，而 $\{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha\}$ 是一个可测集，$\alpha \in (0,1)$[30]。

与之前一样，我们希望差集 $A = \{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha_i\} - \{x \in M| : g_\psi(x) > \alpha_j\}$ 的测度之和可以任意小（小于任意给定的正数 ϵ）；这里存在某些函数 $f_\phi(x)$、$g_\psi(x)$[31] 和固定的 $\alpha_i, \alpha_j \in (0,1)$，其中 $i, j \in I$[32]，以及一个（弱概率）模型 $\mathcal{M}$。最后，我们还要求由 α_j 确定的第二个集合包含于由 α_i 确定的第一个集合中。由此得到非狄拉克情形下积分符号的 Hájek 可满足性定义。

定义 21.（带有"="的积分 $\mathcal{L}(HLI)$-表达式的 Hájek 可满足性。）设 $\mathcal{M}$ 是一个弱概率模型，其模型论域为 $|M|$,$\alpha_i, \alpha_j \in (0,1)$，对每个 $i, j \in I$ 都成立，其中 I 是（至多）可数的指标集。再设有两个 α_i 和 α_j，使得 $\{x \in |M| : g_\psi(x) > \alpha_j\} \subseteq \{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha_i\}$，并设 f, g 是与这些集合相对应的非简单勒贝格可积函数。若且唯若以下条件成立，我们称一个 $\mathcal{L}(HLI)$-公式"$\int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$"在 $\mathcal{M}$ 中是 Hájek 可满足的，记作 $\mathcal{M} \models^H$" $\int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$":

$$\forall_{\epsilon>0}\Big(\sum_{i,j \in I} \mu\Big(\{x \in |M| : f_{\phi(x)} > \alpha_i\} - \{x \in |M| : g_{\psi(x)} > \alpha_j\}\Big) < \epsilon\Big).$$

我们可以尝试将带有"="的所有 $\mathcal{L}(HLI)$-量词表达式的条件推广。

[29]值得注意的是，这为我们提供了一种切实可行的可能性：不仅可以考虑形如 $\mu\{x \in |M| : f_\phi(x) \leq \alpha\}$ 的集合的集合论补集，还可以考虑这类两两不交集的可数和。[30]我们没有说明 ρ_α 如何依赖于 α。一种合理的做法或许是定义 $\rho_\alpha = \inf_{x \in \|M|}\{f_\phi(x) > \alpha\}$。不过，这与我们在此处讨论的内容无关。[31]这些函数分别通过 $\|\cdots\|$-函数与 ϕ 和 ψ 相关联。[32]I 构成至多可数的指标集。

定义 22. Hájek 可满足性：针对 $\mathcal{L}(HJL)$-量词
在非狄拉克情形下）。设 $\mathcal{M}$ 是一个弱概率模型，其模型论域为 $|M|$, $\alpha_i(0,1)$, 对于每个 $i,j \in I$，其中 I 是一个（至多）可数的指标集。再设两个 α_i 和 α_j，使得 $\{x \in |M| : \ g_\psi(x) > \alpha_j\} \subseteq \{x \in |M| : \ f_\phi(x) > \alpha_i\}$，并设 f, g 是与这些集合相对应的非简单勒贝格可积函数。最后设 $Q\phi(x)$ $Q\psi(x)$ 是一些量词$\mathcal{L}$(HLI)-表达式，即 $Q \in \{\forall_x, \exists_x, \int()\mathrm{d}x\}$。

称一个 $\mathcal{L}(HLI)$-量词公式"$Q\phi(x) = Q\psi(x)$"在 $\mathcal{M}$ 中是 Hájek 可满足的，记作"$\mathcal{M} \models^H$"$Q\phi(x) = Q\psi(x)$"，当且仅当满足以下条件：

$$\forall_{\epsilon>0}\Big(\sum_{i,j\in I} \mu\Big(\{x \in |M| : f_\phi(x) > \alpha_i\} \\ -\{x \in |M| : g_\psi(x) > \alpha_j\}\Big) < \epsilon\Big).$$

