arXiv:2302.13456v2 [math.CV] 9 May 2024

具有常全纯截面曲率的伯格曼度量

黄晓军* 李松英

附录由 John N. Treuer 撰写[1]

谨以此文纪念 Joe Kohn 教授

摘要

本文研究 Bergman度量不完备但具有常全纯截面曲率的复流形。本文取得的结果之一，是证明了一项由来已久的民间猜想：Stein 流形具有负的常数全纯截面曲率，当且仅当它双全纯于去掉一个多极集后的球。此外，我们构造了 $\mathbb{C}^2$ 中的一个域，其 Bergman度量定义良好且具有正的常数全纯截面曲率，这似乎是此类例子中的首例。在第 5 节及 John Treuer 撰写的附录中，我们将证明，在自然假设下，不存在 Bergman度量平坦的复流形。

摘要：本文 ′研究 Bergman度量不完备但具有常全纯截面曲率的复流形。本文取得的结果之一，是证明了一项由来已久的民间猜想，并构造了一个域，其 Bergman度量出人意料地具有正的常全纯截面曲率。

2000年数学主题分类：32Q05，32Q10，32Q30，53B35，53C24

*部分受 DMS-2247151 资助[1]部分受 DMS-2247175 和 AMS-Simons 旅行资助金资助

1 引言

本文研究复流形何时具有定义良好的、常全纯截面曲率的 Bergman度量。Bergman度量和 Bergman 核是复分析与几何学中最重要的研究对象之一。关于复流形上的 Bergman度量和 Bergman 核的研究，可以追溯到 Stefan Bergman [Ber1] 和 S. Kobayashi [Ko]的工作。S. Bergman [Ber2], 、S. Kobayashi[Ko] 和 Q. Lu [Lu], 、C. Fefferman [Fe], 等人取得了一些著名的经典结果。Bergman 在 [Ber2] 中证明，中的有界域的 Bergman度量的全纯截面曲率不大于射影空间的全纯截面曲率，即不大于 $+2$。Kobayashi 在 [Ko]中将这一上界估计推广到了复流形。Lu 在 [Lu] 中证明，中的有界域 Ω 若具有完备 Bergman 度量（根据 [Bre]中的一个结果，这样的 Ω 是伪凸的），则 Ω 具有常全纯截面曲率，当且仅当 Ω 与球双全纯。Fefferman[Fe] 研究了光滑边界强伪凸域的 Bergman核函数的边界渐近展开。具体而言，利用 Fefferman 的展开式， [Kle] 证明了，光滑边界强伪凸域的 Bergman度量的全纯截面曲率在其边界附近渐近地趋于负常数。Fu [Fu] 证明，中的有限型光滑边界 Reinhardt域的 Bergman度量的全纯截面曲率在其边界附近有一个负的上界常数。

自 Stefan Bergman 的奠基性工作以来，伯格曼度量已被广泛研究了近一个世纪。然而，我们对它们的理解仍远未完善，任何与这些度量相关的新发现，都将为未来的研究提供重要的动力来源。在本文中，我们将给出揭示新现象的例子，例如构造一个其伯格曼度量具有正的常数全纯截面曲率的域。此前，所有具有常全纯截面曲率的复流形的伯格曼度量 κ 都满足 $\kappa < 0$。我们将回答一个长期存在的民间猜想，该猜想旨在刻画其伯格曼度量具有负的常数全纯截面曲率的 Stein 流形，且不假设该度量是完备的；这不同于 Lu 的经典定理。我们将针对伯格曼度量提出一些自然相关的新猜想。

更确切地说，我们首先研究这样一个问题：复流形的伯格曼度量何时具有正的常数全纯截面曲率？沿着这一方向，我们在§3 中的结果尤其证实了以下结论：

定理 1.1。设 Ω 是一个维数为 n 的复流形。假设其 Bergman空间 $A^2(\Omega)$ 是

无基点的，并且能够分离全纯方向。假设 Ω 的 Bergman度量具有正的常数全纯截面曲率。那么 $A^2(\Omega)$ 是有限维的。此外，Ω 与 $\mathbb{P}^n$ 中的一个域双全纯。

这里，$A^2(\Omega)$ 是 Ω 的 Bergman空间，由 L^2-可积全纯n-形式构成的线性空间。定理中关于 $A^2(\Omega)$ 的其他条件将在下一节说明，这些条件是为了确保 Ω 上的 Bergman度量定义良好。特别地，我们有如下结论：

推论 1.2. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域。那么，它的 Bergman度量不可能具有正的常数全纯截面曲率。另一方面，确实存在一个无界 Reinhardt域，其 Bergman度量具有正的常全纯截面曲率。

受 J. Wiegerinck 的一个旧猜想启发，我们提出一个新猜想：Stein 流形，特别是 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域，其 Bergman度量不可能具有正的常全纯截面曲率。（见猜想 3.4。）

接下来，我们研究 Bergman度量具有负的常数全纯截面曲率的情形。我们将在 §4 中证明如下结论：

定理 1.3. 设 Ω 是复维数为 $n \geq 1$ 的 Stein 流形。假设其 Bergman空间$A^2(\Omega)$ 无基点，且能分离全纯方向。那么，其 Bergman度量具有负的常数全纯截面曲率，当且仅当它双全纯于 $\mathbb{C}^n$ 中去掉一个闭多极集后的单位球。

由此立即得到以下结论：

推论 1.4. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界伪凸域。那么，它具有负的常数全纯截面曲率，当且仅当 Ω 双全纯于 $\mathbb{C}^n$ 中去掉一个闭多极集后的单位球。

推论 1.4 证实了一个民间猜想：有界伪凸域的 Bergman度量具有负的全纯截面曲率，当且仅当该域与去掉一个多极子集后、同维的单位球双全纯。X. Dong 和 B. Wong 在近期发表的两篇论文中 [DW1] [DW2], 针对有界域 $D \subset \mathbb{C}^n$上的这一问题取得了早期的重要进展。在假设 Calabi位差函数 $^{K}(z,\ z)|K(z,\ p)|^2$ 作为z的函数，在域 D 的边界处趋于无穷，其中 $p \in D$固定，且 $K(z, w)$ 是该域的 Bergman核函数，满足 $D\ z, w \in D$。在更自然的假设下，他们还为此类双全纯等价映射证明了一个多维 Carath´eodory 定理。关于 Dong-Wong 结果的精确表述，

读者可参阅他们近期发表的论文 [DW1] [DW2]。我们对这一民间猜想在一般情形下的证明大不相同。证明的主要要素包括 Calabi 关于全纯映射的刚性性质 [Ca], 、对 Bergman核函数再生性质的精妙运用，以及多复变势理论中的深刻结果。在这里，伪凸性发挥着重要作用，因为我们需要 Pflug 和 Zwonek 的一个结果 [PZ]，该结果建立在 Ohsawa-Takegoshi 关于伪凸域上的 L^2-延拓定理之上。

此外，我们还研究了零曲率情形。最后一节中的一个结果表述如下：

定理 1.5. 设 Ω 是一个复维数为 n 的复流形。假设其 Bergman空间 $A^2(\Omega)$ 无基点且能分离全纯方向。假设 Ω 的 Bergman度量具有零常全纯截面曲率。那么 Ω 双全纯于 $\mathbb{C}^n$ 中的一个域 D，其 Bergman空间具有如下形式的标准正交基 $\{\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\phi\}_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^n}$，其中 $\mathbb{N}_0$ 是非负整数的集合，$\phi \in A^2(D)$，且 $\phi \neq 0$ 和 $\|\phi\| = 1$。

附录中，John Treuer 证明了以下结果：

定理 1.6. 不存在这样的域 $D \subset \mathbb{C}^n$，使得其 Bergman空间 $A^2(D)$ 具有如下形式的标准正交基 $\{\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\phi\}_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^n}$，其中 $\phi \in A^2(D)$，且 $\phi \neq 0$ 和 $\|\phi\| = 1$。

结合以上结果，可以立即得到以下结论：

推论 1.7. 设 Ω 是一个复维数为 n 的复流形。假设其 Bergman空间 $A^2(\Omega)$ 无基点，且能区分全纯方向。那么其 Bergman度量不可能具有零常全纯截面曲率。

然而，与推论 1.7 相反，我们将构造一个位于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中、具有 $n \geq 1$ 的伪凸域，其中包含一个复全测地嵌入的复欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$，且该空间配备标准平坦欧几里得度量。因此，沿着这样的复子流形，Bergman度量是平坦的。

由于我们关注与复空间形式局部等距的伯格曼度量，刚性与全纯映射的整体延拓自然成为我们研究中的议题。E. Calabi 在著名论文 [Ca] 中首次研究了局部等距全纯映射的刚性与延拓；更一般地，也研究了像包含于某个真实解析子簇中的全纯嵌入。过去几十年来，从 CR子流形到真解析子簇的全纯映射得到了广泛研究，并在数学的其他领域中找到了重要应用。沿着这一研究方向，我们提及 Mok 的工作

