楔形文字数字图书馆预印本

<http://cdli.ucla.edu/?q=cuneiform-digital-library-preprints>由楔形文字数字图书馆倡议主办 (<http://cdli.ucla.edu>) 编辑：Bertrand Lafont（法国国家科学研究中心，楠泰尔）

第5期

标题：美索不达米亚的浮点计算 作者：Christine Proust 发布到网络：2016年5月2日

美索不达米亚的浮点计算

Christine Proust[1]（法国国家科学研究中心与巴黎第七大学，SPHERE实验室与SAW项目）

摘要 – 4000年前，美索不达米亚的书吏学校发展出了精密的计算方法。这些计算方法的基础，可以从由在书吏学校接受教育的年轻学生写下的泥板中发现。乍看之下，学校泥板所载的数学练习似乎十分简单，也相当熟悉，因此鲜少引起数学史学家的关注。然而，若仔细审视这些朴素的文字，就会发现其简单表象具有欺骗性。这种熟悉感主要源于我们将自身早期学习中根深蒂固的思维模式投射到了过去。仔细观察学校泥板，便会发现古代与现代关于数、量、计量单位、位序、整除性、算法等概念之间存在细微差异。事实上，我们发现了一个规则自成一体、完全独创的数学世界。本文结合初等教育所教授的数学基础，探讨学术环境中形成的计算实践。

目录

1- 楔形文字数学.3
2- 数量级问题.3
3- 公元前18世纪左右尼普尔教授的数学.6
来源.6
尼普尔的初等课程.6
度量衡表.7
倒数表.8
4- 计算与量化.10
面积与体积的计算.11
5- 浮点计算实践：若干示例.12
求一个数的倒数.12
浮点数与固定值：圆盘面积示例.15
6- YBC 4663 中的线性与二次问题.17
乘法与倒数.17
加法的介入.19
7- 数的数量级与个位位置.22
附录：数与计量单位.23
1- 数.23
2- 计量单位.24
3- *MesoCalc*，一台美索不达米亚计算器.24
来源.25
参考书目.25

[1] 本研究成果的相关研究经费由欧盟第七框架计划（FP7/2007-2013）下的欧洲研究委员会资助（ERC 资助协议第 269804 号）。本文是 Proust《美索不达米亚的浮动计算》的英文译本，原文发表于《数学家公报》138 卷，第 23-48 页（2014）。本英文版本于 2015年6月22日 在里昂高等师范学院举行的“Arith 22”会议上发表。关于楔形文字数学、书吏学校和位值记数法的一般信息，专家们早已熟知。然而，本文提出的一些论点，尤其是关于六十进位值记数法中测量值与数之间对偶性的论述，属于个人观点，尚未达成共识（更多详情见[11]）。

1- 楔形文字数学

美索不达米亚数学史直到近代才开始受到关注。1930年，法国亚述学家 François Thureau-Dangin 和奥地利裔美国数学家 Otto Neugebauer 首次发表了刻写在泥板上的楔形文字数学文本，数学史的研究前景因此发生了巨大变化。历史学家发现，古代近东在欧几里得之前一千多年就已发展出高度精密的数学。楔形文字数学既是历史最悠久的数学，也是史学编纂领域最新的研究对象。

数百块刻有楔形文字的泥板，为我们了解迄今留存下来的最早期数学提供了极其丰富的资料。这些泥板绝大多数可追溯至古巴比伦时期（约公元前2000—1600年）。[2] 少量泥板的年代更早（第三个千年的后半期）或更晚（第一个千年晚期），尤其值得关注，因为它们揭示了与古巴比伦时期截然不同的数学实践。

一般而言，发表于1930年代和1940年代的数学泥板，其确切出处无从得知。它们大多出土于非法发掘，并于20世纪初由大型欧洲和美国博物馆或私人收藏家从古董商手中购得。不过，有时数学泥板也来自合法发掘，相关记录更为详尽：例如，乌尔、尼普尔、苏萨、马里以及美索不达米亚北部迪亚拉河谷若干遗址出土的泥板便是如此。近年来，已知数学泥板的语料库显著扩大，这得益于对大量学校泥板的系统出版；这些泥板在博物馆库房中积存数十年，却一直未引起历史学家的兴趣。如今，已出版的泥板数量已超过2000块。

2- 数量级问题

这门古代数学最引人注目的特点之一，是使用六十进位值记数法（下文简称 SPVN——参见附录 1c）。这种数制专用于数学文本，但在其他类型的文本中也能找到使用 SPVN 的痕迹，例如在行政文书或商业交易中，这些痕迹主要以涂写遗存的形式出现。六十进位值记数法不仅为楔形文字数学史学家所熟知，[3] 也为天文学史学家所熟知。事实上，源自美索不达米亚的六十进位记数法曾用于以希腊语、拉丁语、阿拉伯语、叙利亚语、希伯来语、梵语、汉语以及许多其他语言撰写的天文学论著中，现代欧洲语言也曾沿用这种记数法，直至不久以前。六十进制有一点我们并不陌生，因为我们至今仍用它来计量时间和角度。

然而，这种熟悉感具有迷惑性。古代与现代六十进位值记数法表面上的相似之处背后，隐藏着细微却深刻的差异。为了说明这些差异的重要性，我们只需强调古代六十进位值记数法的两个方面：1）数中没有标明个位的位置，换言之，SPVN 是一种浮动记数法；2）数主要用于进行

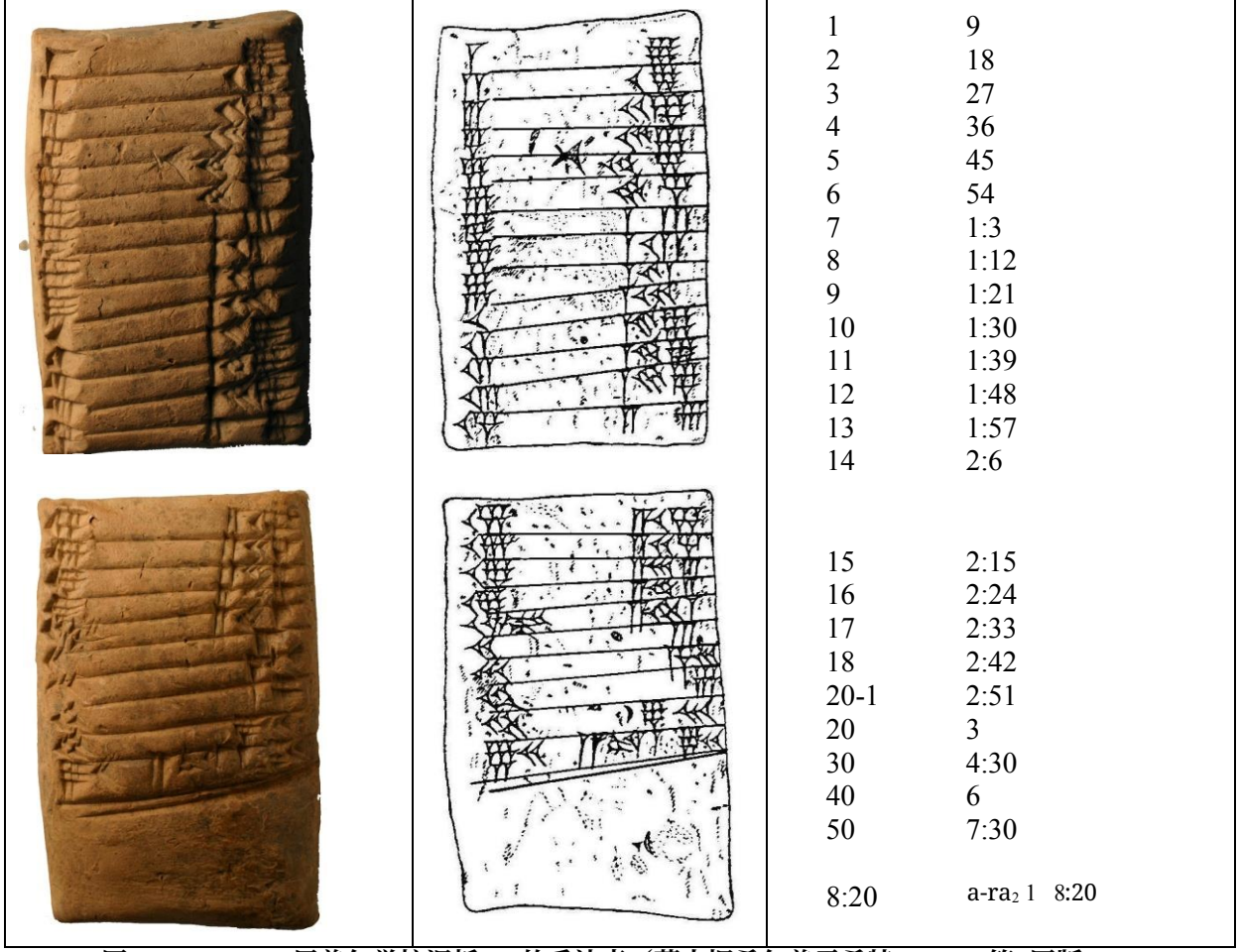
[2]下文所述日期均为公元前。[3]自楔形文字数学重新受到关注之初，六十进位值记数法便引起了广泛兴趣（[7], [19]）。

