arXiv:2302.13459v1 [math.NT] 27 Feb 2023

模微分方程与代数系统

HICHAM SABER 和 ABDELLAH SEBBAR

Abstract. 本文展示了如何由显式代数方程组的解导出无穷族模微分方程的解。

1. Introduction

模微分方程是系数取自模形式环的线性微分方程。早期自守形式专家，如 Klein [10], 、Hurwitz [6]和 Van der Pol [25]，曾对其进行研究。近几十年来，随着 Kaneko 和 Zagier [9]的开创性工作，这些微分方程引起了广泛关注。该领域发展成为一个富有成果的研究方向，并应用于数学和数学物理的许多领域。关于这一主题已有大量文献，包括相关著作 [1, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14]。正如我们接下来将要说明的，我们将研究与施瓦茨微分方程及等变函数理论相关的模微分方程。

设 Γ 是作用于上半平面 $\mathbb{H}$ 上的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散子群，并用 $\overline{\Gamma}$ 表示其在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 中的投影。我们考虑如下具有自守势的微分方程

$$y'' + Q(\tau)\, y = 0, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

其中 $Q(\tau)$ 是 Γ 的权4自守形式。若 f_1 和 f_2 是线性无关的解，则 $h = f_2/f_1$ 满足施瓦茨微分方程

$$\{h, \tau\} = 2Q(\tau),$$

2010年数学主题分类：11F03，11F11，34M05。关键词与短语：模微分方程、施瓦茨导数、模形式、艾森斯坦级数、等变函数、模群表示。

其中 $\{h,\tau\}$ 是施瓦茨导数，定义为

$$\{h,\tau\} \;=\; \left(\frac{h''(\tau)}{h'(\tau)}\right)' \;-\; \frac{1}{2}\left(\frac{h''(\tau)}{h'(\tau)}\right)^2 .$$

施瓦茨导数具有许多射影、几何和解析性质，详见 [15, 17]。另一方面，对于定义在 $\mathbb{H}$ 上的亚纯函数 h，可以证明，$\{h,\tau\}$ 是 Γ 的一个权4自守形式，当且仅当存在 $\overline{\Gamma}$ 的一个二维表示 ϱ，使得

$$h(\gamma\cdot\tau) \;=\; \varrho(\gamma)\cdot h(\tau)\,,\;\; \tau\in\mathbb{H}\,,\;\; \gamma\in\Gamma.$$

我们称这样的函数 h 为 Γ 的一个 $\varrho-$ 等变函数。这类函数已在 [2, 3, 22, 23] 中得到广泛研究，并在 [21, 18, 19, 20, 24] 中有有趣的应用。自守函数（权为零）关于 $\varrho=1$（即常值表示）是 $\varrho-$ 等变的。若 $\varrho=Id$ 是定义表示，则 h 就简称为等变函数（它与 Γ 的作用可交换）。例如，若 f 是 Γ 的一个权 k 自守形式，则

$$h_f(\tau) \;=\; \tau \;+\; k\,\frac{f(\tau)}{f'(\tau)}$$

是 Γ 的等变函数。这也包括 f 为非常数自守函数的情形，此时会得到平凡的等变函数 $h(\tau)=\tau$。

本文聚焦于模群 $\Gamma=\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的情形。因此，全纯四阶模形式 $Q(\tau)$ 是权4艾森斯坦级数 $E_4(\tau)$ 的一个数乘。于是，我们考虑模微分方程

$$y'' \;+\; s\,E_4(\tau)\,y \;=\; 0, \tag{1.1}$$

以及相应的施瓦茨微分方程

$$\{h,\tau\} \;=\; 2\,s\,E_4(\tau)\,. \tag{1.2}$$

值得注意的是，[7] 和 [9] 中研究的模微分方程可化为方程 (1.1)，[24]。根据 [18], ，方程 (1.2) 的任一解 h 必为局部单叶函数，并由此得到方程 (1.1) 的解 $y_1=1/\sqrt{h'}$ 和 $y_2=h/\sqrt{h'}$。此外，若方程 (1.2) 的解在 ∞ 处为亚纯函数或具有对数奇点，则参数 s 必须满足 $s=\pi^2r^2$，其中 r 是有理数。

在 [18], 中，我们研究了满足以下条件的方程 (1.2) 的解：它们是 $\varrho-$等变的，且 $\mathsf{Ker}\,\varrho$ 在 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中具有有限指数；换言之，它们是模

函数，属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的一个有限指数子群。结果表明，ρ 必定是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的不可约表示，并且 $s = \pi^2 r^2$ 带有一个有理数 $r = n/m$，$2 \le m \le 5$ 且 $\gcd(m, n) = 1$。此外，解 h 是主合同子群$\Gamma(m)$ 的模函数。整数 m和 n 有如下解释：我们有两个紧黎曼曲面之间的覆盖

$$\pi : X(\ker \varrho) \longrightarrow X(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

由自然包含 $\ker \varrho \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 诱导，且

$$h : X(\ker \varrho) \longrightarrow X(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

由解 h 诱导。这里，$X(\Gamma)$ 是与子群 Γ 对应的模曲线。于是，m 和 n 分别是这两个覆盖在 ∞ 上方的分歧指数。

当 r 是整数（$m = 1$）时，情况完全不同。方程 (1.2) 总有一些仅为等变的解，也就是说，当 $\varrho = Id$ 时；而方程 (1.1) 的解则由拟模形式[20]构造而成。

在 [19], 中，我们研究了这样一种情形：方程 (1.2) 的解对应于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的可约表示 ϱ。结果表明，必有 $r = n/6$，且 $\gcd(n, 6) = 1$。分母 6 的出现，是因为它是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的换位子群的层，在该群上 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的特征是平凡的。此外，方程 (1.2) 的解是带特征的权二亚纯模形式的积分。对于 $n = 1$ 的情形，所涉及的权二形式是 η^4。随后，我们通过对模形式积分，为每个 $n = 1 + 12k$、$k \in \mathbb{N}$ 构造了解

$$f_n = \frac{\eta^4}{\prod_{i=1}^{k} (J - a_i)^2},$$

其中，数值 a_i 是代数方程组的解

$$\frac{4}{x_i} + \frac{3}{x_i - 1} + \sum_{j \neq i} \frac{12}{x_j - x_i} = 0\,, \quad 1 \le i \le k,$$