见 [Mo1] [Mo2], Lamel-Mir [LN], Mir-Zaitsev [NZ], Kossovskiy-Lamel-Stolovitch [KLS], Lamel-Mir- Rond [LNR], , 以及其中的许多参考文献。关于 Bergman核、伯格曼度量及相关主题的其他研究，可参阅 Folland-Kohn [FK], Diederich-Fornaess [DF],Ohsawa [Oh], Ebenfelt-Xiao-Xu [EXX], Li [Li], Gaussier-Zimmer [GZ], 等文献，此处仅举数例。

本文组织如下。第 2 节介绍一些基本记号和定义。第 3 节首先给出一个 $\mathbb{C}^2$ 中的 Reinhardt域，其 Bergman度量具有常全纯截面曲率 2。随后证明定理 1.1。第 4 节证明定理 1.3。第 5 节给出定理 1.5 的证明。第 6 节提出一个与本文工作相关的猜想。附录中，Treuer 将给出定理 1.6 的证明。

致谢：作者感谢 D. Zaitsev 对本文提出的诸多建议。作者还感谢 N. Mok 和 M. Xiao 在准备本文期间进行的有益交流。

2 记号和定义

Let

$$\ell^2 = \{a = (a_1, \cdots, a_m, \cdots) : \ \|a\|^2 := \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty, \ a_j \in \mathbb{C}\}$$

是配备上述标准 ℓ^2-范数 $\|\cdot\|$ 的 Hilbert 空间。

设 M 是一个维数为 n的复流形。（本文中，所有复流形都假设为连通的。）若映射 $F = (f_1, \cdots, f_n, \cdots) : M \to \ell^2$ 满足：每个 $f_j (j \in \mathbb{N})$ 都是 M 上的全纯函数，并且 $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^2$ 在 M的任意紧子集上一致收敛，则称其为全纯映射。我们将 $F(M)$ 在 ℓ^2中的线性张成的闭包记为 X_F。显然， X_F由 F 在任意点 $p \in M$处的芽唯一确定。

定义无限维射影空间 $\mathbb{P}^\infty := \ell^2 \setminus \{0\}/\sim$. 这里，对于任意给定的 $x, y \in \ell^2 \setminus \{0\}$, $x \sim y$ 当且仅当 $x = ky$ 对某个 $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 成立。对于 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2 \setminus \{0\}$，我们将其在 $\mathbb{P}^\infty$中的等价类记为 $[x_1, \cdots, x_n, \cdots]$，称为 x的等价类的齐次坐标。通过在 $\mathbb{P}^m$的齐次坐标中补零， $\mathbb{P}^m$ 自然地识别为 $\mathbb{P}^\infty$ 的一个闭子空间。

映射 $\mathcal{F} : M \to \mathbb{P}^\infty$ 称为从 M 到 $\mathbb{P}^\infty$ 的全纯映射，如果在每个 $p \in M$附近都有 $\mathcal{F}$的局部全纯表示 $[F]$。也就是说，对于每个 $p \in M$，在 M中存在 p的一个小邻域U_p，使得 $\mathcal{F} = [F]$，其中 f_j均满足 $j \in \mathbb{N}$，是关于 U_p 的全纯函数；并且对于每个 $q \in U_p$，存在一个 k（它可能取决于 q），使得 $f_k(q) \neq 0$。此外，还要求 $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^2$ 在紧子集上一致收敛

U_p。对于任意局部全纯表示 F，我们将闭线性子空间 $X_F \subset \ell^2$的射影化记作 $\mathcal{X}_{\mathcal{F}} = [X_F] \subset \mathbb{P}^n$。$\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ 与局部全纯表示的选择无关。

具有齐次坐标 $[z_1, \cdots, z_n, \cdots]$的 $\mathbb{P}^\infty$ 的形式 Fubini-Study 度量，记为 ω_{st}，形式上定义为

$$\omega_{st} = i\partial\overline{\partial} \log \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 \Big). \tag{2.1}$$

Let

$$\mathcal{F} : \ (M, \omega) \to (\mathbb{P}^\infty, \omega_{st}) \tag{2.2}$$

是一个全纯映射，其中 ω 是 M 上的 K¨ahler 度量。若对任意局部全纯表示 $\mathcal{F} = [f_1, \cdots, f_n, \cdots]$（定义在 $U \subset M$ 上），都有

$$\omega = \mathcal{F}^*(\omega_{st}) := i\partial\overline{\partial} \log \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^2 \Big) \quad \text{over } U, \tag{2.3}$$

我们称 $\mathcal{F}$ 是从 M 到 $\mathbb{P}^\infty$ 的局部全纯等距嵌入。

设 Ω 是一个复维数为 $n \geq 1$ 的复流形。用 Λ^n(Ω) 表示 Ω 上全纯 (n,0)-形式的空间，并定义 Ω 的 Bergman 空间为

$$A^2(\Omega) := \Big\{ f \in \Lambda^n(\Omega) : (-1)^{\frac{n^2}{2}} \int_\Omega f \wedge \overline{f} < \infty \Big\}. \tag{2.4}$$

那么 A^2(Ω) 是一个 Hilbert 空间，其内积定义如下:

$$(f, g) = (-1)^{\frac{n^2}{2}} \int_\Omega f \wedge \overline{g}, \quad \text{for all } f, g \in A^2(\Omega). \tag{2.5}$$

假设 A^2(Ω) $\neq 0$。设 $\{f_j\}_1^N$ 是 A^2(Ω) 的一组标准正交基，且 $N \leq \infty$，并将 Bergman (n, n)-形式核 [Ko] 定义为 $K_\Omega = \sum_{j=1}^N f_j \wedge \overline{f}_j$。在 Ω 上的局部全纯坐标图 (U, z) 中，我们有

$$K_\Omega = K_\Omega(z, \overline{z}) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n \ \text{ in } \ U. \tag{2.6}$$

在本文中，我们假设 A^2(Ω) 是无基点的，其含义是 $K_\Omega(z) = K_\Omega(z, z) >$0 在 Ω 上成立。等价地，我们假设对任意 $p \in M$，存在一个 L^2-可积的全纯 n-形式 ϕ，使得 $\phi(p) \neq 0$。我们在 Ω 上定义一个 Hermitian (1, 1)-形式: $\omega_\Omega = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\ K_\Omega(z, \overline{z})$。如果它在 Ω 上诱导出一个正定张量，我们就称 ω_Ω 为 Ω 上的 Bergman度量。

当 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个域时，我们将一个全纯 n-形式 $\omega = f dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 与全纯函数 $f \in L^2(\Omega)$ 等同。因此， $A^2(\Omega)$ 化为由 L^2-可积全纯函数构成的 Hilbert 空间，这就是经典定义的 Bergman空间。此时，Bergman核函数是 Ω 上的一个实解析函数。

我们称 $A^2(\Omega)$ 能分离全纯方向，如果对于任意 $p \in M$ 和非零的 $X_p \in T_p^{(1,0)}$，存在一个 $\phi \in A^2(\Omega)$，使得在 p 附近的局部全纯坐标图中， $\phi(p) = 0$ 且 $X_p(\phi)(p) \neq 0$ ；其中 ϕ 如上所述，被视为 p 附近的一个全纯函数。

假设 Bergman空间 $A^2(\Omega)$ 无基点。对于一个正交归一基 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$，我们便有一个定义良好的全纯映射 $\mathcal{B} := [\phi_1, \cdots, \phi_N, 0, \cdots]$（当 $N < \infty$ 时），或者 $\mathcal{B} := [\phi_1, \cdots, \phi_m, \cdots]$（当 $N = \infty$ 时），它将 Ω 映入 $\mathbb{P}^\infty$。 $\mathcal{B}$ 称为 Bergman-Bochner映射。我们称 $A^2(\Omega)$ 能分离点，如果 Bergman-Bochner映射 $\mathcal{B} : \Omega \to \mathbb{P}^\infty$ 是单射。稍后我们将看到，在本文所关注的情形中，分离点这一性质是分离全纯方向且无基点的结果。

$\mathbb{C}^n$ 中的有界域是复流形的典型例子，其 Bergman空间满足上述三个条件：无基点、分离点并分离全纯方向。

Kobayashi [Ko] 证明，对于复流形而言，其 Bergman空间$A^2(\Omega)$无基点且能分离全纯方向，这一假设是 Ω 的 Bergman (1,1)-形式给出双全纯不变的 K¨ahler 度量的充要条件；这种度量称为 Ω 的 Bergman 度量。

3 具有正的常数全纯截面曲率的 Bergman度量

本节研究是否存在 Bergman度量具有常全纯截面曲率（HSC）的复流形。

我们先来看下面这个令人惊讶的例子，它表明域的 Bergman度量确实可能具有正的常数全纯截面曲率 2，这是允许的最大值。

令 $\alpha > 2$ ，并定义完备 Reinhardt 域 $D(\alpha)$ 如下：

$$D(\alpha) = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \left||w|^2 - |z|^2\right| < r(z,w)^{-\alpha}\right\}, \quad r(z,w) = 1 + |z|^2 + |w|^2. \tag{3.1}$$

定理3.1. 对于 $2 < \alpha < 3$，以下陈述成立：

(i) Bergman空间

$$A^2(D(\alpha)) = Span\{1, z, w\}. \tag{3.2}$$

(ii) $D(\alpha)$ 的 Bergman度量具有常全纯截面曲率 2.

