arXiv:2302.13533v1 [math.AT] 27 Feb 2023

望远镜局部化代数 K-理论中的若干同伦不动点谱序列

DANIEL G. DAVIS

Abstract. 设 $n \geq 1$, p 为一个素数， $T(n)$为望远镜 $v_n^{-1}F(n)$ 的 Bousfield 类的任意代表，其中该望远镜对应于一个有限型 n 复形。此外，设 E_n 为 Lubin-Tate 谱， $K(E_n)$ 为其代数 K-理论谱，而 G_n 为扩展 Morava 稳定子群，这是一个仿有限群。受 Ausoni-Rognes 猜想的启发，我们证明存在两个谱序列

$$^{I}E_2^{s,t} \Longrightarrow \pi_{t-s}((L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}) \Longleftarrow {}^{II}E_2^{s,t}$$

它们的共同收敛项为连续同伦不动点 $L_{T(n+1)}K(E_n)$ 的 $\pi_*(-)$，其中 $^{I}E^{s,}{}_{2}{}^{t}$ 表示以某个离散 G_n-模塔为系数的连续上同调。若该塔满足 Mittag-Leffler 条件，则存在连续上链上同调群

$$^{I}E_2^{*,*} \cong H^*_{\mathrm{cts}}(G_n, \pi_*(L_{T(n+1)}K(E_n))) \cong {}^{II}E_2^{*,*}.$$

我们提出两个假设，其中第一个在 $(n,p) = (1,2)$ 时成立；这两个假设可推出 $(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} \simeq L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0)$。此外，我们证明存在一个谱序列

$$H^s_{\mathrm{cts}}(G_n, \pi_t(K(E_n)\otimes T(n+1))) \Longrightarrow \pi_{t-s}((K(E_n)\otimes T(n+1))^{hG_n}).$$

1. Introduction

1.1. 本文中的基本对象，以及将 $L_{T(n+1)}K(E_n)$ 表示为一个 G_n-谱。令 $n \geq 1$，令 p 为任意素数，并令 Sp 表示谱的对称幺半 ∞-范畴。令 $F(n)$ 表示一个有限型 n 复形，并令 $v_n^{-1}F(n)$ 表示 $F(n)$ 上一个 v_n- 自映射 v 的望远镜。根据 [25, 引理 4] 和 [33,第 103] 页， $v_n^{-1}F(n)$ 与 v 的选择无关，而 $v_n^{-1}F(n)$ 的 Bousfield 类与 $F(n)$ 和 v的选择无关。按照惯例，我们用 $T(n)$ 表示这个 Bousfield 类的一个代表。此外，给定一个环谱 A （即谱范畴 Sp 中的一个代数；也称为 $\mathbb{E}_1$-环谱），$K(A)$ 表示 A的代数K理论谱。

令 $K(n)$ 为第 n 阶 Morava K-理论谱，并令 E_n 为 Lubin-Tate 谱，其

$$\pi_*(E_n) = W(\mathbb{F}_{p^n})[[u_1, ..., u_{n-1}]][u^{\pm 1}],$$

其中，底域含有 p^n 个元素的 Witt 向量上的完备幂级数环位于 0 次，且 $|u| = -2$。此外，G_n 表示第 n 阶扩展 Morava 稳定子群，这是一个仿有限群，它通过交换代数映射作用于 E_n （有关更多背景信息，请参见 [19, 23, 24]）。与 [19, (1.4)], 中一样，令

$$G_n = U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq \cdots \supsetneq U_i \supsetneq \cdots$$

是 G_n 的开正规子群的一个递降链，其中 $\bigcap_{i\geq 0} U_i = \{e\}$。接着由 [19, 定理 1], [8, 节 8], [20], 和 [37, 定理 1.2], , 可得如下图表

$$E_n^{hG_n} = E_n^{hU_0} \to E_n^{hU_1} \to \cdots \to E_n^{hU_i} \to \cdots \tag{1.1}$$

在由连续同伦不动点谱构成的交换代数范畴 CAlg(Sp) 中。

如 [28, 命题 4.22；命题 7.10，(d)], 中所述，我们令

$$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \cdots \leftarrow M_j \leftarrow \cdots$$

为一个广义 Moore 谱塔：每个 M_j 都是类型为 $n+1$ 的有限原子 μ-谱，并且该塔具有如下性质：存在一个等价

$$L_{F(n+1)}Z \simeq \lim_{j\geq 0}(Z \otimes M_j),$$

对于任意谱 Z。令 $MU_{(p)}$表示 MU的 p-局部化。对于每个 j，存在一个由 p的幂组成的序列 $a(j)_0$， $a(j)_1$，...， $a(j)_n$，使得

$$(MU_{(p)})_*(M_j) \cong (MU_{(p)})_*/(v_0^{a(j)_0}, v_1^{a(j)_1}, ..., v_n^{a(j)_n})$$

通常写作

$$M_j = M(v_0^{a(j)_0}, v_1^{a(j)_1}, ..., v_n^{a(j)_n}).$$

如定义 2.3 中所回顾的（见 [39, 定义 2.6], [33]），我们用 L_{n+1}^f 表示通常称为“有限 $E(n+1)$-局部化” [35]的 Bousfield 局部化函子。现在我们可以陈述一个结果，我们在第 1.2 节中使用该结果来定义 $L_{T(n+1)}K(E_n)$的连续 G_n-同伦不动点。

定理 1.2. 对于每个 $n \geq 1$ 以及所有素数 p，存在一个等价

$$L_{T(n+1)}K(E_n) \simeq \lim_{j\geq 0}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)).$$

在上述等价的右侧——以及本文其他地方——我们使用“colim”表示 Sp 中的余极限；具有额外结构的 Sp 子范畴中的任何余极限都会明确标注。定理 1.2 的证明位于第 3 节，其中关键性地使用了来自 [31] 的一个深刻结果。

G_n在 E_n 上的作用在每个 $E_n^{hU_i}$上诱导出一个自然的 G_n/U_i作用，因此，对于每个 i 和 j， $K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j$ 都具有一个自然的 G_n/U_i作用，其中 G_n/U_i在 $L_{n+1}^f M_j$ 上平凡作用（并在砸积上对角作用）。由此可知，在定理 1.2 中，该等价是 G_n-等变的。

定义 1.3. 设 G 为任意仿有限群。按照 [11], ，记 Sh($\mathcal{T}_G$, Sp) 为 Grothendieck 位点 $\mathcal{T}_G$ 上的、取值于 Sp 的层的∞范畴；该位点由有限连续G集组成。同样按照 [op. cit.], ，$\mathrm{PSh}_\Pi(\mathcal{T}_G, \mathrm{Sp})$ 表示 $\mathcal{T}_G$ 上的谱的预层的 ∞范畴，这些预层将 $\mathcal{T}_G$ 中的有限余积映射为有限积（另见 [6,第 2] 节）；而 PSh($\mathcal{O}_G$, Sp) 则表示 G 的轨道范畴上的预层的 ∞范畴，其中该轨道范畴由 G 被开子群取商所得的对象组成。

根据 [19, 定理 1] 和 [8, 节 8], ，PSh($\mathcal{O}_{G_n}$, 谱范畴)中存在一个预层 F，其定义为

$$F\colon G_n/U \mapsto E_n^{hU}, \quad U \text{ an open subgroup of } G_n,$$

其中，与之前一样， E_n^{hU}是连续同伦不动点谱，而 F 实际上是一个交换代数预层。因此，在 PSh($\mathcal{O}_{G_n}$, Sp) 中有一个图表 $\{\mathcal{P}_j\}_{j\geq 0}$，其中每个预层 $\mathcal{P}_j$定义为

$$\mathcal{P}_j\colon G_n/U \mapsto K(E_n^{hU}) \otimes L_{n+1}^f M_j, \quad U \text{ an open subgroup of } G_n.$$

1.2. $L_{T(n+1)}K(E_n)$ 的连续同伦不动点及其相关的两个同伦不动点谱序列。若仿有限群G 存在某个整数 s_0，使得无论何时 $s > s_0$，连续上同调 $H_c^s(G, M) = 0$，且 M是任意离散的G-模，我们就称该群具有“有限上同调维数”。回顾一下， G_n 具有有限虚上同调维数：也就是说， G_n包含一个有限上同调维数的开子群 U。此外，正如第 4 节中回顾的（且更为一般地），如果

$$X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_i \to \cdots$$

这是一个 G_n-谱图表，满足对每个 i， G_n 在 X_i 上的作用都经由 G_n/U_i 因子化（即， U_i 在 X_i 上平凡作用），那么就有连续同伦不动点谱 $(\operatorname{colim}_{i\geq 0} X_i)^{hG_n}$，它由某些熟知的余单纯谱的 $\{i \geq 0\}$-指标余极限的全体化给出。

