arXiv:2302.13424v2 [math.CV] 3 Feb 2025

单位圆盘上 Bergman空间中函数的导数的加权压缩性

´DAVID KALAJ 和 PETAR MELENTIJEVIC

Abstract. 在最近的一篇论文中， [16], Ramos 和 Tilli 证明了单位圆盘子域上解析函数的某个锐不等式。我们将把他们的主要不等式推广到关于两种不同测度的 Bergman空间函数的导数情形。我们还将讨论与福克空间中一个类似结果的联系；该结果此前已由 [8], 研究。

1. 引言

1.1. $\mathbb{C}^+$ 和 $\mathbb{D}$上的 Bergman空间。对于每个 $\alpha > -1$，圆盘的 Bergman空间$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_\alpha$ 是由所有满足以下条件的函数 $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 构成的希尔伯特空间：这些函数在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯，且满足

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) < +\infty.$$

定义该空间的加权 L^2 范数由以下标量积诱导：

$$\langle f, g\rangle_\alpha := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha \, dA(z).$$

在此处及下文中， $dA(z) = dxdy$ 表示 $\mathbb{D}$上的二维勒贝格测度。

给定 $w \in \mathbb{D}$，相对于 w的再生核，即满足以下条件的（唯一）函数$K_w \in \mathcal{A}_\alpha$

$$f(w) = \langle f, K_w\rangle_\alpha \quad \forall f \in \mathcal{A}_\alpha, \tag{1.1}$$

由下式给出

$$K_w(z) := \frac{\alpha+1}{\pi}(1-\overline{w}z)^{-\alpha-2}, \quad z \in \mathbb{D};$$

注意 $K_w \in \mathcal{A}_\alpha$。关于Bergman空间背景下更多有意义的性质，请参阅 [6, 17] 及其中的参考文献。

最近，在论文 [10, 13] 中，研究双曲情形和欧几里得情形下解析函数分布的一种新方法被发现。一些

2020年数学主题分类。主要分类：30H20；次要分类：31A05、33C05。关键词和短语。双曲度量、加权伯格曼空间、等周不等式、锐估计。第二作者部分获得MPNTR资助项目174017的支持，塞尔维亚。

这些结果的推广见 [8, 9, 11, 5], ，而在 [12, 15], 中，读者可以找到其他一些问题的（部分）解答，其中用到了[10] 中的定理。这里，我们将把注意力转向另一篇运用这些方法的论文 [16], ，其中拉东测度

$$\mu(\Omega) := \int_{\Omega} (1-|z|^2)^{-2} dA(z), \quad \Omega \subseteq \mathbb{D},$$

考虑圆盘 $\mathbb{D}$ 上的情形。事实上，这个测度是双曲空间通常的庞加莱模型中的面积测度（相差一个乘法因子 4）。

[16] 的作者将下列量最大化：

$$R(f,\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{\alpha+2}\, d\mu(z)}{\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}}, \tag{1.2}$$

对所有满足 $\mu(\Omega) = s/4$ 的 $f \in \mathcal{A}_\alpha$ 和 $\Omega \subset \mathbb{D}$ 取最大值，因为这种方法利用了哈代空间 $H^2(\mathbb{C}^+)$ 中的范数与变换后的伯格曼范数之间的等价性。具体而言，泛函 $R(f,\Omega)$ 刻画了伯格曼权 $(1-|z|^2)^{\alpha+2}$ 与 Ω 的几何性质之间的相互作用，并以 $\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}$ 归一化，其中 $\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}$ 是 f 的 $\mathcal{A}_\alpha$-范数的平方。

这种最大化方式符合以下性质：

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{C}^+)} = \|T_\alpha(B_\alpha) f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha},$$

其中 B_α 是 α 阶伯格曼变换，定义如下：

$$B_\alpha f(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha+1}{2}} \hat{f}(t) e^{izt}\, dt,$$

且 T_α 是一个将函数映射到加权伯格曼空间的变换，定义如下：

$$T_\alpha f(z) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z)^{\alpha+2}} f\left(\frac{z+1}{i(z-1)}\right).$$

这一表述说明， $R(f,\Omega)$不仅反映了 $\mathcal{A}_\alpha$ 和 Ω 的结构，还确保其与积分变换框架相兼容，从而为在 Ω 的几何约束下分析 Bergman 型空间提供了一个最优泛函。

更确切地说，Ramos 和 Tilli 在 [16] 中的主要结果如下定理所述。

定理 1.1. 设 $\alpha > -1$和 $s > 0$ 为固定对象。在所有满足 $\mu(\Omega) = s$的可测集 $\Omega \subset \mathbb{D}$ 以及所有函数 $f \in \mathcal{A}_\alpha$中，按 (1.2) 定义的商 $R(f,\Omega)$ 满足以下不等式

$$R(f,\Omega) \le R(1,\mathbb{D}_s), \tag{1.3}$$

其中 $\mathbb{D}_s$ 是一个以原点为中心的圆盘，且 $\mu(\mathbb{D}_s) = s$. 此外，(1.3) 中等号成立，当且仅当 f 是某个再生核 K_w 的倍数，并且 Ω 是一个以 w 为中心的球，使得 $\mu(\Omega) = s$。

注意，在二维的 Poincar´é 圆盘模型中，伪双曲度量下的球与欧几里得球重合，但欧几里得中心和双曲中心通常不同，相应的半径也不同。

定理 1.1 的证明基于单位圆盘上双曲度量的等周不等式以及点态估计 ([18])

$$|f(z)|^2 \leq \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^{-(\alpha+2)}\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.4}$$

本文旨在将这一结果推广到全纯函数的高阶导数。为此，定义高斯超几何函数

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n,$$

其中，$(d)_n = d(d+1)\ldots(d+n-1)$ 是波赫哈默符号。

我们从以下引理开始（这是导数情形下 (1.4) 的类似结果）：

引理 1.2。设

$$g(|z|) = (\alpha+2)_n \cdot n! \cdot (1-|z|^2)^{-\alpha-2-2n} F\left(-1-\alpha-n, -n; 1; r^2\right).$$

若 $f \in \mathcal{A}_\alpha$，则

$$|f^{(n)}(z)|^2 \leq g(|z|)\|f\|^2_{A_\alpha}.$$

这里 $\|f\|^2_{A_\alpha} := \frac{\alpha+1}{\pi}\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}$.

