通过环绕李乌维尔例外点提升量子热机性能

J.-T. Bu,[1,2,*] J.-Q. Zhang,[1,*] G.-Y. Ding,[1,2,*] J.-C. Li,[1,2] J.-W. Zhang,[3] B. Wang,[1,2] W.-Q. Ding,[1,2] W.-F. Yuan,[1,2] L. Chen,[1,3] S. K. Özdemir,[4,†] F. Zhou,[1,3,‡] H. Jing,[5,§] 和 M. Feng[1,3,6,¶]

[1] State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Innovation Academy of Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China [2] University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China [3] Research Center for Quantum Precision Measurement, Guangzhou Institute of Industry Technology, Guangzhou, 511458, China [4] Department of Engineering Science and Mechanics, and Materials Research Institute, Pennsylvania State University, University Park, State College, Pennsylvania 16802, USA

[5] Key Laboratory of Low-Dimensional Quantum Structures and Quantum Control of Ministry of Education, Department of Physics and Synergetic Innovation Center for Quantum Effects and Applications, Hunan Normal University, Changsha 410081, China [6] School of Physics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China

arXiv:2302.13450v1 [quant-ph] 27 Feb 2023

由于涉及量子相干性，量子热机有望优于经典热机。在此，我们通过实验运行了一台单离子量子热机，并首次展示了由李乌维尔例外点（LEP）引起的热机动力学及其性能提升。与仅关注 LEP 拓扑效应的研究不同，我们聚焦于热力学效应；在退相干作用下，这些效应可以用 Landau-Zener-St¨uckelberg 过程来理解。当热机循环动态地环绕一个 LEP 时，我们观测到量子热机产生了正净功。进一步研究表明，在相同的热机循环条件下，系统在 LEP 附近运行时可获得最大的净功。我们认为，观测到的量子热机性能提升得益于 LEP 附近的本征能量景观，以及 LEP 所诱导的拓扑跃迁。因此，我们的结果为从热力学和拓扑两个方面探索 LEP 在量子系统中的优势开辟了新的可能性。

量子热机（QHEs）以量子物质为工质，有望利用量子相干性、压缩和/或量子关联等量子特征 [1–6], ，超越相应经典热机的输出功率和效率。人们对量子热机的兴趣日益浓厚，也源于理解纳米尺度下的非平衡热力学，以及能量-信息和功-热转换中的量子-经典转变的需求。研究人员已致力于探索不同量子系统中量子热机的独特特性 [6–21]。

作为与外部热浴耦合的开放量子系统，量子热机可被视为非厄米量子系统，并可能呈现例外点（EP）简并，其特征是非厄米哈密顿量 [22–24] 或李乌维尔超算符 [25] 的两个或多个本征值及其对应本征矢发生并合。经典和量子系统中的例外点已被证明会引发许多有趣且反直觉的现象，例如非对称反向散射 [26, 27], 、增强的扰动响应 [28–32], 以及损耗诱导激光 [33]。与例外点相关的拓扑特征，例如态交换 [34],、拓扑能量转移 [35], 、非对称模式切换 [36–40], 以及增强的相位累积，已在光与物质相互作用中得到研究 [41, 42]。然而，这些研究考察的是有效哈密顿量中的例外点，或等价地说，李乌维尔形式中的例外点；该形式仅涉及相干非幺正演化，而忽略了退相干导致的量子跳跃。

为全面刻画量子系统的动力学，并为基于例外点的量子应用与过程奠定基础，应借助刘维尔超算符及其例外点——即李乌维尔例外点（LEPs）——其中涉及能量损耗与退相干的相互作用 [43]。这里，能量损耗对应相干非幺正演化，而退相干则源于量子跳跃 [44]。近期，研究人员从理论上研究了李乌维尔例外点附近由退相干增强的现象，并在实验中观察到这些现象；它们类似于经典谐振子中的临界阻尼 [43–48]。这些特性有望在量子热机的全面动力学控制，以及在无需额外含时外部驱动的情况下使其趋近稳态的过程中发挥作用 [47]。

另一方面，完全动态地环绕 LEP 会导致伴有退相干的 Landau-Zener-St¨uckelberg（LZS）过程 [49] 。传统的 LZS 过程源于反复扫过避免交叉。在