乘法和求倒数。这两个方面中，第一点可能最令现代读者困惑。的确，我们需要知道一个数的个位位置，才能辨认它所代表的数量。例如，在十进制中，为了区分“一”和“一千”或“十分之一”，我们使用零和小数点，分别写作“1”、“1000”和“0.1”。但是，在楔形文字文本所使用的六十进位值记数法中，数 1、60 和 1/60 都用同一个符号表示，即一个竖楔形符号（ ）。



要充分了解六十进位值记数法的这一特点，最好看看在书吏学校中发现的一张乘法表。图1展示了9的乘法表的照片和摹本。观察表格左栏，便不难推测，竖楔形符号（）表示一，角楔形符号（）表示十。右栏列出了左栏所写各数乘以9所得的乘积。例如，在（3）的对面，我们看到（27）。





1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	1:3
8	1:12
9	1:21
10	1:30
11	1:39
12	1:48
13	1:57
14	2:6
15	2:15
16	2:24
17	2:33
18	2:42
20-1	2:51
20	3
30	4:30
40	6
50	7:30
8:20	$a\text{-}ra_2$ 1 8:20

Fig图1：HS 217a，尼普尔学校泥板，9的乘法表（摹本据希尔普雷希特 1906，第7图版 ，照片由作者拍摄，承蒙耶拿大学惠允

因此，在 7 前面，我们预期会看到数 63。但实际上，我们看到的是这些符号：六十由第二位上的一个楔形符号表示，这意味着这个数采用六十进位值记数法表示。我们可以将这个数转写为 1:3，其中符号“:”是

六十进制数字之间的分隔符，就像现代数字时钟上的分隔符一样。[4] 借助数字时钟的意象，有助于理解古代的六十进制。然而，如果我们继续阅读这张乘法表，就会发现这种类比有其局限。的确，在 20 前面，我们预期会看到 180，也就是 3×60，或者用现代六十进制记作 3:0，但我们看到的却是  。这意味着，3×60 用的符号与左栏第三行中的“3”完全相同。换言之，同一个符号既表示 3，也表示 3×60。在乘法表中看到这个符号时，我们无法确定这些楔形符号表示的是个位、六十、六十分之一，  等等。 

历史学家试图通过添加逗号或零等标记来消除楔形文字记数法的不确定性（见 §5，表 3，其中的例子摘自 A. Sachs 的一篇文章）。由此引出一个问题：缺乏用于确定数中个位位置的图形系统，究竟是楔形文字书写系统的一种缺陷，还是相反，这种浮动记数法是六十进位值记数法的内在属性？

例如，考虑下面这个用 SPVN 书写的数：



这个数的现代表示法可以是：$(44\times60^2+26\times60+40)\times60^p$，其中 p 是一个不确定的相对整数。用现代语言来说，这个问题可以表述如下：我们是否应该关注 p 的值？[5]

要回答这个问题，我们可以依靠一种特别丰富的信息来源：书吏学校编写的文献。这些文献使我们能够追溯未来书吏（包括未来的“数学家”）接受数学训练的主要阶段。因此，我们可以直接了解构成数学学识基础的数学方法。这些数学基础特别侧重于与数、度量值和量化相关的概念。[6]

数学史学家曾对学校文本颇为不屑，因为其中反复出现的练习似乎缺乏引人入胜的数学内容。近年来，学校文本的价值重新得到认可：它们被视为书吏学校日常生活的见证，也就是说，是美索不达米亚思想史的来源，而非数学史的来源。相反，伊斯坦布尔考古博物馆收藏的泥板显示，尼普尔书吏学校所教授的数学概念颇具原创性。

[4] 为区分六十进制数字，我选择使用分隔符“:”，就像现代数字文档中那样，以明确表示底数是六十而不是十。不过，在史学编纂中，通常使用句点（44.26.40）或逗号（44,26,40）作为分隔符。[5]我强调，这里讨论的仅限于 SPVN，而不涉及其他类型的记数法。例如，用于计数物品（比如羊）的数就不是 SPVN，而是一种非位值的六十进制系统，其中表示 1 和 60 的符号并不相同（见附录1a）。如需了解更多细节和解释，请读者参阅附录，其中包含楔形文字数学所用数值与度量系统的所有相关信息。[6] 我自己是通过参加一种书吏学校来学习楔形文字数学的，因为我最初的工作就是发现、转写、翻译并评注数百块来自尼普尔城、现藏于伊斯坦布尔考古博物馆的学校泥板。

以下章节简要介绍公元前18世纪左右尼普尔的数学课程（见 §3），展示如何运用基础知识计算面积（见 §4），通过分析一些数值算法阐释巴比伦浮动计算术（见 §5），并探讨线性与二次问题的求解（见 §6）。结论（见 §7）尝试辨析这些示例所体现的数与量的概念化方式。

3- 公元前18世纪尼普尔教授的数学

来源

数千块由年轻学徒书吏书写的泥板，为我们了解美索不达米亚的数学学习提供了信息。在已知考古背景的情况下，这些泥板出土于一些经常被认定为学校的场所（苏美尔语中的 埃杜巴，字面意思是“泥板之屋”）。书吏学校可能从文字诞生之初就已存在于美索不达米亚南部，但最早的学校几乎没有留下什么痕迹。然而，大量铭文资料表明，在公元前第二千年初期，这些学校已经遍布中东。美索不达米亚南部发现了许多学校，但有证据表明，学校分布的范围要广泛得多，包括伊拉克幼发拉底河上游流域、叙利亚、伊朗西部和安纳托利亚。

根据考古遗址，数学泥板约占学校泥板的10%至20%。其他学校泥板大多记录了学习楔形文字和苏美尔语的证据；苏美尔语在当时已数百年未被用作母语。尽管这些书吏学校的产物见于广阔的地理区域，但其分布并不均匀。实际上，已知学校泥板中的绝大多数都来自一个遗址，即尼普尔；这些泥板数量达数千块，其中包括900多道数学练习。尼普尔泥板由美国考察队在19世纪末至第一次《伊拉克》战争期间发掘，随后被分配到数家博物馆（伊斯坦布尔考古博物馆、费城大学、耶拿大学、巴格达博物馆和芝加哥东方研究所）。来自尼普尔的学校泥板构成了一组连贯且数量重要的材料，其意义足以支持统计分析。因此，尼普尔的来源使人们能够较为精确地重构课程。[7]在美索不达米亚、叙利亚和伊朗的其他学校中，人们观察到泥板形状及其所载文本版式存在显著差异。教学方法必然相当多样。然而，最基础的学校泥板所包含的内容在不同遗址之间仅有细微差别，这一点颇为引人注目。书吏学校所教授的有关测量值和数的基础知识，很可能是所有这些教育中心的共同内容。

尼普尔的初等课程

学校泥板不仅通过其中包含的文本提供信息，还通过其物质形态以及文本页边所附的小注释（日期、抄写员的姓名、接文、颂词[8] .....）提供信息。有关重建尼普尔课程的方法论详情，请参阅 Niek Veldhuis 的研究[21]。应用