结果发现，该方程在 $(0, 1)^k$ 中有解。其思路是在 $\mathbb{H}$ 中的 η^4 上添加留数为零的二阶极点。在这种情况下，这些二阶极点不是椭圆点。

本文表明，对于模 12 剩余类的其余情形，该方法同样能够很好地推广，即对于与 6 互素的 n，满足 $n \equiv$ 在模 12 下为 5、7 或 11。更确切地说，从方程 (1.2) 的一个基本解 f_α出发，其中对于每个 $\alpha = 5$、7 或 11，都有 $s = \pi^2(\alpha/6)^2$，可以构造一个

对于模 12 下属于 α 剩余类的每个 m 的解，方法是在 f'_α 中加入二阶极点并进行积分。在这些情形下，二阶极点可以包含椭圆点 i 或 ρ 中的一个，也可以同时包含两者。然而，研究表明，整个构造过程可以通过求解代数方程组

$$\frac{a}{x_i} + \frac{b}{x_i - 1} + \sum_{j \neq i} \frac{c}{x_j - x_i} = 0\,, \quad 1 \leq i \leq k,$$

其中 a、b 和 c 随 α变化。

此外，我们重新考察了文献[18] 中研究的层 $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ 的情形，并证明我们的方法可用于构造方程 (1.1) 和 (1.2) 的解。事实上，从一个对应于 $r = 1/m$的解 t_m 出发——它恰好是 $\Gamma(m)$ 的一个 Hauptmodul——我们可以通过在 t'_m 中添加二重零点和二阶极点，构造出一个对应于 $r = n/m$ 的解，其中 n 与 m 互素。这些二重零点和二阶极点来自上述代数方程组的解，而参数 a、b 和 c则需作适当选择。

为什么一个简单代数方程组的解会导出无穷族模微分方程的解，这一点至今尚未得到充分理解。

2. Special values of higher derivatives of modular forms

本节回顾一些经典的椭圆模形式。我们还建立了一些有趣的恒等式，涉及它们在椭圆不动点处的高阶导数的特殊值。

艾森斯坦级数 E_2、E_4 和 E_6 由其 q–展开定义：

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n)\, q^n\,,$$
$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)\, q^n\,,$$
$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n)\, q^n\,.$$

这里，τ 是上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ and$q = \exp(2\pi i \tau)$中的变量，而 ∞是局部参数。算术函数 σ_k 定义在正整数上，如下所示：

$$\sigma_k(n) = \sum_{0 < d \,|\, n} d^k.$$

函数 E_2 是权为 2 的拟模形式，而 E_4 和 E_6 分别是全模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 4 和 6 的模形式。

我们还定义 Dedekind η 函数如下

$$\eta(\tau) \;=\; q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geq 1}(1-q^n)\,,$$

以及权为 12 的尖点形式 Δ（模判别式）

$$\Delta(\tau) \;=\; \eta(\tau)^{24} \;=\; \frac{1}{1728}(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2).$$

我们还有椭圆模函数 J（J–不变量）

$$J(\tau) \;=\; \frac{1}{1728}\frac{E_4(\tau)^3}{\Delta},$$

以及用于 $\Gamma(2)$ 的 Klein 椭圆模函数 λ

$$\lambda(\tau) \;=\; \left(\frac{\eta(\tau/2)}{\eta(2\tau)}\right)^8.$$

下面的关系将在 [16, 第 6] 章中用到:

$$E_4 \;=\; \frac{J'^2}{(2\pi i)^2 J(J-1)}\,, \tag{2.1}$$

$$E_6 \;=\; \frac{J'^3}{(2\pi i)^3 J^2(J-1)}\,, \tag{2.2}$$

$$\Delta = \frac{-1}{(48\pi^2)^3}\frac{J'^6}{J^4(J-1)^3}\,. \tag{2.3}$$

回顾一下，Δ 在 $\mathbb{H}$中不为零，而 E_6（分别是 E_4）在 i 及其 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$– 轨道上（分别在 $\rho = \exp(2\pi i/3)$处）有一个简单零点。与此同时，$J-1$在 i处有一个二重零点，而 J 在 ρ处有一个三阶零点。

以下命题在后续章节中将非常有用。

命题 2.1. 我们有

$$12\,\frac{\eta'(i)}{\eta(i)} \;=\; \frac{3}{7}\frac{E_6''(i)}{E_6'(i)} \;=\; \frac{J'''(i)}{J''(i)} \;=\; 3i.$$

证明。对（2.3）取对数导数，得到

$$24\,\frac{\eta'}{\eta} \;=\; 6\,\frac{J''}{J'} - 4\,\frac{J'}{J} - 3\,\frac{J'}{J-1}. \tag{2.4}$$

利用 J 在 i附近的展开

$$J(\tau) = 1 + \frac{1}{2}\, J''(i)(\tau - i)^2 + \frac{1}{6}\, J'''(i)(\tau - i)^3 + \mathrm{O}(\tau - i)^4$$

我们得到

$$\frac{J''(\tau)}{J'(\tau)} = \frac{1}{\tau - i} + \frac{1}{2}\,\frac{J'''(i)}{J''(i)} + \mathrm{O}(\tau - i),$$
$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau) - 1} = \frac{2}{\tau - i} + \frac{1}{3}\,\frac{J'''(i)}{J''(i)} + \mathrm{O}(\tau - i)$$

and

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} = \mathrm{O}(\tau - i).$$

因此,

$$24\,\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = 2\,\frac{J'''(i)}{J''(i)} + \mathrm{O}(\tau - i),$$

