arXiv:2302.13716v1 [math.GR] 27 Feb 2023

双曲群的黎斯算子与 L^p-边界表示

ADRIEN BOYER 和 JEAN-MARTIN PAOLI

Abstract. 我们研究双曲群的 L^p-边界表示。我们证明，这类表示不可约，当且仅当相应的黎斯算子是单射。

1. Introduction

考虑一个非初等双曲群 Γ，赋予满足若干正则性假设的不变度量 d，并通过保持测度类的变换作用于其格罗莫夫边界（$\partial\Gamma, \nu_d$），该边界配备了 ν_d 与 d 相关联的所谓帕特森-沙利文测度。这将导出一个单参数等距表示族，作用于 L^p-空间，记作（$\pi_t, L^p(\partial\Gamma, \nu_d)$），几乎对所有 $\xi \in \partial\Gamma$ 定义为

$$[\pi_t(\gamma)v](\xi) = \left(\frac{d\gamma_*\nu_d}{d\nu_d}(\xi)\right)^{\frac{1}{2}+t} v(\gamma^{-1}\xi). \tag{1.1}$$

上述表示满足 $\|\pi_t(\gamma)v\|_p = \|v\|_p$，对所有 $v \in L^p(\partial\Gamma, \nu_d)$ 及所有 $\gamma \in \Gamma$ 均成立，其中 p 满足 $1/p = 1/2 + t$，且 $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$。我们称这些表示为双曲群的 L^p-边界表示。

双曲群的边界表示不过是 π_0，过去十年来一直受到深入研究；从动力学的角度来看，它或可视为遍历性的一种推广，参见 [2], [3], [22], [7], [8], [11], [13], [12], [21], [26] [27], 和[16]。在论文 [5], [6] 和 [10] 中，表示(1.1)已经得到研究，但研究对象主要是希尔伯特空间上的表示。本文聚焦于 L^p空间。我们借助与度量 d相关的交织算子 $\mathcal{I}_t$（满足 $\mathcal{I}_t\pi_t = \pi_{-t}\mathcal{I}_t$），刻画了带有$1/p = 1/2 + t$（其中 $-1/2 < t < 1/2$）的 L^p-边界表示（π_t，$L^p(\partial\Gamma, \nu_d)$）的不可约性。我们证明，这是一个有界算子 $\mathcal{I}_t : L^p(\partial\Gamma, \nu) \to L^q(\partial\Gamma, \nu)$，其中 $1/q = 1/2 - t$；它仅在 $0 < t < 1/2$时定义（见第2.18小节）。该算子已出现在双曲群与希尔伯特空间的背景下，见[10], [25]；在CAT(-1)空间中亦有相关研究，见 [5]。我们的主要结果如下：

Date: 2023年2月28日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：43A15，43A90；次分类号：22D12。*Key words and phrases.* L^p-边界表示，L^p-径向 RD，不可约性，Bader-Muchnik遍历定理。

定理1. 对任意 $-1/2 < t < 1/2$ 和 $1/p = 1/2+t$，与 d 相对应的 L^p-边界表示（π_t， L^p（$\partial\Gamma$， ν_d））不可约，当且仅当交织算子 $\mathcal{I}_{|t|}$ 是单射。

注1.1。特别地，我们证明表示 $(\pi_t, L^p/\ker\ \mathcal{I}_t)$ 对于 $1/p = 1/2 + t$ with $0 < t < 1/2$. 是不可约的

我们还在秩一半单李群的背景下推导出以下结果。我们不知道以下定理是否已见于文献。

定理2。设 G 是非紧型秩一半单李群。设 Γ 是 G 中的一个格。对于所有 $1 < p < +\infty$，与其泊松–弗斯滕贝格边界上的唯一 K-不变概率测度 ν 相对应的 Γ 的 L^p- 边界表示都是不可约的；其中 K 是极大紧子群， P 是 G 的极小抛物子群。

事实上，我们从遍历定理的一种推广中推导出上述定理 `，其风格类似于 Bader-Muchnik，适用于 L^p-边界表示，见下文的定理1.2 。

记号。赋予 Γ 与 $d, |\cdot|$ 相对应的长度函数： $\Gamma \to \mathbb{R}^+$ 定义为 $|\gamma| = d(1, \gamma)$，其中 1 是单位元，且 $\gamma \in \Gamma$.
令 $S^\Gamma_{n,\ R} := \{\gamma \in \Gamma | nR \le |\gamma| < (n+1)R\}$ ，其中 $R > 0$ ，并令 $|S^\Gamma_{n,\ R}|$ 为 $S^\Gamma_{n,\ R}$ 的基数。

