arXiv:2302.13504v1 [math.RA] 27 Feb 2023

强原始带势物种：目标与局限

奥伯沃尔法赫报告 ，2013年12月

DANIEL LABARDINI-FRAGOSO

Abstract. 这是我在奥伯沃尔法赫工作坊“簇代数及相关主题”（2013年12月8日至14日）所作报告的扩展摘要。本文基于我与 A. Zelevinsky 的合作成果（arXiv:1306.3495）。

本报告基于 [4]。我们定义强本原带势物种的变异，并证明：若 B 是任意一个 $n \times n$ 具有斜对称化子且其对角元两两互素的整数矩阵，那么对于任意给定的、希望执行的变异序列，都存在一个 A物种实现 B ，它具有一个势 S ，使得沿给定序列对 (A, S) 进行的变异与矩阵变异相容。

如果存在正整数 d_1、.....、d_n，使得 DB 是斜对称矩阵，其中 D =diag(d_1、.....、d_n)，则称 $n \times n$ 整数矩阵 B 为斜对称化矩阵。这样的 D 称为 B 的斜对称化子。

加权箭图是一个二元组 (Q, d)，其中 $Q = (Q_0, Q_1, t, h)$ 是无环箭图，而 $\mathsf{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ 是附加到 Q 的顶点上的正整数元组。我们称 d 为 (Q, d) 的权重元组。

若 B 是斜对称化矩阵，且其斜对称化子为 D，我们定义加权箭图 (Q_B, d) 如下： Q_B 的顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$，并且 Q_B 恰有

$$\frac{\gcd(d_i, d_j) b_{ij}}{d_j}$$

条从 j 指向 i 的箭，当且仅当 $b_{ij} \geq 0$。元组 d 定义为 D 的对角元组成的元组。

如果固定 D （因此也固定 d），很容易看出，赋值 $B \mapsto (Q_B, \mathsf{d})$ 在由 D 斜对称化的 $n \times n$整数矩阵集合与权重元组为 d 的 2-无环加权箭图集合之间构成双射。这意味着，矩阵变异这一概念有对应的加权箭图版本：

定义 1. 设 (Q, d) 是一个加权箭图。对于 $k \in Q_0$，定义 (Q, d) 关于 k 的变异为加权箭图 $\mu_k(Q, \mathsf{d})$，其顶点集为 Q_0 ，权重元组为 d；该图由执行以下 3 步程序得到：

（第 1 步）对于 Q 中的每一对箭 $a\colon\ j \to k$ 和 $b\colon\ k \to i$，引入最大公约数$(d_i,\ d_j)d_k$ 最大公约数$(d_i,\ d_k)$ 最大公约数$(d_k,\ d_j)$ 条从 j 指向 i 的“复合”箭；（第 2 步）将每一条与 k 相 incident 的 $c \in Q_1$ 替换为一条方向相反、指向 c^* 的箭；（第 3 步）选取一个极大的互不相交二圈集合，并将其移除。

令 d 为元组 $\mathbf{d} = (d_i)_{i\in Q_0}$ 的最小公倍数，F 为有限域，E 为 F 的唯一的 d 次域扩张。对于 $i \in Q_0$，令 F_i 为 E/F 的唯一的 d_i 次域子扩张；对于每一对顶点 i、$j \in Q_0$，令

$$A_{ij} = \bigoplus_{a:j\to i} F_i \otimes_{F_i\cap F_j} F_j.$$

定义

$$R = \bigoplus_{i\in Q_0} F_i \quad \text{and} \quad A = \bigoplus_{i,j\in Q_0} A_{ij}.$$

那么 R 是一个半单环，A 是一个 R-R 双模。我们称 A 为 E/F 上 $(Q, \mathbf{d})$ 的物种。

注 2. 数据 $((F_i)_{i\in Q_0}, (A_{ij})_{i,\ j\in Q_0}, (A^*_{ij})_{i,\ j\in Q_0})$ 构成了 B 的赋值箭图的一个物种（或调制），其含义见 Dlab-Ringel [3]，因此我们使用“物种”一词。