也就是说

$$12\,\frac{\eta'(i)}{\eta(i)} = \frac{J'''(i)}{J''(i)}.$$

与此同时，对 $J(-1/\tau) = J(\tau)$ 求三阶导数，得到

$$\frac{6}{\tau^4}\, J'(-1/\tau) - \frac{6}{\tau^5}\, J''(-1/\tau) + \frac{1}{\tau^6}\, J'''(1/\tau) \;=\; J'''(\tau).$$

由于 $J'(i) = 0$，我们得到

$$\frac{J'''(i)}{J''(i)} = 3i.$$

最后，利用

$$E_6(\tau) = (\tau - i)E_6'(i) + \frac{1}{2}(\tau - i)^2 E_6''(i) + \mathrm{O}(\tau - i)^3$$

and

$$E_6'(\tau) = E_6'(i) + (\tau - i)E_6''(i) + \mathrm{O}(\tau - i)^2,$$

我们得到

$$\frac{E_6'(\tau)}{E_6(\tau)} = \frac{1}{\tau - i} + \frac{1}{2}\frac{E_6''(i)}{E_6'(i)} + \mathrm{O}(\tau - i)^2. \tag{2.5}$$

另一方面，对式 (2.2) 取对数导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{E_6'(\tau)}{E_6(\tau)} &= 3\frac{J''(\tau)}{J'(\tau)} - 2\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} - \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - 1} \\ &= \frac{1}{\tau - i} + \frac{7}{6}\frac{J'''(i)}{J''(i)} + \mathrm{O}(\tau - i)\end{aligned}$$

利用本证明开头引用的 J''/J'、 J'/J 等的展开式。现在，将其与式 (2.5) 比较，得到

$$\frac{E_6''(i)}{E_6'(i)} = \frac{7}{3}\frac{J'''(i)}{J''(i)},$$

由此完成证明。 □

命题 2.2. 有

$$24\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho)} \;=\; \frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} \;=\; \frac{6}{5}\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)} \;=\; 12\,\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

证明. 设

$$E_4(\tau) = (\tau-\rho)E_4'(\rho) + \frac{1}{2}(\tau-\rho)^2E_4''(\rho) + \mathrm{O}(\tau-\rho)^3,$$

$$E_4'(\tau) = E_4'(\rho) + (\tau-\rho)E_4''(\rho) + \mathrm{O}(\tau-\rho)^2,$$

从而

$$\frac{E_4'(\tau)}{E_4(\tau)} \;=\; \frac{1}{\tau-\rho} \;+\; \frac{1}{2}\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)} \;+\; \mathrm{O}(\tau-\rho). \tag{2.6}$$

现在设

$$J(\tau) = \frac{1}{6}J'''(\rho)(\tau-\rho)^3 + \frac{1}{24}J^{(4)}(\rho)(\tau-\rho)^4 + \mathrm{O}(\tau-\rho)^5,$$

$$J'(\tau) = \frac{1}{2}J'''(\rho)(\tau-\rho)^2 + \frac{1}{6}J^{(4)}(\rho)(\tau-\rho)^3 + \mathrm{O}(\tau-\rho)^4,$$

$$J''(\tau) = J'''(\rho)(\tau-\rho) + \frac{1}{2}J^{(4)}(\rho)(\tau-\rho)^2 + \mathrm{O}(\tau-\rho)^3.$$

由此可得

$$\frac{J''(\tau)}{J'(\tau)} = \frac{2}{\tau-\rho} + \frac{1}{3}\frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho),$$

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} = \frac{3}{\tau-\rho} + \frac{1}{4}\frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho)$$

and

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau)-1} = \mathrm{O}(\tau-\rho)^2.$$

现在，利用（2.1），我们有

$$\frac{E_4'(\tau)}{E_4(\tau)} = 2\frac{J''(\tau)}{J'(\tau)} - \frac{J'(\tau)}{J(\tau)} - \frac{J'(\tau)}{J(\tau)-1}. \tag{2.7}$$

因此,

$$\frac{E_4'(\tau)}{E_4(\tau)} = \frac{1}{\tau-\rho} + \frac{5}{12}\frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho).$$

与 (2.6) 比较，得到

$$\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)} = \frac{5}{6}\frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)}.$$

另一方面，利用 (2.4)，可得

$$24\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = \frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho),$$

这证明了

$$24\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho} = \frac{J^{(4)}(\rho)}{J'''(\rho)} = \frac{6}{5}\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)}.$$

此外，对恒等式求两次导数

$$E_4\left(\frac{-1}{\tau+1}\right) = (\tau+1)^4 E_4(\tau)$$

并取 $\tau=\rho$，即可得到命题中的最后一个等式。 □

3. Level 6 modular differential equations and algebraicsystems

设给定一个关于有限指数子群Γ 的 ρ–等变函数，其中Γ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的有限指数子群。若 ρ 是 Γ的可约表示，则可通过共轭将其化为上三角表示；也就是说，存在 $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$，使得$\rho_1 = \sigma\rho\sigma^{-1}$ 为上三角矩阵。此外，$h_1 = \sigma \cdot h$ 是 ρ_1–等变的，且与 h具有相同的施瓦茨导数。因此，如果我们要寻找对应于可约表示的方程 (1.2) 的解，不失一般性，可以假设 ρ 是上三角的。根据[19], 中的定理4.3，当且仅当导数 h' 是 Γ 上带有一个特征的亚纯权2模形式时，亚纯函数 h 才是关于 Γ 的三角表示 ρ的 ρ–等变函数。现在，为使施瓦茨导数 $\{h,\tau\}$全纯， h' 必须在 h 全纯之处不消失；而在其他地方， h 只能有简单极点，这等价于说h' 只有留数为零的二阶极点。因此，若要寻找方程 (1.2) 的解h，就必须对 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上带有一个特征且不消失的权重 2 模形式进行积分；这些形式可以有二阶极点（若存在），但留数必须为零。所讨论的这些特征在换位子群上是平凡的