现在自然可以给出以下定义，它沿用了代数 K 理论中一种熟悉的模板（例如，参见 [22, 命题 3.1.2、3.1 的最后一段，以及定理 4.2.6] 的证明）。

定义 1.4. 令 $n \geq 1$，并令 p 为任意素数。存在连续同伦不动点谱

$$(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} := \Big(\lim_{j\geq 0}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)\big)\Big)^{hG_n},$$

其中右侧由下式给出

$$\Big(\lim_{j\geq 0}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)\big)\Big)^{hG_n} := \lim_{j\geq 0}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)\big)^{hG_n}.$$

对每个 $j \geq 0$，由定理 4.2，存在一个等价

$$\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)\big)^{hG_n} = (\operatorname*{colim}_{i\geq 0} \mathcal{P}_j(G_n/U_i))^{hG_n} \simeq \widetilde{\mathcal{P}_{j_\Pi}}(*)$$

$\widetilde{\ }$ 与预层 $\mathcal{P}_{j_\Pi}$ 在 PSh$_\Pi$($\mathcal{T}_{G_n}$, 谱范畴) 中的波斯特尼科夫层化 $\mathcal{P}_{j_\Pi}$ 的整体截面等价；该预层由 $\mathcal{P}_j$ 诱导。

为陈述下一个结果（其证明见第 5 节），我们需要引入以下记号。给定一个仿有限群 G 和一个由离散 G-模组成的塔 $\{A_j\}_{j\geq 0}$，记 $H^*_{\mathrm{cont}}(G; \{A_j\}_{j\geq 0})$为 Jannsen 意义下的连续上同调[29]，并记 $H^*_{\mathrm{cts}}(G, \lim_{j\geq 0} A_j)$为以给定的拓扑 G-模为系数的连续链上同调。此外，若 $X^\bullet$ 是一个余单纯谱，则记 ${}^{II}E^{s,\ t}_2$ 为相应同伦谱序列的 E_2项

$${}^{II}E_2^{s,t} := \lim_{\Delta}{}^s \pi_t(X^\bullet) \Longrightarrow \pi_{t-s}(\mathrm{Tot}(X^\bullet)).$$

定理 1.5. 设 $n \geq 1$，并令 p 为任意素数。存在条件收敛的同伦不动点谱序列

$${}^{I}E_2^{s,t} = H^s_{\mathrm{cont}}(G_n; \{\pi_t(K(E_n) \otimes v_{n+1}^{-1} M_j)\}_{j\geq 0}) \Longrightarrow \pi_{t-s}((L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n})$$

and

$${}^{II}E_2^{s,t} \Longrightarrow \pi_{t-s}((L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}).$$

若塔 $\{\pi_t(K(E_n)\otimes v_{n+1}^{-1}M_j)\}_{j\geq 0}$ 对每个 $t \in \mathbb{Z}$都满足 Mittag-Leffler 条件，则对所有 $s \geq 0$，有同构

$${}^{I}E_2^{s,*} \cong H^s_{\mathrm{cts}}(G_n, \pi_*(L_{T(n+1)}K(E_n))) \cong {}^{II}E_2^{s,*},$$

其中，对于每个 t, $\pi_t(L_{T(n+1)}K(E_n)) \cong \lim_{j\geq 0} \pi_t(K(E_n) \otimes v_{n+1}^{-1} M_j)$。

对于任意带有平凡 G_n-作用的谱 X，关于 $\pi_*((L_{K(n)}(E_n \wedge X))^{hG_n})$ 存在两个同伦不动点谱序列，分别对应定理 1.5 中的两个谱序列；但根据 [17, 定理 1.2], ，与强收敛的 $\pi_*(L_{K(n)}X)$ 的 (n)-局部 E_n-Adams 谱序列同构的是第二个谱序列，它具有自身特有的${}^{II}E^{*,\ 2}$。构造这个 Adams 型谱序列的一个要素是 E_n 是一个交换代数。类似地， $K(E_n)$ 是一个交换代数，而且似乎可以合理地认为，一般而言，定理 1.5 中的第二个谱序列具有更好的性质。此外，根据 [8, 第 4 节6], ，某些情况下，定理 1.5 中的 ${}^{II}E^{s,\ 2}{}^{t}$ 可能等于定理中所述的连续上链上同调群，而其底层离散 G_n-模的塔并不满足 Mittag-Leffler 条件。

由于 F 可视为交换代数层，因此在 PSh($\mathcal{O}_{G_n}$, Sp) 中有如下预层 $L^f_{n+1} \circ K \circ F$:

$$G_n/U \mapsto L^f_{n+1}K(F(G_n/U)) = L^f_{n+1}K(E_n^{hU}), \quad U \text{ an open subgroup of } G_n,$$

它诱导出图表

$$L^f_{n+1}K(E_n^{hU_0}) \to L^f_{n+1}K(E_n^{hU_1}) \to \cdots \to L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}) \to \cdots,$$

其中，对于每个 i， G_n/U_i 作用于 $L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i})$，因此存在连续同伦不动点谱

$$(\operatorname{colim}_{i\geq 0} L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}.$$

下一个结果的证明见第 5 节；该结果利用这一最后的谱说明 $(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}$ 是 $T(n+1)$-局部的。

定理 1.6. 对于每个 $n \geq 1$ 以及所有素数 p，存在一个等价

$$(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} \simeq L_{T(n+1)}((\operatorname{colim}_{i\geq 0} L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}).$$

1.3. $(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}$ 与涉及 $K(E_n)^{hG_n}$的 Ausoni-Rognes 猜想之间的潜在关系。定理 1.5 中的谱序列使人联想到 Ausoni-Rognes 猜想（[2, (0.1)], [1, 第 46 页; 备注 10.8]; 另见密切相关的 [3, 猜想 4.2]），该猜想指出：(a) $K(n)$-局部单位映射 η: $L_{K(n)}S^0 \to E_n$ 诱导出一个映射

$$K(L_{K(n)}S^0) \to K(E_n)^{hG_n},$$

本文将其称为 K_τ，其目标 $K(E_n)^{hG_n}$ 是一个同伦不动点谱，其构造与 G_n上的逆极限拓扑相容；并且 (b) 映射

$$K_\tau \otimes T(n+1)\colon K(L_{K(n)}S^0) \otimes T(n+1) \to K(E_n)^{hG_n} \otimes T(n+1)$$

是一个等价，因此 K_τ是一个 $T(n+1)$-等价。

注 1.7。 K_τ 中的 τ 表示“转置”，因为 $K(n)$-局部化的单位

$$E_n^{hG_n} \xleftarrow{\simeq} L_{K(n)}S^0$$

交换代数的映射是一个等价，由 [19, 定理 1], 可得

$$K(E_n^{hG_n}) \xleftarrow{\simeq} K(L_{K(n)}S^0),$$

这意味着在 E_n的情况下， K_τ 会切换 $K(-)$ 和 $(-)^{hG_n}$。

注记 1.8。目前，对于每个 n 和 p，尚无已发表的 $K(E_n)^{hG_n}$ 或映射 K_τ的构造。在 [14, 注记 1.5], 中提到，根据 Jacob Lurie 的说法，Dustin Clausen 和 Peter Scholze 的凝聚数学可用于将 $K(E_n)$ 定义为凝聚谱；在此基础上，可以在凝聚语境中给出 $K(E_n)^{hG_n}$ 的候选定义。同样（参见 [同上]），通过将 $K(E_n)$ 视为结化谱， [5, 第 3 节1], 应当可以得到 $K(E_n)^{hG_n}$的"凝聚候选"的结化版本。

注记 1.9。严格来说，上文所提到的 Ausoni-Rognes 猜想预测 $K_\tau \otimes v_{n+1}^{-1}F(n+1)$ 是一个等价，但这在逻辑上等同于 $K_\tau \otimes T(n+1)$ 是一个等价。

由交换方形

$$\begin{array}{ccc} K(L_{K(n)}S^0) & \xrightarrow{K_\tau} & K(E_n)^{hG_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0) & \xrightarrow{L_{T(n+1)}K_\tau} & L_{T(n+1)}(K(E_n)^{hG_n}), \end{array}$$