（根据定义 20，$e(Q\phi(x) = Q\psi(y)) = 1$。）

例. 我们证明富比尼定理的论题（$\mu 5$）。因此，假设 $\mathcal{M}$ 是一个弱概率模型。如果 f: $|\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}| \to [0,1]$，那么——根据定义 16 的简化版本（见其前一段）——我们得到

$$\oint(\oint f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \sum_{a\in|\mathcal{M}|}(\sum_{b\in|\mathcal{M}|} f(a,b)\mu(b))\mu(a) = \\ \sum_{a,b\in|\mathcal{M}|} f(a,b)\mu(a)\mu(b) = \sum_{b\in|\mathcal{M}|}(\sum_{a\in|\mathcal{M}|} f(a,b)\mu(a))\mu(b) = \\ = \oint\oint f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

假设测度 $\mu^*\{(x,y) \in |\mathcal{M}|^2 : f(x,y) = 1\} = \|f\|_{\mathcal{M}}$ 已定义[33]，我们可以立即从（26-27）推得 $\mathcal{M} \models^H \oint(\oint f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \oint(\oint f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$。

具备所有必要的定义后，我们可以将 HLI 定义为一种抽象逻辑。

定义 23。（HLI 作为一种抽象逻辑）。HLI 是一个三元组

$$(\mathcal{K}, Sent_{\mathcal{L}(HLI)}, \models^H),$$

其中

1. $\mathcal{K}$ 是一个弱概率模型类，在同构、重命名和约化结构下封闭；2. $Sent_{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}(HLI)$ 的一组 $\mathcal{S}$-句子；3. $\models^H$ 是由定义 20 和定义 22 给出的 Hájek 满足关系。

[33]它应是由关于每个变元 x 和 y的测度构造而成的乘积测度。

5 HLI 扩张的 Lindstrøm 型定理及其证明的扩展纲要

在模型论处理中将 HLI 定义为一种抽象逻辑之后，我们可以尝试为 HLI的所有扩张表述并证明一个林德斯特伦型定理。首先，我们引入一套术语，为证明论证铺垫。这些内容无法在第二节中呈现，因为它们涉及第三节中阐述的一套概念体系。

5.1 Lindstrøm 定理及其证明的术语体系。

为了完成这项任务，我们需要同时考虑 HLI（作为一种抽象逻辑）及其扩张，并为它们配备唯一的二元关系，该关系称为 Hájek 近似系统，记作 $\lhd^H$。对于给定抽象逻辑语言 $\mathcal{L}[L]$ 中任意一对公式，例如 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$[34] ——这一唯一关系将有意编码公式的某些元逻辑性质。

某些性质，例如抽象逻辑语言 $\mathcal{L}[L]$ 的定义 23，或按照定义 21 和定义 22 所述，在相应的 $\mathcal{L}$-结构中的 Hájek 可满足性，都已被预设或隐含地假定。这些内容此前只是以某种非正式的方式提出。本节将明确指出这些内容，并通过以下 $\lhd^H$-近似系统的定义对其作出形式化表述。

定义 24。（Hájek 的 $\lhd^H$-近似系统）。设 $\mathcal{L}$ 是一种抽象逻辑。二元关系 $\lhd^H$ 是 Hájek 的 $\lhd^H$- 近似系统，当且仅当满足以下条件：

1. $\lhd^H$ 具有传递性；2. 若 $\phi \lhd^H \phi'$ 且 $\phi \in \mathcal{L}[L]$，则 $\phi' \in \mathcal{L}[L]$。3. 若 $\phi \lhd^H \phi'$ 且 $\mathcal{M} \models^H \phi$，则 $\mathcal{M} \models^H \phi'$。

以下定义说明如何将 Hájek 可满足性与刚刚引入的 Hájek 的 $\lhd^H$-近似联系起来。这两个概念共同构成近似 Hájek 可满足性这一概念。

定义 25。若对于 ϕ 的所有 $\lhd^H$-近似 ϕ'，均有 $\mathcal{M} \models^H \phi'$，则称 $\mathcal{M}$ 近似 Hájek 满足公式 $\phi \in \mathcal{L}[L]$，符号记为 $\mathcal{M} \models^{HA} \phi$。