证明。根据 $D = D(\alpha)$ 的定义，可以很容易看出

$$\int_D dv(z,w) \lesssim \int_D |z|^2 dv(z,w).$$

这里我们用 dv 表示相应的 Lebesgue测度。

为了证明 $1, z \in A^2(D(\alpha))$，只需计算

$$\begin{aligned}
\int_D |z|^2 dv(z,w) &= \int_{\mathbb{C}} dv(z) \int_{|z|^2 - r(z,w)^{-\alpha} < |w|^2 < |z|^2 + r(z,w)^{-\alpha}} |z|^2 dv(w) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{C}} |z|^2 dv(z) \int_{|z|^2 - r(z,0)^{-\alpha} < |w|^2 < |z|^2 + r(z,0)^{-\alpha}} dv(w) \\
&= 2\pi^2 \int_0^\infty |z|^2 \Big(|z|^2 + r(z,0)^{-\alpha} - (|z|^2 - r(z,0)^{-\alpha}) \Big) |z| d|z| \\
&= 4\pi^2 \int_0^\infty |z|^3 r(z,0)^{-\alpha} d|z| \\
&= 2\pi^2 \int_0^\infty r(1+r)^{-\alpha} dr \\
&< 2\pi^2 \int_0^\infty (1+r)^{-\alpha+1} dr \\
&= \frac{2\pi^2}{\alpha - 2}.
\end{aligned}$$

因此，若 $\alpha \in (2, 3)$，由关于 z 和 w 变量的对称性可得 $\{1, z, w\} \in A^2(D)$。接下来我们断言，若对于 $2 < \alpha < 3$ 有 $p + q \geq 2$，则 $z^p w^q \notin A^2(D)$。事实上，

$$\int_{D(\alpha)} |z^p w^q|^2 dv(z,w) \gtrsim \int_{D(\alpha)} |z^{2(p+q)}| dv(z,w) \gtrsim \int_0^\infty r^{p+q} (1+r)^{-\alpha} dr = +\infty.$$

由于 $D(\alpha)$ 是一个完备 Reinhardt 域， L^2-可积单项式构成 $A^2(D(\alpha))$ 的正交基。因此，

$$A^2(D) = \mathrm{Span}\{1, z, w\}.$$

此外，由对称性，$\|w\|_{A^2(D(\alpha))} = \|z\|_{A^2(D(\alpha))}$。

$D(\alpha)$的Bergman核函数因此可写为

$$K(z,w) = c_0(1 + c_1|z|^2 + c_1|w|^2) \quad \text{for } (z,w) \in D(\alpha),$$

其中 $c_0 = 1/v(D(\alpha))$和 $c_1 = (c_0 \int_{D(\alpha)} |z|^2 dv)^{-1}$ 是仅依赖于 α的正实常数。由于它与限制在胞腔 $\mathbb{C}^2$ 中的域上的 $\mathbb{P}^2$ 的Fubini-Study度量等距，且

$$\omega_{st} = \partial\overline{\partial}\log(1 + |z'|^2 + |w'|^2), \text{ through the scaling } (z', w') = (\sqrt{c_1}z, \sqrt{c_1}w)$$

Berg man度量 $D(\alpha)$ 具有等于 2 的常全纯截面曲率。

□

注意， $D(\alpha)$ 是无界的，而 $A^2(D(\alpha))$ 的维数为三。另一方面，我们有定理 1.1，现为方便读者重述如下:

定理3.2. 设 Ω 是一个维数为 n 的复流形。假设其 Bergman空间 $A^2(\Omega)$ 是无基点的，并且能分离全纯方向。假设 Ω 的 Bergman度量具有正的常数全纯截面曲率。那么 $A^2(\Omega)$ 是有限维的。此外，Ω 双全纯于 $\mathbb{P}^n$ 中的一个域。

定理3.2的证明. 设 Ω 是一个复流形，其 Bergman度量定义良好且具有正的常数全纯截面曲率。在局部全纯坐标图 (U, z) 中， $z(p) = 0$ 对于某个 $p \in U$。为简化记号，仍将 U 记作 $z(U)$。于是根据 Bochner 的一个结果（见 [Bo] 或 [He]），存在一个小邻域，仍记为 U，它是 $0 \in \Omega$ 的邻域，以及一个双全纯映射 $F = [1, F^o]$，将 U映射到 $V \subset \mathbb{P}^n$ 的一个邻域 $[1, 0, \cdots, 0]$，满足 $F^o(0) = (z_1, \cdots, z_n)A + o(|z|^2)$，其中 A是一个 $n \times n$ 常数矩阵，且 $\det(A) \neq 0$，使得对于某个正实常数 λ， $\omega_\Omega = F^*(\lambda\omega_{st})$。这里我们用 $[1, z]$ 表示 V的坐标；而 ω_{st} 是 $\mathbb{P}^n$的 Fubini-Study度量。令 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ 为 $A^2(\Omega)$ 的一个标准正交基，并将 $\phi_j = \phi_j^o dz_1 \wedge \cdots dz_n$写在 U中。我们不妨设 $\phi_1^o(0) \neq 0$，且对于 $j > 1$，$\phi_j^o(0) = 0$。于是

$$i\partial\overline{\partial}\log\sum_{j=1}^N \left|\phi_j^o\right|^2 = i\partial\overline{\partial}\log(1 + |F^o|^2)^\lambda.$$

The应用一个标准技巧，上述内容给出了 z 在 0 附近的以下恒等式:

$$\sum_{j=2}^N \left|\frac{\phi_j^o}{\phi_1^o}\right|^2 = (1 + |F^o|^2)^\lambda.$$

现在我们断言， λ 是一个正整数。事实上，经过形如 $z' = F^o(z)$ 的全纯坐标变换，我们有 $(1 + |z'|^2)^\lambda = \sum_{j=2}^N \left|\frac{\phi_j^o}{\phi_1^o}((F^o)^{-1}(z'))\right|^2$. 如果 λ不是自然数，那么

$$(1 + |z'|^2)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda \cdots (\lambda - k + 1)}{k!}|z'|^{2k}.$$

这意味着 $(1+|z'|^2)^\lambda$ 在 0 处的泰勒展开中某个系数为负，等价地，存在一个多重指标 α，使得 $\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha(1+|z'|^2)^\lambda|_0 < 0$。另一方面，$\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha \sum_{j=2}^N \left|\frac{\phi_j^o}{\phi_1^o}((F^o)^{-1}(z'))\right|^2(0) \geq 0$. 这就产生了矛盾。（类似的陈述另见 [HX1]。）

因此，$\lambda = m$ 是一个自然数。接下来，通过维罗纳映射 Ψ，当 N 足够大时，可以将 $(\mathbb{P}^n, m\omega_{st})$（一一等距地）嵌入到 $\mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}^\infty$ 中。在 $[1,0,\cdots,0]$ 附近的全纯坐标图中，我们可以写成 $\Psi[1,w_1,\cdots,w_n] = [1,w_1,\cdots,w_n,\psi(w)\ 0,\cdots]$。其中，$\psi$ 中的每个分量都是关于 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 的次数至少为 2 的某个单项式。

考虑从 U 到 $\mathbb{P}^\infty$ 的全纯映射 $\Psi\circ F$。于是，$(\Psi\circ F)^*(\omega_{st}) = \omega_\Omega$ 在 U 上。根据 Calabi 延拓定理（[Ca] 或 [HLi]），$\Psi\circ F = [1, F^o, \psi(F^o)\ 0, \cdots]$ 可以沿着 Ω 中从 U 出发的任意曲线全纯延拓。特别地，很容易看出，F 可以沿着 Ω 中从 U 出发的任意路径全纯延拓。

根据 Calabi 刚性定理（[Ca] or [HLi]），存在一个单射等距变换（其逆映射也是等距变换）$[L]: \mathcal{X}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{X}_{\Psi\circ\mathcal{F}}$，使得

$$(\Psi\circ F)(z) = [L]\circ\mathcal{B}(z), \quad z\in U.$$

这里，$[L]$ 由从闭线性子空间$X_{(1,F^o,\psi(F^o)0,\cdots)}\subset \ell^2$到 $X_{(\phi_1,\phi_2,\cdots)}\subset\ell^2$的单射线性等距同构 L 诱导。回想一下，F沿着 Ω 中任意一条以 z_0为起点的曲线全纯地且等距地延拓。延拓后的映射 F 先验地可能是多值的。然而，由于Ψ 是单射且 $\mathcal{B}$ 在 Ω 上全局定义，我们看到 $\Psi\circ F$的延拓与所选曲线无关，因此给出了一个从 $(\Omega\ \omega_\Omega)$ 到 $\mathbb{P}^\infty$的良定义单射全纯等距映射。由于 Ψ 是单射全纯等距嵌入，我们得出结论：F 延拓为从 $(\Omega\ \omega_\Omega)$ 到其像 $D\subset\mathbb{P}^n$的全纯局部等距映射。接下来有如下结论