R 上 A 的完备张量代数称为 A 的完备路径代数，记作 $R\langle\langle A\rangle\rangle$。因此我们有

$$R\langle\langle A\rangle\rangle = \prod_{\ell=0}^{\infty} A^\ell$$

作为一个 R-R-双模，其中 A^ℓ 表示 ℓ 重张量积 $A\otimes_R \dots \otimes_R A$。如果某个元素 $S \in \prod_{\ell=1}^{\infty} A^\ell$ 满足 $S = \sum_{i\in Q_0} e_i S e_i$，其中 e_i 是位于 R 的 i^{th} 分量中的幂等元，我们就称 S 是 A 上的势，并称 (A, S) 是带势的物种。

从现在起，我们假设 $(Q, \mathbf{d})$ 是强本原的，也就是说，我们假设对所有 $i \neq j$，$\gcd(d_i, d_j) = 1$。我们还称 $(Q, \mathbf{d})$ 在 E/F 上的物种 A 也是强本原的；只要 S 是 A 上的势，就称 (A, S) 是带势的强本原物种。我们还假设 F 的特征模 d 同余于 1。这意味着存在一个元素 $v \in E$，使得集合 $\mathcal{B} = \{1, v, v^2, \dots, v^{d-1}\}$ 是 E/F 的特征基，也就是说，它是由伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中所有元素的特征向量组成的 F-基。这个特征基对于显式描述 $R\langle\langle A\rangle\rangle$ 中的元素非常有用；事实上，对于 $i \in Q_0$，令 $\mathcal{B}_i = \mathcal{B} \cap F_i$，我们有：

引理 3. 对于每个 $\ell \geq 0$，集合 $\{\omega_0 a_1 \omega_1 a_2 \dots \omega_{\ell-1} a_\ell \omega_\ell \mid t(a_m) = h(a_{m+1})$（其中 $m = 1, \dots, \ell-1$, $\omega_0 \in \mathcal{B}_{h(a_1)}$ 以及 $\omega_m \in \mathcal{B}_{t(a_m)}$ 对于 $m = 1, \dots, \ell\}$），其元素称为长度为 ℓ 的路径，是 A^ℓ 作为 F-向量空间的一个基。

因此， $R\langle\langle A\rangle\rangle$ 中的每个元素都可以唯一地表示为路径的、可能是无限的 F-线性组合。特别地，每个势都可以唯一地表示为正长度循环路径的、可能是无限的 F-线性组合。

给定一个无二圈强本原加权箭图 (Q,d) 和一个顶点$k \in Q_0$，对于 Q 中的每一对箭 $a\colon j \to k$ 和 $b\colon k \to i$，在关于 k 的加权箭图变异第一步中引入的复合箭记作 $[b\omega a]$，其中 ω 遍历集合 $\mathcal{B}_k$。

现在我们可以陈述强原始带势物种的变异规则。

定义 4. 设 (Q, d) 是一个无二圈强本原加权箭图，且 A 是其在 E/F上的物种。对于 $k \in Q_0$，令 $\widetilde{\mu}_k(A)$ 表示加权箭图 (Q, d) 仅经过加权箭图变异的前两个步骤后所得加权箭图在 E/F 上的物种。若 S 是 A上的一个势，则我们根据公式在 $\widetilde{\mu}_k(A)$上定义一个势 $\widetilde{\mu}_k(S)$

$$\widetilde{\mu}_k(S) = [S] + \sum_{\substack{a \\ \to k \to \\ b}} \sum_{\omega \in \mathcal{B}_k} \omega^{-1} b^* [b\omega a] a^*.$$

将 $(\widetilde{\mu}_k(A)\ \widetilde{\mu}_k(S))$ 的约化部分所对应的带势物种称为 (A, S) 关于 k 的变异，记作 $\mu_k(A, S)$。