在这个交换方形中，竖直映射作为通常的局部化，是 $T(n+1)$-等价。由此可见，若上述 Ausoni-Rognes 猜想的 (a) 部分成立，则 (b) 部分成立当且仅当 $L_{T(n+1)}(K_\tau)$ 是一个等价。这使人不禁思考下列对象之间的关系：

$$L_{T(n+1)}(K(E_n)^{hG_n}) \text{ and } (L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}$$

以及 {v1} 与 {v2} 之间是否存在等价

$$(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} \text{ and } L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0).$$

下面的结果，其证明见第 6 节，给出了两个假设；当这两个假设同时满足时，可以推出上文最后两个谱等价。若有限群 H 作用在一个谱 Z 上，我们令 $\prod_{H^\bullet} Z$ 表示所诱导的余单纯谱；更多细节见第 4 节。此外，对于每个 $i \geq 0$，我们令

$$K(\eta \nearrow i)\colon L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n}) \to (L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}$$

是自然映射。

定理 1.10。设 $n \geq 1$，且 p 是一个素数。如果

（H1）映射

$$\operatorname*{colim}_{i\geq 0} K(\eta \nearrow i)\colon L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n}) \to \operatorname*{colim}_{i\geq 0}(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}$$

是一个 $T(n+1)$-等价，并且

（H2）对于每个 $j \geq 0$，典范映射

$$\operatorname*{colim}_{i\geq 0} \operatorname{Tot}(C(n,j,i)^\bullet) \to \operatorname{Tot}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} C(n,j,i)^\bullet)$$

是一个等价，其中对于每个 i,

$$C(n,j,i)^\bullet := \textstyle\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j),$$

于是存在一个等价

$$(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} \simeq L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0).$$

当 $n=1$ 和 $p=2$时，备注 1.11 表明 (H1) 成立，但 (H2) 是否成立仍未有定论。对于满足 $\neq$(1, 2) 的数对 (n,p)，目前尚不清楚 (H1) 和 (H2) 是否成立；下文将对此作一些探讨。

备注 1.11. 映射 $K(\eta\nearrow 0)$ 是一个等价；要证明 (H1) 成立，只需证明对于 $\{i\geq 0\}$ 的一个共尾子列 $i_0, i_1, ..., i_l, ...$，每个映射 $K(\eta\nearrow i_l)$ 都是一个等价。对于每个 i，典范映射 $E_n^{hG_n}\to E_n^{hU_i}$ 是一个 $K(n)$-局部 G_n/U_i-伽罗瓦扩张 [40, 定理 5.4.4, (c)], ，因此，例如由 (2.7) 可知，该映射也是一个 $T(n)$-局部 G_n/U_i-伽罗瓦扩张，正如第 4 节 [13, 所述3]。根据 [同前引文，推论 4.16], ，若 G_n/U_i 是一个 p-群，则 $K(\eta\nearrow i)$ 是一个等价。当 (n,p) =(1, 2) 时， $G_1\cong\mathbb{Z}_2^\times\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$/(2) 是一个原 2-群，且 $\mathbb{Z}_2$ 等于 2-进整数，因此 (H1) 成立。

这是 Ausoni 和 Rognes 提出的 [3, 猜想 4.2], 的一个特例：对于所有n、 p和 i, 典范映射

$$L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n})\to L_{T(n+1)}(K(E_n^{hU_i})^{hG_n/U_i})$$

是一个等价。尽管“猜想 4.2”通常仍未解决，但这一猜想，以及 [13, 第 1, 4], 节中的结果，尤其是 [前引文的推论 4.16] ——该结果曾用于备注 1.11——以及 [12, 定理 1.3、1.8、1.10、5.1、5.6], ，这些结果包括对“猜想 4.2”特例的验证，为或许能在所有情形下验证 (H1) 带来了希望。

为强调一般情况下 (H1) 的合理性，我们简要介绍上述进展中提到的 [13, 例 4.17] 。设 E 是一个 Lubin-Tate 理论，其扩张^Morava 稳定子群为 $G_n^{\mathrm{ex}}\cong S_n\rtimes\mathbb{Z}$，其中 S_n 是 Morava 稳定子群，$\backsim\mathbb{Z}$ 是整数的有限生成完备化；对于 K 的任意闭子群 G_n^{ex}，令 E^{hK} 表示连续同伦不动点。如 [7, 第 5.1 、 5.2], 节所述， E^{hK} 的构造使用了 [19]。现在取 U 为G_n^{ex}的一个开子群，使得 $U\cap S_n$ 是 pro-p。根据 [13, 推论 4.16] ，对于任意的开子群正规包含 $V'\lhd V\subset U$ [12], ，典范映射

$$L_{T(n+1)}K(E^{hV})\xrightarrow{\simeq}(L_{T(n+1)}K(E^{hV'}))^{hV/V'}$$

是一个等价，由此在 site $\mathcal{T}_U$ 上得到一个 $T(n+1)$-局部谱层。

如定义 4.3 所述，对于每个 $j\geq 0$，第 1.1 节的预层 $\mathcal{P}_j$满足“条件 (iv)”且取值于 $\mathcal{N}=\{U_i\mid i\geq 0\}$ 时，(H2) 成立（“条件 (iv)”基于 [11]）。与此相关的一个常见问题是：证明同伦谱序列的滤过余极限的收敛项等于这些谱序列的收敛项的余极限（例如，参见 [36, 第 3.1 节。3]）。给定任意 j，对每个 i，都有同伦不动点谱序列 $\{{}_j^iE_r^{*,*}\}_{r\geq 1}$，其形式为

$${}_j^iE_2^{s,t}=H^s(G_n/U_i,\pi_t(K(E_n^{hU_i})\otimes L_{n+1}^fM_j))\Rightarrow\pi_{t-s}\big((K(E_n^{hU_i})\otimes L_{n+1}^fM_j)^{hG_n/U_i}\big).$$

那么，对每个 j，若存在某个 $r\geq 2$ 和某个整数 s' 使得以下条件成立，则 (H2) 有效

$${}_j^iE_r^{s,t}=0,\ \text{for all } i\geq 0,\ s>s',\ t\in\mathbb{Z}.$$

1.4. 不使用塔时与 Ausoni-Rognes 猜想可能存在的联系。下一个结果可由以下定义直接推出（例如， [8, 定理 3.2.1]和 [15, 定理 7.9]）。

定义 1.12。令 $n \geq 1$，并令 p 等于任意一个素数。回顾一下， $T(n+1)$ 表示 Bousfield 类 $v_{n+1}^{-1}F(n+1)$ 的任意一个代表元，其中 $F(n+1)$ 是任意有限型 $n+1$ 复形。由于

$$K(E_n) \otimes T(n+1) \simeq \operatorname*{colim}_{i \geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes T(n+1)),$$

其中，对每个 i， $T(n+1)$ 的副本都赋予平凡的 G_n/U_i 作用，因此自然可以定义连续同伦不动点谱

$$(K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n} := \left(\operatorname*{colim}_{i \geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes T(n+1))\right)^{hG_n},$$

根据定义 1.4，它是波斯特尼科夫层化的整体截面。

定理 1.13. 对每个 $n \geq 1$ 和一个素数 p，存在一个条件收敛的同伦不动点谱序列

$$E_2^{s,t} = H_c^s(G_n, \pi_t(K(E_n) \otimes T(n+1))) \Longrightarrow \pi_{t-s}((K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n}),$$

其中，对每个 $t \in \mathbb{Z}$， $\pi_t(K(E_n) \otimes T(n+1))$ 是一个离散的 G_n-模。

根据 [1, 第 46 页；注 10.8], ，Ausoni-Rognes 猜想预言存在一个同伦不动点谱序列

$$H_c^s(G_n, \pi_t(K(E_n) \otimes v_{n+1}^{-1}F(n+1))) \Longrightarrow \pi_{t-s}(K(L_{K(n)}S^0) \otimes v_{n+1}^{-1}F(n+1)), \tag{1.14}$$

因此，自然会提出以下问题：

- 当 $T(n+1) := v_{n+1}^{-1}F(n+1)$ 时，定理 1.13 中的谱序列与猜想中的谱序列 (1.14) 具有相同的 E_2-项。前一个谱序列是否是后一个谱序列的一种实现?
- 一般而言，是否存在一个等价
$$K(L_{K(n)}S^0) \otimes T(n+1) \text{ and } (K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n}?$$
- .....之间有什么关系
$$(K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n} \text{ and } K(E_n)^{hG_n} \otimes T(n+1)?$$