[7] [2], [10], [12], [16], [17], [20], [21]。 [8] 接文通常置于文本末尾，标示课程位序中下一篇文本的开篇语。颂词是一种简短的赞美文本，通常是献给书记之神 Nisaba。

于数学领域，这一方法使我得以重建数学课程的总体结构（见表1）。

级别	内容
初级	度量衡列表：容量、重量、面积、长度 度量衡表：容量、重量、面积、长度、高度 数表：倒数、乘法、平方数 平方根和立方根表
中级	练习：乘法，倒数，面积 and 体积计算

表1：尼普尔的课程

数学教育与文学教育（学习楔形文字和苏美尔语）相辅相成。文学训练要求按照固定顺序背诵一系列清单，依次包括简单的楔形文字符号、按主题再按图形分类的苏美尔语词汇、通过典型苏美尔语短语表达的语法结构（即所谓的“谚语”），最后是用于行政管理和商业活动的范本契约。数学课程同样包括背诵一系列清单，其中的内容依次为按升序排列的容量、重量、面积和长度计量；确立这些度量单位与六十进位制数之间对应关系的表；最后是数表（倒数、乘法、平方、平方根和立方根）。所有这些提供基础知识的清单和表，构成了亚述学家所说的“初级阶段”（见 表1）。

背诵完这组初级数据后，书吏会接受训练，将其应用于一些基础数值算法，例如乘法和求倒数，并计算面积和体积。之后，“高级阶段”可能会从线性与二次问题的示例开始。然而，至少就数学而言，现存文献不足以让我们清楚了解尼普尔或其他地方高级教育的概况。[9]

对于大多数看似纯粹博学之作的数学文本，我们几乎无法辨认它们究竟是由高年级学生还是教师写成的，也无法确切知道它们是写给谁的。造成这种背景信息缺失的原因之一是，诺伊格鲍尔认为“真正的数学”（与初级学校文本相对）的多数文本都来源不明。不过，有些文本的结构似乎与某种教育计划有关，因此能让我们窥见高等教育的某些具体情况——其中包括下文将评述的已解问题列表（见 §6）。

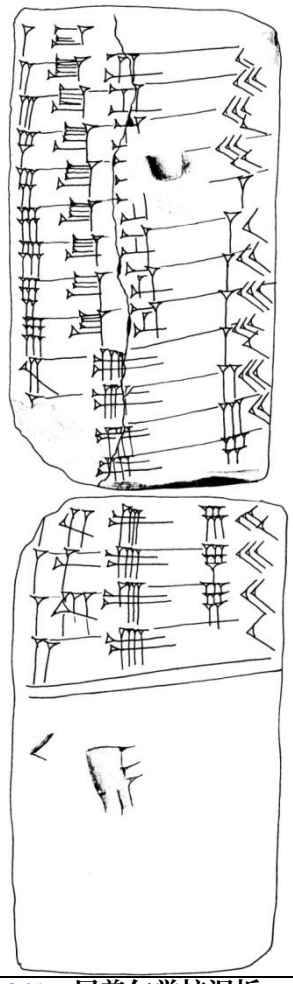
关于初级学校文本的详细描述，可参见上文提及的各项研究。在本文所述的浮点计算背景下，其中两类文本尤其值得关注：度量衡表和倒数表。

度量衡表

度量衡表为年轻书吏提供了一种重要的数学工具，用于进行各种计算，包括涉及面积和体积的计算。它们以双栏表格的形式呈现。左栏列出容量、重量、面积和长度的度量单位。这些度量值的完整列表也见于“度量衡

[9]关于高等文学教育的文献记载更为充分（[2], [3], [16], [20]）。

表”中，它完整描述了当时使用的度量衡体系，不仅用于数学，也用于行政、商业或法律活动（见 附录2）。右栏为每个测量值列出一个以浮动六十进制位值记数法书写的数。例如，图2展示了一块尼普尔学校泥板的摹本和译文，其中包含长度度量衡表的一个片段。



1 手指	10
2 手指	20
3 手指	30
4 手指	40
5 手指	50
6 手指	1
7 手指	1:10
8 手指	1:20
9 手指	1:30
1/3 库什	1:40
1/2库什	2:30
2/3 库什	3:20
5/6 库什	4:10
1 库什	5
1 1/3 库什	6:40
1 1/2库什	7:30
1 2/3 库什	8:20
2 库什	10

图2： HS 241，尼普尔学校泥板，长度度量衡表摘录（作者摹本）

注意右侧列的循环特性：数10出现在第一行，作为位序数，对应于1 舒-西（约1.7厘米）；也出现在最后一行，作为位序数，对应于2 库什（约1米）。因此，要确定SPVN中的一个数与某个测量值之间的正确对应关系（从右列向左列读取此表），就必须掌握数量级。这种技能是尼普尔数学教育的主要目标之一。下文将介绍一些示例（见本段末尾和§6）。

倒数表

尼普尔（以及其他学校）初等课程中学习的数表如下，顺序为：倒数表、分别以 50、45、44:26:40、40、36、30、25、24、22:30、20、18、4:40 p.m.、16、15、24:30、12、10、9、8:20、8、7:30、7:12、7、6:40、6、5、4:30、4、3:45、3:20、3、2:30、2:24、2、1:40、1:30、1:20、1:15 为乘数的乘法表，平方数、平方根和立方数

根。排在首位的是倒数表。很难从教学角度解释它为何位于这组数表之前；这似乎反映的倒是倒数在六十进制计算中的重要性。事实上，在数学语境中，除以一个数通常是通过乘以该数的倒数来完成的。这组乘法表似乎按其主数值由大到小排列，但也可以将其解读为一组“除法”表。例如，以 44:26:40 为乘数的乘法表是这组表中最靠前的表之一，同时（或许更重要的是）它也是除以 1:21（即 44:26:40 的倒数）的表。

在美索不达米亚发现的所有倒数表样本，其内容或多或少都相同：它们列出整[10] 1位数的倒数，以及少数常用的两位数的倒数。倒数表由一系列条目组成：2 的倒数是 30，3 的倒数是 20，依此类推（见下文的 图3）。数的浮动性质在这里清晰可见：表中只列出连续的六十进制数字，没有任何标记指示个位的位置。换言之，如果两个数的乘积为 1，它们便互为倒数；这里的 “1” 代表 60 的任意幂

正面				**反转**			
.....的倒数	2	is	30	.....的倒数	48	is	1:15
.....的倒数	3	is	20	.....的倒数	50	is	1:12
.....的倒数	4	is	15	.....的倒数	54	is	1:6:40
.....的倒数	5	is	12	.....的倒数	1	is	1
.....的倒数	6	is	10	.....的倒数	1:4	is	56:15
.....的倒数	8	is	7:30	.....的倒数	1:21	is	44:26:40
.....的倒数	9	is	6:40				
.....的倒数	10	is	6				
.....的倒数	12	is	5				
.....的倒数	15	is	4				
.....的倒数	16	is	3:45				
.....的倒数	18	is	3:20				
.....的倒数	20	is	3				
.....的倒数	24	is	2:30				
.....的倒数	25	is	2:24				
.....的倒数	27	is	2:13:20				
.....的倒数	30	is	2				
.....的倒数	32	is	1:52:30				
.....的倒数	36	is	1:40				
.....的倒数	40	is	1:30				
.....的倒数	45	is	1:20				

图3：倒数表（MS 3874），抄本 Friberg（[4], 第69页），以及部分译文（省略了第一项和最后一项）

书吏在接受教育时会背诵这份基本倒数对清单，学者们则经常在执行某些算法时使用它（见 §5）。

[10]如果一个数的倒数在六十进制下有有限位数，那么这个数就是六十进制的正则数。因此，六十进制的正则数是指其质因数分解中只含有 2、3 或 5（即 60 的质因子）的数。古代抄写员会避开非正则数，并将它们标记为“没有倒数”（苏美尔语中为“igi nu”，其中“igi”意为倒数，“nu”表示否定）。

4- 计算与量化

从这套高度结构化的清单和表中，可以看出哪些基本数学概念？首先值得注意的是运算：在初等教育中，没有提到加法。关键运算是倒数和乘法；其他运算，如平方、平方根和立方根，都是由乘法衍生而来。显然，这里的基本算术运算并非现代初等教科书中常见的加法、减法、乘法、除法这四种运算，而是乘法和倒数。