注 2. 请注意，$\models^{HA}$ 弱于 $\models^H$，而 $\models^H$又弱于 $\models$- 满足。

由于 Hájek 近似可满足性所确定的新概念情境，我们应当重新定义带有 Hájek 近似的抽象逻辑的紧致性和初等链条件。我们将称一个理论（作为一个

[34]我们尤其关注 Hájek 满足性先前定义中那样的公式对。

句子集合） σ 的 $\mathcal{L}$ 是一致的，如果存在一个 $\mathcal{M}$ 结构 $\mathcal{L}$，近似满足 Σ中的每个句子。类似地，我们将称 σ 是有限一致的，如果 σ 的每个有限子集都是一致的。

设 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 是一种具有 Hájek 近似的逻辑。对于具有语义积分 $\mathcal{M}$ 的结构，令 $\mathrm{Th}(\mathcal{L})^{HA}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{L}$ 的理论（句子集合），其中的句子均由 $\mathcal{M}$ 按 Hájek 近似意义满足。

定义 26。（Hájek 初等子结构。）设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathcal{L}$[35] 的结构。若结构 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的 Hájek 初等子结构，则记为

$$\mathcal{M} \prec_{\mathcal{L}}^{HA} \mathcal{N} \tag{29}$$

当且仅当 $M \subseteq N$ 且结构 $(\mathcal{N}, a)$ 按 Hájek 近似意义满足 $\mathrm{Th}(\mathcal{L})^{HA}((M, a)_{a \in \mathcal{M}})$[36]。

性质 1。（紧致性。）设 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 是一种具有 Hájek 近似的抽象逻辑。若 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 满足 紧致性定理，则它具有如下性质：$\mathcal{L}$ 的每个有限相容理论都是相容的。

性质 2。（初等链条件。）设 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 是一种具有 Hájek 近似的逻辑。若满足以下条件，则 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 满足初等链条件。每当

$$\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{L}}^{HA} \mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{L}}^{HA} \mathcal{M}_2 \prec_{\mathcal{L}}^{HA} \ldots, (n < \omega)$$

存在这样一个 $\mathcal{L}$ 的结构 $\mathcal{M}$ ——由 $\bigcup \mathcal{M}_n$ 唯一确定——使得 $\mathcal{M}_n \prec_{\mathcal{L}}^{HA} \mathcal{M}$，对每个 $n < \omega$ 都成立。

性质 3。（弱否定性质。）设 $(\mathcal{L}, \lhd)$ 是一种具有近似的逻辑。当且仅当存在一个作用于 $\mathcal{L}$-句子的单元运算 $\neg^{weak}$，使得 $(\mathcal{L}, \lhd)$ 具有弱否定性质

1. *If* $\phi \in \mathcal{L}[L]$, *then* $\neg^{weak}\phi \in \mathcal{L}[L]$;
2. 若 $\phi \in \mathcal{L}[L]$ 和 $\mathcal{M}$ 构成一个 $\mathcal{L}$ 的 L-结构，则
   - $\mathcal{M} \models^H \phi$ *or* $\mathcal{M} \models^H \neg^{weak}\phi$,
   - *for each* $\lhd$-*approximation* ϕ' *of* ϕ *it holds* $\mathcal{M} \models^{HA} \neg^{weak}\phi'$ *implies* $\mathcal{M} \not\models^{HA} \phi$.

例。弱否定对每个逻辑系统都构成标准否定——将其视为带有近似 $\lhd$ 的逻辑，其中 $\lhd$ 是句子上的对角关系（即每个句子都是它自身唯一的近似）。

[35]在所有这些语境中，我们默认将 $\mathcal{L}$ 视为有序对 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$。[36]这种定义方式的合理性在于，假定逻辑的结构类在通过常元进行扩张后仍然封闭。回想一下，$\prec^{HA}$ 是一种关系，即初等子结构关系（就 $\models^{HA}$ 的可满足性而言）。

定义 27。（抽象逻辑 $\mathcal{L}$ 到 HLI 的可归约性。[37]）设 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 是带有 $\lhd$-近似的逻辑，且 $(HLI, \lhd^H)$ 和 $(\mathcal{L}, \lhd^H)$ 具有相同的结构。若满足以下条件，我们就称句子 $\phi \in \mathcal{L}[L]$ 可归约为 HLI。对于 ϕ 的每个 $\lhd$近似 ϕ'，都存在 HLI 中的两个句子 $\psi[\phi, \phi']$、 $\psi'[\phi, \phi']$，使得