下面的结果给出了两个条件，在这些条件下，上述第一个和第二个问题的答案为“是”。

定理 1.15. 设 $n \geq 1$，令 p 为素数，并令 $T(n+1)$ 等于 $v_{n+1}^{-1}F(n+1)$，其中 $F(n+1)$ 是一个原子 μ-谱。如果

(H1′) *the map* $\operatorname*{colim}_{i \geq 0} K(\eta \nearrow i)$ *is a* $T(n+1)$*-equivalence, and*

(H2′) *the canonical map* $\operatorname*{colim}_{i \geq 0} \mathrm{Tot}(C(n,i)^\bullet) \to \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{i \geq 0} C(n,i)^\bullet)$ *is an equivalence, where for each* i, $C(n,i)^\bullet := \prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i}) \otimes T(n+1))$,

那么存在一个等价

$$(K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n} \simeq K(L_{K(n)}S^0) \otimes T(n+1).$$

定理 1.15 的证明见第 6 节。当 $(n,p) = (1,2)$ 时，根据备注 1.11，假设 (H1′) 成立；但对于所有其他的对 (n,p)，尚不知 (H1′) 或 (H2′) 是否成立。

下一个结果的证明见第 5 节。其推论是：如果将 $F(n+1)$ 选为一个原子的 μ-谱，那么（根据注 2.2），令 $T(n+1)$ 等于 $v_{n+1}^{-1}F(n+1)$ 后，$(K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n}$ 是 $T(n+1)$-局部的。

定理 1.16. 当 $n \geq 1$, p是一个素数，且 $T(n+1) := v_{n+1}^{-1}F(n+1)$，其中$F(n+1)$是任意有限型 $n+1$ 复形时，存在等价

$$\begin{aligned}(K(E_n) \otimes T(n+1))^{hG_n} &\simeq (\operatorname{colim}_{i\geq 0} L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n} \otimes F(n+1)\\ &\simeq (\operatorname{colim}_{i\geq 0} L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n} \otimes T(n+1)\\ &\simeq (L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} \otimes T(n+1).\end{aligned}$$

令 $n=1$、 $p \geq 5$，并令 $V(1)$ 表示 2 型 Smith-Toda 复形 $S^0/(p, v_1)$。在 [14], 中，我们在单纯集合的对称谱这一框架下构造了连续同伦不动点 $(K(E_1) \wedge v_2^{-1}V(1))^{h\mathbb{Z}_p^\times}$。在对称谱中，这个 $(K(E_1) \wedge v_2^{-1}V(1))^{h\mathbb{Z}_p^\times}$ 与 $\left(\operatorname{colim}_{i\geq 0}(K(E_1^{hU_i}) \wedge v_2^{-1}V(1))\right)^{hG_1}$ 之间应当存在一串弱等价——后者是定义 1.12 中构造的 $K(E_1) \wedge v_2^{-1}V(1)$ 的连续同伦不动点模型，但我们尚未完成关于这串弱等价的工作。在 [14], 中，我们还为 $(K(E_1) \wedge v_2^{-1}V(1))^{h\mathbb{Z}_p^\times}$ 得到了一个同伦不动点谱序列，其 E_2 项等于定理 1.13 给出的谱序列的 E_2项（其中令 $T(2)$ 等于 $v_2^{-1}V(1)$）；这两个谱序列理应同构，但我们的工作尚未完成，因为它与前面提到的那串弱等价密切相关。

致谢。我感谢 Martin Frankland 与我讨论 $L_{T(n)}$，感谢 Niko Naumann 向我介绍定义 4.3 中“条件 (iv)”的一个版本，感谢 Akhil Mathew 和 John Rognes 的有益交流，也感谢 Philip Hackney 和 Justin Lynd 就如何与 ∞-范畴合作进行了富有启发性的讨论。

2. Some basic facts about $T(n)$-localization

如引言所述， $n \geq 1$, p 是任意素数，而 $F(n)$ 是一个有限型 n 复形。此外，依照 [28, 命题 4.22], ，我们令

$$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \cdots \leftarrow M_j \leftarrow \cdots$$

成为一个广义 Moore 谱塔，其中每个 M_j 都是 n 型有限的（此处类型为 n，而非引言中的类型 $n+1$），并且是一个原子 μ-谱。正如第 1.1 节所回顾的，这个塔的一个特点是，对于任意 $Z \in$ 谱范畴，

$$L_{F(n)}Z \simeq \lim_{j\geq 0}(Z \otimes M_j).$$

给定一个有限型 0 复形 $F(0)$，我们令 $T(0) := v_0^{-1}F(0)$ 表示 $F(0)$ 上某个 v_0-自映射的望远镜。因此， $T(0)$ 和 $H\mathbb{Q}$ 具有相同的 Bousfield 类。

注 2.1. 假设 $F(n)$ 是一个原子 μ-谱。那么， $F(n)$ 以及根据引理 2.2], 的证明，望远镜 $v_n^{-1}F(n)$ 都是“环谱”，其含义见 [33] （另见 [18]）。这里，我们所说的“环谱”，是指谱的同伦范畴中的左幺半群胚（不必满足结合律或右幺性）。因此， $T(n)$ 可以在上述意义下取为一个“环谱”。由此值得特别强调的是，引理 2.3] 的证明得出了强得多的结果： $T(n)$ 可以设为 Sp 中的一个代数。

注 2.2。再次设 $F(n)$ 是一个原子的 μ-谱，因此如注 2.1 所述，$v_n^{-1}F(n)$ 是一个“环谱”。那么，若 Z 是任意一个谱， $Z \otimes v_n^{-1}F(n)$ 就是 $T(n)$-局部的。要验证这一点，只需证明等价谱 $v_n^{-1}F(n) \otimes Z$

是 $v_n^{-1}F(n)$-局部的（因为 $v_n^{-1}F(n)$ 和 $T(n)$ 具有相同的 Bousfield 类），而这一结论可由以下观察得到：[38, 对命题 1.17 的证明中的论证 (a)] 在此处同样适用。该论证也适用于此情形，这一点在引理 2.2] 证明的倒数第三段中也有提及。

我们继续用 $F(n)$ 表示有限型 n 复形，它不一定是原子的 μ-谱。我们回顾一些标准记号（例如，参见 [33,定义 3.1]）。

定义 2.3。对于每个 $n \geq 1$ 以及每个素数 p，L_n^f 表示由谱 $T(0) \oplus T(1) \oplus \cdots \oplus T(n)$ 确定的 Bousfield 局部化函子。根据 [33,推论 3.5]，L_n^f 是 smashing。

注 2.4。根据 [33, 命题 3.2], ，存在一个等价

$$L_n^f F(n) \simeq v_n^{-1}F(n).$$

我们认为以下结果相当广为人知（例如，参见 [9, 3.2；定理 3.3] 和 [27, 推论 2.2]），但我们不知道文献中有哪处参考资料能在本文的设定和定义下清晰易懂地阐述这一结果，因此我们给出证明。我们从[21, 事实 2.11, 2] 了解到这一结果；当 $Z = S^0$时，该结果即为 [33, 命题 5.1]。

定理 2.5. 给定 $Z \in$ 谱范畴、$n \geq 1$以及 p 任意素数，存在一个等价

$$L_{T(n)}Z \simeq L_{F(n)}L_n^f Z.$$

证明。由于 L_n^f 是 smashing 的，并且如 [33, 命题 5.1], 中所示，存在由望远镜构成的图表$\{v_n^{-1}M_j\}_{j\geq 0}$，因此存在等价

$$L_{F(n)}L_n^f Z \simeq \lim_{j\geq 0}(Z \otimes L_n^f M_j) \simeq \lim_{j\geq 0}(Z \otimes v_n^{-1}M_j).$$