重复扫描使末态概率具有可调性 [50–52] 及其在灵敏测量中的应用 [53]。

在本快报中，我们通过围绕一个LEP，利用单个囚禁离子在实验上实现了一台量子热机，并首次观察到量子热机性能的增强，即在发动机循环期间围绕LEP时会出现增强的正净功。然而，若发动机循环在不围绕LEP的情况下完成，净功则可能为正也可能为负。不同于近期对于LEP相关拓扑效应的关注，这里我们聚焦于源自LEP的热力学效应。围绕LEP所导致的量子热机性能增强，可通过受退相干影响的Landau-Zener- St¨uckelberg（LZS）过程 [49]来理解。此外，穿越LEP的拓扑跃迁也在这种量子热机性能增强中发挥着重要作用。我们的实验是在此前采用过的线性保罗阱中囚禁的单个超冷 $^{40}Ca^{+}$ 离子上开展的 [54, 55]。在赝势近似下，阱势的轴向和径向频率分别为 $\omega_z/2\pi = 1.0$MHz和 $\omega_r/2\pi = 1.2$ MHz。为满足我们的目的，我们施加了一个沿轴向的0.6 mT磁场，使基态 $4^2S_{1/2}$ 和亚稳态 $3^2D_{5/2}$ 分别分裂为两个和六个超精细能级。如图1(a)所示，我们将量子比特编码于 $|4^2S_{1/2}, m_J = +1/2\rangle$ 和 $|3^2D_{5/2}, m_J = +5/2\rangle$中，其中 m_J 表示磁量子数，为简单起见，这两个能级分别标记为 $|1\rangle$ 和$|2\rangle$。为避免不利于量子效应的热声子，我们对离子进行多普勒冷却和边带冷却，直至 z轴运动模的平均声子数远小于1，Lamb-Dicke参数为 $\sim$0.11。该量子比特由一台波长约为729 nm的窄线宽钛宝石激光器操控，该激光器在载波跃迁哈密顿量$H = \Delta|2\rangle\langle 2| + \Omega($ $|2\rangle\langle 1|e^{i\phi_L} + |1\rangle\langle 2|e^{-i\phi_L})/2$下照射超冷离子，其中失谐 Δ 和拉比频率Ω以$\hbar = 1$为单位，如图1(a)所示，ϕ_L 表示激光相位。在下文给出的实验中，我们令 Δ随时间变化，同时保持Ω不变，并且 $\phi_L = 0$。

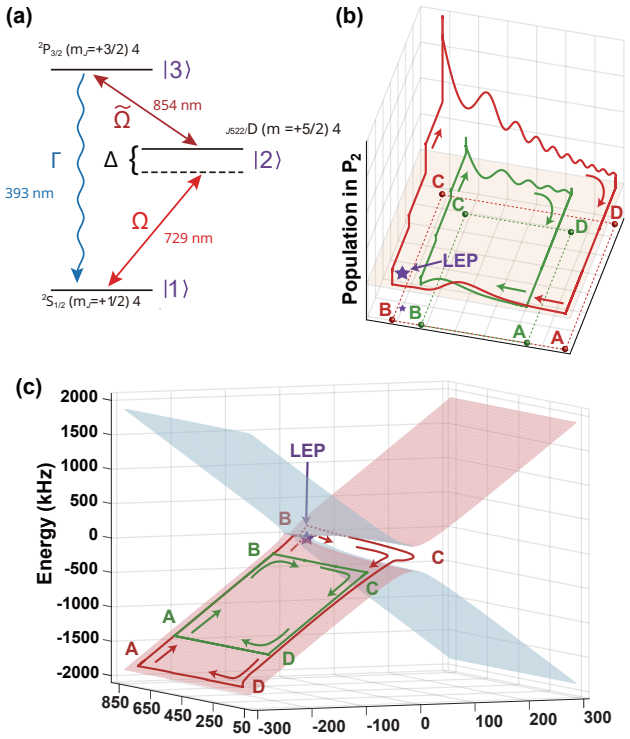


图1。(a) $^{40}Ca^{+}$ 离子的能级图，实线箭头表示由激光驱动的跃迁；对于 729 nm（854 nm）激光，其拉比频率分别为 Ω（$\tilde{\Omega}$），而 Δ 表示 729 nm 激光的失谐。波浪箭头表示自发辐射，其衰减率为 Γ。(b) $|2\rangle$ 中布居数相对于失谐 Δ 和有效衰减率 γ_{eff} 的模拟结果，其中红色（绿色）实线表示围绕（未围绕）LEP时布居数的演化。虚线是相同颜色实线在底平面上的投影，以便观察。为便于正文描述，四个角点标记为 A、B、C 和 D。LEP以紫色星号标出。(c) 黎曼曲面上围绕和未围绕 LEP 的轨迹示意图，对应于 (b) 中以相同颜色实线绘出的量子热机循环。与绿色曲线不同，绿色曲线表示未围绕 LEP、且仅位于黎曼曲面一个分支上的轨迹；红色曲线围绕 LEP，经过两个分支（虚线部分表示位于另一分支上的轨迹），由此产生的拓扑性质与本实验中观测到的热力学效应相关。

单个超冷囚禁离子是探索热力学的理想平台，因为它具有灵活的建模方式和极高的精度 [56–60]。在此，为了实现

围绕 LEP，为了展示一个驱动和耗散均经过充分工程设计的二能级系统，我们还采用了激发能级 $|4^2P_{3/2}, m_J = +3/2\rangle$ 标记为 $|3\rangle$，由此形成一个闭合循环 $|1\rangle \to |2\rangle \to |3\rangle \to |1\rangle$，见图1(a)。第一步 $|1\rangle \to |2\rangle$ 由一台钛宝石激光器（729 nm）实现，该激光器精确调谐至共振跃迁。第二步从 $|2\rangle$ 到 $|3\rangle$ 是由半导体激光器（854 nm）介导的偶极跃迁，在以下条件下

选择定则的限制。第三步 $|3\rangle \to |1\rangle$是自发辐射，同样受到选择定则的限制。实际上，在 $\Omega \ll \tilde{\Omega}$ 的条件下调节 729 nm 和 854 nm 激光，我们可以将这一三能级构型转化为由 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 构成的有效二能级系统，其拉比频率 Ω 和有效衰减率 $\gamma_{\text{eff}} = \tilde{\Omega}^2/\Gamma$ 均可完全调节[61]。