证明。根据 Bergman空间中函数的再生公式

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(w),$$

其中

$$dA_\alpha(w) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|w|^2)^\alpha,$$

我们得到

$$f^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(n+\alpha+1)\overline{w}^n}{(1-z\overline{w})^{n+2+\alpha}} dA_\alpha(w)$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式：

$$|f^{(n)}(z)| \leq (\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(n+\alpha+1)\|f\|_{A_\alpha}\sqrt{\int_{\mathbb{D}} \frac{|w|^{2n}}{|1-z\overline{w}|^{2(\alpha+2)+2n}} dA_\alpha(w)}.$$

利用极坐标和帕塞瓦尔公式可计算该积分，从而得到：

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+1}{\pi}&\int_{\mathbb{D}}|1-z\overline{w}|^{-2(\alpha+2)-2n}|w|^{2n}(1-|w|^2)^\alpha dA(w)\\&=2(\alpha+1)\int_0^1\rho^{2n+1}(1-\rho^2)^\alpha\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-z\rho e^{i\theta}|^{-2(\alpha+2)-2n}d\theta\right)d\rho\\&=2(\alpha+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+1+n+k}{k}^2|z|^{2k}\int_0^1\rho^{2n+2k+1}(1-\rho^2)^\alpha d\rho\\&=\frac{n!}{(\alpha+2)_n}F(n+1,\alpha+2+n;1;|z|^2).\end{aligned}$$

因此，

$$|f^{(n)}(z)|^2\le n!(\alpha+2)_nF(n+1,\alpha+2+n;1;|z|^2)\|f\|^2_{A_\alpha},$$

根据欧拉变换，最后一个超几何函数等于 $(1-|z|^2)^{-2n-(\alpha+2)}F(-n,-\alpha-n-1;1;|z|^2)$. □

关于加权 Bergman 空间和 Fock 空间中函数的一阶及高阶导数的类似估计，可见于 [4, 14]。

现在定义两个加权测度

$$d\mu_{n,\alpha}(z)=\frac{(\alpha+1+2n)(1-|z|^2)^{\alpha+2+2n}d\mu(z)}{\pi(\alpha+2)_n\cdot n!\cdot F\left(-1-\alpha-n,-n;1;|z|^2\right)}$$

and

$$d\nu_{n,\alpha}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+2)(1-|z|^2)^{\alpha+2+2n}d\mu(z)}{\pi\Gamma(\alpha+1+2n)}$$

并考虑定义在单位圆盘上的全纯函数空间 f，使得

$$\|f\|^2_{n,\alpha}:=\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2d\mu_{n,\alpha}(z)<\infty.$$

将这个空间记为 $\mathcal{A}_{n,\alpha}$. 注意，对于 $n=0$, $\mathcal{A}_{n,\alpha}=\mathcal{A}_\alpha$.

考虑其中第一个空间的动机来自逐点估计 (1.4)。由于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上形如 $C(1-|z|^2)^{\alpha+2+2n}$ 的每个测度都等价于 $d\mu_{n,\alpha}$，因此考虑 $d\nu_{n,\alpha}$. 也是有意义的。在本文末尾，我们将看到，经过某种极限过程，关于测度 $d\mu_{n,\alpha}$ 的结果可以转化为关于福克空间的相应结果；后者此前已在 [8] 中得到证明。

现在我们给出定理 1.1 关于 $n\ge1$ 的如下推广。

定理 1.3. 假设 $f\in\mathcal{A}_\alpha$ 并定义 $n-$商

$$R_{n,\mu}(f,\Omega)=\frac{\int_\Omega|f^{(n)}(z)|^2d\mu_{n,\alpha}}{\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha}}$$

以及类似的 $R_{n,\nu}(f,\Omega)$，其测度为 $d\nu_{n,\alpha}$. 那么我们得到以下最佳不等式

$$R_{n,\mu}(f,\Omega) \leq \left(1-(1+s/\pi)^{1-X}\right), \quad for \quad 1 \leq n \leq 3, \tag{1.5}$$

$$R_{n,\nu}(f,\Omega) \leq \left(1-(1+s/\pi)^{1-2n-(\alpha+2)}\right), \quad for \quad n \geq 1, \tag{1.6}$$

其中 $\mu(\Omega) = s$ 且 $X = (n+1)(n+2+\alpha)$。这两个估计都无法取到等号。

鉴于 Kalaj 最近的研究结果，这个问题很有意义；他在该研究中为福克空间证明了类似的估计。事实上，我们将看到，通过一个极限论证，他的估计可以从我们的结果推出，也就是说，可以从加权伯格曼空间的情形推出。另外还要指出，在 [2], 中，作者提到他们预期存在与 Kalaj 的估计对应的某些 Bergman 空间类比结果，而这些结果很大程度上依赖于一些涉及雅可比多项式的特殊不等式。事实证明确实如此，我们将在引理 2.1 中回到这一点。

我们相信，对于每个 $n \geq 1$，(1.5) 都成立，但我们无法证明这一点。

2. Proof of Theorem 1.3

本节将证明定理 1.3。为此，我们需要以下引理

引理 2.1。对于 $\alpha > -1$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^2 d\mu_{n,\alpha}(z) \leq (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{\alpha} \frac{dxdy}{\pi}$$

以及将$d\nu_{n,\alpha}$ 代替$d\mu_{n,\alpha}$所得的类似结论。

我们将在下一节给出该引理的证明。

引理 2.2。对于 $n \geq 0$ 和 $\alpha > -1$，我们有

$$\Delta \log g(|z|) \leq 4(n+1)(n+2+\alpha)(1-|z|^{-2})^{-2}.$$

证明。记 $F(t)$ 为 $= F(n+1, n+2+\alpha; 1; t)$。由极坐标下的拉普拉斯算子公式可得

$$\begin{aligned}\Delta \log g(\rho) = \Delta \log F(\rho^2) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} \log F(\rho^2) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \log F(\rho^2) \\ &= \frac{4F'(\rho^2)F(\rho^2) + 4\rho^2 F(\rho^2)F''(\rho^2) - 4\rho^2 (F'(\rho^2))^2}{F^2(\rho^2)}.\end{aligned}$$

