arXiv:2302.13453v1 [math.CO] 27 Feb 2023

平衡的二元子集

Mikhail V. Bludov 和 Oleg R. Musin

摘要

平衡集于 20 世纪 60 年代作为非空核心条件的一部分，出现在合作博弈论中。本文对仅包含二元子集的平衡族进行了分类。我们还讨论了利用平衡集对经典 Sperner 引理和 Tucker 引理的推广。

1 引言

作为有限集的加权子集族，平衡集最早出现在 Bondareva[1]和 Shapley [6]的论文中。

用 $[d]$ 表示集合 $\{1, 2, ..., d\}$。设 Φ 是 $[d]$ 的一个子集族 $\{S_1, ..., S_m\}$。按照 Shapley [7]，的说法，如果存在一组非负权重 $\{w_1, ..., w_m\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \eta_k = (1, ..., 1),$$

其中 η_k 是 S_k 在 $[d]$ 中的特征（指示）向量。若一个平衡族 Φ 不含真平衡子族，则称其为极小的。

现在考虑只包含二元子集的子集族。若一个子集族 F 包含奇数个子集，则称其为奇数大小。

设 $I = \{i_1, ..., i_n\}$，其中 $n \geq 3$。如果子集族 F 中来自 I 的子集满足 $F = \{(i_1, i_2)、(i_2, i_3)..... (i_n, i_1)\}$，则称其关于 I 是循环的。如果 $n = 2$，则 I 只有一个二元子集。在这种情况下，我们称 $F = \{(i_1, i_2)\}$ 是孤立的。

以下定理的证明见第 2 节。

定理 1. 设 Φ 是 $[d]$ 中的一个极小平衡族，该族由 2-子集组成。则 $[d]$ 是子集 $I_1、...、I_k$ 和 $\Phi = \{\Phi_\ell\}_{\ell=1、...、k}$ 的不交并，其中 Φ_ℓ 关于 I_ℓ 要么是奇数大小的循环的，要么是孤立的。

这些分解对应于将 d 划分为大小为 2、3、5、... 的部分。该划分的生成函数为

$$\frac{1}{1+x} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i+1}}.$$

很容易看出它与奇分拆之间的联系。用 $b(d)$ 表示我们的划分数量。设 $q(d)$ 为奇分拆的数量。那么

$$b(d) = q(d) - q(d-1) + ... + (-1)^d q(0).$$

我们可以将定理5应用于具有双人联盟的合作博弈。根据 Bondareva–Shapley 定理，只需检验极小平衡集上的条件，就能判断核是否非空。既然我们已知这些平衡集的分类，就可以简化核非空的条件。

这里给出平衡集的一般几何定义。

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个点集。若 c_V 位于凸包 conv($v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$) 中，其中 c_V 是V的质心，则称子集 $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ 为平衡集。相应的指标集 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ 也称为平衡集。

V 的平衡子集是极小的，当且仅当它不包含任何平衡子集。将极小平衡子集的族记为 BS(V)。

关于三角剖分顶点着色的 Sperner 引理及其向覆盖的推广——Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz (KKM) 引理，都是 Brower 不动点定理的离散类比。KKM 引理还可推广为 KKMS 定理，见 [7, 8]。所有这些定理都有许多应用，尤其是在博弈论和数理经济学中。

Tucker、Ky Fan 和 Shashkin 引理是 Borsuk–Ulam定理的离散版本。它们还有多种应用。

在第3节中，我们讨论定理A和定理B，它们是依赖于 V 的平衡集的不动点定理离散版本的推广。如果对于某个 V，我们知道它的 BS(V)，那么就能得到这些定理的显式版本。

2 定理1的证明

设 Φ 是一个仅包含来自 $[d]$ 的二元子集的族。这个族可以用 $\mathbb{R}^d$ 的一组标准正交基 e_1、……、e_d 在几何上描述。对于每个二元子集 (i, j)，我们赋予它 $\mathbb{R}^d$ 中的一个点：

$$e_{ij} := \frac{1}{2}(e_i + e_j) \ \ (1 \leqslant i < j \leqslant d).$$

我们将这组点记作 V_d。显然， V_d 中所有这些 $\binom{d}{2}$ 点都位于由方程 $x_1 + \ldots + x_d = 1$ 定义的超平面 Π_d 上。