1. $\psi[\rho, \rho'] \lhd^H \psi'[\phi, \phi']$ and
2. 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}$（以及 HLI）的一个结构，那么
   - $\mathcal{M} \models^H_{\mathcal{L}} \phi$ implies $\mathcal{M} \models^H \psi[\phi, \phi']$,
   - $\mathcal{M} \models^H \psi'[\phi, \phi']$ implies $\mathcal{M} \models^H_{\mathcal{L}} \phi'$.

若 $\mathcal{L}$ 中的每个句子都可约化为 HLI，则称（$\mathcal{L}$， $\lhd$）是（HLI， $\lhd^H$）的一个扩张。

5.2 HLI 的 Lindstrøm 型定理的证明——证明思路及其扩展纲要

I. 证明思路。Lindstrøm 定理的证明依赖于证明：如果每个抽象逻辑（$\mathcal{L}$， $\lhd$）作为（$\mathcal{L}$， $\lhd$）的扩张，满足紧致性定理、所谓的初等链条件，并且对否定封闭，那么它就等价于抽象逻辑（HLI， $\lhd^H$）（即二者具有相同的表达能力）。证明本身采用归谬法，通过证明违反其中一个条件[38] 会导致矛盾来完成。

证明的论证脉络基于两个重要但相当技术性的引理。引理 2 使我们能够明确构造所需矛盾的初始情形。更准确地说，它保证存在以下两个$\mathcal{L}$-结构， $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{M}_1$，使得存在 $\theta \in \mathcal{L}$，它在其中一个结构中（按 Hájek 意义）成立，但在另一个结构中不成立（更准确地说：其近似 θ' 的弱否定在此成立）。引理 2 将推翻这一情形。该引理与初等链条件一道，不仅保证存在一个结构的线性有序序列 $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \ldots$，还保证该序列以结构 $\mathcal{M}$ 为终项，并使我们得到 $\mathcal{M} \models^{HA} \theta$ 和$\mathcal{M} \models^{HA} \neg^{weak}\theta'$，它们对应于先前相同的 $\theta \in \mathcal{L}$ 及其 $\lhd^H$-近似 θ'。引理 1 的证明利用了观察 1；观察 1 确立了给定理论 $\Sigma \in HLI$ 的 Hájek 近似可满足性与相应理论 Σ^L 的 Hájek 近似可满足性之间的某种等价关系。后者以独特方式由 $\mathcal{L}$ 中的句子构成，这些句子取决于 Σ中的元素。

II. 证明的扩展提纲。为了方便起见，我们从表述观察 1 开始，给出 Lindstrøm 定理的证明思路。因此，对于理论 $\Sigma \in (HLI, \lhd^H)$，令

$$\Sigma^{\mathcal{L}} = \{\psi[\rho', \rho''] : \rho' \lhd^H \rho'' \text{ and } \rho \lhd^H \rho', \text{ for some } \rho \in \Sigma\}.$$

[37]类似的可归约性定义可以引入到任意一对抽象逻辑中。请注意，我们不要求 $\mathcal{L}$ 中的 Hájek 可满足性。[38]在我们的证明中，假设 $(\mathcal{L}, \lhd)$ 不可归约到 $(HLI, \lhd^H)$。

观察1. 设 Σ 是此前定义的 HLI 和 $\Sigma^{\mathcal{L}}$ 中的一个理论。则有以下结论：

$$\mathcal{M} \models^{HA} \Sigma \iff \mathcal{M} \models^{HA}_{\mathcal{L}} \Sigma^{\mathcal{L}}. \tag{30}$$

证明。我们展示该性质在蕴涵的一个方向上成立。设 $\mathcal{M} \models^{HA} \rho$，其中某个$\rho \in \Sigma$。这恰好意味着

$$\forall \rho^{'} \in \Sigma(\rho \lhd^{H} \rho^{'} \Rightarrow \mathcal{M} \models^{H} \rho). \tag{31}$$