关于约化部分的定义及其存在性的证明，请参阅 [4] 。注意， $\mu_k(A, S)$ 的底层物种仍然是强本原的，尽管其底层加权箭图可能含有有向二圈。

定义 5. 给定 Q 的顶点的一个有限序列 $(k_1, \ldots, k_m)$，若带势物种 (A, S)、$\mu_{k_1}(A, S)$、$\mu_{k_2}\mu_{k_1}(A, S)$、.....、$\mu_{k_m} \ldots \mu_{k_2}\mu_{k_1}(A, S)$ 的底层箭图均为 2-无环（因此定义良好），则称 (A, S) 是 $(k_m, \ldots, k_1)$-非退化的。

以下是本次报告的主要结果。

定理6。 [4] 若（Q, d）是无二圈强本原加权箭图，则对于 Q 的顶点的每个有限序列（$k_1, \ldots, k_m$），都存在一个有限次数域扩张 K/F，它与 E/F 线性不交，并且使得（Q, d）在 KE/K 上的物种 $A_{KE/K}$ 存在一个势 S，使得（$A_{KE/K}, S$）是（$k_1, \ldots, k_m$）-非退化的。

除了定理6之外，强原始带势物种的变异还具有许多与 Derksen-Weyman-Zelevinsky 带势箭图的变异相同的性质。例如，它们在右等价意义下定义良好，在右等价意义下是对合的，并且保持雅可比有限性。秉承 [2], 的理念，变异的概念进一步提升到了 [4] 表示论层面。

其关联加权箭图为强原始的斜对称矩阵类，包含若干完全不具备全局展开的矩阵（全局展开是指与所有可能的变异序列相容的展开）。因此，[4] 中的物种框架为若干簇代数（更确切地说，是这些簇代数的斜对称矩阵）提供了一种表示论方法，而基于展开的方法并不适用于这些代数。

那么，对于那些允许全局展开的矩阵呢？对于非强本原加权箭图上的带势物种，又该如何处理？第一个问题的答案来自 [1] L. Demonet 的工作。他提出了一种通过带势群物种进行变异的方法。群物种框架与我们上文介绍的框架不同之处在于，群物种将群代数而非域附加到 Q 的顶点上；因此，附加到箭上的双模在性质上也不同于 A_{ij} 上文提到的双模。带势群物种提供了一种表示论方法，可成功应用于那些能够通过群作用实现全局展开的矩阵。遗憾的是，对于不能实现全局展开的矩阵，则需要采用不同于群物种框架的框架。

关于第二个问题：如果不假设对所有 $i \neq j$都有 gcd(d_i, d_j)=1，就很容易构造一个加权箭图 (Q, d)，其中有一个二圈 ab 在 $R\langle\langle A\rangle\rangle$中循环等价于 0，这意味着箭 a和 b 都不属于物种 A 上任意势的雅可比理想，其中该物种是 (Q, d) 在 E/F上的物种。这意味着a和 b 都不能从 Q中删除。归根结底，这给出了一个二无圈物种（非强本原）的例子：无论在其上取何种势，当我们试图在带势物种层面执行加权箭图变异的三个步骤时，上文介绍的物种框架都无法从底层加权箭图中删除二圈。

References

[1] L. Demonet，《带势群物种的突变及其表示：在簇代数中的应用》，arXiv:1003.5078。[2] H. Derksen、J. Weyman、A. Zelevinsky，《带势箭图及其表示 I：突变》，Selecta Mathematica（新系列）14（2008），第1期，59–119。[3] V. Dlab、C.M. Ringel，《图与代数的不可分解表示》，Mem- oirs of the American Mathematical Society 6（1976），第173号，1–57。[4] D. Labardini-Fragoso、A. Zelevinsky，《强原始带势物种 I：变异》，arXiv:1306.3495。

Daniel Labardini-Fragoso
Instituto de Matemáticas, UNAM, Mexico电子
邮箱：labardini@im.unam.mx