因此，我们要证明的不等式等价于

$$F(t)F'(t) + tF(t)F''(t) - t(F'(t))^2 \leq (n+1)(n+2+\alpha)(1-t)^{-2}F^2(t).$$

这个不等式由下面两个不等式推出：

$$(n+1)(n+2+\alpha)(1-t)^{-1}(F(t))^2 \geq F'(t)F(t)$$

and

$$(n+1)(n+2+\alpha)((1-t)^{-2}-(1-t)^{-1})(F(t))^2 \geq t(F(t)F''(t)-(F'(t))^2).$$

第一个不等式在使用 $F(a,b;\ c;\ t) = (1-t)^{c-a-b}F(c-a,c-b;\ c;\ t)$ 后，很容易看出等价于 $F(-n,-1-\alpha-n;\ 1;\ t) \geq F(-n,-1-\alpha-n;\ 2;\ t)$。第二个不等式可化简为

$$(n+1)(n+2+\alpha)(1-t)^{-2} \geq \left(\frac{F'}{F}\right)'(t),$$

或者，使用相同的恒等式:

$$(1-t)^{-2} \geq \left((1-t)^{-1}\frac{F(-n,-1-\alpha-n;2;t)}{F(-n,-1-\alpha-n;1;t)}\right)'$$

$$= (1-t)^{-2}\frac{F(-n,-1-\alpha-n;2;t)}{F(-n,-1-\alpha-n;1;t)} + (1-t)^{-1}\left(\frac{F(-n,-1-\alpha-n;2;t)}{F(-n,-1-\alpha-n;1;t)}\right)'.$$

然而，论文 [3, 7] 的主要结果表明，$F(-n,-1-\alpha-n;2;t)/F(-n,-1-\alpha-n;1;t)$ 是单调递减的，并且 ≤ 1，从而完成证明。□

现在，我们转向主要定理的证明。令 $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} = 1$. 首先定义

$$u_n(z) = \frac{|f^{(n)}(z)|^2}{\tilde{g}(|z|)}$$

其中 $\tilde{g}(|z|) = \frac{(\alpha+1)_n n!}{(\alpha+2)_{n+2n+1}} F(n+1, n+2+\alpha; 1; |z|^2)$，并且

$$I_n(s) = \int_{\{z:u_n(z)>u_n^*(s)\}} u_n(z)d\mu(z),$$

其中 $u_n^*(s)$ 是满足 $\mu(\{z:\ u_n(z) > t\}) = s$ 的唯一正实数。注意到

$$I_n(0) = \int_{\{z:u_n(z)>u_n^*(0)\}} u_n(z)d\mu(z) = 0, \tag{2.1}$$

and

$$\begin{aligned} I_n(+\infty) &= \int_{\{z:u_n(z)>u_n^*(+\infty)\}} u_n(z)d\mu(z) \\ &= \int_{\{z:u_n(z)>0\}} u_n(z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} u_n(z)d\mu(z) \leq 1 \end{aligned}. \tag{2.2}$$

注意，最后一个不等式由引理 2.1 得出。

用与 [16] 中类似的方法，我们可以证明

引理 2.3。函数 $\varrho(t) := \mu(\{z:\ u_n(z) > t\})$ 在 $(0, \max u_n]$ 上绝对连续，并且

$$-\varrho'(t) = \int_{\{z:u_n(z)=t\}} |\nabla u_n|^{-1}(1-|z|^2)^{-2}\, d\mathcal{H}^1.$$

特别地，函数 u_n^* 作为 ϱ 的逆函数，在 $[0,+\infty)$ 上局部绝对连续，且

$$-(u_n^*)'(s)=\left(\int_{\{z:u_n(z)=u_n^*(s)\}}|\nabla u_n|^{-1}(1-|z|^2)^{-2}\,d\mathcal{H}^1\right)^{-1}.$$

那么，我们将 $u>u^*(s)$ 所在超水平集的边界记为

$$A_s=\partial\{z:u_n(z)>u_n^*(s)\}.$$

接着，我们仿照 [16] 中相应的证明。根据引理 2.3,

$$I_n'(s)=u_n^*(s),\quad I_n''(s)=-\left(\int_{A_s}|\nabla u_n|^{-1}(1-|z|^2)^{-2}\,d\mathcal{H}^1\right)^{-1}.$$

现在应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\left(\int_{A_s}|\nabla u_n|^{-1}(1-|z|^2)^{-2}\,d\mathcal{H}^1\right)\left(\int_{A_s}|\nabla u_n|\,d\mathcal{H}^1\right)\geq\left(\int_{A_s}(1-|z|^2)^{-1}\,d\mathcal{H}^1\right)^2,$$

令

$$L(A_s):=\int_{A_s}(1-|z|^2)^{-1}\,d\mathcal{H}^1$$

表示 A_s 在双曲度量下的长度，我们得到下界

$$I_n''(s)\geq-\left(\int_{A_s}|\nabla u_n|\,d\mathcal{H}^1\right)L(A_s)^{-2}. \tag{2.3}$$

为确定 (2.3) 右侧乘积中的第一项，我们注意到

$$\begin{aligned}\Delta\log u_n(z)&=\Delta\log\frac{|f^{(n)}(z)|^2}{\tilde{g}(|z|)}\\&=\Delta\log|f^{(n)}(z)|^2-\Delta\log\tilde{g}(|z|)\\&\geq-4(n+1)(n+2+\alpha)(1-|z|^2)^{-2},\end{aligned}$$