第二项观察涉及数：古代学者先后引入了两类数。首先，在度量衡列表中，出现的是用于表达测量值（或物品数量）的数，即表达量的数。这些数属于不同的非位值制。随后，在度量衡表中，测量值与采用六十进位值记数法表示的数之间出现了对应关系。最后，数表提供了大量乘法和倒数的基本结果，其中仅涉及 SPVN 中的数。[11]

仅通过观察学校教材便可清楚看出，浮动六十进制位值记数法的使用与乘法和倒数密切相关。这种联系显然与以下事实有关：在进行乘法时，一个数中个位位置的所在并不重要，因为它不会影响结果的位数列表——而这正是浮动记数法中唯一重要的意义。因此，在这一阶段，我们发现了一个由浮点数组成的数的世界的轮廓，乘法和倒数在其中发挥作用。在这个世界中，数的记法不标明个位位置，并非书写系统的弱点。恰恰相反，正如我们将看到的，这是一项关键特征，使强大的计算算法得以实施（见 §5）。

然而，采用这种浮点制时，他们如何计数和相加绵羊呢？答案是，在 SPVN 中，绵羊从不用数来计数，而只使用六十进加法记数制，即 S 制（见 附录1a）。绵羊的计数、相加（或相减）使用加法制书写的数，数量级则由符号的形式或其他方式来表示。绵羊、山羊、工人或各种货物的这些加法，在行政文书中随处可见，也出现在一些较为高深的数学文本中，只不过表达得更加抽象。然而，学校练习中没有加法和减法：计算绵羊不属于书吏学校初等数学的范畴。对货物进行这些运算，只会出现在教育中更偏专业的部分，例如训练年轻书吏书写契约时。

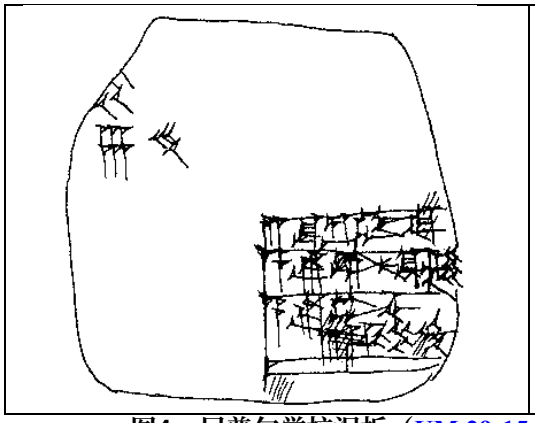
总而言之，根据尼普尔的学校文本，两类数承担着两种不同的功能：量化和计算。量化由加法制记写的数来完成，其数量级有明确的定义。计算（实际上是乘法及相关运算）则由以六十进位值记数法书写的浮点数来完成。由于这些数不用于量化，且其数量级没有定义，因此它们不表示量，而只是一连串位数，后面从不跟随计量单位或物品名称等具体实体。从这个意义上说，正如 Thureau-Dangin 所做的那样，可以将这些数称为“抽象数”。[12]

[11] 两类数之间的对偶性，即用于量化的非位置数与用于乘法及相关运算的位置数之间的对偶性，见 [11]。

[12] 这些思想在 [11] 中得到了更详细的阐述和论证，并附有示例。

计算面积与体积

在尼普尔发现的练习展示了这两类数如何参与面积计算的特定阶段。图4 展示了其中一道练习的摹本及译文。



20
20
6:40

2 *šu-si* 是等边。
它的面积是多少？
它的面积是 1/3 *še*

图4：尼普尔学校泥板（UM 29-15-192，摹本 [9], 248, 251）

这个问题看起来非常简单。右下角的一段短文说明，正方形（“等边”）的边长为 2 *šu-si*（约 3 厘米），并要求求出它的面积，随后给出答案：面积为 1/3 *še*。所有量都用长度或面积度量表示，其记法与度量衡列表和表中的记法相同。左上角有三个上下排列的抽象数。前两个数有部分残缺，但根据可见的残存部分以及其他类似的已知泥板，我们可以推测第三个数是前两个数的乘积；这里是 20 × 20 = 6:40。根据长度度量衡表，测量值 2 *šu-si* 对应的数是 20。左上角将这个抽象数 20 与自身相乘，乘积是 6:40。根据面积度量衡表，并结合对数量级的估算，抽象数 6:40 对应 1/3 *še*。

这道练习以及类似的练习表明，面积的计算分为三个阶段：- 将长度测量转换为抽象数（使用长度度量衡表）

- 将两个抽象数相乘（使用乘法表）- 将抽象数转换为面积测量值（使用面积度量衡表，并估算数量级）。

体积和重量的计算遵循相同的模式。数学文本中使用的体积单位制是以面积单位为基础，人为构建而成的，时间可能在第三个千年的下半叶：一个体积单位相当于一个面积单位乘以固定厚度 1 库什（约 50 厘米）。人们使用了一种特殊的高度度量衡表，其中 1 是与 1 库什相关联的抽象数（而长度度量衡表中对应的数是 5）。这个方法使面积度量衡表和体积度量衡表得以通用。[13]一套精密的系数系统以抽象数的形式列于系数表中，使从业者能够借助重量度量衡表，计算不同密度的各种物质的重量。

[13] 更多解释请参见 [10], 第 6.6 章。

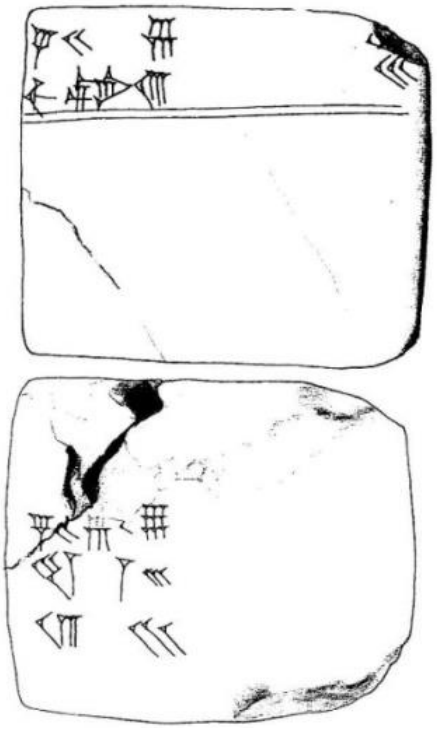
不作进一步详述，这些示例说明，量的计算以测量值与抽象数之间反复转换为基础。

5- 浮点计算实践：一些示例

求一个数的倒数

用于求倒数、平方根和立方根的算法，揭示了浮点计算的强大能力。我在Karine Chemla的关于古代传统中的数学证明史（[1], [14]）一书中详细分析了这些算法，重点探讨书吏如何检验计算过程的有效性。这里我将仅讨论求倒数。

表中列出的基本倒数（见图3）经验丰富的书吏都能熟记于心。然而，如何计算表中未列出的正则数的倒数呢？答案同样可以从学生练习中找到，例如图5所示的例子。



正面

4:26:40
它的倒数 13:30

反转

4:26:40 9
41[sic] 1:30
13:30

图5：尼普尔学校泥板，包含一个倒数的求取过程（Ist Ni 10241，作者摹本）

正面记载，4:26:40 的倒数是 13:30，这一结果正确（验证方法很简单：将 1:30 乘以 4:26:40，乘积为 1）。反面则列出了详细的计算过程，现照录如下，并更正第二行中的错误（预期的数是 40，而泥板上记为 41）：

4:26:40 9
40 1:30
13:30

下面解释这一计算过程：要求其倒数的数 4:26:40 以正则数 6:40 结尾，因此 4:26:40 能被 6:40“整除”（关于整除性的这一概念，我将在下文再作说明）。要用 6:40 除 4:26:40，必须将 4:26:40 乘以 6:40 的倒数。根据倒数表，6:40 的倒数是 9（见 图3）。数 9 写在右侧子栏中。4:26:40 乘以 9 等于 40，因此，40 就是 4:26:40 除以 6:40 的商。这个商写在左侧子栏中。根据倒数表，40 的倒数是 1:30（再见 图3）。数 1:30 写在右侧子栏中。要找到 4:26:40 的倒数，只需将 4:26:40 的因子的倒数相乘，也就是说，将右侧栏中的数 9 和 1:30 相乘。乘积为 13:30，这就是所求的倒数。