它是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的一个6级、指数为12的子群，且是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的子群，因此这些模形式具有 q–展开，其中 $q = \exp(2\pi i\tau/6)$。

根据 [19], ，带有特征的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 全纯二阶模形式必定等于 $c\eta^4$ ，其中 c 是一个常数。若设

$$h(\tau) = \int_i^\tau \eta^4(\tau)\, d\tau,$$

则有

$$\{h, \tau\} \;=\; \frac{2\pi^2}{36}\, E_4(\tau).$$

换言之， h 是满足 $s = \dfrac{\pi^2}{6^2}$ 的方程 (1.2) 的一个解。因此，

$y = 1/\sqrt{h'} = \eta^{-2}$ 是 $y'' + \dfrac{\pi^2}{36}\, y = 0$的一个解；Klein 在 [10], 中首次提及了这个微分方程，而 Hurwitz 首次给出了该方程的 η^{-2}作为解 [6]。

为了寻找其他解，我们应当寻找具有二阶极点且留数为零的权2模形式。为此，对于每个参数三元组 (a, b, c)，我们引入以下由 n 个变量 x_i构成的 n 个方程的代数方程组 $E^n_{a,\ b,\ c}$：

$$\frac{a}{x_i} + \frac{b}{x_i - 1} + \sum_{j \neq i} \frac{c}{x_j - x_i} \;=\; 0\,, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.1}$$

注意，对于 $\alpha \neq 0$，方程组 $E^n_{a,\ b,\ c}$ 等价于方程组 $E^n_{\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha c}$。根据 [19, 定理 6.2], ，若 a、 b 和 c 均为正实数，则方程组 $E^n_{a,\ b,\ c}$ 在 $(0, 1)^n$中有解。设 $(x_i)_{1 \le i \le n}$ 为代数方程组 $E^n_{4,\ 3,\ 12}$ 的一个解，并令

$$f_n \;=\; \frac{\eta^4}{\prod_{i=1}^n (J - x_i)^2}.$$

此外，记 $x_i = J(w_i)$， $w_i \in \mathbb{H}$。那么，作为 $0 < x_i < 1$， w_i不是椭圆不动点，而 f_n 是一个带特征的权2模形式，在每个 w_i， $1 \le i \le n$处都有一个二阶极点，并且在其他地方全纯。此外， x_i满足系统 $E^n_{4,\ 3,\ 12}$ 这一事实，等价于 f_n 在每个 w_i处的留数均为零。 [19] 中的一个主要结果是，$h_n(\tau) \;=\; \displaystyle\int_i^\tau f_n(z)\; dz$是方程 (1.2) 在 $s = \pi^2 \left(\dfrac{12n+1}{6}\right)^2$ 下的一个解，而 $_n$方程 (1.1) 的解由 $y_1 = \eta^{-2} \prod (J - x_i)$ 和 $y_2 = h_n y_1$给出；这是对 Hurwitz 在 $n = 0$时所得解的推广。这解决了模微分

方程 (1.1) 和 (1.2)，其中 $s = \pi^2(m/6)^2$ 满足模 12 下的 $m \equiv 1$。现在我们着重寻找模 12 下其余剩余类对应的解，即 $m \equiv 5$、7 或 11 模 12 时的解。其思路是允许非零权重 2 模形式在椭圆点处有二阶极点。

定理 3.1. 设 $n \in \mathbb{N}$ and $(x_i)_{1\le i\le n} \in (0,1)^n$ 是代数系统 $E^n_{4,9,12}$ 的一个解，并设 $w_i \in \mathbb{H}$ 满足 $x_i = J(w_i)$。则

$$f_n = \frac{\eta^4}{(J-1)\prod_{i=1}^n (J-x_i)^2} = \frac{\eta^{28}}{E_6^2 \prod_{i=1}^n (J-x_i)^2}$$

是一个非零权重 2 模形式，在 i 以及每个w_i 处都有二阶极点，且留数为零。此外，若 $h_n(\tau) = \int_i^\tau f_n(z)dz$，则

$$\{h_n, \tau\} = 2\pi^2 \frac{(12n+7)^2}{6^2} E_4(\tau).$$

证明。由于 i 是 $J-1$ 的二重零点，且每个 w_i 都不属于 i的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$–轨道$_n$，显然 i 是 f_n的二阶极点。令 $g_n = \eta^4 / \prod(J-x_i)^2$，于是$_{i=1}$

即 $f_n = g_n/(J-1)$。另记

$$J(\tau) - 1 = \frac{1}{2}J''(i)(\tau-i)^2 + \frac{1}{6}J'''(i)(\tau-i)^3 + \mathrm{O}(\tau-i)^4.$$

Then

$$\frac{J''(i)}{2}\frac{(\tau-i)^2}{J(\tau)-1} = 1 - \frac{1}{3}\frac{J'''(i)}{J''(i)}(\tau-i) + \mathrm{O}(\tau-i)^2.$$

由此可得

$$\frac{d}{d\tau}((\tau-i)^2 f_n(\tau)) = \frac{d}{d\tau}\frac{g_n(\tau)(\tau-i)^2}{J(\tau)-1} = g_n'(\tau)\frac{(\tau-1)^2}{J(\tau)-1} + g_n(\tau)\frac{d}{d\tau}\frac{(\tau-i)^2}{J(\tau)-1}.$$

因此，

$$\mathrm{Res}(f_n, i) = \lim_{\tau\to i}\frac{d}{d\tau}((\tau-i)^2 f_n(\tau)) = \frac{2g_n(i)}{J''(i)}\left(\frac{g_n'(i)}{g_n(i)} - \frac{J'''(i)}{3J''(i)}\right).$$