引理 3.3. 假设复流形 Ω 的 Bergman度量局部全纯等距于带有 $m\in\mathbb{N}$ 的模型 $(\mathbb{P}^n, m\omega_{st})$。那么 Ω 的 Bergman-Bochner映射 $\mathcal{B}_\Omega$ 能分离 Ω 中的点。

引理 3.3 的证明。假设 $\mathcal{B}_\Omega$ 不能分离点。于是我们可以找到 p、$p^*\in\Omega$，使得 $p\neq p^*$，但 $\mathcal{B}_\Omega(p) = \mathcal{B}_\Omega(p^*)$。设 $\gamma\subset\Omega$ 是一条连接 p 与 p^* 的光滑 Jordan 曲线，并设$U\Subset\Omega$ 是 $\gamma([0,1])$ 的一个邻域。于是，我们可以找到一个仅依赖于 U 的充分小的正实常数 $\delta_0>0$，使得对于任意 $p\in U$、$q\in\mathbb{P}^n$ $v\in T(1,0)_p\Omega$ $\widetilde{v}\in T_q^{(1,0)}\mathbb{P}^n$，存在唯一的等距双全纯同构 Φ_p，它将以 p 为中心、半径为 $2\delta_0$、关于度量 ω_Ω 的球 $B_{2\delta_0}(p)$ 映射到以 q 为中心、半径为 $2\delta_0$、关于度量 $m\omega_{st}$ 的球 $B_{2\delta_0}(q)$，并且满足 $\Phi_p(p) = q$ 以及 $(\Phi_p)_*(v) = \widetilde{v}$。

记 p 为 p_1，固定 $v_1 \in T(1,0)_{p_1}\Omega$ 和 $\widetilde{v_1} \in T^{(1,0)}_{q_1}\mathbb{P}^n$，满足 $q_1 = [1, 0, \cdots, 0]$，并令 Φ_1 使得从 $B_{2\delta_0}(p_1)$ 到 $B_{2\delta_0}(q_1)$ 的等距双全纯同构 $\widetilde{}$ 满足 $\Phi_1(p) = q_1$ 且 $(\Phi_1)_*(v_1) = \widetilde{v_1}$。令 t_1 为满足 $\gamma(t_1) \in \partial B_{\delta_0}(p_1)$ 的最小 t。令 $p_2 = \gamma(t_1)$、$q_2 = \Phi_1(p_2)$、$v_2 \in T(1,0)_{p_2}\Omega$，并令 $\widetilde{v_2} = (\Phi_1)_*(v_2)$。如上所述定义等距双全纯同构 Φ_2，使得 $\Phi_2(p_2) = q_2$ 且 $(\Phi_2)_*(v_2) = \widetilde{v_2}$。注意，根据等距映射的唯一性，$B_{2\delta_0}(p_1)$ 中的 $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \cap B_{2\delta_0}(p_2)$。继续这一过程，我们可以找到一个有限的全纯元素序列 $\{B_{2\delta_0}(p_j)\ \Phi_j\}_{j=1}^{n^*}$，满足 $p_{n^*} = p^*$，并且

$$n^* \leq \frac{\text{length of } \gamma([0,1])}{\delta_0}$$

使得 $\Phi_k \equiv \Phi_{k+1}$ 在 $B_{2\delta_0}(p_k) \cap B_{2\delta_0}(p_{k+1})$ 中，其中 $k = 1, \cdots, n^* - 1$。

记 $q_j = \Phi_j(p_j)$。则 $\{\Phi_j^{-1}, \widetilde{B}_{2\delta_0}(q_j)\}_{j=1}^{n^*}$ 沿着 $\widetilde{g} = F(\gamma)$，将全纯元素 $(\Phi_1^{-1}, \widetilde{B}_{2\delta_0}(q_1))$ 全纯延拓至 $(\Phi_{n^*}^{-1}, \widetilde{B}_{q_{n^*}}(2\delta_0))$。根据 Calabi 刚性定理，我们有$\mathcal{B}_\Omega \circ \Phi_1^{-1} = [\widetilde{L}] \circ \Psi$ 在 $\widetilde{B}_{q_1}(2\delta_0)$ 中，其中 $[\widetilde{L}]$ 由某个等距同构 $\widetilde{L}$ 诱导；该等距同构将 ℓ_2 的某个闭子空间映入另一个闭子空间，具体如前所述。补充Ψ的定义。根据 Calabi 延拓定理，或者仅凭全纯映射的唯一性，我们还得到 $\mathcal{B}_\Omega \circ \Phi_{n^*}^{-1} = [\widetilde{L}] \circ \Psi$ 在 $\widetilde{B}_{2\delta_0}(q_{n^*})$ 上。注意到 $\Phi_1^{-1}(q_1) = p, \Phi_{n^*}^{-1}(q_{n^*}) = p^*$ 以及 $q_1 = q_{n^*}$，这与 Ψ 是单射这一事实矛盾。引理得证。

□

我们继续证明该定理。引理 3.3 的一个直接推论是，按上述方式构造的映射 F 是单射，因为

$$(\Psi \circ F)(z) = [L] \circ \mathcal{B}(z), \quad z \in U.$$

恒等式中的另外三个映射也是单射。因此，F 是从 Ω 到其像 $D \subset \mathbb{P}^n$ 的双全纯映射。

接下来令 $E = F^{-1}\{[0, z_1, \cdots, z_n] \in D\}$，并用 $\Omega \setminus E$ 代替 Ω 来考虑，我们可以假设 D 是 $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ 中一个包含原点的域。

由于 Ω 的任意真复解析子簇都是 $A^2(\Omega)$ 的可去集，因此对于原来的 Ω，$A^2(D)$ 与 $A^2(\Omega)$ 是典范同构的。为简化记号，我们仍用 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ 表示 Bergman空间 $A^2(D)$ 的一个标准正交基，其中 $\phi_1(0) > 0$ 且 $\phi_j(0) = 0$，对 $j \geq 2$ 成立。注意，$K_D(z, w) = \sum_{j=1}^N \phi_j(z)\phi_j(w)$，且 $K_D(z, 0) = \phi_1(0)\phi_1(z)$。因此，利用方程 $\omega_D = m\omega_{st}$，我们类似地推导出以下结果：

$$\sum_{j=1}^{N} |\phi_j|^2 = K_D(z,z) = \frac{|K_D(z,0)|^2}{K_D(0,0)}(1 + |z|^2)^m = \sum_{j=1}^{N^*} |\psi_j|^2. \tag{3.3}$$

这里，$\psi_1, \cdots, \psi_{N^*}$ 是 D 中满足 $N^* < \infty$的某些全纯函数。

根据 D'Angelo 引理（见 [HLi]），可知每个 $\phi_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\psi_1, \cdots, \psi_{N^*}\}$。因此，$N \leq N^* < \infty$ 或 $A^2(\Omega)$ 是有限维的。定理得证。 □

我们以提出两个尚未解决的问题来结束本节。在定理 1.1 中，Ω 可能不是伪凸域。相反，我们假设 $A^2(\Omega)$ 是无限维的。那么，一个自然的问题是：能否用 Ω 的 Stein 性来替代这一假设？更确切地说，我们提出如下猜想：

猜想 3.4. 设 M 是一个 Stein 流形。假设其 Bergman空间 $A^2(M)$ 是无基点的，并且能分离全纯方向。那么， M 的 Bergman度量 不可能具有正的常数全纯截面曲率。

根据 Carleson 和 Wiegerinck 的工作 [Wi]，已知 $\mathbb{C}$ 中的一个域要么具有平凡的 Bergman空间，要么具有无限维的 Bergman空间。Wiegerinck [Wi] 还提出了一个可追溯至很久以前的猜想，断言 $\mathbb{C}^n$中的伪凸域的 Bergman空间同样要么是平凡的，要么是无限维的。（参见 [JP] [Ju] [GGV] 中的工作及其中的参考文献。）如果这一古老的民间猜想得以证实，那么根据定理 1.1，一个直接推论便是对猜想 3.4 的肯定回答。更一般地，我们提出如下问题：

猜想 3.5. 设 M 是复维数至少为二的 Stein 流形。假设其 Bergman空间 $A^2(M)$ 无基点，且能分离全纯方向。那么 M 的Bergman度量不可能具有下界为正实常数的全纯截面曲率。