总而言之，左侧子栏告诉我们，4:26:40 可以分解为以下正则因子的乘积：4:26:40 = 6:40 × 40右侧子栏由这些因子的倒数组成，因此所求的数就是这些倒数的乘积：9 × 1:30 = 13:30

该算法基于将所求倒数的数分解为正则因子。因此，该算法的实现涉及使用一些整除判据。

在浮点计算的语境中，整除的概念需要稍作改述。首先，这里只考虑被正则数整除的情形。另一个难点是，在浮点制中，整数与非整数并无区别。任何数都可以被任何正则数整除（例如，2 可以除以 5，结果是 24）。这里我将“可整除”一词解释为：数 *a* 能被正则数 *b* 整除，是指 *a* 与 *b* 的倒数相乘所得的数“小于” *a*。但在数没有数量级的语境中，“小于”是什么意思？事实上，目标是得到一个除法后比 *a* 更简单的数，即位数比 *a* 少的数（40 小于 4:26:40）；或者，在位数相同的情况下，得到一个小于 a 的数（40 小于 50）。如何识别正则除数？正则除数似乎构成了数的最后一部分（例如，6:40 是 4:26:40 的一个除数）。[14] 我们在十进制中也采用相同的判据：判断一个数能否被 2、4、5、10、25 等整除，可以查看这个数的末尾数字。有时，正则“尾部”不太明显（见 表2，其中 3.45 被识别为 8.45 的一个因子）。

当求得的商不在倒数表中时，必须重复这一过程。在一块收藏于美国费城大学、藏品编号为 CBS 1215 的泥板上，便有这种重复过程的记录。这块泥板由21个部分组成，记载了倒数的求取过程。下文将重现并解释第20部分，表2（我用粗体标出了所求倒数对应数的末尾部分中出现的正则因子，并给求得的倒数加了下划线）[15]。

[14]因此，Friberg 将这种分解方法命名为“尾部算法”。[15] 关于这段文本的详细分析，请参见 [15]。

转录		解释	
5:3:24:2**6:40**	[9]	$n \rightarrow$ 5:3:24:2**6:40**	
45:30:**40**	1:30	n 的因子	inv(n) 的因子
1:8:**16**	3:45	6:40	9
4:**16**	3:45	40	1:30
16	3:45	16	3:45
14:3:45		16	3:45
5[2:44]:3:45		16	3:45
1:19:6:5:37:30		乘积	
11:51:54:50:37:**30**	2	14:3:45	
23:43:49:41:**15**	4	5[2:44]:3:45	
1:34:55:18:**45**	16	1:19:6:5:37:30	
25:18:**45**	16	11:51:54:50:37:**30**	
6:**45**	1:20		
9	6:[40]	$n \rightarrow$ 11:51:54:50:37:**30**	
8:53:20		**30**	**2**
2:2:22:2:13: 20		**15**	4
37:55:33:20		**3:45**	16
2:31:42:13:20		**3:45**	16
5:3:24:26:40		**45**	1:20
		9	6:[40]
		乘积	
		8:53:20	
		2:22:13: 20	
		37:55:33:20	
		2:31:42:13:20	
		5:3:24:26:40	

表2: CBS 1215 #20

可以看出，除了重复因式分解过程外，这一计算还展现出一种新的精巧之处。事实上，求得倒数后，再用同一算法对它进行反转，显然便会得到原来的数。这一循环体现了以下算术性质：一个数的倒数的倒数就是这个数本身。[16]

算法之所以简洁，也因此效力强大，根本上是因为采用了浮动记数系统。历史学家并非总能察觉楔形文字六十进制位值记数法的这一特点，Abraham Sachs 对 CBS 1215 的研究摘录便可作证，见 表3。

[16] 请参阅[15]。

c	B	a	$\bar{a}$	$\overline{ba1+}$	$\overline{\overline{ba1+}}$	$\bar{c}$
[...] #20						
5,3,24,26;40 45,30,40 1,8,16 4,16	5,3,24,20 45,30, 0 1,8,0 4,0	6;40 40 16 16	0;9 0;1,30 0;3,45 0;3,45	45,30,40 1,8,16 4,16 16	0;0,0,1,19,6,5,37,30 0;0,0,52,44,3,45 0;0,14,3,45 0;3,45	0;0,0,0,11,51,54,50,37,30 0;0,0,1, 19,6,5,37,30 0;0,0,52,44,3,45 0;0,14,3,45
0;0,0,1,19,6,5,37,30 23,43,49,41,15 1,34,55,18,45 25,18,45 6,45	0;0,0,0,11,51,54,50,37 23,43,49,41,0 1,34,55,15,0 25,15,0 6,0	0;0,0,0,0,0,0,0,0,30 15 3,45 3,45 45	2,0,0,0,0,0,0,0,0 0;4 0;0,16 0;0,16 0;1,20	23,43,49,41,15 1,34,55,18,45 25,18,45 6,45 9	0;0,0,0,0,2,31,42,13,20 0;0,0,0,0,37,55,33,20 0;0,0,2,22,13,20 0;0,8,53,20 0;6,40	5,3,24,26;40 0;0,0,0,0,2,31,42,13,20 0;0,0,0,0,37,55,33,20 0;0,0,2,22,13,20 0;0,8,53,20

表3：在 CBS 1215 #20 中提取倒数的“技巧”，如 A. Sachs 所述（[18], 第238–240页）

Sachs 的计算不必要地复杂。首先，他试图用代数公式表达算法。接着，他认为要求其倒数的数c被分解为$a + b$之和，并且倒数是按照

“公式”)1($\overline{\overline{b}aa+}$，其中 a 表示 a 的倒数。其次，他将这些数视为量，并通过添加许多“零”来恢复其数量级。这个例子说明，使用现代概念可能并不恰当，还会妨碍我们全面理解古代程序。

Flo数与固定值：圆盘表面的例子

在基础几何情境中，抽象数与测量值之间的关系尤其值得关注。正如我们所见，计算面积是课程中的一项基础练习。然而，抽象数与测量值之间的关系并非总是明确呈现，例如前文评注的文本（见 §4）。许多涉及边和面积的练习并未提及任何测量值。这些练习通常配有图示，其中抽象数表示线性测量值（通常标注在图形外），而相应的面积则标注在图形内。图6中所示的泥板来源不明，上面绘有一个圆，以及分别对应于周长（圆上方）、周长的平方（圆右侧）和面积（圆内）的抽象数。

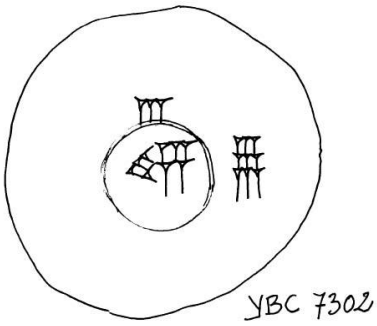


图6：带有数的图示（YBC 7302，学校泥板，耶鲁大学；作者摹本）

显然，面积（45）是将周长的平方（9）乘以5得出的。这是一条通则，见于许多数学文本中。

让我们用现代语言解释这一关系。如果面积记作a,，周长记作p，p 与a 之间的关系是：

$$a = p / 4\pi.$$

书吏粗略估算圆的周长与直径的比值为 3（用现代语言表示：$\pi \approx 3$）。因此：

$$a \approx p \quad / 12$$

由于12的倒数是5，古代书吏用浮动记数法将面积表示为$p \times 5$。

值得注意的是，这块泥板上没有注明计量单位。那么，这些数代表什么？我们是否应将数3理解为一个测量值，例如周长为3宁达？我们已经看到，在度量衡表中，右侧子栏里的数描述了若干个循环。例如，数3可能对应多种不同的长度度量：

1/2库什 3舒-西
→ 33 宁达 → 33 乌
什 → 36丹纳 → 3

文本指的是这些对应关系中的一种吗？例如3宁达，而排除其他对应关系？这是现代出版物中通常采用的解释。然而，没有任何标记允许我们这样解读文本。图示和数可能同时表示表4中列出的所有可能度量情形。