每个 M_j都是一个原子的 μ-谱，因此每个 $Z\otimes v_n^{-1}M_j$都是 $T(n)$-局部的，从而上面显示的三个表达式都是 $T(n)$-局部的。现在我们只需证明复合

$$Z \to L_n^f Z \to L_{F(n)}L_n^f Z$$

典范映射是一个 $T(n)$-等价。

我们固定 $T(n)$ 的一个选择：令

$$T(n) = v_n^{-1}M_0 = \operatorname*{colim}_{k\geq 0} \Sigma^{-kd}M_0,$$

其中 d 是由用于构造望远镜的自映射所确定的一个固定整数。如注 2.2 中所述，由于 M_0 是一个原子的 μ-谱，[38, 命题 1.17 的证明中的论证，(a)] 表明 $L_n^f S^0 \otimes Z \otimes \Sigma^{-kd}M_0$ 是 M_0-局部的，因而也是 $F(n)$-局部的，因为 M_0 和 $F(n)$ 具有相同的 Bousfield 类（见 [26, 第 5]页），对所有 $k \geq 0$均如此。这证明了下面等价链中的第三步；其中第一步使用了 $\Sigma^{-kd}M_0$ 是一个有限谱这一事实：

$$\begin{aligned}
(L_{F(n)}L_n^f Z) \otimes T(n) &\simeq \operatorname*{colim}_{k\geq 0}\lim_{j\geq 0}(L_n^f S^0 \otimes Z \otimes M_j \otimes \Sigma^{-kd}M_0) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{k\geq 0} L_{F(n)}(L_n^f S^0 \otimes Z \otimes \Sigma^{-kd}M_0) \simeq \operatorname*{colim}_{k\geq 0}(L_n^f S^0 \otimes Z \otimes \Sigma^{-kd}M_0) \\
&\simeq L_n^f S^0 \otimes Z \otimes T(n) \simeq Z \otimes L_n^f T(n) \simeq Z \otimes L_n^f(L_n^f M_0) \simeq Z \otimes L_n^f M_0 \\
&\simeq Z \otimes T(n).
\end{aligned}$$

由此可知，上述复合是一个 $T(n)$-等价。 □

备注 2.6。在 [13, 第 4 节3], 中，作者按照 [40] 的定义研究 $T(n)$-局部和 $T(n)$-局部 pro-Galois 扩张。上面的定理 2.5 表明， $T(n)$ 满足 [8, 假设 1.03] ，因此 [8] 可用于研究“$T(n)$-局部 profinite Galois 扩张”（尤其是一致且具有有限虚上同调维数的扩张）；这类扩张与 $T(n)$-局部 pro-Galois 扩张略有不同。

如在 [35, 节 3], 所设

$$K(\leq n) := K(0) \oplus K(1) \oplus \cdots \oplus K(n),$$

其中 $K(0) = H\mathbb{Q}$，并且按照惯例，令 L_n 表示 Bousfield 局部化函子 $L_{K(\leq n)}$。注意，给定一个 p-局部谱 Z，典范的 $K(\leq n)$-等价 $L_n^f Z \to L_n Z$ （见 [33, 第 113] 页）在 Z 为 $K(\leq n)$-局部时是一个等价，因为存在等价

$$L_n^f Z \simeq L_n^f S^0 \otimes Z \simeq L_n S^0 \otimes L_n^f S^0 \otimes Z \simeq L_n L_n^f Z \xrightarrow{\simeq} L_n L_n Z \simeq Z.$$

因此，若谱 Z 是 $K(\leq n)$-局部的，则存在等价

$$L_{K(n)} Z \simeq L_{F(n)} L_n Z \xleftarrow{\simeq} L_{F(n)} L_n^f Z \simeq L_{T(n)} Z, \tag{2.7}$$

其中第一步和最后一步分别应用了 [28, 命题 7.10，(e)] 和定理 2.5。(2.7) 中的观察并非原创：它见于 [4, 节 3]以及 [31, 推论 4.20 的证明，(iv)], ，后一个出处给出了证明。

3. A proof of Theorem 1.2

我们继续令 $n \geq 1$ 和 p 表示一个素数。令

$$A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$$

是 ∞-范畴 $\mathcal{A}_{T(n)}$ 中 $T(n)$-局部环谱的一个图表。该图表在 $\mathcal{A}_{T(n)}$ 中的余极限 $\operatorname{colim}_{i\geq 0}^{\mathcal{A}_{T(n)}} A_i$ 满足

$$\operatorname{colim}_{i\geq 0}^{\mathcal{A}_{T(n)}} A_i \simeq L_{T(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} A_i)$$

在 $\mathcal{A}_{T(n)}$中。接下来，Land、Mathew、Meier 和 Tamme 提出的 [31, 推论 4.31], 的一个特例，是这样一个非凡的事实：存在一个等价

$$L_{T(n+1)} K(\operatorname{colim}_{i\geq 0}^{\mathcal{A}_{T(n)}} A_i) \simeq L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} L_{T(n+1)} K(A_i))$$

在谱范畴 Sp 中，这简化为

$$L_{T(n+1)} K(L_{T(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} A_i)) \simeq L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} K(A_i)) \tag{3.1}$$

在谱范畴 Sp 中。

现在我们回顾一下，(1.1) 是交换代数范畴 CAlg(Sp) 中的图表 $E_n^{hG_n} = E_n^{hU_0} \to E_n^{hU_1} \to \cdots$，并且由于遗忘函子 CAlg(Sp) $\to$Sp 对于这样的图表能够检测 CAlg(Sp) 中的余极限 [32, 推论 3.2.3.2],，存在一个等价

$$E_n \simeq L_{K(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} E_n^{hU_i})$$

（参见 [19, 定义 1.5、引理 6.2 及其证明、命题 6.4]）。

对于每个 i， $E_n^{hU_i}$ 都是 $K(n)$-局部的，因此 $E_n^{hU_i}$ 是 $T(n)$-局部的，而 $\operatorname{colim}_{i\geq 0} E_n^{hU_i}$ 是 E_n- 局部的。于是根据 (2.7),

$$L_{K(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} E_n^{hU_i}) \simeq L_{T(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} E_n^{hU_i}).$$

此外，(1.1) 是 $\mathcal{A}_{T(n)}$ 中的一个图，因此等价 (3.1) 得出

$$L_{T(n+1)}K(E_n) \simeq L_{T(n+1)}K(L_{T(n)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} E_n^{hU_i})) \simeq L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} K(E_n^{hU_i})).$$

回顾这一塔

$$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \cdots \leftarrow M_j \leftarrow \cdots$$

来自第 1.1 节中的 $n+1$ 广义 Moore 谱。于是由定理 2.5，存在一个等价

$$L_{T(n+1)}K(E_n) \simeq \lim_{j\geq 0}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L_{n+1}^f M_j)),$$

由此完成定理 1.2 的证明。

4. Continuous homotopy fixed points and Postnikov sheafification

本节简要回顾连续同伦不动点谱的一些背景知识，并对其与谱的（预）层之间的关系作一些观察。

令 G 为任意仿有限群。令 $\mathcal{N}$ 为 G 的一族开正规子群，且该族在所有 G 的开正规子群中是共终的。假设 $\{X_N\}_{N\in\mathcal{N}}$ 是一个 G-谱图，对于 $\mathcal{N}$ 中的每个包含 $N' \subset N$，该图都恰有一个映射 $X_N \to X_{N'}$；并且对每个 $N \in \mathcal{N}$， X_N 上的 G 作用都经由 G/N 分解。于是余极限 $_{N\in\mathcal{N}} X_N$ 具有诱导的 G 作用，存在连续同伦不动点谱 $(\text{余极限}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hG}$，并且如果满足以下条件之一

（i） G 具有有限虚上同调维数；（ii）存在一个固定整数 m，使得对于所有$s > m$、 $t \in \mathbb{Z}$和 $N' \in \mathcal{N}$， $H_c^s(N', \pi_t(\operatorname{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)) = 0$；以及（iii）存在一个固定整数 r，使得对于所有 $t > r$， $\pi_t(\operatorname{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N) = 0$

成立，则由 [8, 定理 3.2.1；第 5038 页：第 2 段]和 [16, 第 911], 页可知，存在一个等价

$$(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hG} \simeq \operatorname{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}}(\textstyle\prod_{(G/N)^\bullet} X_N)), \tag{4.1}$$

其中，对于每个 N， $\prod_{(G/N)^\bullet} X_N$是一个满足下述条件的余单纯谱

$$\operatorname{Tot}(\textstyle\prod_{(G/N)^\bullet} X_N) \simeq (X_N)^{hG/N},$$

其中 $(\prod_{(G/N)^\bullet} X_N)([0]) = \prod_{(G/N)_0} X_N = X_N$，并且对于每个 $n \geq 1$,

$$(\textstyle\prod_{(G/N)^\bullet} X_N)([n]) = \prod_{(G/N)^n} X_N$$

是由集合 $(G/N)^n$索引的 X_N 的副本之积，即 G/N的副本的 n重积。众所周知，可用于此讨论的余单纯谱$\prod_{(G/N)^\bullet} X_N$并不唯一。

一般而言（也就是说，即使条件 (i)–(iii) 均不满足），与余极限$_{N\in\mathcal{N}} X_N$ 相关联的是预层 $\mathcal{P} \in \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_G$,谱范畴), 定义如下:

$$G/U \mapsto \mathcal{P}(G/U) := (\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hU}, \quad U \text{ an open subgroup of } G,$$