这便意味着，令 $w(z)=\log u_n(z)$,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{u_n^*(s)}\int_{A_s}|\nabla u_n|\,d\mathcal{H}^1&=\int_{A_s}\nabla w\cdot\nu\,d\mathcal{H}^1\\&=\int_{\{z:u_n(z)>u_n^*(s)\}}\Delta w\,dA(z)\\&\geq-4(n+1)(n+2+\alpha)\int_{\{z:u_n(z)>u_n^*(s)\}}(1-|z|^2)^{-2}\,dA(z)\\&=-4(n+1)(n+2+\alpha)\mu(\{z:u_n(z)>u_n^*(s)\})\\&=-4(n+1)(n+2+\alpha)s.\end{aligned}$$

Therefore,

(2.4)

$$I_n''(s) \geq -4(n+1)(n+2+\alpha)su_n^*(s)L(A_s)^{-2} = -4(n+1)(n+2+\alpha)sI_n'(s)L(A_s)^{-2}.$$

另一方面，双曲度量的等周不等式给出

$$L(A_s)^2 \geq 4\pi s + 4s^2,$$

因此，将其代入 (2.4)，得到

$$\begin{aligned} I_n''(s) &\geq -4(n+1)(n+2+\alpha)sI_n'(s)(4\pi s + 4s^2)^{-1} \\ &= -(n+1)(n+2+\alpha)I_n'(s)(\pi + s)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

于是得到

$$I_n''(s) + (n+1)(n+2+\alpha)I_n'(s)(\pi + s)^{-1} \geq 0.$$

Thus

$$J(t) = I_n(T(t)),$$

是凸的，其中

$$T(t) = -\pi + \pi\,(1-t)^{\frac{1}{1-(n+1)(n+2+\alpha)}}.$$

由于 $T(0) = 0$ 且 $T(1) = +\infty$，可得 $J(0) = 0$ 且 $J(1) \leq 1$。因此 $J(s) \leq s$。换言之，

$$I_n(s) \leq \theta_n(s)$$

其中

$$\theta_n(s) = 1 - (1 + s/\pi)^{1-X} = T^{-1}(s)$$

是 T 的反函数，其中 $X = (n+1)(n+2+\alpha)$。

在测度为 $d\nu_{n,\,\alpha}$ 的情况下，我们如上定义 u_n，但使用

$$g(|z|) = \frac{\Gamma(\alpha+1+2n)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}(1-|z|^2)^{-\alpha-2n-2}.$$

按照前面的步骤，我们得到

$$\Delta \log u_n(z) \geq -4(2n+2+\alpha)(1-|z|^2)^{-2},$$

从而得到

$$\frac{-1}{u_n^*(s)} \int_{A_s} |\nabla u_n|\, d\mathcal{H}^1 \geq -4(2n+2+\alpha)s$$

and

$$I_n''(s) \geq -4(2n+2+\alpha)sI_n'(s)L(A_s)^{-2},$$

而双曲度量的等周不等式意味着

$$I_n''(s) \geq -(2n+2+\alpha)I_n'(s)(\pi+s)^{-1}.$$

现在显然，我们的估计对 $X = 2n+2+\alpha.$ 成立

3. A proof of Lemma 2.1

我们先证明测度 $d\nu_{n,\alpha}$ 情形下的引理 2.1，因为这种情形的证明要简单得多。

利用泰勒展开和Parseval恒等式，我们得到以下等价形式：

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k^2(k-1)^2\cdots(k-n+1)^2|a_k|^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1+2n)}\int_0^1 2\rho^{2k-2n+1}(1-\rho^2)^{\alpha+2n}d\rho$$
$$\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(k+\alpha+2)}|a_k|^2.$$

容易看出，这与下式等价

$$c_{k,n}=\frac{k!}{(k-n)!}\frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{\Gamma(k+n+2+\alpha)}\leq 1,$$

这可由以下观察得出：$c_{k+1,\,c_k}{}^{n}{}_{,\,n} = \frac{(k+1)(k+\alpha+2)}{(k-n+1)(k+n+2+\alpha)} \geq 1$ 且 $\lim_{k\to+\infty} c_{k,\,n}=1$.

对于测度$d\mu_{n,\,\alpha}$ 这一情形，难度要大得多，我们只对$n\leq 3$.证明

同样地，如上所述，我们将其归结为以下不等式：

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k^2(k-1)^2\cdots(k-n+1)^2|a_k|^2}{n!(\alpha+2)_n}\int_0^1\frac{2\rho^{2k-2n+1}(1-\rho^2)^{\alpha+2n}}{F(-1-\alpha-n,-n;1;\rho^2)}d\rho$$
$$=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k^2(k-1)^2\cdots(k-n+1)^2|a_k|^2}{n!(\alpha+2)_n}\int_0^1\frac{t^{k-n}(1-t)^{\alpha+2n}}{F(-1-\alpha-n,-n;1;t)}dt$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+1+2n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(k+\alpha+2)}|a_k|^2.$$

因此，证明下式是充分且必要的：

$$\frac{k^2(k-1)^2\cdots(k-n+1)^2}{n!(\alpha+2)_n}\int_0^1\frac{t^{k-n}(1-t)^{\alpha+2n}}{F(-1-\alpha-n,-n;1;t)}dt$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+1+2n}\frac{k!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(k+\alpha+2)}\quad\text{for}\quad k\geq n.$$

记 $P(t)$ 为 $=F(-1-\alpha-n,-n;1;t)$，并重新表述我们的不等式，得到

$$\frac{1}{B(k-n+1,\alpha+1+2n)}\int_0^1 t^{k-n}(1-t)^{\alpha+2n}P(t)^{-1}dt$$
$$\leq\frac{n!\Gamma(k+\alpha+2+n)\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2+2n)\Gamma(k+\alpha+2)k(k-1)\cdots(k-n+1)}$$

我们将 $\frac{1}{P\,t()}$ 用部分分式改写为

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{1}{(1+\beta_1 t)(1+\beta_2 t)\cdots(1+\beta_n t)}=\frac{A_1}{1+\beta_1 t}+\frac{A_2}{1+\beta_2 t}+\cdots+\frac{A_n}{1+\beta_n t},$$