4 具有负常数全纯截面曲率的 Stein 流形的Bergman度量

众所周知，每个具有完备 Bergman 度量的域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 都是伪凸的 [Bre]。反之则不成立。一个简单的例子是形如 $\mathbb{B}_n \setminus V$的域，其中 V是 $\mathbb{B}_n$中的一个非空纯余维一复解析簇。更一般地，设 $V \neq \emptyset$ 是 Ω 中的一个闭极多极集，也就是说，对于任意点 $p \in V$，都存在 U_p 的一个邻域 p，以及定义在 U_p 上的非恒定多重次调和函数 ρ_p，使得 $U_p \cap E \subset \{z \in U_p : \rho_p(z) = -\infty\}$。那么，$A^2(\Omega \setminus V)$ 自然地与 $A^2(\Omega)$ 等同，因为任何闭极多极集都是 $A^2(\Omega)$ 的可去集。若 Bergman 度量 $\omega_{\Omega\setminus V}$ 具有负的常数全纯截面曲率，则 Bergman 度量 ω_Ω也具有同样的性质。因此，当 ω_Ω 完备时，根据经典的 Lu 定理（[Lu]），存在

一个从 Ω 到 $\mathbb{B}^n$的双全纯映射 F，其在 $\Omega \setminus V$上的限制给出从 $(\Omega \setminus V, \omega_{\Omega\setminus V})$ 到 $(\mathbb{B}_n \setminus V^0, \omega_{\mathbb{B}_n\setminus V^0})$ 的双全纯等距映射，其中 $V^0 = F(V)$ 是 $\mathbb{B}^n$ 中的一个多极子集。注意，$(\mathbb{B}^n \setminus V^0, \omega_{\mathbb{B}^n\setminus V^0})$ 沿 V^0 是不完备的。

因此，我们有许多伪凸域，其 Bergman度量具有负的常数全纯截面曲率。本节将证明这些是仅有的例子，也就是说，我们将证明定理 1.3。正如引言中所提到的，该定理的特殊情形此前已在 Dong-Wong [DW1] [DW2]的工作中用不同的方法证明。为方便读者，我们将定理 1.3 重述如下:

定理 4.1. 设 Ω 是一个复维数为 $n \geq 1$ 的 Stein 流形。假设其 Bergman空间无基点，且能分离全纯方向。那么，Ω 的 Bergman度量具有负的常数全纯截面曲率，当且仅当存在一个从 Ω 到 $\mathbb{B}^n \setminus E$ 的双全纯映射 F，其中 E 是 $\mathbb{B}^n$ 的闭极多极集。

定理 4.1 的证明。设 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ 是 $A^2(\Omega)$ 的一组标准正交基。在定理的假设下，相应的 Bergman-Bochner映射 $\mathcal{F}$ 是从 Ω 到 $\mathbb{P}^\infty$ 的局部全纯等距嵌入。这里，当 $N < \infty$ 或 $F = (\phi_1, \cdots, \phi_m, \cdots)$ 时，$F = (\phi_1, \cdots, \phi_N, 0, \cdots)$。此外，$\mathcal{F} = [F]$.

假设 ω_Ω 在 Ω 上的全纯截面曲率为负常数。那么对于任意 $p \in \Omega$，存在一个双全纯映射 f，将 $p \in \Omega$ 的一个小邻域 U 映入单位球 $\mathbb{B}^n$ 中某个特定的域 $\mathbb{C}^n$，使得 $f^*(\lambda\omega_{\mathbb{B}^n}) = \omega_\Omega$.。这里，$\lambda > 0$是一个取决于 $(\Omega\ \omega_\Omega)$ 的全纯截面曲率的正实常数，而 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 是 $\mathbb{B}^n$的 Bergman度量。

注意，$\mathbb{B}^n$ 的 Bergman度量由 $\omega_{\mathbb{B}^n} = -(n+1)i\partial\overline{\partial}\log(1-|w|^2)$ 给出，其中 $w = (w_1, \cdots, w_n)$ 是 $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$. 的坐标。我们使用 $(1-x)^{-\mu}$ 在 $\{x \in \mathbb{R}$ 上于 $x = 0$ 处的泰勒展开，其中 $\mu = (n+1)\lambda : |x| < 1\}$，得到

$$(1-|w|^2)^{-\mu} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+k-1)}{k!}|w|^{2k}.$$

右侧在 $\mathbb{B}^n$. 的紧子集上一致收敛。这表明，对于 w 中某个单项式序列 $\{P_j\}_{j=1}^\infty$，有 $(1-|w|^2)^{-\mu} = 1 + \sum_{j=1}^\infty |P_j(w)|^2$，它在 $\mathbb{B}^n$. 的紧子集上一致收敛。由此得到一个自然的全纯等距嵌入 $\mathcal{T} = [T] = [1, P_1, \cdots, P_j, \cdots]$，从 $(X_0, \mu\omega_{\mathbb{B}^n})$ 映射到 $\mathbb{P}^\infty$.。显然，$\mathcal{T}$ 是单射，因为对于 $1 \leq j \leq n$，每个 w_j（带有适当的系数）都属于这些 P_j'。

现在，$\mathcal{T} \circ f : U \to \mathbb{P}^\infty$ 是一个一一对应的全纯等距嵌入。根据 Calabi 刚性定理（[Ca] 或 [HLi]），存在一个一一对应的等距同构 $[L] : \mathcal{X}_\mathcal{F} \to \mathcal{X}_\mathcal{T} = \mathbb{P}^\infty$，使得

that

$$[L]\circ\mathcal{F}(z)=\mathcal{T}\circ f(z),\quad z\in U.$$

注意， $[L]$ 由线性等距同构 T 诱导，该同构将闭线性子空间 X_F映到 X_T。根据 Calabi 延拓定理（[Ca] 或 [HLi]）， $\mathcal{T}\circ f$ 可沿着 Ω 中从 $z_0\in U$ 出发的任意曲线延拓为局部全纯等距嵌入。由于每个w_j 至多相差一个系数，都是 $\mathcal{T}$中的一个分量，因此我们看到， f 可沿着 Ω 中从$\sim$ $\sim z_0$ 出发的任意曲线，全纯且等距地延拓至 f。 f 先验上可能是多值的。由于归一化的 Bergman度量 $\lambda\omega_{\mathbb{B}^n}$ 是完备的，

$\sim$ $\sim f$的像包含在 $\mathbb{B}^n$中。根据全纯函数的唯一性，对于从 z_0出发沿曲线延拓得到的任意映射 f ，都有 $[L]\circ\mathcal{F}(z)=\mathcal{T}\circ f$。通过与$\widetilde{\ }$引理 3.3中完全类似的论证可知， $\mathcal{F}$ 是一一对应的。由于 $\mathcal{T}$是一一对应的，我们看到 f 与所选曲线无关，因此给出了一个从 $(\Omega\ \omega_\Omega)$ 到$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$($\mathbb{B}^n,\lambda\omega_{\mathbb{B}^n}$)中的良定义的单射局部全纯等距映射。根据实解析函数的唯一性， $f^*(\lambda\omega_{\mathbb{B}^n})=\omega_\Omega$。特别地， $D=f(\Omega)$ 是 $\mathbb{B}^n$的一个子域。注意，Bergman度量是双全纯不变量。由此得到如下结论：

$\widetilde{\ }$存在双全纯映射 $f\colon(\ \omega_\Omega)\to(D,\lambda\omega_{\mathbb{B}^n})$，其中 D是 $\mathbb{B}^n$ 中的某个域，使得$\widetilde{\ }$ $f^*(\lambda\omega_{\mathbb{B}^n})=\omega_\Omega$某个正实常数 λ。此外， $\omega_D=\lambda\omega_{\mathbb{B}^n}|_D$在 D上。

仍记 ω_D为 D的Bergman度量。由于Bergman度量在双全纯映射下保持不变，对 $\mathbb{B}^n$应用一个自同构，我们不妨设 $0\in D$。为简化记号，现记 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$为 $A^2(D)$的一个标准正交基，其中 $\phi_1(0)>0$且对于 $j\geq 2$， $\phi_j(0)=0$。由于$K_D(z,w)=\sum_{j=1}^\infty\phi_j(z)\overline{\phi_j(w)}$，我们得到 $K_D(z,0)=\phi_1(0)\overline{\phi_1(z)}$。

由于 $\omega_D=\lambda\omega_{\mathbb{B}^n}$ 在 D上，我们类似地有

$$\log K_D(z,z)-\log|\phi_1(z)|^2=\log\left(K_{\mathbb{B}^n}(z,z)\right)^\lambda\text{ for }z\in D.\tag{4.1}$$

因此

$$K_D(z,w)=|\phi_1(z)|^2K^\lambda_{\mathbb{B}^n}(z,w)\quad z,w\in D.\tag{4.2}$$

因此

$$K_D(z,w)=cK_D(z,0)K_D(0,w)K^\lambda_{\mathbb{B}^n}(z,w)\ \text{ with }\ c=\frac{1}{\phi_1^2(0)}=\frac{1}{K_D(0,0)}.\tag{4.3}$$