其中，$(\operatorname{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hU}$是连续的 U-同伦不动点（例如，参见 [8, 命题 3.3。1] 以及 [6, 第 2]节）。该预层可典范地扩展为 $\mathrm{PSh}_\Pi(\mathcal{T}_G, \mathrm{Sp})$ 中的预层 $\mathcal{P}_\Pi$， 将 $\mathcal{T}_G$ 中的有限余积映射为 Sp 中的有限积。

反过来，设 $\mathcal{F}$ 是 PSh($\mathcal{O}_G$, Sp) 中的一个预层，因此对每个$N \in \mathcal{N}$， $\mathcal{F}$(G/N) 都具有一个自然的 G-作用，该作用可分解为经过 G/N-作用，并且通常，后一个作用给出余单纯谱 $\prod_{(G/N)} \bullet \mathcal{F}(G/N)$。~令 $\mathcal{F}_\Pi \in$ Sh($\mathcal{T}_G$, Sp) 表示由 $\mathcal{F}$诱导的、位于 PShΠ($\mathcal{T}_G$, Sp) 中的典范预层$\mathcal{F}_\Pi$ 的波斯特尼科夫层化。于是根据 [11, 构造 4.6、命题 4.9],的证明，

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Pi(*) \simeq \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}_\Pi((G/N)^{\bullet+1})),$$

其中，对每个 N，$(G/N)^{\bullet+1}$ 是 $\mathcal{T}_G$ 中与 G/N 相关联的通常单纯对象。对于每个 $n \geq 0$， G 中任意 $(G/N)^{n+1}$ 元素在 G-作用下的稳定子子群都是 N，因此存在同构 $(G/N)^{n+1} \cong \coprod_{(G/N)^n} G/N$ 于 $\mathcal{T}_G$ 中。由此可得一个等价

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Pi(*) \simeq \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^\bullet} \mathcal{F}(G/N))$$

（例如，参见 [11, 对命题 4.9 的证明，以及命题 4.11] 中的 (7)。）

$N' \subset N$ 在 $\mathcal{N}$ 中的每个包含都会诱导投影 $\pi\colon G/N' \to G/N$ 于 $\mathcal{O}_G$ 中，以及映射 $\mathcal{F}(\pi)\colon \mathcal{F}(G/N) \to \mathcal{F}(G/N')$；其源和靶配备诱导的 G-作用后，该映射是 G-等变的。因此，如本节开头所述，$\mathrm{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N)$ 带有 G-作用。

以下结果可由上文直接推出。

定理 4.2. 设 G 为仿有限群，且 $\mathcal{F} \in$ PSh($\mathcal{O}_G$, Sp)，其中 $\mathcal{F}(G/N)$ 对每个 $N \in \mathcal{N}$都带有自然的 G/N-作用。若 G和 $\mathrm{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N)$ 满足条件 (i)–(iii) 之一，则

$$(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N))^{hG} \simeq \widetilde{\mathcal{F}}_\Pi(*),$$

其中，这个等价右侧是 $\mathcal{F}_\Pi$ 的波斯特尼科夫层化的整体截面。

定义 4.3. 给定仿有限群 G 和 $\mathcal{F} \in$ PSh($\mathcal{O}_G$,Sp)，我们将“条件 (iv)”定义为

(iv) 存在某个整数 $d \geq 0$，使得对每个 $N \in \mathcal{N}$， G/N 在 $\mathcal{F}(G/N)$ 上的作用都是弱 d-幂零的。

关于“弱 d-幂零”的含义，请读者参见 [11, 定义 4.8] 。我们考虑条件 (iv) 的部分动机来自 [同上，第 4.9、4.16], 命题，以及 [同上，第 4.16 命题、定理 4.26（参见其证明及定理 4.25 上方的段落）；这些结果给出了可推出条件 (iv) 成立的情形。满足该条件时， [同上，引理 2.34]给出

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\Pi(*) \simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathrm{Tot}(\prod_{(G/N)^\bullet} \mathcal{F}(G/N)) \simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N)^{hG/N}.$$

现在，我们通过以下结果将本节讨论的各个方面整合起来。

定理 4.4. 设 G 是一个仿有限群，并假设 $\{X_N\}_{N\in\mathcal{N}}$ 是一个 G-谱图表，其中每当 $N' \subset N$ 属于 $\mathcal{N}$ 时，都恰有一个映射 $X_N \to X_{N'}$，且满足：对于每个 $N \in \mathcal{N}$， X_N 上的 G-作用都经由 G/N 分解。设 $\mathcal{F}_\Pi$ 是预层 $\mathcal{F}_\Pi \in$ PShΠ($\mathcal{T}_G$, 谱范畴) 的波斯特尼科夫层化，该预层由以下预层确定

$$\mathcal{F}\colon G/U \mapsto (\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hU}, \quad U \text{ an open subgroup of } G.$$

若 G、余极限$_{N\in\mathcal{N}}X_N$和 $\mathcal{F}$ 满足条件 (i)–(iv) 中的任意一个，则存在等价

$$(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hG} \simeq \widetilde{\mathcal{F}}_{\Pi}(*) \simeq \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^\bullet} X_N).$$

证明。一般而言（也就是说，即使条件 (i) – (iv) 均不成立），对每个$n \geq 0$，都有等价关系

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^n} \mathcal{F}(G/N) &\simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^n} \big(\operatorname*{colim}_{N'\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N')\big)\\ &= \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^n} \big(\operatorname*{colim}_{N'\in\mathcal{N}} \big(\operatorname*{colim}_{N''\in\mathcal{N}} X_{N''}\big)^{hN'}\big)\\ &\simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^n} (\operatorname*{colim}_{N''\in\mathcal{N}} X_{N''}) \simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^n} X_N,\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了 [8, 命题 3.3.1：(2)、(3)], ，因此（同样，一般而言）有等价关系

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\Pi}(*) \simeq \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^\bullet} \mathcal{F}(G/N)) \simeq \mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \prod_{(G/N)^\bullet} X_N).$$

结合本节开头的讨论，这最后两个等价关系推出：当 (i)、(ii) 或 (iii) 成立时，定理的结论成立。

现在假设条件 (iv) 成立：所需结论由最后两个等价关系以及

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\Pi}(*) \simeq \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{F}(G/N)^{hG/N} = \operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} \big((\operatorname*{colim}_{N'\in\mathcal{N}} X_{N'})^{hN}\big)^{hG/N} \simeq (\operatorname*{colim}_{N\in\mathcal{N}} X_N)^{hG},$$

推出，其中最后一步利用了对每个 N,

$$\big((\operatorname*{colim}_{N'\in\mathcal{N}} X_{N'})^{hN}\big)^{hG/N} \simeq (\operatorname*{colim}_{N'\in\mathcal{N}} X_{N'})^{hG},$$

这一事实；见 [同上，命题 3.3.1，(4)]。 □

5. Proofs of Theorems 1.5、1.6 和 and 1.16的证明

设 n 为任意正整数， p 为一个素数。此外，设 $\{M_j\}_{j\geq 0}$ 为第 1.1 节中所述的有限型 $n+1$ 谱的塔。

现在我们证明定理 1.5。令 $j \geq 0$：由注 2.4， $L^f_{n+1}M_j \simeq v_{n+1}^{-1}M_j$，从而

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i}) \otimes L^f_{n+1}M_j) &\simeq L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0} K(E_n^{hU_i})) \otimes v_{n+1}^{-1}M_j\\ &\simeq (L_{T(n+1)}K(E_n)) \otimes v_{n+1}^{-1}M_j \simeq K(E_n) \otimes v_{n+1}^{-1}M_j.\end{aligned}$$

此外，根据 [33, 命题 5.1] 和定理 2.5，存在一个塔 $\{v_{n+1}^{-1}M_j\}_{j\geq 0}$ ，并且作为一个塔，它与 $\{L^f_{n+1}M_j\}_{j\geq 0}$逐层等价。由此可见，定理 1.5 是 [22, 命题 3.1.2], [15, 定理 8.5、8.8], 和 [29, 定理 2.2]的直接推论。

为证明定理 1.6，我们在 [8, 第 6 节.1] 的记号中令“T”等于$T(0)\oplus T(1)\oplus\cdots\oplus T(n+1)$。我们有

$$
\begin{aligned}
(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n} &\simeq \lim_{j\geq 0}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i})\otimes M_j)\big)^{hG_n}\\
&\simeq \lim_{j\geq 0}\big((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))\otimes M_j\big)^{hG_n}\simeq \lim_{j\geq 0}\big((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}\otimes M_j\big)\\
&\simeq L_{F(n+1)}((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n})\simeq L_{F(n+1)}L^f_{n+1}((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n})\\
&\simeq L_{T(n+1)}((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}),
\end{aligned}
$$