对某些 $A_j\in\mathbb{R}, j\in\{1,2,\dots,n\}$ 和 $\beta_j\in\mathbb{R}^+, j\in\{1,2,\dots,n\}.$，这是可行的，因为根据 [1], P 的公式 $t\ =(1-t)^n P_{(0,\alpha+1)_n}(\frac{1+t}{1-t})$，其中 $P_n^{(0,\alpha+1)}(x)$ 是相应的雅可比多项式，并且每个 $P_{(0,\alpha+1)_n}(x)$ 恰有 n 个简单实零点（这是正交多项式的一般定理）。此外， $P(t)$ 只有负零点，因为它的所有系数均为正。由

$$1=P(t)\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{1+\beta_j t}=\sum_{j=1}^{n}A_j(1+\beta_1 t)\cdots(1+\beta_{j-1}t)(1+\beta_{j+1}t)\cdots(1+\beta_n t)$$

当 $t\to-\frac{1}{\beta_j}$ 时取极限，我们得到

$$A_j=\beta_j^{n-1}\prod_{i\neq j}(\beta_j-\beta_i)^{-1}.$$

展开为部分分式后，问题归结为计算积分

$$\int_0^1 t^{k-n}(1-t)^{\alpha+2n}(1+\gamma t)^{-1}dt$$

经过代换 $z=\underset{1+\gamma t}{(\gamma+1\ t\ )}$ 后，变为 ——

$$(\gamma+1)^{-k+n-1}\int_0^1 z^{k-n}(1-z)^{\alpha+2n}\big(1-\frac{\gamma}{\gamma+1}z\big)^{-k-\alpha-n-1}dz$$
$$=\frac{B(k-n+1,\alpha+1+2n)}{(\gamma+1)^{k-n+1}}F\big(k-n+1,n+k+\alpha+1;k+\alpha+2+n;\frac{\gamma}{\gamma+1}\big),$$

由超几何函数的欧拉积分表示可得。因此，我们有：

$$\frac{\Gamma(k-n+1)\Gamma(\alpha+1+2n)}{\Gamma(k+n+2+\alpha)(\gamma+1)^{k-n+1}}F\big(k-n+1,n+k+\alpha+1;k+\alpha+2+n;\frac{\gamma}{\gamma+1}\big)$$
$$=\frac{(n+k+\alpha+3)\Gamma(k-n+1)\Gamma(\alpha+1+2n)}{\Gamma(k+n+2+\alpha)(\gamma+1)^{-2n-\alpha}}\int_0^1\frac{y^{k+\alpha+n}}{\big(1+\gamma y\big)^{1+\alpha+2n}}dy,$$

其中，最后一个等式可由简单的变量代换得到。现在，主要不等式可以改写为

$$\sum_{j=1}^{n}A_j(1+\beta_j)^{\alpha+2n}\int_0^1\frac{y^{k+\alpha+n}}{\big(1+\beta_j y\big)^{\alpha+1+2n}}dy$$
$$\le\frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2+\alpha)}\frac{(k+\alpha+2)_{n-1}}{(k-n+1)_n}.$$

记

$$\varphi(y)=\sum_{j=1}^{n}B_j y^{k-j}$$

and

$$\psi(y)=\frac{y^{k+\alpha+n}}{\varphi(y)}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j(1+\beta_j)^{\alpha+2n}}{\big(1+\beta_j y\big)^{\alpha+1+2n}},$$

其中选择 B_j 使得

$$\int_0^1\varphi(y)dy=\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{k-j+1}=\frac{(k+\alpha+2)_{n-1}}{(k-n+1)_n}.$$

From

$$(x+\alpha+2)_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j(x-n+1)_n}{x-j+1},$$

令 $x\to j-1$，可得

$$\begin{aligned}(j+\alpha+1)_{n-1}&=B_j(j-1)(j-2)\cdots 1\cdots(-1)(-2)\cdots(j-n)\\&=(-1)^{n-j}(j-1)!(n-j)!B_j,\end{aligned}$$

i.e.

$$B_j=(-1)^{n-j}\frac{(j+\alpha+1)_{n-1}}{(j-1)!(n-j)!}.$$

我们的不等式可写为

$$\int_0^1\varphi(y)\psi(y)dy\le\frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2+\alpha)}\frac{(k+\alpha+2)_{n-1}}{(k-n+1)_n},$$

因此，只需证明

$$\psi(y)\le\psi(1)=\frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2+\alpha)}.$$

下面解释最后一个等式。根据它们的定义，有

$$\psi(1)=\frac{1}{\varphi(1)}\sum_{j=1}^{n}A_j(1+\beta_j)^{-1}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{1+\beta_j}}{\sum_{j=1}^{n}B_j}$$

$$=\frac{1}{P(1)\sum_{j=1}^{n}B_j}=\frac{1}{F(-1-\alpha-n,-n;1;1)\sum_{j=1}^{n}B_j}.$$

由恒等式 $(x+\alpha+2)_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j(x-n+1)_n}{x-j+1}$ 可知，右侧的 $\sum_{j=1}^{n}B_j$ 是带有 x^{n-1} 的系数；从左侧很容易看出，该系数等于 1。利用高斯定理 $F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$，可得 $F(-\alpha-1-n,-n;1;1)=\frac{\Gamma(2n+2+\alpha)n!\Gamma(n+2+\alpha)}{}$，从而求得 $\psi(1)$ 的值。

代入 $y = 1 - x$ 后，得到

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1+\beta_j}\left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_j+1}x\right)^{-\alpha-1-2n} \leq \frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2+\alpha)} \sum_{j=1}^{n} B_j(1-x)^{-\alpha-n-j}.$$

在 x 上的级数展开将问题归结为证明

$$\binom{\alpha+2n+l}{l} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1+\beta_j}\left(\frac{\beta_j}{1+\beta_j}\right)^{l} \leq \frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2+\alpha)} \sum_{j=1}^{n} B_j \binom{\alpha+n+j+l-1}{l}.$$