该有效二能级模型的动力学由

林德布拉德主方程描述，

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \tag{1}$$

其中， $\mathcal{L}$ 是刘维尔超算符， ρ 表示密度算符，而 $\mathcal{L}\rho \equiv -i[H,\rho] + \frac{\gamma_{\text{eff}}}{2}(2|1\rangle\langle 2|\rho|2\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 1||1\rangle\langle 2|\rho - \rho|2\rangle\langle 1||1\rangle\langle 2|)$。LEP 的物理性质可通过 $\mathcal{L}$ 在 $\Delta = 0$处的本征解来理解，其形式为 $\lambda_1 = 0$、 $\lambda_2 = -\gamma_{\text{eff}}$、 $\lambda_3 = (-3\gamma_{\text{eff}} - \xi)/4$和 $\lambda_4 = (-3\gamma_{\text{eff}} + \xi)/4$，其中 $\xi = \sqrt{\gamma_{\text{eff}}^2 - 16\Omega^2}$ [62]。当 $\xi = 0$，即 $\gamma_{\text{eff}} = 4\Omega$时，本征值 λ_3 和 λ_4合并，从而在 $\lambda = -3\gamma_{\text{eff}}/4$处形成二阶 LEP。显然，对于 $\gamma_{\text{eff}} > 4\Omega$（弱耦合）， λ_3 和λ_4 均为实数，分裂量为 ξ，对应于破缺相，其特征是非振荡动力学和纯指数衰减 [63, 64]。另一方面，对于$\gamma_{\text{eff}} < 4\Omega$（强耦合）， λ_3 和λ_4 构成一对复共轭对，其虚部相差 ξ，对应于精确相，其特征是振荡动力学。因此，LEP 代表精确相与破缺相之间的拓扑转变点，将参数空间划分为振荡动力学区域（$\gamma_{\text{eff}} < 4\Omega$）和非振荡动力学区域（$\gamma_{\text{eff}} > 4\Omega$）。

在我们的实验中，我们执行了一个由四个过程组成的量子热机循环，如图1(b)所示。第一个过程通过将失谐Δ 从其最小值 Δ_{min} 线性增加至最大值 $\Delta_{\max}$ 来实现，同时 γ_{eff} 保持在其最大值$\gamma_{\max}$，这是从A（$\Delta_{\min}$， $\gamma_{\max}$）到B（$\Delta_{\max}$，$\gamma_{\max}$）的等衰减压缩。第二个过程是从B（$\Delta_{\max}$， $\gamma_{\max}$）到C（$\Delta_{\max}$， $\gamma_{\min}$）的等容加热，通过将 γ_{eff} 从 $\gamma_{\max}$ 减小至 $\gamma_{\min}$来实现，在此过程中失谐保持为 $\Delta_{\max}$。第三个过程是从C（$\Delta_{\max}$， $\gamma_{\min}$）到D（$\Delta_{\min}$， $\gamma_{\min}$）的等衰减膨胀，通过将Δ 从 $\Delta_{\max}$ 线性减小至 $\Delta_{\min}$ 来实现，同时 $\gamma_{\text{eff}} = \gamma_{\min}$ 保持不变。最后，我们通过将 γ_{eff} 从 $\gamma_{\min}$ 增加至 $\gamma_{\max}$ ，同时将 Δ 固定为 $\Delta_{\min}$，执行从D（$\Delta_{\min}$， $\gamma_{\min}$）到A（$\Delta_{\min}$， $\gamma_{\max}$）的等容冷却。在最后一个过程之后，我们等待系统达到稳态并返回其初始状态，从而完成一个闭合循环。对于这一量子热机循环，729纳米激光照射与真实环境共同构成冷热浴，分别对应于 $\Delta_{\min}$ 和 $\Delta_{\max}$。量子比特与热浴之间的热交换由失谐 Δ 控制（即由钛蓝宝石激光器的频率控制）。强度Ω在量子热机循环期间保持不变。因此，我们可以

重点考察第一和第三个过程（即等衰减过程），以分析量子热机的热功交换。

第二和第四个冲程（即等容过程）中 γ_{eff} 的变化会导致精确相与破缺相之间的拓扑跃迁。事实上，非厄米系统的一个引人注目的特征是其例外点所对应的黎曼流形的拓扑结构，该流形描述了系统的复能量；当调节系统参数使其环绕一个例外点时，这种结构会导致态翻转（即态交换） [34]或几何相位的累积 [41, 42] 。我们指出，这一点对哈密顿量例外点（HEPs） [34]和 LEPs [48]均成立。在这里，我们能够调节系统参数以完成一个量子热机循环（即参数空间中的一个环路），因此可以在环绕或不环绕 LEP 的情况下完成该循环（图 1b）。环绕或不环绕 LEP 的循环分别对应于量子轨迹穿过黎曼曲面的两个分支，或位于其中一个分支上（图1c）。正如后文将讨论的，这一独特特征与耗散型朗道-齐纳-斯塔克尔伯格过程共同作用，使所设计的量子热机产生更高的输出功。