与此同时，对 g_n 取对数导数，得到

$$\frac{g_n'(i)}{g_n(i)} = 4\frac{\eta'(i)}{\eta(i)} - \sum_{i=1}^n \frac{2J'(i)}{J(i)-x_i} = 4\frac{\eta'(i)}{\eta(i)}.$$

因此，利用命题 2.1，

$$\mathrm{Res}(f_n, i) = \frac{2g_n(i)}{J''(i)}\left(4\frac{\eta'(i)}{\eta(i)} - \frac{J'''(i)}{3J''(i)}\right) = 0.$$

现在，固定 i、 $1 \le i \le n$，并写作 $f_n(\tau) = \phi_n(\tau)/(J(\tau) - J(w_i))^2$。与上文类似的计算表明

$$\operatorname{Res}(f_n, w_i) = \frac{\phi_n'(w_i)}{J'(w_i)^2} - \phi_n(w_i)\frac{J''(w_i)}{J'(w_i)^3} = \frac{\phi_n(w_i)}{J'(w_i)^2}\left(\frac{\phi_n'(w_i)}{\phi_n(w_i)} - \frac{J''(w_i)}{J'(w_i)}\right).$$

与此同时，

$$\frac{\phi_n'}{\phi_n} = \frac{4\eta'}{\eta} - \frac{J'}{J-1} - \sum_{j\neq i}\frac{2J'}{J - J(w_j)}.$$

因此

$$\operatorname{Res}(f_n, w_i) = \frac{\phi_n(w_i)}{J'(w_i)^2}\left(\frac{4\eta'(w_i)}{\eta(w_i)} - \frac{J'(w_i)}{J(w_i)-1} - \sum_{j\neq i}\frac{2J'(w_i)}{J(w_i)-J(w_j)} - \frac{J''(w_i)}{J'(w_i)}\right).$$

利用 (2.4)，我们得到

$$\frac{4\eta'}{\eta} - \frac{J''}{J'} = \frac{J'}{6}\left(\frac{3}{1-J} - \frac{4}{J}\right),$$

从而

$$\operatorname{Res}(f_n, w_i) = \frac{-\phi_n(w_i)}{6J'(w_i)}\left(\frac{4}{J(w_i)} + \frac{9}{J(w_i)-1} + \sum_{j\neq i}\frac{12}{J(w_i)-J(w_j)}\right) = 0$$

因为选取 $x_i = J(w_i)$ 是为了使其成为代数系统 $E_{4,\ 9,\ 12}^n$ 的一个解。因此，f_n 只有带零留数的二阶极点，除此之外处处不为零。由此，其积分 h_n 只有简单极点，除此之外处处局部单叶。由此可知，施瓦茨导数 $\{h_n, \tau\}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的全纯权4模形式，因此是 E_4 的一个常数倍。最后注意到，f_n 的 $q-$ 展开式的首项系数为 $q^{\frac{1}{6}+1+2n} = q^{\frac{12n+7}{6}}$，因此 $\{h_n, \tau\} = (f_n'/f_n)' - \frac{1}{2}(f_n'/f_n)^2$ 的首项系数显然为 $\frac{2\pi^2(12n+7)}{6^2}$。

□

现在我们要寻找一个类似的解，但在其他椭圆不动点 $\tau = \rho$ 处有一个二阶极点。

定理 3.2. 设 $n \in \mathbb{N}$ and $(x_i)_{1\le i\le n} \in (0,1)^n$ 是代数系统 $E_{8,3,12}^n$ 的一个解，并设 $w_i \in \mathbb{H}$ 满足 $x_i = J(w_i)$。那么

$$f_n = \frac{\eta^{20}}{E_4^2\prod_{i=1}^n (J - x_i)^2}$$

这是一个非消失权2模形式，在 ρ 和每个 w_i 处都有二阶极点，且留数为零。此外，若 $h_n(\tau) = \int_i^\tau f_n(z)dz$，那么

$$\{h_n, \tau\} = 2\pi^2 \frac{(12n+5)^2}{6^2} E_4(\tau).$$

证明。令 $f_n = \psi_n / E_4^2$ 和

$$E_4(\tau) = (\tau-\rho)E_4'(\rho) + \frac{1}{2}(\tau-\rho)^2 E_4''(\rho) + \mathrm{O}(\tau-\rho)^3$$

使得

$$E_4^2(\tau) = (\tau-\rho)^2 E_4'^2(\rho)\left(1 + (\tau-\rho)\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho)^2\right).$$

因此，

$$\frac{(\tau-\rho)^2\psi_n(\tau)}{E_4^2(\tau)} = \frac{\psi_n(\tau)}{E_4'^2(\rho)}\left(1 - (\tau-\rho)\frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)} + \mathrm{O}(\tau-\rho)^2\right).$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\rho}\frac{d}{d\tau}\frac{(\tau-\rho)^2\psi_n(\tau)}{E_4^2(\tau)} &= \frac{\psi_n'(\rho)}{E_4'^2(\rho)} - \frac{\psi_n(\rho)E_4''(\rho)}{E_4'^3(\rho)} \\
&= \frac{\psi_n(\rho)}{E_4'^2(\rho)}\left(\frac{\psi_n'(\rho)}{\psi_n(\rho)} - \frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)}\right) \\
&= \frac{\psi_n(\rho)}{E_4'^2(\rho)}\left(20\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho)} - \sum_{i=1}^{n}\frac{2J'(\rho)}{J(\rho)-x_i} - \frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)}\right) \\
&= \frac{\psi_n(\rho)}{E_4'^2(\rho)}\left(20\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho)} - \frac{E_4''(\rho)}{E_4'(\rho)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

最后一个等式由命题 2.2 得出。因此，f_n在二阶极点 ρ 处的留数为零。与前一个定理类似，并利用 (2.4) 和 (2.7)，容易看出，f_n 在每个 w_i 处的留数恰好为零，因为 x_i 满足代数方程组 $E_{8,\ 3,\ 12}^n$。最后，f_n 的 $q-$展开的首项系数为 $q^{\frac{12n+5}{6}}$，因此 $\{h_n,\tau\}$的首项系数为 $2\pi^2(12n+5)^2_{6^2}$。