右端的和可以计算如下:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} B_j \binom{\alpha+n+j+l-1}{l} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \frac{(j+\alpha+2)_{n-1}}{j!(n-j-1)!} \binom{\alpha+n+j+l}{l} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+l+n+1)}{(n-1)!l!\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \binom{n-1}{j} \frac{(\alpha+1+n+l)_j}{(\alpha+2)_j} \\
&= \frac{(n+l-1)!\Gamma(\alpha+l+n+1)}{(l!)^2(n-1)!\Gamma(\alpha+2+n-1)},
\end{aligned}$$

利用下面的引理:

引理 3.1.

$$\sum_{s=0}^{m} \frac{(-m)_s(\beta+l+m)_s}{(\beta)_s s!} = (-1)^m \frac{(l+1)_m}{(\beta)_m}.$$

证明。注意，恒等式两边都是关于 l.的 m–次多项式。因此，只需对 $m+1$ 个不同的数 l. 证明该恒等式。取$l = -t$，对于 $t > m$，由高斯定理，左端等于$\frac{\Gamma(t)\,\Gamma(t-m)(\beta)_m}{}$，而右端为$(-1)^m \frac{(1-t)_m}{(\beta)_m}$ ·显然两者相等，故证明完成。□

因此，我们需要证明

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(1-t_j)(1-t_j t)^{-\alpha-2n-1} \leq F(n, 2n+\alpha+1; 1; t), \tag{3.1}$$

其中，$t_j = \frac{\beta_j}{\beta_j+1}$. 一种可能的方法是利用级数的某些 Hadamard乘积性质。

不过，我们将比较前一个不等式两边相应的系数:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(1-t_j)t_j^l \leq \frac{n(n+\alpha+1)(n+l-1)!\Gamma(\alpha+l+n+1)}{l!(\alpha+1+2n)\Gamma(\alpha+2n+l+1)}.$$

现在我们将用另一种方式表示左侧。事实上，我们用两种方法计算 $\frac{1}{P\,t()}$ 的第 l 阶导数。首先，根据

$$\frac{1}{P(t)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{1+\beta_j t}$$

我们得到

$$\left(\frac{1}{P(t)}\right)^{(l)}=(-1)^l l!\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{1+\beta_j t}\left(\frac{\beta_j}{1+\beta_j t}\right)^l$$

and

$$\left(\frac{1}{P(t)}\right)^{(l)}\Big|_{t=1}=(-1)^l l!\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{1+\beta_j}\left(\frac{\beta_j}{1+\beta_j}\right)^l.$$

由此公式可知，我们的不等式有如下等价形式：

$$(-1)^l\left(\frac{1}{P(t)}\right)^{(l)}\Big|_{t=1}\le\frac{n(n+\alpha+1)(n+l-1)!\Gamma(\alpha+l+n+1)}{(\alpha+1+2n)\Gamma(\alpha+2n+l+1)}.$$

由莱布尼茨公式可得：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{P(t)}\right)^{(l)}=\left(\frac{1}{(1+\beta_1 t)(1+\beta_2 t)\cdots(1+\beta_n t)}\right)^{(l)}\\
&=\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=l;\\ j_1,j_2,\ldots,j_n\ge 0}}\binom{l}{j_1;j_2;\ldots;j_n}\left(\frac{1}{1+\beta_1 t}\right)^{(j_1)}\left(\frac{1}{1+\beta_2 t}\right)^{(j_2)}\cdots\left(\frac{1}{1+\beta_n t}\right)^{(j_n)}\\
&=\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=l;\\ j_1,j_2,\ldots,j_n\ge 0}}\binom{l}{j_1;j_2;\ldots;j_n}\frac{(-1)^{j_1}j_1!\beta_1^{j_1}}{(1+\beta_1 t)^{j_1+1}}\frac{(-1)^{j_2}j_2!\beta_2^{j_2}}{(1+\beta_2 t)^{j_2+1}}\cdots\frac{(-1)^{j_n}j_n!\beta_n^{j_n}}{(1+\beta_n t)^{j_n+1}}\\
&=\frac{(-1)^l l!}{P(t)}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=l;\\ j_1,j_2,\ldots,j_n\ge 0}}\frac{\beta_1^{j_1}\beta_2^{j_2}\cdots\beta_n^{j_n}}{(1+\beta_1 t)^{j_1}(1+\beta_2 t)^{j_2}\cdots(1+\beta_n t)^{j_n}},
\end{aligned}$$

从而得到

$$\sum_{j=1}^{n}A_j(1-t_j)t_j^l=\frac{1}{P(1)}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=l;\\ j_1,j_2,\ldots,j_n\ge 0}}t_1^{j_1}t_2^{j_2}\cdots t_n^{j_n}.$$

最后，利用 $\frac{1}{P\,1()}=\frac{n!\Gamma(n+2+\alpha)\,\Gamma(2n+2+\alpha)}{}$，，我们将不等式化简为只需证明

$$\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=l;\\ j_1,j_2,\ldots,j_n\ge 0}}t_1^{j_1}t_2^{j_2}\cdots t_n^{j_n}\le\frac{(n+l-1)!(\alpha+1+n)_l}{l!(n-1)!(\alpha+1+2n)_l}. \tag{3.2}$$

若将最后一个不等式的左端记为 S_l，则其形式为

$$S_l \leq D_l = \frac{(n+l-1)!(\alpha+1+n)_l}{l!(n-1)!(\alpha+1+2n)_l}.$$

使用 Pfaff 变换

$$P(t) = F(-1-\alpha-n,-n;1;t) = (1-t)^n F(-n,n+2+\alpha;1;\frac{t}{t-1}),$$

我们推 deduce 出 $t_j = \frac{\beta_j}{\beta_j+1}$、 $1 \leq j \leq n$ 都是多项式 $F(-n$、 $n+2+\alpha$; 1; $1-t)$ 的零点。现在，我们将把这个函数表示为关于 t 的多项式，并使用韦达公式求出其零点的初等对称多项式的闭式公式。首先，根据定义将其写出，并改变求和顺序:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+2+\alpha)_k}{(k!)^2}(1-t)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+2+\alpha)_k}{(k!)^2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^j t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j t^j \sum_{k=j}^{n} \frac{(-n)_k(n+2+\alpha)_k}{(k!)^2}\binom{k}{j}.
\end{aligned}$$