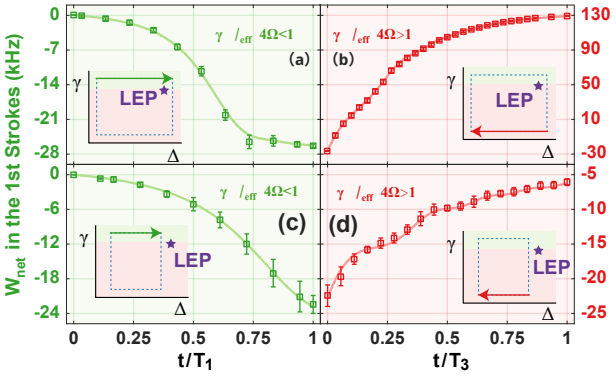


图2。在等衰减过程中测得的激发态布居数，即P_2；其中，（a）和（b）分别对应环绕LEP情况下的第一和第三个过程（$\Delta_{\min}/2\pi = -290$ kHz、 $\gamma_{\max} = 800$ kHz、 $\Delta_{\max}/2\pi = 10$ kHz、 $\gamma_{\min} = 130$ kHz）。时间设为 $T_1 = T_3 = 30$ μs。（c）和（d）分别表示未环绕LEP情况下的第一和第三个过程（$\Delta_{\min}/2\pi = -223$ kHz、$\gamma_{\max} = 800$kHz、 $\Delta_{\max}/2\pi = -43$kHz、$\gamma_{\min} = 200$ kHz）。时间为 $T_1 = T_3 = 18$ μs。（e、f、g、h）分别对应图（a、b、c、d）中的净功，其定义和说明见正文。在所有图中，$\Omega/2\pi$ 为常数，固定为29 kHz。

实验上，我们通过精心调节图(b)中设计的两个量子热机循环， γ_{eff} 并将钛蓝宝石激光器和半导体激光器的频率作为两个调节旋钮。为便于描述，我们将包围 LEP 的红色曲线称为大循环，将未包围 LEP 的绿色曲线称为小循环。为考察热力学性质，我们重点关注等衰减压缩（即第一冲程）和膨胀（即第三冲程），在这两个过程中热机做功。我们首先考察大循环。我们观察到，图2(a)中布居变化出现隆起，且图2(b)中出现布居数振荡。这些布居变化表明量子比特从驱动场吸收或释放热量 [62]。因此，等衰减过程并非绝热过程。由于 LEP 位于 $\Delta = 0$，来回调节 Δ 。

经过 $\Delta = 0$ 可理解为一个 LZS过程[49],，其中朗道-齐纳跃迁 [65] 发生在第一冲程中，此时失谐从 $\Delta_{\min}/2\pi = -290$ kHz 调节至 $\Delta_{\max}/2\pi = 10$ kHz，而跃迁之间积累的相位通常称为 St¨uckelberg 相位 [66]，，可能会在第三冲程的反向操作中导致相长或相消干涉。然而，与在无退相干条件下执行的传统 LZS过程不同，我们的量子热机运行会受到退相干影响，这会改变朗道-齐纳跃迁和 St¨uckelberg 干涉的行为。因此，在第一冲程中，朗道-齐纳跃迁的典型特征——避免交叉，被两个黎曼片之间的交叉所取代；在第三冲程中，我们观察到布居变化呈阻尼振荡，这表明退相干下出现了干涉条纹。相比之下，如图2(c,d)所示，对于小循环，由于仅涉及非共振跃迁，面板 (c) 中的布居隆起较弱且不完整。因此，面板 (d) 中的布居变化也较弱，呈现过阻尼振荡。需要指出的是，为便于比较，我们确保两个循环中的失谐变化速率相同。因此，大循环的实施时间设为 $T_1 = T_3 = 30$ μs，小循环的实施时间则设为 $T_1 = T_3 = 18$ μs。

净功是评估量子热机性能的重要量。我们通过定义净功$_t$为 $W_{\rm net} = -\int \rho_c(t) dH_c$，来量化上述两个量子热机循环产生的净功，其中 $\rho_c(t)$描述由 $H_c = \Delta(t)\,|2\rangle\langle 2|$[67]所支配的二能级系统的态 0。量子热机循环对应的热量可$_t$表示为 $Q_{\rm in(out)} = \int H_c(t) d\rho_c$，适用于 $d\rho_c > 0$ ($d\rho_c < 0$) [62]。0 由于等容过程不做功，这里我们只考虑第一和第三个过程。图 2(e) 和 (g) 分别展示了大循环和小循环中第一过程中产生的负净功，这表明在等衰减压缩过程中，热浴对系统做功；而大循环中的朗道-齐纳跃迁使系统从热浴获得了更多功。相比之下，图 2(f) 和 (h) 分别对应大循环和小循环的第三个过程，展示了从第三个过程开始时刻起累积的净功，该净功抵消了在

第一个冲程。尽管大循环和小循环的净功都增加了，但只有大循环的净功变为正值（即小循环在第三个冲程结束时净功仍为负）。考虑到图2(b)中的相位诱导振荡，我们将图2(f)中观察到的正净功归因于斯图¨克尔伯格相位中累积的相干性。注意，大循环和小循环对应的净功分别具有