因此，设 $\rho, \rho^{'} \in \Sigma$ 满足 $\rho \lhd^{H} \rho^{'}$。由 Hájek 的 $\lhd^{H}$-近似的定义，我们可以推知 $\mathcal{M} \models^{H} \rho$。由于 $\mathcal{M} \models^{H} \rho \Rightarrow \mathcal{M} \models^{H} \psi[\rho, \rho^{'}]$，对于某个依赖于 ρ 的句子 $\psi[\rho, \rho^{'}]$，有 $\rho^{'} \in \Sigma$ 使得 $\rho \lhd^{H} \rho^{'}$，因此我们可以推出 $\mathcal{M} \models^{H} \psi[\rho, \rho^{'}]$。现在设 $\psi[\rho^{'}, \rho^{"}]$ 为满足 $\psi[\rho, \rho^{'}] \lhd^{H} \psi[\rho^{'}, \rho^{"}]$ 的句子。由于 $\mathcal{M} \models^{H} \psi[\rho, \rho^{'}]$，那么对于定义 Σ^{L} 中的 $\rho, \rho^{'}, \rho^{"}$，也有 $\mathcal{M} \models^{H} \psi[\rho^{'}, \rho^{"}]$。

为了证明 $\mathcal{M} \models^{HA} \psi[\rho^{'}, \rho^{''}]$ 也成立，需要证明对于任意句子 $\phi^{'}[\rho^{'}, \rho^{''}] \in \Sigma^{\mathcal{L}}$，都有

$$\psi[\rho^{'}, \rho^{''}] \lhd^{H} \phi^{'}[\rho^{'}, \rho^{''}].$$

同时，根据 $\lhd^{H}$-近似的定义，该条件得以满足。因此，$\mathcal{M} \models^{HA} \psi[\rho^{'}, \rho^{"}]$。 □

注3. 观察 1 的另一种证明可以通过归纳法进行——这是由于 $\mathcal{L}(HLI)$ 公式的分类以及 Hájek 满足关系对这些公式的条件。基于此，应当在 $\mathcal{L}(HLI)$ 句子中建立 $\lhd^{H}$，特别是在形如 $\psi[Q\phi(x) = Q\phi(y)\ Q\chi(x) = Q\chi(y)]$, 的句子中建立，其中 Q 是在 $\mathcal{L}(HLI)$[39] 中可接受的量词符号。

引理1. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是带积分的结构，且 $\mathcal{M} \prec^{HA} \mathcal{N}$。则存在一个带积分的结构 $\mathcal{K}$，使得

1. $\mathcal{M} \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{K}$, *and* $\mathcal{N} \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{K}$.

证明。为了说明这种 $\mathcal{K}$ 结构的存在，不妨将其视为一种“累积”结构，由来自 $|\mathcal{M}|$和 $|\mathcal{N}/\mathcal{M}|$的两个元素集组成。从句法角度来看，只需证明理论 $\mathrm{Th}((\mathcal{M}, a)_{a\in\mathcal{M}}) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{N}, a, b)_{a\in\mathcal{M},\ b\in\mathcal{N}/\mathcal{M}}$是一致的。根据引理1，只需证明理论 $\mathrm{Th}((\mathcal{M}, a)_{a\in\mathcal{M}})^{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Th}((\mathcal{N}, a, b)_{a\in\mathcal{M},\ b\in\mathcal{N}/\mathcal{M}})^{\mathcal{L}}$ 是一致的。由于 $\mathcal{L}$ 具有紧致性，只需证明该理论的每个有限子集都是一致的，即可证明整个理论是一致的。

因此，令 $\mathrm{Th}((\mathcal{N}, a, b)_{a\in\mathcal{M},\ b\in\mathcal{N}/\mathcal{M}})^{\mathcal{L}}$中的一个有限句子集为

$$\Sigma^{\psi} = \{\psi[\rho_1^{'}, \rho_1^{"}], \psi[\rho_2^{'}, \rho_2^{"}], \ldots, \psi[\rho_n^{'}, \rho_n^{"}]\},$$