内层求和可以进一步改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{n} \frac{(-n)_k(n+2+\alpha)_k}{(k!)^2}\binom{k}{j} \\
&= \frac{(-n)_j(n+2+\alpha)_j}{(j!)^3} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-n+j)_{k-j}(n+2+\alpha+j)_{k-j}k!}{(j+1)_{k-j}^2(k-j)!} \\
&= \frac{(-n)_j(n+2+\alpha)_j}{(j!)^2} \sum_{s=0}^{n-j} \frac{(-n+j)_s(n+2+\alpha+j)_s}{(j+1)_s s!}.
\end{aligned}$$

记 $m = n-j$，我们需要求和 $\sum_{s=0}^{m}$ (−m) s (2j+m+α+2) s (j+1) s s! 。但是，根据引理 3.1 及 $\beta = j+1$ 和 $l = j+\alpha+1$，我们看到它等于（−1）m (j+α+2)m (1+j) m · 由此我们得到

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+2+\alpha)_k}{(k!)^2}(1-t)^k = (-1)^n \frac{(\alpha+2)_n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha+2+n)_j}{(\alpha+2)_j}(-1)^j \binom{n}{j} t^j.$$

因此，$t_j = \frac{\beta_j}{\beta_j+1}$ 是多项式 $\sum_{j=0}^{n}$ (α+2+n)j (α+2)j (−1)j $\binom{n}{j}$ t^j 的零点，根据韦达公式:

$$\sum t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k} = (-1)^k \frac{(\alpha+2+n-k)_k}{(\alpha+2n-k+2)_k}\binom{n}{k}. \tag{3.3}$$

对于 $n=1$，这化简为伯努利不等式

$$\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+3}\right)^l \leq \frac{\alpha+2}{\alpha+l+2}.$$

对于 $n=2$，引入

$$t_1=\frac{\beta_1}{\beta_1+1}=\frac{\alpha+3-\sqrt{\frac{2(\alpha+3)}{\alpha+4}}}{\alpha+5}, \quad t_2=\frac{\beta_2}{\beta_2+1}=\frac{\alpha+3+\sqrt{\frac{2(\alpha+3)}{\alpha+4}}}{\alpha+5},$$

我们得到:

$$\frac{t_2^{l+1}-t_1^{l+1}}{t_2-t_1} \leq \frac{(l+1)(\alpha+3)(\alpha+4)}{(\alpha+l+3)(\alpha+l+4)}.$$

对于 $l=0$ 和 $l=1$，等号成立。我们将采用归纳法。若假设不等式对 k成立，则对于 $l+1$，有:

$$\begin{aligned}\frac{t_2^{l+2}-t_1^{l+2}}{t_2-t_1} &= \frac{t_2(t_2^{l+1}-t_1^{l+1})}{t_2-t_1}+t_1^{l+1}\\ &\leq \frac{(l+1)(\alpha+3)(\alpha+4)}{(\alpha+l+3)(\alpha+l+4)}t_2+t_1^{l+1}\\ &\leq \frac{(l+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{(\alpha+l+4)(\alpha+l+5)}.\end{aligned}$$

最后一个不等式同样由归纳法证明。对于 $l=0$，等号成立，而

$$\frac{t_1^{l+1}}{(\alpha+3)(\alpha+4)} \leq \frac{1}{\alpha+l+4}\left(\frac{l+2}{\alpha+l+5}-\frac{t_2(l+1)}{\alpha+l+3}\right)$$

给出

$$\begin{aligned}\frac{t_1^{l+2}}{(\alpha+3)(\alpha+4)} &\leq \frac{t_1}{\alpha+l+4}\left(\frac{l+2}{\alpha+l+5}-\frac{t_2(l+1)}{\alpha+l+3}\right)\\ &\leq \frac{1}{\alpha+l+5}\left(\frac{l+3}{\alpha+l+6}-\frac{t_2(l+2)}{\alpha+l+4}\right).\end{aligned}$$

因为最后一个不等式等价于

$$(t_1+t_2)(l+2)(\alpha+l+3)(\alpha+l+6)-t_1t_2(l+1)(\alpha+l+5)_2-(l+3)(\alpha+l+3)_2 \leq 0.$$

利用 (3.3) 可以很容易地验证这一点。

类似地，对于 $n=3$，我们使用恒等式

$$S_{l+1}(t_1,t_2,t_3)=t_1S_l(t_1,t_2,t_3)+t_2S_l(t_2,t_3)+t_3^{l+1}.$$

这对 $l=0$ 成立。若这对 l 成立，那么对于 $l+1$，我们需要证明:

$$t_1S_l(t_1,t_2,t_3)+t_2S_l(t_2,t_3)+t_3^{l+1} \leq t_1D_l+t_2S_l(t_2,t_3)+t_3^{l+1} \leq D_{l+1},$$

显然，这对 $l=0$ 成立，因为它表示为 $t_1D_0+t_2+t_3=t_1+t_2+t_3=S_1=D_1$. 现在，为了证明 $t_2S_l(t_2,t_3)+t_3^{l+1}\le D_{l+1}-t_1D_l$（最后一个不等式），我们再次使用归纳法:

$$\begin{aligned}t_2S_{l+1}(t_2,t_3)+t_3^{l+2}&=t_2(t_2S_l(t_2,t_3)+t_3^{l+1})+t_3^{l+2}\\&\le t_2(D_{l+1}-t_1D_l)+t_3^{l+2}\le D_{l+2}-t_1D_{l+1},\end{aligned}$$