如 [6], 中所述，我们回顾与 π_t 相关联的球函数的定义。它是如下矩阵系数:

$$\phi_t : \gamma \in \Gamma \mapsto \langle \pi_t(\gamma)\mathbf{1}_{\partial\Gamma}, \mathbf{1}_{\partial\Gamma}\rangle \in \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{1}_{\partial\Gamma}$ 表示 $\partial\Gamma$ 的示性函数。
I引入连续函数也很方便（参见 [10, 引理 3.2] ）

$$\sigma_t : \xi \in \partial\Gamma \mapsto \mathcal{I}_t(\mathbf{1}_{\partial\Gamma})(\xi) \in \mathbb{R}^+ \quad (t > 0). \tag{1.3}$$

这也是一个严格正函数。令 $M_{\sigma_t^{-1}}$ 为相应的乘法算子，即作用于任意 $L^p(\partial\Gamma, \nu_d)$ 的有界算子，其中 $p > 1$ 任意。我们按照 [10]中的定义，将黎斯算子记为 $\mathcal{R}_t = M_{\sigma_t^{-1}}\mathcal{I}_t$ 。

收敛结果。我们从一个类似于 Bader–Muchnik 的定理中推导出上述定理，该定理适用于双曲群的 L^p-边界表示。令人惊讶的是，这类已知在希尔伯特空间背景下成立的定理，也适用于 L^p-空间。

定理1.2。当 $R > 0$ 足够大时，存在一个测度序列 $\mu_{n,\ R} : \Gamma \to \mathbb{R}^+$，其支撑于 $S^\Gamma_{n,\ R}$，并满足 $\mu_{n,\ R}(\gamma) \le C/|S^\Gamma_{n,\ R}|$ ，其中某个 $C > 0$ 与 n 无关，使得对所有 $0 < t < 1/2$、所有 f， $g \in C(\Gamma \cup \partial\Gamma)$，以及所有 $v \in L^p(\partial\Gamma, \nu_o)$ 和 $w \in L^q(\partial\Gamma, \nu_o)$，均有:

$$\sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma) g(\gamma^{-1}) \frac{\langle \pi_t(\gamma)v, w\rangle}{\phi_t(\gamma)} \to \langle g_{|\partial\Gamma}\mathcal{R}_t(v), \mathbf{1}_{\partial\Gamma}\rangle\langle f_{|\partial\Gamma}, w\rangle,$$

如 $n \to +\infty$。

备注1.3。 若 μ 表示非初等双曲群 Γ 上的有限支撑随机游走，且 $d := d_\mu$ 表示相应的格林度量，则 (Γ, d_μ) 满足定理 *1*和 *1.2*的假设。

致谢。第一作者感谢 Ian Tice 就命题3.1 所作的有益讨论，并感谢 Nigel Higson 对定理2提出的意见。

1.1。论文结构。第2 节介绍 δ-双曲空间和双曲群、帕特森-沙利文测度及等分布结果，L^p-边界表示，以及交织算子 $\mathcal{I}_t$ 的定义，其中 $t > 0$.

在第3节中，我们回顾插值理论的一些基本事实，以及关于双曲群球函数的一些已知结果。我们证明 $\mathcal{I}_t$ 是一个有界算子，从 $L^p(\partial\Gamma, \nu)$到 $L^q(\partial\Gamma, \nu)$，其中 $1/p = 1/2 + t$ 并且 $1/q = 1/2 - t$，其中 $0 < t < 1/2$。第4 节专门证明定理1.2 和定理1。特别地，我们使用的一种新工具是针对 L^p-边界表示的径向性质 RD 的 L^p-版本。
第5 节讨论非紧型秩一全局对称空间的情形，并给出定理2的证明。