对于任意元素 $h\in A^2(D)$，有

$$h(z)=cK_D(z,0)\int_D K^\lambda_{\mathbb{B}^n}(z,w)K_D(0,w)h(w)dv(w).$$

和之前一样，我们用 $dv(w)$ 表示带有坐标 w 的 $\mathbb{C}^n$ 的勒贝格测度。特别地，

$$1=cK_D(z,0)\int_D K^\lambda_{\mathbb{B}^n}(z,w)K_D(0,w)dv(w).$$

因此

$$\frac{1}{K_D(z,0)} = c\int_D K^{\lambda}_{\mathbb{B}^n}(z,w)K_D(0,w)dv(w)$$

全纯地延拓到 $\mathbb{B}^n$，因为 $K^{\lambda}_{\mathbb{B}^n}(z,w)$ 是 $\overline{\mathbb{B}^n}$ 上关于 w的反全纯函数，在 $z\in\mathbb{B}_n$ 上全纯，并且对于任意固定的 $z\in\mathbb{B}^n$，$K^{\lambda}_{\mathbb{B}^n}(z,w)$ 在 $w\in\mathbb{B}^n$ 上有界。

设 $f_0(z)=\frac{1}{K_D(z,0)}$。则 $f_0(z)$ 关于 $\mathbb{B}_n$ 是全纯的，且 $f_0(z)\not\equiv 0$。设 $Z(f_0)=\{z\in\mathbb{B}^n: f_0(z)=0\}$。则对于任意 $h\in A^2(D)$，有

$$h(z) = cK_D(z,0)\int_D K^{\lambda}_{\mathbb{B}^n}(z,w)K_D(0,w)h(w)dv(w) \tag{4.4}$$

延拓后成为 $\mathbb{B}^n\setminus Z(f_0)$ 中的全纯函数。

写成 $\partial D\cap\mathbb{B}^n = L_1\cup L_2$，其中 $L_1=\partial D\cap Z(f_0)$ 且 $L_2=\partial D\cap\mathbb{B}^n\setminus Z(f_0)$。对于 $z_0\in L_2$，由（4.3）可得

$$\lim\sup_{z\in D, z\to z_0} K_D(z_0,z_0)<\infty. \tag{4.5}$$

由于 D 是伪凸的，根据 Pflug 和 Zwonek 的一个结果（ [PZ]的引理 11），该结果基于一维经典结果和 Ohsawa-Takegoshi 延拓定理，对于每个 z_0，在 $\mathbb{B}^n\setminus L_1$中都存在 U_{z_0} 的一个邻域 z_0，使得 $P_{z_0}=U_{z_0}\setminus D$ 是一个多重极化集。由于 P_{z_0} 的豪斯多夫余维至少为二，$U_{z_0}\setminus P_{z_0}$ 是连通的。因此，$P_{z_0}=\partial D\cap U_{z_0}$ 且 $D\cap U_{z_0}=U_{z_0}\setminus P$。此外，$\overline{D}=\overline{\mathbb{B}^n}$。现在，根据 Josefson 定理 [Jo]，，存在一个多重次调和函数ρ 定义在 $\mathbb{C}^n$ 上，使得 $L_2\subset\{\rho=-\infty\}$。于是 E:
$=\partial D\cap\mathbb{B}^n\subset\{\rho+\log|k_D(z,0)|=-\infty\}$。也就是说，$\partial D\cap\mathbb{B}^n$ 是一个多重极化集。同样，由于（闭）多重极化集的豪斯多夫余维至少为二，$\mathbb{B}^n\setminus\partial D$ 是连通的；又因为假设 D 是连通的，所以 $\mathbb{B}^n\setminus\partial D$ 必定是 D。也就是说，$D=\mathbb{B}^n\setminus E$ 在 $\mathbb{B}^n$中相对闭，且 E。由于任何相对闭的多重极化集都是 L^2-可积全纯函数的可去集（引理 1, [Ir]），因此 D 的 Bergman度量就是 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 在 D上的限制。因此，$\lambda=1$。定理得证。

□

5 定理 1.5 的证明

定理 1.5 的证明。假设 $(\Omega\ \omega_\Omega)$ 满足定理中的条件。令 (U,z) 配备 $0\in z(U)$，构成一个全纯坐标图。（仍将 $z(U)$ 记作 U。）如有必要，缩小 U，则存在一个双全纯映射 F，将 U 映到 0 的一个邻域 $V\subset\mathbb{C}^n$，使得 $F(0)=0$ 且 $F^*(\omega_{eucl})=\omega_\Omega$，其中 $\omega_{eucl}=i\partial\overline{\partial}|z|^2$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的欧几里得度量。于是，依照前面的类似论证，我们得出 F 可延拓为从 Ω 到其像 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的双全纯映射，且 $F^*(\omega_{eucl})=\omega_\Omega$。因此

$$\omega_D=\omega_{eucl}=i\partial\overline{\partial}\log(e^{|z|^2}).$$

仍令 $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 Bergman空间 $A^2(D)$ 的标准正交基，满足对于 $j \geq 2$，有 $\phi_1(0) > 0$ 且 $\phi_j(0) = 0$。那么，与前面一样，$K_D(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)\phi_j(w)$，且 $\overline{K_D(z,0)} = \phi_1(0)\phi_1(z)$。因此我们有

$$K_D(z,z) = |\phi_1(z)|^2 e^{|z|^2} = \frac{|K_D(z,0)|^2}{K_D(0,0)} e^{|z|^2}. \tag{5.1}$$

因此，通过复化可得

$$K_D(z,w) = \frac{K_D(z,0)K_D(0,w)}{K_D(0,0)} e^{\langle z,w\rangle} = \phi_1(z)\overline{\phi_1(w)} e^{\langle z,w\rangle}, \quad \text{for } z,w \in D, \tag{5.2}$$

其中

$$\phi_1(z) = K_D(z,0)K_D(0,0)^{-1/2} \quad \text{for } z \in D. \tag{5.3}$$

由于 D 是开集且 $0 \in D$，存在一个 $r > 0$，使得半径为 r的闭球 $B(0,r) \subset D$。注意到

$$|z_j|^{2m} \leq C_m \sum_{k=0}^{5} e^{r\Re(e^{ik\pi/3} z_j)} \qquad \text{for } z \in D \text{ and } 1 \leq j \leq n \tag{5.4}$$

and

$$\int_D |e^{\langle z,w\rangle}\phi_1(w)|^2 dv(w) = \frac{1}{|\phi_1(z)|^2} \int_D |K_D(z,w)|^2 dv(w) = e^{|z|^2} \quad \text{for } z \in D. \tag{5.5}$$

由 (5.4) 和 (5.5) 可知

$$\int_D |w_j^m \phi_1(w)|^2 dv(w) \leq 6C_m e^{r^2} < \infty \quad \text{for any } 1 \leq j \leq n \text{ and } m \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

这表明，对每个多重指标 α，$w^\alpha \phi_1(w) \in A^2(D)$。因此，

$$z^\alpha \phi_1(z) = \int_D K_D(z,w) w^\alpha \phi_1(w) dv(w) = \phi_1(z) \int_D e^{\langle z,w\rangle} w^\alpha |\phi_1(w)|^2 dv(w).$$

特别地，

$$z^\alpha = \int_D e^{\langle z,w\rangle} w^\alpha |\phi_1(w)|^2 dv(w). \tag{5.7}$$

设 $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 D 中一个递增的光滑有界域序列，且 $\bigcup_k D_k = D$。记

$$J_k^\alpha(z) = \int_{D_k} e^{\langle z,w\rangle} w^\alpha |\phi_1(w)|^2 dv(w) \quad \text{and} \quad J^\alpha(z) = \int_D e^{\langle z,w\rangle} w^\alpha |\phi_1(w)|^2 dv(w) = z^\alpha.$$

注意到，根据 (5.5) 和 (5.6)，$\int_{D_k} |e^{\langle z,w\rangle} \overline{w}^\beta w^\alpha \phi_1(w)^2| dv(w)$ 关于 z 在 D的任意紧子集上是一致有界的；并且注意到 J_k^α 在 D中是全纯的。此外，根据 (5.7) 和勒贝格控制收敛定理，我们有

$$J_k^\alpha(z) \to \int_D e^{\langle z,w\rangle} w^\alpha |\phi_1(w)|^2 dv(w) = J^\alpha(z) = z^\alpha.$$

因此，如有必要可取子列，我们看到 $J_k^\alpha(z)$ 在 D中的紧子集上一致收敛到 z^α。由于 $\frac{\partial^{|\beta|}J_k^\alpha(z)}{\partial z^\beta} = \int_{D_k} e^{\langle z,w\rangle}\overline{w}^\beta w^\alpha|\phi_1(w)|^2 dv(w)$，我们有

$$\frac{\partial^{|\beta|}J^\alpha(z)}{\partial z^\beta} = \lim_{k\to\infty}\frac{\partial^{|\beta|}J_k^\alpha(z)}{\partial z^\beta}, \quad z\in D.$$