或者，等价地:

$$D_{l+2}-(t_1+t_2)D_{l+1}+t_1t_2D_l\ge t_3^{l+2}.$$

对于 $l=0$，这可写为 $D_2-(t_1+t_2)D_1+t_1t_2D_0\ge t_3^2$，利用 $S_0=D_0$ 和 $S_1=D_1$ 后，可化简为 $D_2\ge(t_1+t_2+t_3)^2-(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)$。利用 (3.3) 即可轻松验证这一点。最后，再次使用归纳法可知，我们的不等式可由以下式子推出:

$$D_{l+3}-(t_1+t_2+t_3)D_{l+2}+(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)D_{l+1}-t_1t_2t_3D_l\ge 0.$$

对于 $n\ge 4$，我们的方法会变得复杂得多，而且需要进行许多修改，因此我们无法在这种情况下证明该定理的一般性结论。

4. Consequences to Fock space case

这里我们将说明，利用测度 $d\mu_{n,\ \alpha}$作一个简单的极限论证，即可从 [8] 得到适用于每个 $n\ge 1$ 的相应福克空间不等式。事实上，由

$$\begin{aligned}&\frac{k^2(k-1)^2\cdots(k-n+1)^2}{n!(\alpha+2)_n}\int_0^1\frac{t^{k-n}(1-t)^{\alpha+2n}}{F(-1-\alpha-n,-n;1;t)}dt\\&\le\frac{1}{\alpha+1+2n}\frac{k!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(k+\alpha+2)}\quad\text{for}\quad k\ge n,\end{aligned}$$

将 $y=Rt$ 替换为 $(\alpha+2)=R$ 后，我们得到:

$$\begin{aligned}&\int_0^R\frac{y^{k-n}(1-y/R)^{R+2n-2}}{F(1-R-n,-n;1;y/R)}dy\\&\le\frac{n!((k-n)!)^2}{k!}\frac{R^{k+1-n}(R)_n\Gamma(R)}{(R+2n-1)\Gamma(k+R)}\quad\text{for}\quad k\ge n.\end{aligned}$$

Now,

$$F(1-n-R,-n;1;y/R)=\sum_{k=0}^n\frac{(-n)_k(1-n-R)_k}{(k!)^2}\frac{y^k}{R^k},$$

当 $R\to+\infty$ 趋近于

$$P_n(y)=\sum_{k=0}^n\frac{(-n)_k(-1)^k}{(k!)^2}y^k=L_n(-y),$$

其中 L_n 是 $n-$ 次拉盖尔多项式。因此，在最后一个不等式中令 $R \to +\infty$ 趋于极限，可得：

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^{k-n}e^{-y}}{L_n(-y)}dy \leq \frac{n!((k-n)!)^2}{k!} \quad \text{for} \quad k \geq n.$$

致谢。作者谨向审稿人致以诚挚谢意，感谢其提出的深刻评论和建设性建议，这些意见显著提升了本文的清晰度和质量。审稿人的专业知识和对细节的关注在整个修订过程中都弥足珍贵。

References

[1] W. Abramowitz, I. A. Stegun, 《正交多项式》，载于《数学函数手册：公式、图表和数学表格》第22章，第9次印刷。纽约：Dover，771-802，（1972）[2] L. D. Abreu, M. Speckbacher，连续小波变换的Donoho-Logan大筛原理，arXiv.org/abs/2210.13056[3] M. Biernacki, J. Krzyz，解析函数理论中某些泛函的单调性，Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska 2，134-145，（1955）[4] F. Haslinger, D. Kalaj, Dj. Vujadinovi´c, 福克空间的尖锐逐点估计，Comput. Methods Funct. Theory 21，343-359，（2021）[5] R. Frank，相干态及其极值函数的最佳不等式，Advanced Nonlinear Studies, doi.org/10.1515/ans-2022-0050，（2023）[6] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Bergman空间理论，Graduate Texts in Mathematics，199。纽约：施普林格，ix, 286页。（2000）[7] V. Heikalla, M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen，广义椭圆积分，Comput. Methods Funct. Theory 9，75-109，（2009）[8] D. Kalaj，福克空间上微分算子的加权压缩性，Computational Methods and Function Theory, doi.org/10.1007/s40315-023-00493-5，（2023）[9] D. Kalaj，单位球中某些对数 $-\mathcal{M}-$次调和函数类的压缩性质，$\mathbb{R}^n$，第286卷，第1期，《泛函分析杂志》，（2024）[10] A. Kulikov，在再生核处取极值的泛函，Geometric and Functional Analysis 32, 938-949，（2022）[11] A. Kulikov, F. Nicola, J. Ortega-Cerda, P. Tilli，流形上次调和函数的单调性定理，arXiv:2212.14008[12]A. Llineares，狄利克雷空间与哈代空间之间的压缩不等式，arXiv:2209.14104，Revista Mathematica Iberoamericana，DOI 10.4171/RMI/1418，（2023）[13] F. Nicola, P. Tilli，短时傅里叶变换的Faber-Krahn不等式，Inv. Math. 230，1-30，（2022）[14] P. Melentijevi´c，柯西投影和Bergman投影、尖锐梯度估计及某些算子范数等式，Complex Variables and Elliptic Equations 64(12), 2091-2104，（2019）[15]P. Melentijevi´c，加权伯格曼空间的超收缩不等式，Bulletin of London Matematical Society，第55卷，第6期，2611-2616, doi.org/10.1112/blms.12883，（2023）

[16] J. P. G. Ramos, P. Tilli，小波变换的Faber-Krahn不等式，Bulletin of London Mathematical Society，doi.org/10.1112/blms.12833，（2023）[17] K. Seip，Bargmann空间和Bergman空间中的再生公式与双重正交性，《工业与应用数学学会数学分析杂志》22(3):856–876，1991年。[18] D. Vukoti´c，A^p_α 函数的尖锐估计，见 $\mathbb{C}^n$，Proc. Amer. Math. Soc. 117，753-756，（1993）University of Montenegro，
Faculty of Natural Sciences and Mathematics，
Cetinjski put b.b. 81000 Podgorica，Montenegro电子邮箱：davidk@ucg.ac.meUniversity of Belgrade，Faculty of Mathematics，
Studentski trg 16，11000，Beograd电子邮箱：petar.melentijevic@matf.bg.ac.rs