对于这样的 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathrm{Th}((\mathcal{M}, a)_{a\in\mathcal{M}})$，使得 $\rho_i < \rho_i^{'} < \rho_i^{"}$，对于 $i = 1, 2 \ldots, n$。我们将在以 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}/\mathcal{M}$ 为基础的有限结构扩张中找到，其中集合

[39]这一证明从进一步分析的角度来看，普适性较低、篇幅更长且益处较少，因此我们省略其细节。

$\{\psi[\rho_1^{'},\rho_1^{"}],\psi[\rho_2^{'},\rho_2^{"}],\ldots,\psi[\rho_n^{'},\rho_n^{"}]\}$ 得到满足（按 $\models_{\mathcal{L}}^{H}$-满足的意义）。这恰好意味着该集合是一致的。

^ ^ ^ 因此，设 ^a_1、^a_2、. . .、^a_k 和 b_1、b_2、. . .、b_l 分别是 $|\mathcal{M}|$ 和 $|\mathcal{N}/\mathcal{M}|$ 中元素名称的（完备）列表，这些元素出现在 ρ 中。我们注意到

$$((\mathcal{N},a,b)_{a\in\mathcal{M},b\in\mathcal{N}/\mathcal{M}})\models^{HA}\forall_i^n\,\rho_i(\hat{a_1},\hat{a_2},\ldots,\hat{a_k},\hat{b_1},\hat{b_2},\ldots,\hat{b_l}).$$

由于 $\rho_i^{'}$ 是 ρ_i 的 Hájek $\lhd^H$-近似，对于每个 $i=1$、. . .、n，我们可以通过添加这样的新元素 c_1、$c_2\ldots c_l\in|\mathcal{M}|$ 来扩充（$\mathcal{M}$、a_1、. . .、a_k），从而得到

$$(\mathcal{M},a_1,\ldots,a_k,c_1,c_2\ldots c_l)\models^{H}\forall_i^n\rho_i^{'}(\hat{a_1},\hat{a_2},\ldots,\hat{a_k},\hat{c_1},\hat{c_2},\ldots,\hat{c_l}). \tag{32}$$

由于性质（弱否定）的改述条件

2 3 $\mathcal{M}\models$ 断言，对于所有满足 的，

$\rho^{'}\Rightarrow\mathcal{M}\models\psi[\rho^{'},\rho^{"}]$ $\rho^{'}\ \rho^{"}$ $\rho^{'}<\rho^{"}$ 32

我们可以从（ ）推导出以下内容:

$$(\mathcal{M},a_1,\ldots,a_k,b_1,b_2\ldots b_l)\models_{\mathcal{L}}^{H}\psi_i[\rho^{'},\rho^{"}], \tag{33}$$

对于 $i=1,2\ldots,n$。这意味着

$$(\mathcal{M},a_1,\ldots,a_k,b_1,b_2\ldots b_l)\models_{\mathcal{L}}\Sigma^{\psi}, \tag{34}$$

即 Σ^{ψ} 是一致的。由于 Σ^{ψ} 是任意选取的，我们可以断言，Th($(\mathcal{M},a)_{a\in\mathcal{M}}$)$^{\mathcal{L}}\cup$Th($\mathcal{N},a,b)_{a\in\mathcal{M},\ b\in\mathcal{N}/\mathcal{M}}$)$^{\mathcal{L}}$ 的每个有限子集都是一致的。根据 $\mathcal{L}$ 的紧致性，我们可以断言整个理论是一致的，正如所要求的那样。 □

引理 2. 设 $(\mathcal{L},\lhd^H)$ 是具有 Hájek 近似的抽象逻辑。假设 θ 是 $\mathcal{L}[L]$ 中不能约化为 HLI 的句子。那么存在一个 $\lhd^H$-近似 $\eta^{'}$ 的 η，以及解析结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$，使得

1. *$\mathcal{M}\prec^{HA}\mathcal{K}$ ($\mathcal{M}$ is Hájek's elementary substructure),*
2. *$\mathcal{M}\models^{HA}\theta$, but $\mathcal{K}\models^{HA}\neg^{weak}\theta^{'}$.*

证明。根据前面的引理——只需证明

$$\Sigma=\mathrm{Th}^{HA}((\mathcal{M},a)_{a\in\mathcal{M}})^{\mathcal{L}}\cup\{\neg^{weak}\theta^{'}\}$$