□

最后，我们寻求一个解，使椭圆点 i 和 ρ 均为二阶极点。

定理 3.3. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $(x_i)_{1\le i\le n} \in (0,1)^n$ 是代数方程组 $E_{8,\ 9,\ 12}^n$ 的一个解，并设 $w_i \in \mathbb{H}$ 满足 $x_i = J(w_i)$。则

$$f_n \;=\; \frac{\eta^{20}}{E_4^2(J-1)\prod_{i=1}^n (J-x_i)^2} \;=\; \frac{\eta^{44}}{E_4^2E_6^2\prod_{i=1}^n (J-x_i)^2}$$

是一个非零权重 2 模形式，在 i、ρ 处有二阶极点，并且在每个 w_i 处的留数均为零。此外，如果 $h_n(\tau) = \int_i^\tau f_n(z)dz$，那么

$$\{h_n,\tau\} \;=\; 2\pi^2\frac{(12n+11)^2}{6^2}\,E_4(\tau).$$

证明。借助命题 2.1 和命题 2.2，可以用与前两个定理相同的方法证明这一点。同时，f_n 首项系数中 q 的指数为 $\frac{5}{6}+1+12n = \frac{12n+11}{6}$。□

4. Modular solutions and algebraic systems

我们已经提到，根据 [18], ，施瓦茨方程 (1.2) 有模函数解，当且仅当 $s = \pi^2n^2/m^2$ ，其中 m 和 n 为满足 $2 \le m \le 5$ 且 $\gcd(m,n) = 1$ 的正整数。对于每一对这样的数 (m,n)，模解 h 的不变群为 $\Gamma(m)$，而 n 是覆盖 $h : X(m) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ 中 ∞ 上方的分歧指数。这里 $X(m) = X(\Gamma(m))$。关于群 $\Gamma(m)$（ $2 \le m \le 5$ ）的一个关键事实是，它们是唯一的亏格 0 无挠主合同子群。本节将证明，这些模解也以与上一节中的解相同的方式对应于一个代数方程组。

令 $m \in \{2,3,4,5\}$ ，并令 t 为 $\Gamma(m)$ 的 Hauptmodul。选取 t ，使其傅里叶展开具有如下形式

$$t(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{i\ge 0} a_i q^i\,, \quad q = e^{\frac{2\pi i\tau}{m}}.$$

由于 Hauptmodul t 的取值均不重复，且 $\Gamma(m)$ 没有椭圆元素，因此根据 [13], $\{t,\tau\}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 $\Gamma(m)$ 的正规化子的全纯四阶模形式，而该正规化子就是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 本身，因此它是 E_4 的一个标量倍数。从 t 的 q–展开可清楚看出，

$$\{t,\tau\} \;=\; \frac{\pi^2}{m^2}\,E_4(\tau).$$

现在令 $n \geq 2$ 为一个与 m互素的整数。根据 [18], , 存在一个关于 $\Gamma(m)$ 的模函数 h, 它是 $\{h, \tau\} = 2\pi^2(n/m)^2 E_4(\tau)$ 的解。由于 n是 h 在 ∞处的分歧指数, 我们可以写作

$$h(\tau) = q^n + \mathrm{o}(q^n) \quad q = e^{\frac{2\pi i \tau}{m}}.$$

现在, 假设 h 的极点由集合 $\{w_1, w_2, \ldots w_a, s_1, \ldots s_b\}$给出, 其中, 对于 $1 \leq i \leq a$, $w_i \in \mathbb{H}$ （如果有）以及 s_j, $1 \leq j \leq b$均属于 $\Gamma(m)$ 的尖点。那么覆盖 $h\colon X(m) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 的次数 d 满足

$$d = a + nb. \tag{4.1}$$

我们还考虑 $\Gamma(m)$ 上的模函数 $f = t'/h'$。由于 h' 在 w_i处只能有二阶极点, 并且在 $\mathbb{H}$的其他地方不为零, 因此我们看到 f 在 $\mathbb{H}$上全纯。因此, 存在某些多项式 P 和 Q, 使得 $f = P(t)/Q(t)$。此外, 由于 Hauptmodul t 在 ∞处有一个极点, 它在 $\mathbb{H}$ 上全纯, 并且 t' 在 $\mathbb{H}$ 上不为零（因为 t 是一个 Hauptmodul, 且 $\Gamma(m)$没有椭圆元素; 或者因为我们前面已经看到, t 的施瓦茨导数是全纯的）。由此可知, 每个 w_i、$1 \leq i \leq a$都是 f的二阶零点。同时, f 在尖点处的行为如下:

- 在每个 s_i附近, $1 \leq i \leq b$: 对于某些常数 α、 β 和 γ, $h'(\tau) = \alpha/q^n + \ldots$ 且 $t'(\tau) = \beta q + \ldots$, 因为 t 在 ∞处有一个极点, 因此在任何其他尖点处都是全纯的。因此,

$$f(\tau) = \gamma q^{n+1} + \ldots.$$

- 在 ∞附近:

$$f(\tau) = \frac{\alpha/q + \ldots}{\beta q^n + \ldots} = \frac{\gamma}{q^{n+1}} + \ldots.$$

- 在每个尖点 $s \notin \{s_1, \ldots, s_b, \infty\}$附近: 我们有

$$f(\tau) = \frac{\alpha q + \ldots}{\beta q^n + \ldots} = \frac{\gamma}{q^{n-1}} + \ldots.$$