周长（3）	面积（45）	数量级
1/2 库什 3 手指	2 1/4 舍	一块泥板
3 宁达	2/3 萨尔 5 *gin*	一个果园
3 *uš*	(1×18 + 1×6 +3) 甘	一座城市
6 丹纳	(1×1080 + 3×180)甘	一个地区

表4：与以下数据对应的可能数量级：YBC 7302

与倒数表的情况一样，浮动记数法赋予文本极大的灵活性。

在通常的现代解释中，数 3 被理解为“3 宁达”，这改变了文本的含义。事实上，与长度相对应的数通常被解释为测量值，其中单位“宁达”虽未写出，却是默认存在的。Høyrup 如此表述这一观点：“水平距离的基本测量单位是宁达（‘杆’），约等于 6 米。通常，这个单位不会写出，而是隐含不言。”([6], 第 17 页）。[17] 加上一个“隐含的”测量单位，例如将“3”替换为“3 宁达”，看起来或许无伤大雅。然而，加上测量单位会改变现代历史学家眼中这些数的本质。SPVN 中写作 3 的数性质游移；而“3”在“3 宁达” 中则具有固定的数量级（3 个个位），并表示一个量。

[17]我曾在别处[11] 反对将抽象数解释为省略了单位的测量值这一观点。

6- YBC 4663 中的线性与二次问题

初级学校文本中，测量值与抽象数之间不断转换的现象十分明显，其中只涉及乘法和倒数。那么，在更复杂的数学实践中，测量值和抽象数是如何相互衔接的？教育材料再次为回答这个问题提供了一些线索。泥板YBC 4663提供了一些有趣的证据；它可能曾在古巴比伦时期的美索不达米亚南部用于高等教育的初级阶段。[18] 这块泥板列出了八道问题，并详细记载了求解步骤。求解第 1 至第 6 题只需依次进行乘法和求倒数。最后两题是二次问题，其操作步骤除了乘法和求倒数外，还需要加法。

乘法与倒数

我们来考察问题1和4，这两个问题涉及挖掘沟渠的成本。原文由阿卡德语（音节文字）和苏美尔语表意符号混合而成。在这里，古代抄写员对语言的选择似乎与本文讨论的问题有特殊关联。因此，在下文的版本中，阿卡德语词汇的译文用斜体表示，苏美尔语词汇的译文则不使用斜体。方括号中的内容是对文本残损部分的复原。左侧的数字对应诺伊格鲍尔和Sachs版本中的行号。

YBC 4663 #1

> 1. 一条沟渠。长度为5宁达，宽度为1 1/2宁达<宽度>，深度为1/2宁达，体积为10 <gin> 工作定额，工资为6舍[白银工资]。2. 底数、体积、工人数和白银各是多少？你在操作步骤中，3. 将长度和宽度相乘，7:30就会得到。4. 将7:30乘以深度，就会得到45。5. 求工作定额的倒数，得到6。将45乘以，就会得到4:30。6. 将4:30乘以工资，就会得到9。这就是操作步骤。

陈述（第1行）给出了沟渠的尺寸、工人每天必须挖出的土方体积（“指定体积”）以及日工资。题目要求计算沟渠底部的面积、沟渠的体积，以及应付给工人的工资总额（隐含条件：一天内完成这项工作）。以“你，按照你的操作步骤”这一公式开头的操作步骤规定了一系列运算：将长度乘以宽度，求出底数（第3行）；然后将结果乘以高度，求出体积（第4行）；再将沟渠的体积除以每名工人每天必须挖出的体积，求出工人数（第5行）；最后将工人数乘以日工资，求出总费用（第6行）。最终结果为9，操作步骤以“操作步骤如下”这一公式结束。

本讨论关注的是数和量的处理方式。题目陈述中的数据以特定的量（长度、体积和重量测量）表示。然而，在操作步骤本身中，只涉及抽象数。陈述中给出的测量值与操作步骤中使用的抽象数之间的关系，

[18] 泥板 YBC 4663 出版于 [8], 第69-75页，图版7和32。

恰好就是下文表5所示[19]的度量衡表所确立的关系：

长度	5 宁达	→ 5	（L表）
宽度	1 1/2 宁达	→ 1:30	（L表）
深度	1/2 宁达	→ 6	（Lh表）
wage	6 *še*	→ 2	（W表）
指定体积	10 *gin*	→ 10	（S表）

T数据说明表5：YBC 4663 #1及其在SPVN度量衡表中的换算

那么，操作步骤就是依次与这些抽象数或其倒数相乘（表6）。

长度 × 宽度	5 × 1:30 = 7:30	第3行
面积 × 深度	7:30 × 6 = 45	第4行
体积/ 指定体积	45 / 10 = 45 × 6 = 4:30	第5行
工人数 × 日工资	4:30 × 2 = 9	第6行

表6：操作步骤中的运算 YBC 4663 #1

如果仔细观察题目中测量值和抽象数的分布，就会发现其结构与§5中所述的学校练习类似。题干仅用苏美尔语表意符号记录，以测量值形式提供数据。操作步骤主要用阿卡德语术语描述，涉及对抽象数进行乘法和求倒数。从测量值（题干中）转变为抽象数（操作步骤中），也对应着从苏美尔语转变为阿卡德语。这似乎表明，学术文本的双语特征在此被用于教学目的。题目的另一项特征似乎也体现了其教学性质：表5显示，求解的第一步是将测量值转换为抽象数，这一步几乎涉及所有度量衡表（唯独缺少容量表）。

问题2至6通过对数据进行循环置换，从问题1推导而来。这些问题与问题1的结构相同，但多了一个步骤：操作步骤完成后，将所求的抽象数转换为测量值，从而彻底解出问题。例如，来看问题4。

YBC 4663 #4

20. 9 *gin* 是一条沟渠所需的白银（总支出）。长度为 5 宁达，宽度为 1 1/2 宁达。指定体积为 10 (*gin*)。工资（每名工人）为 6 *še*（白银）。21. 它的深度是多少？操作步骤：22. 长度与宽度相乘。7:30 将给出。取指定体积的倒数，23. 再将7:30 乘以。将得到 45。将 45 乘以工资。24. 将得到 1.30。取1:30 的倒数。将得到 40。25. 将 40 乘以9（白银总支出）。将得到深度 6。它的深度是 1/2 宁达。

问题的结构和操作步骤与问题1类似。我这里只总结表7和表8中的数据和操作，并重点讨论最后一个附加步骤。

[19] 以下将长度度量衡表称为“L表”，将高度（及其他垂直尺寸）度量衡表称为“Lh表”，将重量度量衡表称为“W表”，将面积度量衡表称为“S表”，将容量度量衡表称为“C表”。这些表可在线查阅：此处（[13], 第9节）

白银	9 *gin*	→ 9	（W表）
长度	5 宁达	→ 5	（L表）
宽度	1 1/2 宁达	→ 1:30	（L表）
指定体积	10 *gin*	→ 10	（S表）
wage	6 *še*	→ 2	（W表）

表7：YBC 4663YBC 4663 #4陈述中的数据及SPVN与度量衡表的换算

长度 × 宽度	5 × 1:30 = 7:30	第22行
底数/指定体积	7:30 / 10 = 7:30 × 6 = 45	第22-23行
(底数 / 指定体积) × 工资	45 × 2 = 1:30	第23-24行
白银 / [(底数 / 指定体积) × 工资]	9 / 1:30 = 9 × 40 = 6	第25行

表8： YBC 4663 #4 中的操作步骤

在操作步骤结束时，所得解是一个抽象数（6）。只有在这里，才会提出数量级的问题。要将抽象数6转换为深度测量值，必须查阅垂直尺寸度量衡表（Lh）。同时，还需要粗略估计所求深度的数量级，以便在度量衡表中找到应使用的正确部分。Lh度量衡表（见[13], 第9节）列出了与数6对应的若干测量值。这些可能的测量值是3 *šu-si*（约5厘米）、1⁄2 宁达（约3米）、40 宁达（约240米）和1 丹纳（约10.5千米）。显然，正确的选择是1⁄2 宁达。