是一致的，或者说，存在一个结构，比如 $\mathcal{K}$，属于 $\mathcal{L}$，它近似满足（一个理论）Σ 中的 $\mathcal{L}$ 的每个句子。特别地，它将是 $\mathcal{K}\models^{HA}\neg\theta^{'}$。事实上，$\Sigma$ 的每个有限子集都由 $\mathcal{M}$ 的有限扩张满足 Hájek 近似。因此——根据 $\mathcal{L}$ 的紧致性——整个 Σ 在某个结构中满足 Hájek 近似，这正是第 3) 点所要求的。 □

定理 2。（关于 HLI 扩张的 Lindstrøm 定理。）设 $(\mathcal{L},\lhd)$ 和 $(HLI,\lhd^H)$ 满足:

1. $(\mathcal{L},\lhd^H)$ 扩张 $(HLI,\lhd^H)$,
2. $(\mathcal{L},\lhd^H)$ 具有紧致性、初等链条件，并且在弱否定下封闭。

那么，$(\mathcal{L}, \lhd^H) \equiv (HLI$,{v5)。

证明。假设（$\mathcal{L}$，$\lhd^H$）具有紧致性、初等链条件，并且对弱否定封闭。最后，假设（$\mathcal{L}$，$\lhd^H$）扩展（HLI，$\lhd^H$），但反之不成立，即存在语言（$\mathcal{L}$，$\lhd^H$）中的公式 θ，不能约化为（HLI，$\lhd^H$）。这一最后条件结合引理 2，使我们能够断言，存在这样的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}_0$ 和 $\mathcal{M}_1$，使得 $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$，并且存在这样的一个$\lhd$-近似 θ'，其对象为 $\theta \in \mathcal{L}$，满足：

$$\mathcal{M}_0 \models^{HA} \theta \text{ and } \mathcal{M}_1 \models^{HA} \neg^{weak}\theta'. \tag{35}$$

同时，由初等链条件和迭代使用的引理1，我们可以推断，对于每个 $\mathcal{L}$-结构序列，都存在：

$$\mathcal{M}_0 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_1 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \dots$$

这样的一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$，使得

$$\mathcal{M}_0 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_1 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \dots \mathcal{M}.$$

特别地，现在取 $\mathcal{M}_0 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_1 \prec^{HA}_{\mathcal{L}} \mathcal{M}$，我们得到：$\mathcal{M} \models^{HA}_{\mathcal{L}} \theta$ 和 $\mathcal{M} \models^{HA}_{\mathcal{L}} \neg^{weak}\theta'$。这与弱否定性质的第 2 点产生矛盾。因此，（$\mathcal{L}$，$\lhd^H$）$\equiv$（$HLI$，$\lhd^H$）。 □

6 结论与结束语

本文展示了如何以 Lindstrøm 风格刻画 Hájek的积分模糊逻辑——该逻辑在 Hajek（1998年）中以经典方式加以描述。事实上，Hájek 的系统被视为一类更广泛的模糊逻辑系统中的最小逻辑，适用于描述基于测度的连续结构。同时，Hájek逻辑是首个适用于描述积分及其性质、并具有基于抽象逻辑的表述的形式系统。不过，这需要引入双层满足关系（Hájek 可满足性和 Hájek 的近似可满足性），这增加了论述的复杂性，也可能降低推理的清晰度。与此同时，迄今为止在这一背景下讨论的、针对所有连续结构的 Lindstrøm型刻画性，是通过紧致性定理和初等链条件实现的，而非通过紧致性定理和 Skolem-Loewenheim定理实现。

林德斯特伦型刻画性的思想也可以外推到实分析中的其他结构和函数实体，例如 Banach L^2 空间。同时，勒贝格积分也许可以用变换或样条来替代。然而，随之而来的问题是，需要适当的形式逻辑系统来描述这些对象及其典型性质。Jobczyk（2014）提出的系统更像是形式系统的替代方案，因此还需要进一步补充。