特别地，在 $z=0$ 处，有

$$\alpha!\delta_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^{|\beta|}z^\alpha}{\partial z^\beta}|_{z=0} = \frac{\partial^{|\beta|}J^\alpha(z)}{\partial z^\beta}|_{z=0} = \int_D \overline{w}^\beta w^\alpha|\phi_1(w)|^2 dv(w). \tag{5.8}$$

这表明 $\{\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\ \phi_1\}_{|\alpha|=0}^\infty$ 构成了 $A^2(D)$ 的一个正交归一集。注意，

$$\sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\frac{\overline{w}^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} = \sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{z^\alpha\overline{w}^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha_1=0}^\infty \frac{z_1^{\alpha_1}\overline{w}^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^\infty \frac{z_n^{\alpha_n}\overline{w}^{\alpha_n}}{\alpha_n!} = e^{\langle z,w\rangle}. \tag{5.9}$$

因此，

$$\sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\phi_1(z)\frac{\overline{w}^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\phi_1(w) = e^{\langle z,w\rangle}\phi_1(z)\phi_1(w) = K_D(z,w). \tag{5.10}$$

因此，$\{\frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\ \phi_1\}$ 构成了 $A^2(D)$ 和 $\phi_1\neq 0$ 的标准正交基。 □

我们指出，定理 1.5 的一个直接推论是：当 Ω 存在非平凡的有界全纯函数时，定理 1.5 中 Ω 的 Bergman度量不可能是平坦的。（参见本文早期版本，发布于 arXiv:2302.13456。）然而，在 John Treuer 提供的附录中，定理 1.5 与复矩理论的结果将表明，Ω 的 Bergman度量一般而言不可能是平坦的。

接下来我们构造一个无界的伪凸Hartogs域 $D\subset\mathbb{C}^{n+1}$，它包含 $(\mathbb{C}^n,\omega_{eucl})$ 的一个副本，作为 (D,ω_D) 的全测地复子流形。

设 D 为由下式定义的 Reinhardt 域和 Hartogs 域:

$$D = \{z=(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C} : |w|^2 < e^{-|z|^2}\}. \tag{5.11}$$

注意到，D是伪凸的，因为其定义函数 $\rho = 2\log|w|+|z|^2$在其边界上是多重次调和的。还要注意，$h(z,w)=w$ 是定义在D上的非常值有界全纯函数。接下来我们将证明，$(\mathbb{C}^n\times\{0\},\omega_{eucl})$是$(D,\omega_D)$的全测地子流形。也就是说，全纯嵌入 $\iota:(\mathbb{C}^n,\omega_{eucl})\to(D,\omega_D)$ 满足 $\iota(z)=(z,0)$，且是等距嵌入。此外，$\mathbb{C}^n\times\{0\}$ 在 D 中的第二基本形式恒为零，这等价于

根据高斯-科达齐方程，(D,ω_D)的全纯截面曲率沿着 $\mathbb{C}^n \times \{0\}$ 为零这一结论。

我们首先证明 Bergman空间 $A^2(D)$ 是无限维的，因为 $\{z^\alpha w^q\}_{\alpha\geq 0,\ q\geq 0}$ 构成 $A^2(D)$ 的正交基。为此，只需证明

$$\int_D |z^\alpha w^q|^2 dv = \frac{\pi^{n+1}}{(q+1)^{|\alpha|+n+1}}\alpha! < \infty, \tag{5.12}$$

由于 D 是一个完备 Reinhardt 域。事实上，

$$\begin{aligned}
\|z^\alpha w^q\|^2_{L^2} &= \int_D |z^\alpha|^2 |w|^{2q} dv \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 dv(z) \int_{|w|^2<e^{-|z|^2}} |w|^{2q} dv(w) \\
&= \pi \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 \frac{1}{q+1} e^{-(q+1)|z|^2} dv(z) \\
&= \frac{\pi}{(q+1)^{|\alpha|+n+1}} \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2} dv(z) \\
&= \frac{\pi^{n+1}}{(q+1)^{|\alpha|+n+1}} \prod_{j=1}^n \int_0^\infty r_j^{\alpha_j} e^{-r_j} dr_j \\
&= \frac{\pi^{n+1}}{(q+1)^{|\alpha|+n+1}} \alpha!.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

T因此， D 的对角伯格曼核函数 K 计算如下 :

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{|(\alpha,p)|=0}^\infty \frac{1}{\|z^\alpha w^p\|^2_{L^2(D)}} |z^\alpha|^2 |w|^{2p} \\
&= \frac{1}{\pi^{n+1}} \sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{|z^\alpha|^2}{\alpha!} \sum_{p=0}^\infty (p+1)^{|\alpha|+n+1} |w|^{2p} \\
&= \frac{1}{\pi^{n+1}} \sum_{p=0}^\infty (p+1)^{n+1} \sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{|z^\alpha|^2}{\alpha!} (p+1)^{|\alpha|} |w|^{2p} \\
&= \frac{1}{\pi^{n+1}} \sum_{p=0}^\infty (p+1)^{n+1} e^{(p+1)|z|^2} |w|^{2p} \\
&= \frac{e^{|z|^2}}{\pi^{n+1}} \sum_{p=0}^\infty (p+1)^{n+1} \left(e^{|z|^2}|w|^2\right)^p.
\end{aligned}$$

当 $n=1$时，

$$(x(\frac{x}{1-x})')'=\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2x^p$$

因此

$$K=\frac{e^{\|z\|^2}}{\pi^2}\frac{1+e^{|z|^2}|w|^2}{(1-e^{|z|^2}|w|^2)^3}.$$

对于一般的 n，当 $w=0$ 时，有

$$K_0=\frac{e^{|z|^2}}{\pi^{n+1}}\quad\text{for } z\in\mathbb{C}^n,\text{ and } K=K_0(1+|w|^2h(z,w))\text{ for }(z,w)\in D, \tag{5.14}$$

其中， $h(z,w)$ 是关于 D 的实解析函数。下文记 z_{n+1} 为 w，并将 Bergman 度量张量记为

$$g_{\alpha\overline{\beta}}=\frac{\partial^2\log K}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}=\frac{\partial^2\left(\log K_0+O(1)|w|^2\right)}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta} \tag{5.15}$$

其中 $\alpha,\beta\in\{1,\cdots,n+1\}$。显然，对于 $1\le j\le n$， $g_{(n+1)\overline{j}}=g_{j\overline{(n+1)}}=0$。此外，当 $w=0$ 且 $1\le i,j,k\le n$ 时， $\frac{\partial g_{i\overline{j}}}{\partial z_k}=\frac{\partial g_{i\overline{j}}}{\partial\overline{z}_l}=0$。因此，当 $w=0$ 时，对于 $j\le n$，有 $g^{j\overline{(n+1)}}=g^{(n+1)\overline{j}}=0$。现在，对于 $1\le i,j,k,l\le n$ 和 $w=0$，黎曼曲率张量 $R_{i\overline{j}k\overline{l}}$ 计算如下:

$$R_{i\overline{j}k\overline{l}}=-\frac{\partial^2g_{i\overline{j}}}{\partial z_k\partial\overline{z}_j}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}g^{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial g_{i\overline{\beta}}}{\partial z_k}\frac{\partial g_{\alpha\overline{j}}}{\partial\overline{z}_l}=0. \tag{5.16}$$

由此可知，当 $w=0$ 时，沿与 $\mathbb{C}^n\times\{0\}\subset D$ 相切的方向， D 的 Bergman 度量的全纯截面曲率为零。

由 K¨ahler 子流形的高斯–哥达齐方程（参见例如 [第 33, [Mo1]] 页），可知 $\mathbb{C}^n\times\{0\}$ 在 D 中的第二基本形式为零。因此，带有平坦度量的 $\mathbb{C}^n\times\{0\}$ 是 (D,ω_D) 中的全测地子流形。

黄晓军（huangx@math.rutgers.edu）：数学系，罗格斯大学，新不伦瑞克，NJ 08903，美国;
李松英（sli@uci.edu）：数学系，加利福尼亚大学欧文分校，欧文，CA 92697，美国

定理 1.6 证明附录

作者：John N. Treuer

在本附录中，我们将给出定理 1.6 的证明。结合定理 1.5，即可证明推论 1.7。我们将使用的主要工具之一是矩问题的唯一性定理。

设 $s:=(s_{\alpha\bar{\beta}})_{\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^n}$ 是一列复数，且对每个 α 都有 $s_{\alpha\bar{\alpha}}\geq 0$。$\mathbb{C}^n$ 上的（复）矩问题询问是否存在唯一的非负拉东测度 μ，使得

$$s_{\alpha\overline{\beta}}=\int_{\mathbb{C}^n} z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}d\mu(z):=L^{\mu}[z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}],\quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n. \tag{5.17}$$