2. Preliminaries on geometrical setting

2.1. 几何设置与度量的正则性假设。一个很好的参考文献是 [14]。

如果存在 $\delta \geq 0$ 和一个[1] 基点$o \in X$，使得对于任意 x、y、$z \in X$，都有，则称度量空间（X, d）是双曲的

$$(x, y)_o \geq \min\{(x, z)_o, (z, y)_o\} - \delta, \tag{2.1}$$

其中（x, y）$_o$ 表示从 o出发的 x 与 y 的格罗莫夫积，即

$$(x, y)_o = \frac{1}{2}(d(x, o) + d(y, o) - d(x, y)). \tag{2.2}$$

我们考虑真双曲度量空间（闭球是紧的）。

如果当 i, j 趋于 $+\infty$ 时，$(a_i, a_j)_o \to +\infty$，则称序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 X 在无穷远处收敛。令 $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (a_i, b_j)_o \to \infty$，当 $i, j \to \infty$ 时：它定义了一个等价关系，而等价类的集合（与基点的选取无关）记为 ∂X，称为 X 的格罗莫夫边界。X 上的拓扑自然延拓到 $\overline{X} := X \cup \partial X$，使得 $\overline{X}$ 和 ∂X 为紧集。公式

$$(\xi, \eta)_o := \sup \liminf_{i,j} (a_i, b_j)_o \tag{2.3}$$

（其中，上确界取遍分别表示 ξ 和 η 的所有序列 (a_n)、(b_n)）使得可以将 Gromov 积延拓到 $\overline{X} \times \overline{X}$，但通常这种延拓并不连续。此外，边界 ∂X 带有一族视觉度量，它们依赖于d 和一个实参数 $\epsilon > 0$，从现在起记作 $d_{o,\ \epsilon}$。度量空间 $(\partial X, d_{o,\ \epsilon})$ 是边界化 $\overline{X} := \partial X \cup X$（同样是紧的）的一个紧子空间；相对于 $d_{o,\ \epsilon}$，以 ξ 为中心、半径为 r 的开球记作 $B(\xi, r)$。

[1] 如果该条件对某些 o 和 δ 成立，那么它对任意 o 和 2δ 都成立

事实证明，通常 Gromov 积无法连续延拓到边界化上，例见 [14, 例 3。16]。沿用 [31], 一文作者的说法，我们称双曲空间 X 是 ϵ-良好的，其中 $\epsilon > 0$，若对每个基点 $o \in X$，以下两个性质均成立：

- 格罗莫夫积 $(\cdot, \cdot)_o$ 在 X 上连续延拓至边界化 $X \cup \partial X$。
- 映射 $d_{o,\epsilon} : (\xi, \eta) \in \partial X \times \partial X \mapsto e^{-\epsilon (\xi, \eta)_o}$ 是 ∂X 上的一个度量。

δ-双曲空间的经典理论是在空间为测地空间这一假设下建立的；但为了保证格罗莫夫积连续延拓至边界，也就是说，如果两个序列 a_n、$b_m \in X \to \xi$、$\eta \in \partial X$，那么格罗莫夫积满足 $(a_n, b_m)_o \to (\xi, \eta)_o$，我们将在粗测地空间的假设下开展研究。特别地，边界上的共形关系成立：对所有 x、$y \in X$ 以及所有 ξ、$\eta \in \partial X$：

$$d_{y,\epsilon}(\xi, \eta) = e^{\frac{\epsilon}{2}\left(\beta_\xi(x,y)+\beta_\eta(x,y)\right)} d_{x,\epsilon}(\xi, \eta), \tag{2.4}$$

其中，Busemann 函数 $\beta_\cdot(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$(\xi, x, y) \in \partial X \times X \times X \mapsto \beta_\xi(x, y) := \lim_{n \to +\infty} d(x, a_n) - d(y, a_n),$$

其中，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示 ξ。。回顾一下，对于所有的 $\xi \in \partial X$ 和 x，$y \in X$

$$\beta_\xi(x, y) = -d(x, y) + 2(\xi, y)_x. \tag{2.5}$$

度量空间 (X, d) 称为粗测地线的，若存在 $C = C_X > 0$，使得对于所有的$x, y \in X$，存在一条连接 x 和 y 的粗测地线，即映射 $r : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$，满足 $r(a) = x$ 且 $r(b) = y$，使得

$$|t - s| - C_X \le d(r(t), r(s)) \le |t - s| + C_X \tag{2.6}$$

对于所有的 $t, s \in [a, b]$。

我们称 t h在两个粗糙的 h geod测地射线 $r, r' : [0, +\infty) \to X$ 是等价的 l等价于f $\sup_t d(r(t), r'(t)) < +\infty$。我们用 $\partial_r X$ 表示粗测地射线的等价类集合。当 (X, d) 是一个适当粗测地空间时，∂X 和 $\partial_r X$ 重合。