其中，第一步是因为 L^f_{n+1} 是 smashing；第三步源于这样一个事实：每个 M_j 都是有限谱，且 G_n 具有有限虚上同调维数（例如，参见 [36, 命题 3.10] 和 [8, 定理 3.2.1]）；由于 $\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i})$ 是 T-局部的（因为 L^f_{n+1} 是 smashing），根据 [8, 引理 6.1.5], 的证明，$(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}$是 T-局部的，这就得到了第五步；而定理 2.5 给出了最后一步。定理 1.6 的证明至此完成。

我们继续沿用上述背景，并证明定理 1.16：给定任意一个 $F(n+1)$ 的选择，其中 $T(n+1)$ 现在设为 $v_{n+1}^{-1}F(n+1)$,

$$
\begin{aligned}
(K(E_n)\otimes T(n+1))^{hG_n} &\simeq \operatorname{Tot}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\textstyle\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i})\otimes L^f_{n+1}F(n+1))\big)\\
&\simeq \big(\operatorname{Tot}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\textstyle\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))\big)\otimes F(n+1)\\
&\simeq (\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}\otimes F(n+1)\\
&\simeq L^f_{n+1}((\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n})\otimes F(n+1)\\
&\simeq (\operatorname*{colim}_{i\geq 0}L^f_{n+1}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n}\otimes T(n+1)\\
&\simeq (L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}\otimes T(n+1),
\end{aligned}
$$

其中，第二个等价运用了 $F(n+1)$ 是有限谱这一事实；第四个等价采用了上文为定理 1.6 证明的第五步所给出的论证；最后一个等价则由定理 1.6 得出。在这一系列等价表达式中，第一、第四、第六和第七个正是定理 1.16 明确要求的表达式。

6. How the two hypotheses give $(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n}\simeq L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0)$

本节证明定理 1.10。此外，由于这一证明有助于验证相关的定理 1.15，我们将在给出前一个结果的证明后，再证明后一个结果。

设 $n\geq 1$，其中 p 可取任意素数。令 $\{M_j\}_{j\geq 0}$ 为第 1.1 节中的广义 Moore 谱塔，其中每个 M_j 都是类型为 $n+1$ 的有限谱，且是原子的 μ-谱； $T(n+1)$ 表示 $v_{n+1}^{-1}M_0$ 的 Bousfield 类的一个代表。我们假设以下两个陈述成立：

(H1) 映射

$$\operatorname*{colim}_{i\geq 0}K(\eta\nearrow i)\colon L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n})\to \operatorname*{colim}_{i\geq 0}(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}$$

是一个 $T(n+1)$-等价。

(H2) 对每个 $j \geq 0$，若对所有$i \geq 0$都有 $C(n,j,i)^\bullet := \prod_{(G_n/U_i)} \bullet(K(E_n^{hU_i}) \otimes L^f_{n+1}M_j)$，则典范映射 $\operatorname{colim}_{i\geq 0}\operatorname{Tot}(C(n,j,i)^\bullet) \to \operatorname{Tot}(\operatorname{colim}_{i\geq 0} C(n,j,i)^\bullet)$ 是一个等价。

为证明定理 1.10，我们对每个假设只使用一次，并分别用“由 (H1)”和“应用 (H2)”标明其用法。

由注 2.2，对于每个 j 和任意谱 Z，$Z \otimes v_{n+1}^{-1}M_j$ 是 $T(n+1)$-局部的，因此由注 2.4，$Z \otimes L^f_{n+1}M_j$ 是 $T(n+1)$-局部的。此外，对于所有 j 和 Z，

$$Z \otimes L^f_{n+1}M_j \simeq (L_{T(n+1)}Z) \otimes L^f_{n+1}M_j,$$

因为 $Z \otimes L^f_{n+1}M_j \simeq (L_{L^f_{n+1}M_j}Z) \otimes L^f_{n+1}M_j$。

我们论证中一个有用的工具是自然等价

$$Z^{hH} \simeq L_{T(n+1)}(Z_{hH}) = L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_H Z),$$

其中 Z 是任意一个带有有限群 H ([30, 的作用的 $T(n+1)$-局部谱（定理 1.5], 的部分证明见 [34]; [10, 第 1], [30, 节第 350] 页对此结果有一些有用的表述）。H 对 Z 的作用诱导出图表 $BH \to$ 谱范畴 $^{T(n)}$，其中谱范畴 $^{T(n)}$ 是 ∞- 范畴，其对象为 $T(n)$-局部谱；在上述等价中，最右侧的表达式是该图表的余极限。

根据 (H1)，映射 $(\operatorname{colim}_{i\geq 0} K(\eta_{\nearrow i})) \otimes T(n+1)$ 是一个等价，这意味着对于每个 j，映射 $\operatorname{colim}_{i\geq 0}(K(\eta_{\nearrow i}) \otimes L^f_{n+1}M_j)$ 都是一个等价：也就是说，典范映射

$$(L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n})) \otimes L^f_{n+1}M_j \to \operatorname*{colim}_{i\geq 0}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i} \otimes L^f_{n+1}M_j)$$

是等价。这就完成了等价链中的最后一步

$$\begin{aligned} L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0) &\simeq \lim_{j\geq 0}(K(E_n^{hG_n}) \otimes L^f_{n+1}M_j) \\ &\simeq \lim_{j\geq 0}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hG_n})) \otimes L^f_{n+1}M_j) \\ &\simeq \lim_{j\geq 0}\operatorname*{colim}_{i\geq 0}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i} \otimes L^f_{n+1}M_j). \end{aligned}$$

现在，我们固定非负整数 i 和 j，并考虑

$$(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i} \otimes L^f_{n+1}M_j.$$

同伦不动点与 $(-) \otimes L^f_{n+1}M_j$ 可交换，从而得到自然等价

$$(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i} \otimes L^f_{n+1}M_j \simeq ((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i})) \otimes L^f_{n+1}M_j)^{hG_n/U_i},$$

因为同伦轨道与 $(-)\otimes L^f_{n+1}M_j$ 可交换。更详细地说，我们有

$$\begin{aligned}(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}\otimes L^f_{n+1}M_j &\simeq L_{T(n+1)}(\text{余极限}_{G_n/U_i}L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j\\ &\simeq (\operatorname*{colim}_{G_n/U_i}L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j\\ &\simeq L_{T(n+1)}((\operatorname*{colim}_{G_n/U_i}L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j)\\ &\simeq L_{T(n+1)}(\operatorname*{colim}_{G_n/U_i}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j))\\ &\simeq ((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j)^{hG_n/U_i}.\end{aligned}$$

由于 $((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))\otimes L^f_{n+1}M_j)^{hG_n/U_i}\simeq(K(E_n^{hU_i})\otimes L^f_{n+1}M_j)^{hG_n/U_i}$，我们得到自然等价

$$(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}\otimes L^f_{n+1}M_j\simeq \mathrm{Tot}(C(n,j,i)^\bullet).$$

将前两段的结论结合起来，然后进一步推进，我们得到

$$\begin{aligned}L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0)&\simeq\lim_{j\geq 0}\operatorname*{colim}_{i\geq 0}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}\otimes L^f_{n+1}M_j)\\ &\simeq\lim_{j\geq 0}\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\mathrm{Tot}(C(n,j,i)^\bullet)\simeq\lim_{j\geq 0}\mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}C(n,j,i)^\bullet)\\ &\simeq\lim_{j\geq 0}\big(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i})\otimes L^f_{n+1}M_j)\big)^{hG_n}=(L_{T(n+1)}K(E_n))^{hG_n},\end{aligned}$$

其中第三个等价使用了 (H2)，第四个等价使用了 (4.1)。

现在我们证明定理 1.15。我们继续沿用上文的约定，但现在定义 $T(n+1):=v_{n+1}^{-1}F(n+1)$，其中 $F(n+1)$ 是一个原子 μ-谱。我们假设以下两个陈述成立：

(H1′) The map $\operatorname*{colim}_{i\geq 0}K(\eta\nearrow i)$ is a $T(n+1)$-equivalence.

(H2′) The canonical map $\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\mathrm{Tot}(C(n,i)^\bullet)\to\mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}C(n,i)^\bullet)$ is an equivalence, where for each i, $C(n,i)^\bullet:=\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1))$.