矩问题是概率论和分析学中的经典问题，更多详情参见 [Sch] 。我们将使用以下唯一性结果，该结果改编自 [Sch，定理 15.11，第 391], 页，适用于复矩问题。

定理 5.1. 假设存在两个非负拉东测度 $d\mu_1$ 和 $d\mu_2$，使得

$$L^{\mu_1}[z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}]=L^{\mu_2}[z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}]=\sqrt{\alpha!\beta!}\delta_{\alpha\beta}\quad \textit{for any } \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n.$$

于是 $d\mu_1=d\mu_2$。

定理 1.6 的证明。假设 D 存在，且 $A^2(D)$有一个形如$\left\{\frac{z^{\alpha}}{\sqrt{\alpha!}}\phi(z)\right\}_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^n}$ 的标准正交基，其中 $\phi\not\equiv 0$，且 $\phi\in A^2(D)$满足$\|\phi\|_{L^2(D)}=1$。在 $\mathbb{C}^n$ 上定义一个非负拉东测度：

$$d\mu_1(z)=|\phi(z)|^2\chi_D(z)dv(z),$$

其中 χ_D 表示 D的示性函数。由该基的标准正交性，

$$L^{\mu_1}[z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}]=\int_{\mathbb{C}^n} z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}d\mu_1(z)=\int_D z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}|\phi(z)|^2dv(z)=\alpha!\delta_{\alpha\beta}. \tag{5.18}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上定义另一个正拉东测度：

$$d\mu_2(z)=\pi^{-n}e^{-|z|^2}dv(z).$$

通过在极坐标下积分并利用伽马函数的定义，

$$\begin{aligned} L^{\mu_2}[z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}]=\int_{\mathbb{C}^n} z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}d\mu_2(z) &= 2^n\delta_{\alpha\beta}\int_{(0,\infty)^n} e^{-|z|^2}\prod_{k=1}^{n}|z_k|^{2\alpha_k+1}d(|z_1|,\ldots,|z_n|) \\ &= \alpha!\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

由 (5.18)、(5.19) 和定理 5.1,

$$|\phi(z)|^2\chi_D(z)dv(z) = \pi^{-n}e^{-|z|^2}dv(z).$$

于是很容易得出

$$|\phi(z)|^2 \equiv \pi^{-n}e^{-|z|^2}, \quad z \in D.$$

对等式两边取对数,

$$2\ln|\phi(z)| = \ln(\pi^{-n}) - |z|^2, \quad z \in D.$$

对等式两边应用拉普拉斯算子，得到 $0 = -4n$。这就产生了矛盾；因此，D 不存在。

□

John N. Treuer (jtreuer@ucsd.edu)，数学系，加利福尼亚大学，拉霍亚，CA 92093。

参考文献

[Ber1] S. Bergmann, 《关于多个复变量的正交函数及其在解析函数理论中的应用》, Interscience Publishers, Inc.，纽约，1941年。（62页）

[Ber2] S. Bergman, 《关于域的核函数及其在拟共形变换理论中的应用》, M ′数学科学回忆录, 第108号。Gauthier-Villars，巴黎，1948年。（80页）

[Bo] S. Bochner, 《Hermitian度量中的曲率》, 《美国数学会通报》53（1947）, 179-195。[BM] S. Bochner 和 W. Martin, 《多复变量》, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1948。[BER] S. Baouendi、P. Ebenfelt 和 L. Rothschild：《复空间中的实子流形及其映射》, 普林斯顿数学丛书，第47卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1999。[Bre] H. Bremermann, 《多复变量中核函数的全纯延拓与Bergman度量》, 载于《密歇根大学复变函数讲座》, 1955年, 第349-383页。

[Ca] E. Calabi, 《复流形的同构嵌入》, 《数学年刊》58（1953）, 1-23。[DF] K. Diederich 和 J. E. Fornaess, 《具有实解析边界的伪凸域》, 《数学年刊》（第 2 辑） 107 （ 1978 ）, 第 2 期, 371–384。[DW1] X. Dong 和 B. Wong, 《Bergman-Calabi 位势差与具有常全纯截面曲率的Kähler度量》, 《纯粹与应用数学季刊》18（2022）, 第2期, 481-502。[DW2] X. Dong 和 B. Wong, 《Bergman代表坐标、常全纯曲率与Carathéodory定理的多维推广》, 预印本, 2022。[EXX] P. Ebenfelt、M. Xiao 和 H. Xu, 《关于具有Bergman-Einstein度量的正规Stein空间与有限球商空间的分类》, 《国际数学研究通知》2022年, 第19期, 15240-15270。[Fe] C. Fefferman, 《伪凸域的Bergman核与双全纯映射》, 《数学发明》26（1974）, 1-65。[FK] G. Folland 和 J. Kohn, 《Cauchy-Riemann复形的Neumann问题》, 《数学年刊研究丛书》第75号。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京, 1972年。viii+146 页。[FW] S. Fu 和 B. Wong, 《关于具有Kähler-Einstein Bergman度量的严格伪凸域》, 《数学研究快报》4（1997）, 697-703。[Fu] S. Fu, 《 $\mathbb{C}^2$中有限型Reinhardt域的几何》, 《几何分析杂志》6（1996）, 第3期, 407-431（1997）。[GGV] A. Gallagher、P. Gupta 和 L. Vivas, 《关于 $\mathbb{P}^1$上的Bergman空间维数》, Matematica 1（2022）, 第3期, 666-684。[GZ] H. Gaussier 和 A. Zimmer, 《Hartogs定理的一个度量类比》, 《几何与泛函分析》32（2022）, 第5期, 1041-1062。[He] S. Helgason, 《微分几何与对称空间》, 《纯粹与应用数学》第12卷, 学术出版社, 纽约, 1962。[HLi] X. Huang 和 S. Y. Li, 《Calabi刚性与延拓定理的一个简明证明》, 预印本。（2023）[HX1] X. Huang 和 M. Xiao, 《Stein空间的一致化定理》, 《复分析协同》6（2020）, 第2期, 论文第6号。（5页）

[Ir] M. Irgens, 《全纯函数的延拓》, Math. Z. 247 (2004), no. 3, 611-617.[JP] M. Jarnicki and P. Pflug, 《复分析中的不变距离与度量》, De Gruyter Exp. Math., vol. 9, 柏林 (1993).[Jo] B. Josefson, 《关于多重次调和函数的局部极集与整体极集等价性》, Ark. Mat. 16 (1978), no. 1, 109-115.[Ju] P. Jucha, 《关于某些Hartogs域的Bergman空间维数的一则评论》, 《几何分析杂志》22(1) (2012), 23-37.[Kle] P. Klembeck, 《负曲率的K¨ahler度量、边界附近的Bergmann度量，以及光滑有界严格伪凸集上的Kobayashi度量》, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), no. 2, 275-282.[Ko] S. Kobayashi, 《有界域的几何》, Trans. Am. Math. Soc. 92 (1959), 267-290.[KLS]I. Kossovskiy, B. Lamel and L. Stolovitch, 《三维柯西-黎曼流形的等价性与多重可和性理论》, Adv. Math. 397 (2022), Paper No. 108117, 42 pp.[LN] B. Lamel and N. Mir, 《形式CR映射的收敛与发散》, Acta Math. 220 (2018), no. 2, 367–406.[LNR] B. Lamel, N. Mir and G. Rond, 《映入Nash集的CR映射的唯一喷射确定性》, Adv. Math. 432 (2023), Paper No. 109271, 32 pp.[Li] S.-Y. Li, 《一类边界具有正实常数伪标量曲率的伪凸域的刻画》, Comm. in Anal. and Geom., 17(2009), 17–35.[Lu] Q.-K. Lu, 《关于常曲率K¨ahler流形》, Acta Math. Sinica 16 (1966), 269- 281 (中文).（译载于 Chinese Math.-Acta 8 (1966), 283-298.）[NZ] N. Mir and D. Zaitsev, 《映入球面的CR映射芽的唯一喷射确定性与延拓》, Trans. Amer. Math. Soc. 374 (2021), no. 3, 2149–2166.[Mo1] N. Mok, 《Hermitian局部对称流形上的度量刚性定理》, 纯数学丛书第6卷。World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989. xiv+278 页。[Mo2] N. Mok, 《关于Bergman度量在归一化常数意义下全纯等距映射芽的延拓》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 14 (2012), no. 5, 1617-1656。

[PZ] P. Pflug and W. Zwonek, 《全纯函数与Bergman核的 L^2_h域》, Studia Math. 151 (2002), 99–108.[Oh] T. Ohsawa, 《关于Bergman度量完备性的一则评论》, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 57 (1981), no. 4, 238–240.[Sch] K. Schm¨udgen, 《矩问题》, 数学研究生教材第277卷, Springer, 尚, 2017. 535页。[Wi] J. Wiegerinck, 《具有有限维Bergman空间的域》, Math. Z. 187 (1984), no. 4, 559-562。