因此, 我们得到

$$P(t) = \prod_{i=1}^{a} (t - t(w_i))^2 \prod_{i=1}^{b} (t - t(s_i))^{n+1}$$

and

$$Q(t) = \prod_{s \notin \{s_1, \ldots, s_b, \infty\}} (t - t(s))^{n-1}.$$

此外，比较 ∞ 在 $h'/t' = Q(t)/P(t)$ 中的阶可得

$$(n+1) = 2a + (n+1)b - (n-1)(\nu_\infty - (b+1)),$$

其中， ν_∞ 是 $\Gamma(m)$的不等价尖点数。因此，利用（4.1），可得

$$2d - 2 = (n-1)\nu_\infty.$$

注意，这实际上就是覆盖h： $X(m) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$的黎曼-赫尔维茨公式。

对于给定的层 m，我们可以获得关于 a 和 b 的更精确信息。

命题 4.1. 使用上述记号，对于每个正整数 n，有

（1）如果 $m = 2$，则

$$(a,b) \in \left\{ \left(\frac{3n-1}{2}, 0 \right), \left(\frac{n-1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

（2）如果 $m = 3$，则

$$(a,b) \in \{(2n-1, 0), (n-1, 1)\}.$$

(3) 若 $m = 4$，则

$$(a,b) \in \{(3n-2, 0), (2n-2, 1), (n-2, 2)\}.$$

(4) 最后，若 $m = 5$，则

$$(a,b) \in \{(n(6-k) - 5, k),\ 0 \le k \le 5\}.$$

证明。若 $m = 2$，则有 3 个不等价尖点，黎曼-赫尔维茨公式为 $2d = 3n-1$，这意味着 n为奇数。由于 $a+nb = d$，因此我们有 $2a+1 = n(3-2b)$。于是，要么 $b = 0$，从而得到 $a = (3n-1)/2$；要么 $b = 1$，这对应于 $a = (n-1)/2$。类似地，对于 $m = 3$，$\nu_\infty = 4$，进而 $a+nb = 2n-1$，我们可以将其改写为 $a+1 = n(2-b)$。因此， $b \in \{0, 1\}$，且 $(a,b) \in \{(2n-1, 0), (n-1, 1)\}$。其他情形也可类似地推出，因为对于 $n \ge 3$， $\nu_\infty = \frac{1}{2}n^2 \prod_{p|n,\ p\,prime} (1 - 1/p^2)$。 □

最后，通过对权2模形式 $h' = t'Q(t)/P(t)$ 积分，并选取上述命题中给出的适当有序对（a, b），即可得到 $\{h, \tau\} = 2\pi^2(n/m)^2 E_4$ 的解。显然，$t'Q(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 上不为零，而 $\mathbb{H}$ 中的极点是 w_i，其留数应为零。因此，$x_i = t(w_i)$、 $1 \le i \le a$ 是（3.1）型方程组的一个解。

让我们以 $m = 2$ 为例说明这一构造。群 $\Gamma(2)$ 有 3 个尖点，即 0、1 和 ∞。我们取将三元组 $(0, 1, \infty)$ 映射到三元组 $(1, 0, \infty)$ 的 $t = 1/\lambda$ 。

情形 1: 如果 $a = (3n-1)/2$ 且 $b = 0$，那么

$$h' = \frac{t' t^{n-1}(t-1)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{a}(t - t(w_j))^2}. \tag{4.2}$$

固定 $i \in \{1 \dots a\}$，并记 $h' = g/(t - t(w_i))^2$。那么

$$\mathrm{Res}(h', w_i) = \frac{g(w_i)}{t'(w_i)^2}\left(\frac{g'(w_i)}{g(w_i)} - \frac{t''(w_i)}{t'(w_i)}\right).$$

与此同时，

$$\frac{g'}{g} = \frac{t''}{t'} + (n-1)\frac{t'}{t} + (n-1)\frac{t'}{t-1} - \sum_{j \neq i}\frac{2t'}{t - t(w_j)}.$$

由此可得

$$\mathrm{Res}(h', w_i) = \frac{g(w_i)}{t'(w_i)}\left(\frac{n-1}{t(w_i)} - \frac{n-1}{t(w_i)-1} - \sum_{j \neq i}\frac{2}{t(w_i) - t(w_j)}\right).$$

因此，若设 $x_i = t(w_i)$，则 $(x_i)_{1 \le i \le a}$ 是代数方程组$E^a_{n-1,\ 1-n,\ -2}$的一个解。

情形 2：如果 $a = (n-1)/2$ 且 $b = 1$，那么根据在多项式 $P(t)$中取尖点 0 还是尖点 1，我们有两种子情形。对于 h'，有两种可能：

$$h'_1 = \frac{t' t^{n-1}}{(t-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{a}(t - x_j)^2} \quad \text{and} \quad h'_2 = \frac{t'(t-1)^{n-1}}{t^{n+1}\prod_{j=1}^{a}(t - x_j)^2}, \tag{4.3}$$

其中，$(x_i)_{1 \le i \le a}$ 分别是$E^a_{1-n,n+1,2}$ 和 $E^a_{n+1,1-n,2}$ 的解。注意，这两个函数的首项都是 q^n ，且它们的积分是 $\{h, \tau\} = \pi^2(n/2)^2 E_4(\tau)$ 的解。这意味着 h_1和 h_2互为线性分式。

例 4.2. 对于 $m = 2$ 和 $n = 3$， h'有三个解：

(1) 在 $\mathbb{H}$ 处有一个极点，并在尖点 0 处有一个极点：

$$h'_1 = \frac{t' t^2}{(t-x)^2(t-1)^4}.$$

$\mathbb{H}$ 中极点处的留数为零，这导致 $x = -1$。因此，我们得到解

$$h_1 = \frac{-1}{6}\frac{2t-1}{(t-1)^3(t+1)}.$$

(2) $\mathbb{H}$ 中有一个极点，尖点 1 处有一个极点:

$$h_2' = \frac{t'(t-1)^2}{(t-x)^2 t^4}.$$

当 $x = 2$ 时， $\mathbb{H}$ 中极点处的留数消失。原函数为

$$h_2 = \frac{-1}{6}\frac{2t-1}{t^3(t-2)}.$$

(3) $\mathbb{H}$ 中有四个极点，且尖点处没有极点:

$$h_3' = \frac{t't^2(t-1)^2}{\prod_{i=1}^4 (t-x_i)},$$

其中 x_1，.....， x_4 是以下方程的解

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i - 1} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