效率分别为 $\eta \approx 40.65\%$和 $\eta \approx -0.92\%$。

为说明图2中观察到的正净功与 LEP 有关，我们通过数值计算评估了在第一和第三冲程中改变失谐时两个量子热机循环的净功，并检验$W_{\rm net}$ 在 LEP 被量子热机循环包围后能否仍保持为正。为此，我们固定点A，即令 $\Delta_{\min}$ 的值与图2中相同，但在计算第一和第三冲程时考虑 $\Delta_{\max}$ 的不同取值。此外，第二和第四冲程中的有效衰减在 130 kHz 至 800 kHz 之间变化，这也与图2中的设置相同。由于此处考虑的 $\Delta_{\max}$ 最大值远大于实验中所用的值，这一数值结果有助于理解我们实验观察到的现象。图3 中的数值模拟清楚表明，如果 LEP 未被环绕， $W_{\rm net}$ 可以为正也可以为负；而一旦 LEP 被量子热机循环环绕，净功就必定为正。此外，我们从图3 中发现，净功的最大值出现在 LEP 附近。

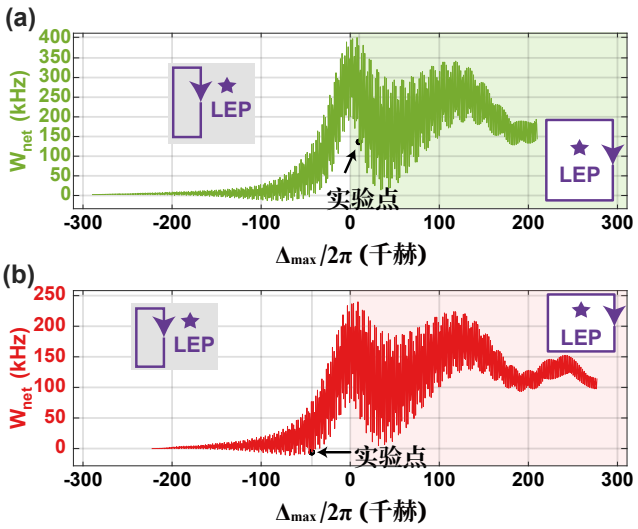


图3. 数值模拟展示了量子热机循环的净功对 $\Delta_{\max}$ 的依赖关系。(a) 覆盖实验中大循环的情形，其中量子热机循环从点A出发，$\Delta_{\min}/2\pi = -290$ 千赫，且$\gamma_{\max} = 800$ 千赫。将频率扫至 $\Delta_{\max}/2\pi \leqslant 210$ 千赫。因此，点C设为-289 9 $\leqslant \Delta_{\max}/2\pi \leqslant$ 。210 千赫、千赫，且 $\gamma_{\min} = 130$ 千赫。(b) 涉及实验中小循环的情形，其中量子热机循环从点A出发， $\Delta_{\min}/2\pi = -223$ 千赫，且 $\gamma_{\max} = 800$ 千赫。将频率扫至 $\Delta_{\max}/2\pi \leqslant 277$ 千赫。因此，点C设为-222.9千赫 $\leqslant \Delta_{\max}/2\pi \leqslant 277$ 千赫，且$\gamma_{\min} = 200$ 千赫。两个面板中，均将最大值设为804个点。黑点表示实验中实现的两个循环的最大失谐。为简洁起见，此处未标出图1中所示的点A和点C。

我们上述的分析忽略了第二项和第四项

这些冲程与 LEP 引发的精确相和破缺相之间的拓扑跃迁有关。尽管第二和第四冲程不产生功，但在这两个冲程中环绕 LEP 时发生的拓扑跃迁，作为量子热机循环的一部分，对提升量子热机性能发挥着重要作用。在图2中，我们看到正净功与大循环中观察到的较高布居数相关。由于在大循环的第二冲程中降低 γ，会引发从破缺相到精确相的拓扑跃迁，从而有助于提高布居数 P_2 (与小循环相比，见图1 b），我们认为，量子热机性能的提升源于与 LEP 相关的热力学效应和拓扑跃迁。值得注意的是，先前的实验演示研究了环绕异常点[68–70]，所引发的拓扑效应，而非环绕 LEP 所引发的拓扑效应。本文建立了量子热机性能与环绕 LEP 所产生的拓扑效应之间的联系。我们期待进一步探索这种单自旋系统，以阐明与 LEP 相关的拓扑效应。

总而言之，我们在单离子囚禁系统中通过动态环绕 LEP，首次实现了量子热机。较高的布居数 P_2 确保了量子热机的正净功，其来源是完整的 Landau-Zener-St¨ueckelberg 过程以及跨越 LEP 的拓扑跃迁。我们的实验观测结果可以通过考虑量子跳跃的林德布拉德主方程得到充分理解，而 LEP 则恰当地描述了量子热机循环中涉及的拓扑效应和热力学效应。我们还通过数值模拟揭示了与 LEP 相关的最大净功。这些结果将有助于理解呈现例外点的非厄米系统中的热力学效应，以及量子效应在热机的热功转换和工质-热浴相互作用中的作用。因此，我们的研究为探索 LEP 相关量子过程动力学控制中的热力学效应和拓扑效应开辟了有趣的可能性。

本工作得到广东省重点领域研发计划专项项目（批准号：2020B0303300001）、国家重点研发计划（批准号：2017YFA0304503）以及国家自然科学基金（批准号：U21A20434、12074390、11835011、11734018）的支持。S.K.O 感谢空军科学研究办公室（AFOSR）多学科大学研究计划（MURI）项目（编号：FA9550-21-1-0202）的支持。