最后，我们看到，这个过程甚至比我刚才针对问题1所提出的描述更接近 §4 中所述的过程。学校泥板 UM 29-15-192 上使这一过程一目了然的空间布局，在 YBC 4663 中被语言标记所取代：题述用苏美尔语记录，操作步骤用阿卡德语记录，并以惯用公式开头和结尾，答案则用苏美尔语记录。这些语言标记凸显了这一过程的结构：首先，通过直接（从左向右）查阅度量衡表，将题述给出的测量值转换为抽象数；其次，操作步骤列出对抽象数所进行的乘法和取倒数运算；最后，通过反向（从右向左）查阅度量衡表，并粗略估算数量级，将结果这一抽象数转换为测量值。

加法的介入

最后两个问题似乎与前一个问题相似，但必须注意一个区别：题目提供的一项信息是长度与宽度之和。这一细节影响重大：我们处理的是二次问题，而不是像前面示例中那样的线性问题。SPVN 中的运算不仅包括乘法和倒数，还包括加法和减法。这些运算在 SPVN 中是如何进行的？这里我们重点讨论问题7。

YBC 4663 #7

1. 9 *gin* 是挖掘一条沟渠所需的白银（总费用）。2. 我把长度和宽度相加，得到 6:30。1/2 宁达 [是它的深度]。3. 10 *gin*是指定体积，6 *še*（白银）是工资。长度和宽度是多少？4. 你，求它。取工资的倒数并分离。 *5.* 将 9 *gin*白银提高。 将给你 4:30 。 6. 将 4.30 对 指定体积提高。将给你 45。 7. 取其深度的倒数并分离。将 45提高。 将给你 7:30。 8. 取长度的 1/2并取我加上的余量相减。 将给你 3:15。 9. 3:15 乘以自身。将给你 10:33:45。 10. 从 10:33:45中减去 7:30。 11. 将给你 3:3:45。取其平方根。 12. 将给你 1:45。将它加到其中一个数上，再从另一个数中减去。 13. 将给你长度和宽度。 长度为 5（宁达），宽度为 1 1/2 宁达。

和之前一样，操作步骤中包含的运算仅适用于抽象数，因此第一步是使用度量衡表（表9）将陈述中的计量数据转换为 SPVN。

白银	9 *gin*	→ 9	（W表）
长度 + 宽度		→ 6:30	（直接作为 SPVN 提供）
深度	1/2 宁达	→ 6	（Lh表）
指定体积	10 *gin*	→ 10	（S表）
wage	6 *še*	→ 2	（W表）

表9：YBC 4663 #7陈述中的数据，以及SPVN中利用度量衡表进行的换算

操作步骤首先通过与前一题相同的方法计算底数。在第7行，得出底数（长度 × 宽度）为7:30。因此，问题归结为：已知两个数的和与乘积，求分别对应于长度和宽度的这两个数。数据如下。

长度 + 宽度	→ 6:30
长度 × 宽度	→ 7:30

为了完成其余操作步骤，尤其是第10行中的减法，必须将代表面积的数7:30相对于代表长度与宽度之和的数6:30进行定位。表 10展示了7:30和6:30的若干可能相对位置；这些数值配置分别标记为A、B和C。对于每种配置，都必须确定个位的位置（表 10中的 U），以便显示两个数的乘积相对于这两个数的位置。与之前只涉及乘法的问题相比，这是一个新的情形。

		A			B			C			
				U		U		U			
1 宁达	→		1			1			1		
长度	→		5			5			5		
宽度	→		1	30		1	30		1	30	
面积	→	7	30			7	30			7	30
长度 + 宽度	→		6	30		6	30		6	30	

表 10：数字的部分可能配置YBC 4663 #7

每一种配置都由数 1 的相对位置决定；数 1 对应于长度的计量单位 1 宁达，以及数（U）中的单位。我在下文中将后者称为“计算单位”，以区别于计量单位。

这些位置以列的形式展示，令人联想到一种计算装置。这种呈现方式对我而言当然具有重要意义。很可能当时的运算是借助某种实体工具完成的，而上述表示或许能很好地说明，涉及数的相对位置的问题在古代书记眼中是怎样呈现的。数在“算盘”上的这些不同配置，反映了不同的可能几何情形。但问题的表述中没有任何内容允许我们偏重某一个位置而舍弃另一个。

让我们考察楔形文字文本中描述的操作步骤，并重点关注其中的运算。若我们按照配置A中的操作步骤，逐步进行规定的计算（即在6:30中，将30放在“计算单位”栏），计算就能顺利进行，并得出预期的数值5，对应长度5 宁达；数值1:30对应宽度1 1/2 宁达。若我们按照配置B中的操作步骤，逐步进行规定的计算（即在6:30中，将6放在“计算单位”栏），计算同样顺利进行，也得到了预期结果。配置C以及任何其他配置也是如此（见 表11）。

		A			B			C				
行	**运算**			**U**	**U**			**U**				
7.	一半（？） =		6 3	30 15	6 3	30 15			6 3	30 15		
8.	乘积 =	10	3 3 33	15 15 45	3 3 10	15 15 33	45		3 3	15 15 10	33	45
第9和第10行。	减法 =	10 **7** 3	33 **30** 3	45 45	10 **7** 3	33 **30** 3	45 45			10 **7** 3	33 **30** 3	45 45
10. 和 11.	平方根 =	3	3 1	45 45	3 1	3 45	45			3 45	3	45
11. 和 12.	加法 = 减法 =		3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30	3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30			3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30		

表11：操作步骤中的数的一些可能配置 YBC 4663 #7

从这个例子可以得出一些结论。

1) 并不要求选择计量单位 1 宁达 在算盘上由计算单位表示（1 放置在 U 列）。我们可以将计量单位 宁达与计算单位分离。

2）执行计算只需先在“算盘”上确定一些最少的数据，例如计算单位与表示 1 宁达的数 1 的相对位置。

3）数量级问题只在计算末尾才出现，此时应将结果（此处为 5）解释为长度度量（此处为 5 宁达——见第 12 行）。

这个例子表明，进行计算时，无须追踪算盘上各个数的数量级，只需关注它们的相对位置。同时，这些数代表着量。数和运算具有几何意义，而这些意义可以引导支配计算的推理。每一步

计算因此都可以表示为对平方和长方形的运算（见图7）。[20]

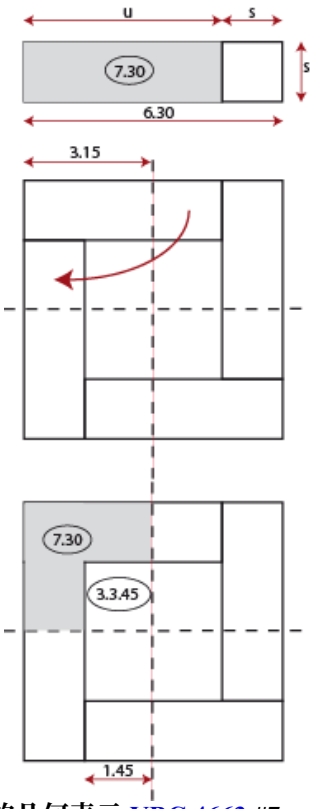


图7：文中操作步骤的几何表示 YBC 4663 #7

7- 数量级和数中的个位位置

本简要介绍中所描述的示例表明，古巴比伦时期使用的浮动位值六十进制数基本上是用于计算的工具，而不是用于表示量。在学校数学的理想世界中，使用这些浮点数进行的运算只有乘法和倒数运算。此外，SPVN 中的数通常是正规数。基本因式分解算法的幂和效率使得倒数、平方根和立方根的计算成为可能，而这些算法之所以有效，正是依赖于其所处理的数具有浮动性质。楔形文字数学中遇到的许多问题，包括学术语境中的问题，都是线性的，并通过一系列乘法和倒数运算求解。古巴比伦时期使用的一些数学方法尤其适合这一乘法体系：假位法、图形的放大或缩小，以及系数的使用。