（注意，点 V_d 是顶点集为 e_1, ..., e_d 的一个 $d-1$ 维单纯形在 Π_d 中各边的中点。多胞体 P_d := conv(V_d) 在离散几何、图论和编码理论中发挥着重要作用。特别地， V_d 是 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中一个 2 距离集的例子。在许多情况下，极大 2 距离集中的点数至多为 $|V_d| = \binom{d}{2}$。）

容易看出，V_d 的平衡子集与平衡族 $\Phi = \{S_1, ..., S_m\}$ 之间存在一一对应关系，其中所有 S_i 都是 $[d]$ 的二元子集。

用 c_d 表示 V_d 的质心。那么 $c_d = (\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}) \in \Pi_d$。本节的主要目标是描述所有极小平衡集 $S \subset V_d$ 的集合。

设 K_d 是一个具有 d 个顶点 $\{a_1, ..., a_d\}$ 的完全图。我们将顶点 $\{a_1, ..., a_d\}$ 与向量 $\{e_1, ..., e_d\}$ 及其索引 $\{1, 2, ..., d\}$ 视为同一对象。

令 S 为 V_d 的子集。按以下规则定义 $G(S)$ 为 K_d 的一个子图：当且仅当 $e_{ij} \in S$ 时，(i, j) 是 $G(S)$ 的一条边。

用 $n(S)$ 表示 $G(S)$ 的顶点数。注意，这个图的边与 S 的元素相对应。显然，

$$S \subseteq V_{n(S)} \subset \Pi_{n(S)} \subset \mathbb{R}^{n(S)} \subseteq \mathbb{R}^d$$

并且我们有如下结论。

引理 2. 设 S 是 V_d 的一个子集。假设 $S = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 和 $G(S)$ 是图 $G(S_1)$ 与 $G(S_2)$ 的不交并。那么

$$S_i \subset \mathbb{R}^{n(S_i)},\ i = 1, 2; \quad \mathbb{R}^{n(S)} = \mathbb{R}^{n(S_1)} \oplus \mathbb{R}^{n(S_2)}$$

该引理表明，若 $G(S_1)$ ...、$G(S_k)$、$k > 1$ 是 $G(S)$ 的连通分支，则集合 S_i 位于 $\mathbb{R}^{n(S)}$ 中相互正交的子空间内。

引理 3. 设 $S \subset V_d$ 是一个平衡集。假设 $G(S_1)$ ...、$G(S_k)$ 是 $G(S)$ 的连通分支。那么对所有 $i = 1$、. . .、k，集合 S_i 对 $V = V_{n(S_i)}$ 也为平衡集。

下一个引理可直接由 Shapley 的定义推出：

引理 4. 设 S 是一个极小平衡集，$|S| > 1$。假设图 $G(S)$ 是连通的。那么 $G(S)$ 没有度为 1 的顶点。

在第 1 节中，我们定义了循环族和孤立族。对于 $S \subset V_n$，这些定义意味着：如果 $G(S)$ 是一个具有 n 个顶点的多边形，则称 S 为循环的；如果 $n = 2$，那么 S 仅包含一个顶点，则称 S 为孤立的。

引理 5. 设 S 是 $V = V_n$ 的一个极小平衡集，且 $n > 2$。假设 $G(S)$ 是连通的，且 $n(S) = n$。那么 n 是奇数，且 S 是循环的。

证明. 我们的证明依赖于以下著名定理：

Carath´eodory 定理. 如果点 x 属于欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 中集合 P 的凸包，那么 x 可以表示为 P 中至多 $m + 1$ 个点的凸组合。

注意，S 是 $(n - 1)$ 维欧几里得空间的一个子集。根据假设，$G(S)$ 的顶点数为 n，并且 c_n 属于 conv(S)。

Caratheodory 定理意味着 c_n 是 S 中 $\ell \leq n$ 个顶点的凸组合。由 S 的极小性可知，这个顶点子集与 S 重合，且 $|S| = \ell$，因此 $|S| \leq n$。