7 致谢

Mirna Dzamonja 获得了欧盟地平线2020研究与创新计划玛丽亚·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号1010232，FINTOINF）的资助。她还对自己与先贤祠-索邦大学的 IHSPT、数学学院、东英吉利大学以及波斯尼亚和黑塞哥维那科学院与艺术院（ANUBiH）的关联表示衷心感谢。

Krystian Jobczyk 感谢波兰富布赖特委员会提供高级奖助金，支持他在纽约市立大学索尔·克里普克中心的访学研究；本文正是在此期间撰写的。

参考文献

M. De Rijke，《模态逻辑的林德斯特伦定理》，《模态逻辑与过程代数》，1995年，CSLI出版社。

P. Hájek，《模糊逻辑元数学》，1998年，多德雷赫特，克吕维尔。

E. Hewitt 和 K. Stromberg，《实分析与抽象分析》，1969年，施普林格出版社。

J. Barwise 和 S. Feferman（编），《模型论逻辑》，1985年，纽约，施普林格出版社。

J. Barwise（编），《数学逻辑手册》，1977年，北荷兰出版社。H.D. Ebbinghaus、J. Barwise 和 S. Feferman（编），《模型论》，1985年，施普林格出版社。J. Iovino，《带近似逻辑的极大性》，Journal of Symbolic Logic，2001年，66(4)，第1909-1918页。K. Jobczyk、M. Bouzid、A. Ligeza 和 J. Karczmarczuk，《卷积可表达的偏好模糊逻辑》，ECAI 2014会议论文集，2014年，第1041-42页。J. Barwise 和 R. Cooper，《广义量词与自然语言》，Linguistics and Philosophy，1981年，4，第159-219页。J. Barwise，《亨金量词的一些应用》，Israel Journal of Mathematics，1976年，25，第47-63页。I. Ben Yacov、A. Bernstein、W. Henson 和 A. Usvyatsov，《度量结构的模型论》，载于《模型论及其在代数与分析中的应用》，2008年，剑桥大学出版社，第315-427页。X. Caicedo 和 J. Iovino，《基于 [0,1]值逻辑的优势省略不可数类型》，《纯粹与应用逻辑年刊》，2014年，65，第1169-2001页。C. W. Henson，《何时两个巴拿赫空间具有等距同构的非标准模型？》，Israel Journal of Mathematics，1975年，22(1)，第57-67页。

C. W. Henson 和 S. Heinrich，《巴拿赫空间模型论。II. 同构等价》，Mathematische Nachrichten，1986年，125，第301-317页。J. Shepherdson、P. Hájek 和 J. Paris，《有理Pavelka谓词逻辑是Łukasiewicz谓词逻辑的保守扩张》，Journal of Symbolic Logic，2000年，65，第669-682页。S. Shelah，《巴拿赫空间一阶理论的Hanf数》，Transactions of the American Mathematical Society，1978年，244，第147-171页。J. Benthem，《一个新的模态Lindstrøm定理》，Logical Universalis，2007年，1(1)，第125-138页。K. Jobczyk，《Hajek积分模糊逻辑的Lindstrøm型刻画》，第30届IEEE国际模糊系统会议，FUZZ-IEEE 2021，卢森堡，2021年7月11日至14日，第1-8页。J. Barwise 和 J. Cooper，《广义量词与自然语言》，Linguistics and Philosophy，1981年，4，第159-219页。P. Lindstrøm，《带广义量词的一阶谓词逻辑》，Teoria，1966年，32，第186-195页。M. Džamonja 和 J. Väänänen，《链逻辑与 Shelah 的无穷逻辑》，Israel Journal of Mathematics，2021年，45，第93-134页。S. Shelah，《良好无穷逻辑》，Journal of the American Mathematical Society，2012年，25，第395-427页。P. Lindstrøm，《初等逻辑的扩张》，Teoria，1969年，35，第1-11页。A. Mostowski，《量词的一种推广》，Fundamenta Mathematicae，44，1957年，第12-36页。
Mirna DŽAMONJA，基础计算机科学研究所，法国国家科学研究中心及巴黎大学，8 Place Aurelie Nemours，巴黎Cedex 13，75205，法国。
Krystian JOBCZYK，应用计算机科学系，AGH科技大学，al. Mickiewicza 30，30 -059，克拉科夫，波兰。