* 共同第一作者，贡献相同 † sko9@psu.edu ‡ zhoufei@wipm.ac.cn § jinghui73@foxmail.com ¶ mangfeng@wipm.ac.cn

[1] J. Gemmer、M. Michel 和 G. Mahler，《量子热力学》（Springer，柏林、海德堡、纽约，2004年）。[2] M. O. Scully、M. S. Zubairy、G. S. Agarwal 和 H. Walther，《通过消失的量子相干性从单个热浴中提取功》，*Science* **299**，862（2003）。[3] J. M. R. Parrondo、J. M. Horowitz 和 T. Sagawa，《信息热力学》，*Nat. Phys.* **11**，131（2015）。[4] G. Alvarado Barrios、F. Albarr´an-Arriagada、F. A. C´ardenas-L´opez、G. Romero 和 J. C. Retamal，《量子关联在光-物质量子热机中的作用》，*Phys. Rev. A* **96**，052119（2017）。[5] A. Hewgill、A. Ferraro 和 G. De Chiara，《局域热浴和公共热浴下双量子比特热机的量子关联与热力学性能》，*Phys. Rev.*，（）。*A* **98** 042102 2018
[6] J. Klatzow、J. N. Becker、P. M. Ledingham、C. Weinzetl、K. T. Kaczmarek、D. J. Saunders、J. Nunn、I. A. Walmsley、R. Uzdin 和 E. Poem，《微观热机运行中量子效应的实验演示》，*Phys. Rev. Lett.* **122**，110601（2019）。[7] E. Mu˜noz 和 F. J. Pe˜na，《相对论极限下的量子热机：狄拉克粒子的情形》，*Phys. Rev.*，（）。*E* **86** 061108 2012
[8] M. O. Scully、K. R. Chapin、K. E. Dorfman、M. B. Kim 和 A. Svidzinsky，《噪声诱导的相干性可提高量子热机功率》，*Proc. Natl. Acad.*，（）。*Sci. U.S.A.* **108** 15097 2011
[9] J. Roβnagel、O. Abah、F. Schmidt-Kaler、K. Singer 和 E. Lutz，《超越卡诺极限的纳米尺度热机》，*Phys. Rev. Lett.* **112**，030602（2014）。[10] A. ¨U. C. Hardal 和 ¨O. E. M¨ustecaplio˘glu，《超辐射量子热机》，*Sci Rep.* **5**，12953（2015）。[11] J. Roβnagel、S. T. Dawkins、K. N. Tolazzi、O. Abah、E. Lutz、F. Schmidt-Kaler 和 K. Singer，《单原子热机》，*Science* **352**，325（2016）。[12] G. Maslennikov、S. Q. Ding、R. Hablutzel、J. Gan、A. Roulet、S. Nimmrichter、J. Dai、V. Scarani 和 D. Matsukevich，《囚禁离子量子吸收式制冷机》，*Nat. Commun.* **10**，202（2019）。[13] D. von Lindenfels、O. Gr¨ab、C. T. Schmiegelow、V. Kaushal、J. Schulz、M. T. Mitchison、J. Goold、F. Schmidt-Kaler 和 U. G. Poschinger，《与谐振子飞轮耦合的自旋热机》，*Phys. Rev.*，（）。*Lett.* **123** 080602 2019
[14] C. A. Ryan、O. Moussa、J. Baugh 和 R. Laflamme，《基于自旋的热机：多轮算法冷却的演示》，*Phys. Rev. Lett.* **100**，140501（2008）。[15] J. P. S. Peterson、T. B. Batalhão、M. Herrera、A. M. Souza、R. S. Sarthour、I. S. Oliveira 和 R. M. Serra，《自旋量子热机的实验表征》，*Phys. Rev. Lett.* **123**，240601（2019）。[16] J. V. Koski、V. F. Maisi、J. P. Pekola 和 D. V. Averin，

《利用单电子实现斯齐拉德发动机》，
Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **111**，13786（2014）。[17] K. Ono、S. N. Shevchenko、T. Mori、S. Moriyama 和 F. Nori，《使用单自旋量子比特的量子热机模拟》，*Phys. Rev. Lett.* **125**，166802（2020）。[18] H. T. Quan、Y. D. Wang、Y. X. Liu、C. P. Sun 和 F. Nori，《超导量子电路中麦克斯韦妖辅助的热力学循环》，*Phys. Rev. Lett.*，**97** 180402 2006（）。[19] A. Guthrie、C. D. Satrya、Y.-C. Chang、P. Menczel、F. Nori、J. P. Pekola，《用于循环量子热机的库珀对盒架构》，*PhysRevApplied* **17** 064022 2022（）。