每个假设我们只使用一次，并用“根据 (H1′)”和“根据 (H2′)”标记其使用处。

我们有

$$\begin{aligned}(K(E_n)\otimes T(n+1))^{hG_n}&\simeq\mathrm{Tot}(\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\textstyle\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1)))\\ &\simeq\operatorname*{colim}_{i\geq 0}\mathrm{Tot}(\textstyle\prod_{(G_n/U_i)^\bullet}(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1)))\\ &\simeq\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1))^{hG_n/U_i},\end{aligned}$$

其中第一个等价应用了 (4.1)，第二个等价则由 (H2′) 得出。由于 $F(n+1)$ 是一个原子 μ-谱，根据注 2.2，对于任意谱 Z，$Z\otimes T(n+1)$ 都是 $T(n+1)$-局部的。因此，与上述定理 1.10 的证明一样，存在一个自然等价

$$(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1))^{hG_n/U_i}\simeq(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}\otimes T(n+1),$$

对每个 i 都成立。现在我们得出结论：

$$\begin{aligned}(K(E_n)\otimes T(n+1))^{hG_n} &\simeq \operatorname*{colim}_{i\geq 0}(K(E_n^{hU_i})\otimes T(n+1))^{hG_n/U_i}\\ &\simeq \operatorname*{colim}_{i\geq 0}((L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i}\otimes T(n+1))\\ &\simeq (\operatorname*{colim}_{i\geq 0}(L_{T(n+1)}K(E_n^{hU_i}))^{hG_n/U_i})\otimes T(n+1)\\ &\simeq L_{T(n+1)}K(L_{K(n)}S^0)\otimes T(n+1)\simeq K(L_{K(n)}S^0)\otimes T(n+1),\end{aligned}$$

其中倒数第二步依据 (H1′)。

References

[1] Christian Ausoni 和 John Rognes。拓扑 K-理论分式域的代数 K-理论。54 页，arXiv:0911.4781，2009年。[2] Christian Ausoni 和 John Rognes。拓扑 K-理论的代数 K-理论。 *Acta Math.*，188 1 1( ): –39，2002年。[3] Christian Ausoni 和 John Rognes。代数 K *Guido's* -理论中的色调红移。载于 , , 卷 页 – 15。2008年。[4] Tobias Barthel。望远镜猜想与色调分裂猜想简论。载于 *Bousfield Classes and Ohkawa's Theorem*，第 261–273 页。施普林格，新加坡，2020年。[5] Clark Barwick 和 Peter Haine。Pyknotic对象 I：基本概念。39 页，arXiv:1904.09966v2；2019年4月30日。[6] Mark Behrens。 tmf的构造。载于 *Topological modular forms*，第 131–188 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014年。[7] Mark Behrens。建筑、椭圆曲线与 $K(2)$-局部球面。 *Amer. J. Math.*，129 6 1513( ): –1563，2007年。[8] Mark Behrens 和 Daniel G. Davis。仿有限 Galois 扩张的同伦不动点谱。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，362(9):4983–5042，2010年。[9] A. K. Bousfield。空间的望远镜同伦论。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，353 6 2391( ): –2426，2001年。[10] Dustin Clausen 和 Akhil Mathew。望远镜塔特消失的简短证明。 *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 12 5413 5417, 2017 , ( ): – 。[11] Dustin Clausen 和 Akhil Mathew。超下降与 ´étale K- 理论。 *Invent. Math.*，225 3 981( ): –1076，2021年。[12] Dustin Clausen、Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。代数 K-理论中的下降与 Ausoni–Rognes 猜想。 *J. Eur. Math. Soc.*，22(4):1149–1200，2020年。[13] Dustin Clausen、Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。通过群作用实现色代数 K-理论中的下降与消失，即将发表于 *Annales scientifiques de l'Ecolenormale supérieure*，arXiv:2011.08233v2，48 页；2022年11月8日。[14] Daniel G. Davis。构造 Ausoni-Rognes 猜想诸多基例中的一些对象。32 页，arXiv:2005.04190v3；2020年12月12日。[15] Daniel G. Davis。利用连续作用求 $L_{K(n)}\ E_n\wedge X$ *J.* ( ) 的同伦不动点。 , ( ): – 。[16] Daniel G. Davis。仿有限群的同伦不动点模拟离散群的同伦不动点。 *New York J. Math.*，19:909–924，2013年。[17] Daniel G. Davis 和 Takeshi Torii。每个 $K(n)$-局部谱都是其 Morava 模的同伦不动点。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，140(3):1097–1103，2012年。[18] Ethan S. Devinatz。小环谱。 *J. Pure Appl. Algebra*，81(1):11–16，1992年。[19] Ethan S. Devinatz 和 Michael J. Hopkins。Morava稳定子群闭子群的同伦不动点谱。 *Topology*，43(1):1–47，2004年。[20] Halvard Fausk。原谱的等变同伦论。 *Geom. Topol.* 12 1 103 176, , ( ): 2008 – 。[21] Martin Frankland。望远镜猜想的等价表述，一篇介绍性札记；2011 年 4 月 7 日；10 页。

[22] Thomas Geisser 和 Lars Hesselholt。概形的拓扑循环同调。载于 *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)* 67 *Proc. Sympos. Pure Math.* 41 87 ，卷，第 – 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年。[23] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins。交换环谱的模空间。载于 *Structured ring spectra* 315 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 151 200 ，卷，第 – 页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[24] Paul G. Goerss 和 Michael J. Hopkins。单纯算子上的单纯代数的 André-Quillen（上）同调。载于 *Une dégustation topologique [Topological mini-bites]: homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999)* 41 85 ，第 – 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。[25] Michael J. Hopkins。同伦论中的整体方法。载于 *Homotopy theory (Durham, 1985)* 117 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 73 96 ，卷，第 – 页。剑桥大学出版社，剑桥，1987年。[26] Michael J. Hopkins 和 Jeffrey H. Smith。幂零性与稳定同伦论 II。*Ann.* ，( ): – 。[27] Mark Hovey。*of Math. (2)* 148 1 1 49, 1998
Bousfield 局部化函子与 Hopkins色分裂猜想。载于 *The Čech centennial (Boston, MA, 1993)*，第 225–250 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1995年。[28] Mark Hovey 和 Neil P. Strickland。Morava K *Mem. Amer. Math.* -理论与局部化。，( ):viii，。*Soc.* 139 666 +100 1999
[29] Uwe Jannsen。连续 étale 上同调。 *Math. Ann.*，280(2):207–245，1988年。[30] Nicholas J. Kuhn。多项式函子的 Tate上同调与周期局部化。*Invent.* ，*Math.* 157 2 345 370, 2004
( ): – 。[31] Markus Land、Akhil Mathew、Lennart Meier 和 Georg Tamme。色调局部化代数 K-理论中的纯性，arXiv:2001.10425v4；2022年3月24日；26 页。[32] Jacob Lurie。高等代数，2017年9月18日；可于 www.math.ias.edu/∼lurie 获取。[33] Mark Mahowald 和 Hal Sadofsky。v_n *Duke* -望远镜与 Adams谱序列。，*Math. J.* 78 1 101
( ): –129，1995年。[34] Mark Mahowald 和 Paul Shick。稳定同伦论中的根不变量与周期性。*Bull. London Math. Soc.*，20(3):262–266，1988年。[35] Haynes Miller。有限局部化，纪念 José Adem 的论文（西班牙语）。*Bol. Soc. Mat.* ，(-): – 。[36] Stephen A. *Mexicana (2)* 37 1 2 383 389, 1992
Mitchell。超上同调谱与 Thomason下降定理。载于 *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)* 221 277 ，第 – 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。[37] Gereon Quick。Lubin-Tate 谱的连续同伦不动点。*Homology Homotopy Appl.* 15 1 191 222, 2013 ，( ): – 。[38] Douglas C. Ravenel。关于某些周期同调论的局部化。*Amer.* ，( ): – 。[39] Douglas C. *J. Math.* 106 2 351 414, 1984
Ravenel。望远镜猜想之后的生活。载于 *Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)* 407 ，*NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys.* 卷，第 – 页。Kluwer学术出版社，多德雷赫特，。[40] John Rognes。结构化环谱的 Galois 扩张。载于 *Sci.* 205 222 1993 *Galois extensions of structured ring spectra/Stably dualizable groups* *Mem. Amer. Math. Soc.* . 192 898 1 ，见，卷（），第 –97 页，2008年。

University of Louisiana at Lafayette, Department of Mathematics, Lafayette, Lou-isiana, USA*Email address*: dgdavis@louisiana.edu