然而，乘法体系的适用范围过于有限，无法解决某些问题，包括涉及加法和减法的二次问题。为了满足某些计算的需要，必须在计算的特定阶段固定计算单位的位置。固定计算单位的位置，相当于为算盘的使用制定规则。这些反映几何情形的规则，在计算中留下的灵活空间远大于现代记号，例如 0、分号（;）、冒号（,），

[20] 二次操作步骤以平方数和矩形上的运算为基础，这一点由 Jens Høyrup 论证 – 例如参见 [6]。

或现代出版物目前使用的扩展的度-分-秒制（`,`, °,′, ″）。

在我们的十进制数制及其配套的十进制公制中，量的数量级由定义该量的数中个位的位置来确定。但我们刚才描述的美索不达米亚学术体系并非如此。确定数量级属于度量衡学的范畴。将各个数相互定位则属于计算本身，这一过程很可能是在算盘上进行的

附录：数与计量单位

1- 数

a- S制（六十进制与加法制）



šargal	*šaru*	*šar*	*gešu*	*geš*	*u*	*Aš* or *diš*
216000	36000	3600	600	60	10	1

b- 常见分数

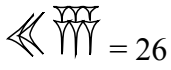


1/3　1/2　2/3　5/6

c- 抽象数（六十进位值记数法 = SPVN）符号



楔形文字文本中的六十进位值记数法使用两种符号：楔形符号（1）和斜楔形符号（10）——见上文。1 到 59 的六十进制数字通过并列书写若干个 1 和 10 来表示，数量视需要而定（加法十进制记数法）。例如：


= 26

在一个包含多个六十进制位的数中，某一位上的符号所代表的数值，是同一符号出现在前一位（即其右侧）时的六十倍。

楔形文字文本中没有与我们使用的“零”相当的记号，也没有用于分隔一个数的整数部分和小数部分的符号（相当于我们在“3.14”中使用的小数点）。换句话说，楔形文字记数法不标明数中个位的位置



。例如，同一个符号可以表示我们用十进制写作 1、60、3600、1/60 等的数，也可以表示用六十进制写作 1、1:0、1:0:0 或 0;1 等的数。

例如，浮点数之间的关系 2×30 = 1 表示 30 是 2 的倒数（它们的乘积为“1”）。类似地，44:26:40×1:21 = 1 表示 44:26:40 是 1:21 的倒数。关系 30×30 = 15 表示 30 的（浮点）平方是 15，或者说 15 的（浮点）平方根是 30。严格来说，我们应当用表示模同余的符号“≡”替换符号“=”，这里所说的

等价关系中，如果两个数的商是 60 的幂（指数为正整数或负整数），那么这两个数就等价。

2- 计量单位

以下图示综合呈现了度量衡表所提供的信息（部分参考 Jöran Friberg 的研究）。它们展示了各个计量单位之间的因子、代表这些计量单位的字形，以及相应的抽象数。

容量（1 西拉≈1 升）

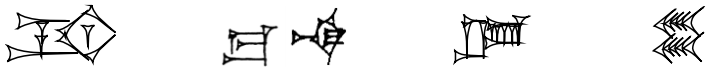
gur ←5− *bariga* ←6− *ban* ←10− *sila* ←60− *gin*



5 1 10 1 1

重量（1 古≈30 千克）

古 ←60− 玛纳 ←60− *gin* ←180− 舍



1 1 1 20

面积(1 萨尔≈36 m) **和体积** (1 萨尔-体积 = 1 萨尔，厚度为1 库什 ≈ 18 m^3)

甘 ←100− 萨尔 ←60− *gin* ←180− 舍



1:40 1 1 20

长度 (1 宁达≈6 m)

丹纳 ←30− 乌什 ←60− 宁达 ←12− 库什 ←30− 殊-西



30 1 1 5 10 （横向）

6 12 12 1 2 （纵向）

3- *MesoCalc*，一款美索不达米亚计算器

数字和量的表示方式反映了它们在计算中的用途。在楔形文字文献中，古代书记根据特定用途形成了各种记数法；本文试图描述这些用途。现代历史学家对楔形文字符号表示法的约定，反映了他们对古代计算的理解。因此，制定这些约定至关重要，但其重要性在历史研究中常常被低估。

处理楔形文字数学文献需要强大的计算能力，而现代工具使我们能够通过计算机程序对其进行建模。基于上述原因，计算机程序所采用的记数法和计算原理的选择，取决于历史考量。由 Baptiste Mélès 开发的工具 MesoCalc (http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html – 参见 附录3）是一次尝试，旨在实现 t

并尽可能忠实于古代实践地自动执行计算。特别是，该工具区分度量衡计算和六十进位值记数法中的计算，并实现了乘法和倒数的浮点计算。

来源

博物馆编号	出版物	CDLI编号及CDLI链接
CBS 1215	[18], 238-240	P254479
HS 241	[5], 第42号；[12]；第29号	P388160
Ist Ni 10241	[10]	P368962
MS 3874	[4]	P252955
UM 29-15-192	[9], 248, 251	P254900
YBC 4663	[8], 69 （文本 H）	P254984
YBC 7302	[8], 44	P255051

参考书目

[1] Chemla, Karine（编），《古代传统中的数学证明史》，剑桥大学出版社，剑桥，2012。[2] Delnero, Paul，“苏美尔文学目录与书吏课程”，《亚述学与近东考古学杂志》，100，2010，32-55。[3] Delnero, Paul，“《伊南娜与埃比赫》与书吏传统”，载《共同的文化遗产：美索不达米亚与圣经世界研究——献给 Barry L. Eichler》，G. Frame（编），CDL出版社，2011，123-149。[4] Friberg, Jöran，《一批非凡的巴比伦数学文献》，施普林格，纽约，2007。[5] Hilprecht, Herman Vollrat，《尼普尔神庙图书馆的数学、度量衡与年代学泥板》，宾夕法尼亚大学，费城，1906。[6] Høyrup, Jens，《长度、宽度与面积：古巴比伦代数及其相关领域概述》，施普林格，柏林与伦敦，2002。[7] Neugebauer, Otto，“六十进制系统的起源”，《哥廷根科学学会论丛·数学—物理学类·新辑》，13/1，1927。[8] Neugebauer, Otto 与 Sachs, Abraham J.，《数学楔形文字文献》，美国东方学丛书与美国东方研究学会，纽黑文，1945。[9] Neugebauer, Otto 与 Sachs, Abraham J.，“数学与度量衡文献”，《楔形文字研究杂志》，36，1984，243-251。[10] Proust, Christine，《尼普尔数学泥板》，法国安纳托利亚研究所，De Boccard，伊斯坦布尔，2007。[11] Proust, Christine，“量化与计算：数字在尼普尔的用途”，《数学史评论》，14，2008，143-209。[12] Proust, Christine，《希尔普雷希特藏数学泥板》，Harrassowitz，莱比锡，2008。[13] Proust, Christine，“数值与度量衡字形：从楔形文字到转写”，《楔形文字数字图书馆期刊》，2009:1，2009。[14] Proust, Christine，“从泥板上显示的数字推测算法：古巴比伦时期的一个例子”，载《数学中的显性知识与隐性知识》，T. Archibald、J. Peiffer 与 N. Schappacher（编），奥伯沃尔法赫数学研究所报告，2012，20-23。

[15] Proust, Christine，“若干美索不达米亚文本中逆向算法的阐释”，载古代传统中的数学证明史，K. Chemla（编），剑桥大学出版社，2012，384-422。[16] Robson, Eleanor，“泥板之家：古巴比伦时期尼普尔的一所书吏学校”，《亚述学评论》，95，2001，39-66。[17] Robson, Eleanor，“不止于度量衡：古巴比伦书吏学校的数学教育”，载《同一片天空下：古代近东的天文学与数学》，J. M. Steele 与 A. Imhausen（编），乌加里特出版社，2002，325-365。[18] Sachs, Abraham J.，“正规六十进制数的倒数”，《楔形文字研究杂志》，1，1947，219-240。[19] Thureau-Dangin, François，“六十进制系统的起源”，《亚述学评论》，25，1928，115-121。[20] Tinney, Steve，“苏美尔文学的课程设置”，《伊拉克》，61，1999，159-172。[21] Veldhuis, Niek，《尼普尔的初等教育：树木与木制品清单》，博士论文，格罗宁根大学，格罗宁根，1997。