我们看到，图 $G(S)$有 n 个顶点，且至多有 n 条边。由引理 4 可知，这个图是一个 n 边形。

假设 $n = 2k$, $S = \{(1, 2)(2, 3) ..., (2k, 1)\}$，且 $S' = \{(1, 2)(3, 4) ..., (2k - 1, 2k)\}$。那么 $|S'| = k$。由于 c_n 被 S' 和 $S' \subset S$ 的凸包覆盖，我们看到 S 不是极小的，并且 n 甚至不可能。

□

定理 1 可直接由引理 3 和引理 5 得出。

3 平衡集定理的推论：Tucker、Fan 和 Shashkin 引理

3.1 不动点定理的离散版本。

设空间 X 被 m 个开集（或闭集）覆盖，并且 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^d$。根据 [4],，我们可以构造映射 f_V： $X \to \text{conv}(V)$。

设 T 是流形 M 的一个三角剖分。顶点着色 L: $V(T) \to \{1, ..., m\}$ 是覆盖的一种特殊情形。因此，我们可以定义映射 f_L : $T \to \text{conv}(V)$。关于这些映射的主要结果见 [4, 定理 3.1], [4, 推论 3.2], 和 [5, 定理 4.2]。这里我们给出这些定理的推论。

定理 A. 设 $V := \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^d$。设 $F = \{F_1, \ldots, F_m\}$ 是 n 维圆盘的一个闭（或开）覆盖。假设 F 满足： f_V 在边界上不是零伦的。那么存在一个极小平衡集 $I \in \text{BS}(V)$，使得 $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$。

定理 B. 设 $V := \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^d$。设 T是 n维圆盘的一个三角剖分，且 L: $V(T)$ $\to \{1, ..., m\}$ 是 $V(T)$ 的一种着色。假设 f_L 在边界上不是零伦的。那么， T 中存在一个单纯形 s ，且 $I \in \text{BS}(V)$，使得 s的顶点着有 I中的所有颜色。

请注意，在经典不动点定理的情形下，边界上的“不是零伦”条件成立。特别地，Sperner 着色、KKM 覆盖以及边界上的对踵着色都是该条件的特例。

Usi利用定理A和定理B，我们可以得到不动点定理的离散版本。

设 $m = d + 1, n = d$。设 F是 d维单纯形 $\Delta^d \subset \mathbb{R}^d$的一个覆盖，其顶点集为 V。假设 F 满足 KKM 引理的边界条件。那么，该覆盖在 Δ^d 的边界上不是零伦的，KKM 引理由定理 A 得出。Sperner 引理可由 KKM 引理或定理 B 轻易推出。

对 Δ^d 的三角剖分进行任意 Sperner 着色，都有一个胞腔，其顶点的颜色各不相同。

Shapley 的 KKMS 引理 [7, 8] 也可由定理 A 轻易推得，见 [5, 推论 4.2]。在这种情况下，点集 V 是 Δ^d 中所有由 k 个顶点组成的子集的质心集合，其中 $1 \leq k \leq d$。

设 $V = V_d$，且我们满足定理A和定理B的条件。那么定理 1 为使用 $\binom{d}{2}$ 种颜色的着色给出了一个新结果。

3.2 对径的平衡二元子集。

设 P是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个中心对称多胞体，其顶点集为 $V = V(P)$。换言之，若 $v \in V$，则 $(-v) \in V$。可见，质心为 $c_V = O$，其中 O是 $\mathbb{R}^d$的原点。显然， V 的平衡二元子集族是所有对跖点对 $(v, -v)$ 所组成的集合，其中 $v \in V$。

设定理 B 中的 T 和 L 在边界上均为对跖对称的。则（见 [3, 4, 5]） f_L 在边界上不是零伦的，因此我们可以使用定理 B。

1. 设 e_1，……，e_d 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基。设 P 是顶点集为 $V = \{\pm e_1, ..., \pm e_d\}$ 的正则交叉多胞体。于是我们看到，BS(V) 恰好是所有对跖顶点对的集合。由此，Tucker 引理可由定理 B 推出。