[20] K. Zhang、F. Bariani、P. Meystre，《量子光机械热机》，*Phys. Rev. Lett.* **112**，150602 2014（）。[21] A. Dechant、N. Kiesel 和 E. Lutz，《全光纳米机械热机》，*Phys. Rev. Lett.* **114**，183602 2015（）。[22] Markus M¨uller 和 I. Rotter，《开放量子系统中的例外点》，*J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 244018（2008）。[23] M.-A. Miri 和 A. Al´u，《光学与光子学中的例外点》，*Science* **363**，42（2019）。[24] S. K. ¨Ozdemir、S. Rotter、F. Nori 和 L. Yang，《光子学中的宇称-时间对称性与例外点》，*Nat. Mater.* **18** 783 2019（）。
[25] A. Insinga、B. Andresen、P. Salamon 和 Ronnie Kosloff，《量子热机：极限环与例外点》，*Phys. Rev. E* **97**，062153（2018）[26] B. Peng、S. K. ¨Ozdemir、M. Liertzer、W. Chen、J. Kramer、H. Yilmaz、J. Wiersig、S. Rotter 和 L. Yang，《例外点处的手性模与定向激光》，*Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** 25（2016）。[27] S. Soleymani、Q. Zhong、M. Mokim、S. Rotter、R. El-Ganainy 和 S.. K. ´, Ozdemir，《例外面上的手性与简并完美吸收》，*Nat. Commun.* **13**，599 2022（）。[28] H. Hodaei、A. U. Hassan、S. Wittek、H. Garcia-Gracia、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，《高阶例外点处的灵敏度增强》，*Nature (London)* **548** 187（2017）。[29] W. Chen、S. K. ¨Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang，《例外点提升光学微腔中的传感能力》，*Nature (London)* **548** 192（2017）。[30] J. Wiersig，《基于例外点的传感器综述》，*Photon. Res.* **8** 1457（2020）[31] Y.-H. Lai、Y.-K. Lu、M.-G Suh、Z. Yuan 和 K. Vahala，《观测到例外点增强的萨尼亚克效应》，*Nature (London)* **576**，65（2019）。[32] M. P. Hokmabadi、A. Schumer、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，《具有增强萨尼亚克灵敏度的非厄米环形激光陀螺仪》，*Nature (London)* **576** 70 2019（）。

[33] B. Peng、S. K. ¨Ozdemir、S. Rotter、H. Yilmaz、M. Liertzer、F. Monifi、C. M. Bender、F. Nori 和 L. Yang，《损耗诱导的激光抑制与复兴》，*Science* **346** 328 2014（）。

[34] W. Liu、Y. Wu、C.-K. Duan、X. Rong 和 J. Du，《在真实量子系统中动态环绕例外点》，*Phys. Rev. Lett.* **126** 170506（2021）。[35] H. Xu、D. Mason、L. Jiang 和 J. G. E. Harris，具有例外点的光力学系统中的拓扑能量转移，*Nature (London)* **537**，80（2016年）。[36] J. Doppler、A. A. Mailybaev、P. Rabl、N. Moiseyev与S. Rotter，动态环绕例外点实现非对称模式切换，*Nature (London)* **537**，76（2016年）。[37]X.-L. Zhang、S. Wang、B. Hou与C. T. Chan，动态环绕例外点：环绕回路的原位控制及起始点的作用，*Phys. Rev. X* **8**，021066（2018年）。[38] Q. Liu、S. Li、B. Wang、S. Ke、C. Qin、K. Wang、W. Liu、D. Gao、P. Berini与P. Lu，通过环绕移动奇异点在紧凑型硅芯片上实现高效模式传输，*Phys. Rev. Lett.* **124**，153903（2020年）。[39] A. Li、J. Dong、J. Wang、Z. Cheng、J. S. Ho、D. Zhang、J. Wen、X.-L. Zhang、C. T. Chan、A. Al´u、C.-W. Qiu与L. Chen，环绕例外点中的哈密顿量跳跃：实现高效手性模式切换，*Phys. Rev.*，（）。*Lett.* **125** 187403 2020
[40] J. W. Yoon、Y. Choi、C. Hahn、G. Kim、S. Ho Song、K.-Y. Yang、J. Yub Lee、Y. Kim、C. S. Lee、J. K. Shin、H.-S. Lee与P. Berini，跨越整个光通信波段的例外点时间非对称回路，*Nature (London)* **562**，86（2018年）。[41] C. Dembowski、H.-D. Gr¨af、H. L. Harney、A. Heine、W. D. Heiss、H. Rehfeld、A. Richter，例外点拓扑结构的实验观测，*Phys. Rev. Lett.* **86** 787（2001年）。[42] T. Gao、E. Estrecho、K. Y. Bliokh、T. C. H. Liew、M. D. Fraser、S. Brodbeck、M. Kamp、C. Schneider、S. H¨ofling、Y. Yamamoto、F. Nori、Y. S. Kivshar、A. G. Truscott、R. G. Dall与E. A. Ostrovskaya，在混沌激子-极化激元台球系统中观测非厄米简并，*Nature (London)*，**526** 554（2015年）。[43] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany与F. Nori，非厄米哈密顿量和刘维尔算符的量子奇异点：量子跳跃的影响，*Phys. Rev. A* **100** 062131（2019年）。[44] W. J. Chen、M. Abbasi、B. Ha、S. Erdamar、Y. N. Joglekar、K. W. Murch，耗散超导量子比特中由退相干诱导的例外点，*Phys. Rev. Lett.* **128** 110402（2022年）。[45] M. Naghiloo、M. Abbasi、Y. N. Joglekar与K. W. Murch，单个耗散量子比特中跨越例外点的量子态层析。*Nat. Phys.* **15**，1232（2019年）。[46] L. Xiao、K. Wang、X.Zhan、Z. Bian、K. Kawabata、M. Ueda、W. Yi与P. Xue，宇称-时间对称量子动力学中临界现象的观测，*Phys. Rev. Lett.* **123**，230401（2019年）。[47] S. Khandelwal、N. Brunner与G. Haack，量子热机中李乌维尔例外点的特征，*Phys. Rev. X. Quantum.* **2**，040346（2021年）。[48] W. J. Chen、M. Abbasi、Y. N. Joglekar与K. W. Murch，超导量子比特非厄米动力学中的量子跳跃，*Phys. Rev. Lett.* **127** 140504（2021年）。[49] S. N. Shevchenko、S. Ashhab与F. Nori，Landau-Zener-St¨uckelberg干涉测量，*Phys. Rep.* **492**，1（2010年）。[50] J. R. Petta、H. Lu与A. C. Gossard，电子自旋态的相干分束器。*Science* **327**，669–672（2010年）。[51] W. D. Oliver、Y. Yu、J. C. Lee、K. K. Berggren、L. S. Levitov与T. P. Orlando，强驱动超导量子比特中的马赫-曾德尔干涉测量。*Science* **310**