该代数方程组的解为（忽略排列顺序）:

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \pm \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \pm i\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

这些解是不可约多项式的根

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 2.$$

因此我们可以写成

$$h_3' = \frac{t't^2(t-1)^2}{(t^4-2t^3+4t-2)^2}, \quad h_3 = \frac{1}{12}\frac{t^3(t-2)}{t^4-2t^3+4t-2}.$$

注 4.3. 我们预期，对于每个 $1 \leq m \leq 5$，对偶组 (a, b) 的任意选择都会得到同一个施瓦茨微分方程$\{h, \tau\} = 2\pi^2(n/m)^2 E_4$的一个解，因此这些解彼此之间应为线性分式。这一点可由 $m = 2$ 和 $n = 3$ 的情形说明，在该情形下可以很容易地验证:

$$h_2 = \frac{h_1}{6h_1+1} \text{ and } h_3 = \frac{6h_1+1}{-72h_1+12}.$$

注 4.4. λ函数及其导数可以用雅可比θ函数表示。事实上，根据 [16, 第 7], 章，我们有

$$\lambda = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}, \quad \lambda' = i\pi\theta_4^4\lambda = i\pi\frac{\theta_2^4\theta_4^4}{\theta_3^4}.$$

因此

$$t = \frac{\theta_3^4}{\theta_2^4}\ , \quad t' = -i\pi \frac{\theta_3^4 \theta_4^4}{\theta_2^4}.$$

因此，我们可以看到，在一般的 2级 情形下，由于 n 是奇数，(4.2) 和 (4.3) 中的导数显然都是平方。这使我们能够轻松写出 h' 的平方根，其倒数是模微分方程 $y'' + \pi^2 (n/2)^2 E_4\, y = 0$ 的一个解。

References

[1] Z. Chen；C-S. Lin；Y. Yang. $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的三阶模常微分方程及其应用。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 18 (2022)，论文编号 013。[2] A. Elbasraoui；A. Sebbar. 等变形式：结构与几何。Canad. Math. Bull. 第 56 卷（3），（2013）520–533。[3] A. Elbasraoui；A. Sebbar. 有理等变形式。Int. J. Number Th. 08 第 4 期（2012），963–981。[4] C. Franc；G. Mason. 超几何级数、模线性微分方程与向量值模形式。The Ramanujan J. 41，233–267（2016）。[5] P. J. Grabner. 作为模微分方程解的准模形式。Int. J. Number Theory 16（2020），第 10 期，2233–2274。[6] A. Hurwitz，Adolf：论三阶微分方程，它们[7] M. Kaneko；M. Koike，论由超几何型微分方程产生的模形式。Ramanujan J. 7（2003），第 1–3 期，145–164。[8] M. Kaneko；K. Nagatomo；Y. Sakai。三阶模线性微分方程。J. Algebra 485（2017），332–352。[9]M. Kaneko；D. Zagier。超奇异 j-不变量、超几何级数与 Atkin 正交多项式。数论的计算视角（美国伊利诺伊州芝加哥，1995），97–126，AMS/IP Stud. Adv. Math.，7，Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，1998。[10] F. Klein，论乘子方程。（德文）Math. Ann. 15（1879），第 1 期，86–88。[11] A. Milas，Ramanujan 的“失落笔记”与 Virasoro 代数。Comm. Math. Phys. 251（2004），第 3 期，657–678。[12] S. Mathur，S. Mukhi 和 A. Sen，论有理共形场论的分类。Phys. Lett. B 213（1988），第 3 期，303–308。[13] J. McKay；A. Sebbar。福克斯群、自守函数与施瓦西导数。Math. Ann. 318（2），（2000）255–275。Ramanujan J（2008）17：405–427。[14] T. Nakaya。论某些模微分方程的模解与超奇异多项式。Ramanujan J. 48（2019），第 1 期，13—20。[15] Z. Nehari，（1949），施瓦西导数与单叶函数，《美国数学会通报》55（1949）545–551。[16] R. Rankin。《模形式与函数》，剑桥大学出版社，剑桥，1977。[17] G. Sansone，J. Gerretsen。《复变函数论讲义》。II，几何理论。Wolters–Noordhoff 出版社，格罗宁根，1969。

[18] H. Saber；A. Sebbar。自守施瓦氏方程。Forum Math. 32（2020），第 6 期，1621–1636。[19] H. Saber；A. Sebbar。自守施瓦氏方程与权 2 形式的积分。The Ramanujan J. 57（2022），第 2 期，551–568。[20] H. Saber；A. Sebbar。模施瓦氏方程的等变解，J. Math. Anal. Appl.，508（2022），第 2 期，论文编号 125887。[21] A. Sebbar；H. Saber。论模形式的临界点。J. Number Theory 132（2012），第 8 期，1780–1787。[22] A. Sebbar；H. Saber。等变函数与向量值模形式。Int. J. Number Theory 10（2014），第 4 期，949–954。[23] A. Sebbar；H. Saber。论向量值自守形式的存在性。Kyushu J. Math. 71（2017），第 2 期，271–285。[24] H. Saber；A. Sebbar。论某些超几何型微分方程解的模性。Bull. Aust. Math. Soc. 105（2022），第 3 期，385–391。[25] B. Van der Pol；论满足雅可比θ函数对数的非线性偏微分方程及其算术应用。I，II。Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A。$54 =$ Indagationes Math. 13，（1951）。261–271，272–284。

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Ha'il, Ha'il, Kingdom of Saudi Arabia

Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Ottawa Ontario K1N 6N5 Canada

电子邮箱地址：hicham.saber7@gmail.com

电子邮箱地址：asebbar@uottawa.ca