设 T 是 d 维圆盘的一个三角剖分，使得 T 在边界上是对跖对称的。设 $L: V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +d, -d\}$ 是一种着色，对于边界上的所有顶点 v，该着色都是对径的（即 $L(-v) = -L(v)$）。那么存在一条互补边，即 $[u, v] \in T$，使得 $L(u) = -L(v)$。

2. 在 [2, Th. 5.2] 中构造了一个凸多胞体 $P(n, d) \subset \mathbb{R}^d$，其具有 $2n$ 个中心对称顶点 $V = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_n\}$，使得 BS($V$) 由对跖点对 $(v_i, -v_i)$、$i = 1$、……、n 以及具有顶点 $(v_{k_0}, -v_{k_1}, \ldots\ldots, (-1)^d v_{k_d})$ 或 $\{-v_{k_0}, v_{k_1}, \ldots, (-1)^{d+1} v_{k_d}\}$ 的 d-单形组成，其中 $1 \le k_0 < \cdots < k_d \le n$。于是，定理 B 给出范·凡引理：

设 T 是一个 d维圆盘的三角剖分，且在边界上对径对称。设 $L: V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +n, -n\}$ 是一个在边界上对径的着色。假设 T中没有互补边。那么交替的 d-单形的数量为奇数，即由$(k_0, -k_1, k_2, \ldots, (-1)^d k_d)$着色的单形，其中 $1 \le |k_0| < \cdots < |k_d| \le n$ 和所有 k_i 的符号相同。

3. 在 [3] 中讨论了 Shashkin 引理的一个扩展版本。
设 T是一个$(d-1)$维圆盘的三角剖分，且在边界上对径对称。设 $L: V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +d, -d\}$ 是一个在边界上对径的着色。假设T中没有互补边。那么对于每个颜色集 $\Lambda = \{\ell_1, \ldots, \ell_d\}$，其中 $|\ell_i| = i$ 适用于 $i = 1, \ldots, d$，T 中标记为 Λ 或$(-\Lambda)$的胞腔数量为奇数。

[3] 中的证明并不依赖定理 B。这里我们证明 Shashkin 引理可以由此定理推出。

设 Δ 是 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中一个质心位于原点 O 的 $(d-1)$ 维单纯形。设 $v_1, ..., v_d$ 是 Δ 的顶点。假设 V 是点集 $\{\pm v_1, ..., \pm v_d\}$。容易证明，BS($V$) 由所有数对 $(v_i, -v_i)$ 以及集合 $\{v_1, ..., v_d\}$ 和 $\{-v_1, ..., -v_d\}$ 组成。给顶点 v_i 指派颜色 ℓ_i，并给 $-v_i$ 指派颜色 $(-\ell_i)$。于是 f_L 在边界上是对径的，Shashkin 引理由定理 B 得证。

参考文献

[1] O. N. Bondareva. 线性规划方法在合作博弈理论中的若干应用。Problemy Kibernetiki, 10（1963），119–139。[2] O. R.Musin，《流形上 Sperner 引理和 Tucker 引理的推广》，J. of Combin. Theory Ser. A, 132（2015），172–187。[3] O. R. Musin，《Tucker–Fan–Shashkin 引理的推广》，Arnold Math. J., 2:3（2016），299–308。

[4] O. R. Musin, 《覆盖的同伦不变量与 KKM 型引理》，代数几何与拓扑，16（2016），1799–1812。[5] O. R. Musin, 《带边界条件的 KKM 型定理》，固定点理论与应用杂志，19（2017），2037-2049。[6] L. S. Shapley.《关于平衡集与核》，海军研究后勤季刊，14（1967），453–460。[7] L. S. Shapley《没有侧支付的平衡博弈》，载于《数学规划》，Hu, T.C. 和 S.M. Robinson（编），学术出版社，纽约，261–290，1973。[8] L. S. Shapley 和 R. Vohra, 《关于角谷不动点定理、KKMS 定理和平衡博弈的核》，经济理论，1（1991），108–116。M. V. Bludov，莫斯科物理技术学院，电子邮箱：michaelbludov@gmail.com O. R. Musin，德克萨斯大学里奥格兰德河谷分校，数学与统计科学学院，西大学大道一号，布朗斯维尔，德克萨斯州，78520，美国。电子邮箱：oleg.musin@utrgv.edu