，

1653–1657（2005年）。[52] G. Cao、H.-O. Li、T. Tu、L. Wang、C. Zhou、M. Xiao、G.- C. Guo、H.-W. Jiang与G.-P. Guo，利用Landau–Zener–St¨uckelberg干涉对量子点电荷量子比特进行超快通用量子控制， *Nat. Commun.***4**，1401（2013年）[53] L. Y. Gorelik、N. I. Lundin、V. S. Shumeiko、R. I. Shekhter与M. Jonson，作为微波激活量子干涉仪的超导单模接触， *Phys. Rev. Lett.* **81**，2538（1998年）[54] F. Zhou、L. L. Yan、S. J. Gong、Z. H. Ma、J. Z. He、T. P. Xiong、L. Chen、W. L. Yang、M. Feng与V. Vedral，利用单个囚禁离子验证海森堡误差-扰动关系， *Sci. Adv.* **2**，e1600578（2016年）。[55] T. P. Xiong、L. L. Yan、F. Zhou、K. Rehan、D. F. Liang、L. Chen、W. L. Yang、Z. H. Ma、M. Feng与V. Vedral，利用单个囚禁离子实验验证与贾尔津斯基关系相关的信息论等式， *Phys. Rev. Lett.* **120**，010601（2018年）。[56] S. An、J.-N. Zhang、M. Um、D. Lv、Y. Lu、J. Zhang、Z.- Q. Yin、H. T. Quan与K. Kim，利用囚禁离子系统实验检验量子贾尔津斯基等式， *Nat. Phys.* **11**，193（2015年）。[57] O. Abah、J.Rossnagel、G. Jacob、S.Deffner、F. Schmidt- Kaler、K. Singer与E. Lutz，处于最大功率下的单离子热机， *Phys. Rev. Lett.* **109**，203006（2012年）。[58] J. Rossnagel、O. Abah、F. Schmidt-Kaler、K. Singer与E. Lutz，超越卡诺极限的纳米尺度热机， *Phys. Rev. Lett.* **112**，030602（2014年）。[59] J. Rossnagel、S. T. Dawkins、K. N. Tolazzi、O. Abah、E. Lutz、F. Schmidt-Kaler与K. Singer，单原子热机， *Science* **352**，325（2016年）。

[60] L. L. Yan、T. P. Xiong、K. Rehan、F. Zhou、D. F. Liang、L. Chen、J. Q. Zhang、W. L. Yang、Z. H. Ma 和 M. Feng，量子兰道尔原理的单原子演示， *Phys. Rev. Lett.* **120**，210601（2018年）。[61] J. W. Zhang、K. Rehan、M. Li、J. C. Li、L. Chen、S. L. Su、L. L. Yan、F. Zhou 和 M. Feng，量子层面不可逆性的信息论界限的单原子验证， *Phys. Rev. Research* **2**，033082（2020年）。[62] 补充材料。[63] J. Huber、P. Kirton、S. Rotter 和 P. Rabl，开放量子系统中 $\mathcal{PT}$ -对称性破缺的涌现， *Sci- Post Phys.* **9** 52 2020 （）。[64] Y. Nakanishi 和 T. Sasamoto，具有林德布拉德动力学的开放量子系统中的PT相变， *Phys. Rev. A* **105** 022219 2020 （）。[65] L. Landau， ， *Phys. Z. Sowjetunion* **2**，46（1932年）；C. Zener，Proc. R. Soc. Lond. A **137**，696（1932年）。[66] E. C. G. St¨uckelberg， *Helv. Phys. Acta* **5**，369（1932年）。[67] W. Ji、Z. Chai、M. Wang、Y. Guo、X. Rong、F. Shi、C. Ren、Y. Wang 和 J. Du，量子导引量化的自旋量子热机， *Phys. Rev. Lett.* **128**，090602 2022年（）。[68] H. Shen、B. Zhen 和 L. Fu，非厄米哈密顿量的拓扑能带理论， *Phys. Rev. Lett.* **120** （）。146402 2018 [69] K. Kawabata、T. Bessho 和 M. Sato，例外点与非厄米拓扑半金属的分类， *Phys. Rev. Lett.* **123** 066405（2019年）。[70] M. Abbasi、W. Chen、M. Naghiloo、Y. N. Joglekar 和 K. W. Murch，通过例外点邻近性进行拓扑量子态控制 *Phys. Rev. Lett.* （）。**128** 160401 2022