2.2. 双曲群。关于双曲群理论的介绍，参见 [24] 和 [23]。

回顾一下，若群 Γ 在适当度量空间上适当不连续地作用，则对于任意紧集 K、$L \subset X$，集合 $|\{\gamma \in \Gamma ; \ \gamma K \cap L \neq \emptyset\}| < \infty$。若群 Γ 通过等距变换作用于某个适当双曲度量空间 (X, d)，且 X/Γ 是紧的，则称该群为双曲群。双曲群必然是有限生成的（由 Švarc–Milnor 引理可知）。对于这样的 Γ，任意有限生成元集 Σ 都会导出一个 Cayley 图 $(\mathcal{G}(\Gamma, \Sigma)\ d_\Sigma)$，其顶点集为 Γ 的元素；当且仅当两个元素相差 Σ 中的一个元素时，它们之间以长度为一的边相连。每个通过等距变换适当不连续地作用、且具有紧商空间的测地双曲度量空间 (X, d)，都与某个双曲群的 Cayley 图拟等距。若 Γ 是赋有与词度量拟等距的左不变度量的双曲群，则度量空间 (Γ, d) 是一个适当的粗测地线 δ-双曲度量空间，参见例如 [22, 第 3.1] 节。

Γ 的极限集记为 Λ_Γ，它是 ∂X 中某个（实际上是任意一个）轨道的聚点集。也就是说，$\Lambda_\Gamma := \overline{\Gamma.o} \cap \partial X$，其中闭包取于 $\overline{X}$。若 $|\Lambda_\Gamma| > 2$，则称 Γ 为非初等（此时，$|\Lambda_\Gamma| = \infty$）。若 Γ 是非初等的，且该作用是余紧的，则 $\Lambda_\Gamma = \partial X$。

最后，注意到 Blach`ere、Ha¨ıssinsky 和 Matthieu[4] 以及 Nica 和 ˇSpakula 的 [31] 若干结果结合起来，给出了

定理 2.1。双曲群通过等距变换，在一个 proper 的粗测地线 ϵ-good δ-双曲空间上适当不连续且余紧地作用。

2.3. 总结一下。我们假设所考虑的度量空间满足以下条件:

- 度量空间（X, d）是 δ-双曲的。
- 度量空间（X, d）是 proper 的。
- 度量空间（X, d）是粗测地线的。
- 度量空间（X, d）是 ϵ-良好的，具有某个 $\epsilon > 0$,

并且我们令一个非初等群 Γ 作用于（X, d），满足以下条件 :

- Γ 的作用是通过等距变换实现的。
- 该作用是适当不连续的。
- 该作用是余紧的。

换言之，群 Γ 是一个非初等双曲群，因此 Γ 是无限、离散、可数且非 amenable 的。

2.4. Patterson-Sullivan测度。固定这样的 (X, d)，选取一个原点 $o \in X$，并令$B(o, R) = \{x \in X | d(o, x) < R\}$。考虑一族与参数 ϵ相关联的视觉度量 $(d_{x,\ \epsilon})_{x\in X}$。紧致度量空间 $(\partial X, d_{o,\ \epsilon})$具有维数为

$$D := \frac{Q}{\epsilon} \tag{2.7}$$

其中

$$Q = Q_{\Gamma,d} := \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \log |\Gamma.o \cap B(o, R)|, \tag{2.8}$$

是 Γ 的临界指数（相对于其在 (X, d) 上的作用）。当将该 D-豪斯多夫测度归一化为概率测度时，它非零、有限，且在相差一个常数的意义下唯一，记作 ν_o。我们所用的基本性质是 Ahlfors正则性: ν_o 的支撑位于 ∂X 中；若满足以下球体积估计，我们便称 ν_o 是维数为 D 的 Ahlfors 正则测度：存在 $C > 0$，使得对所有 $\xi \in \Lambda_\Gamma$，以及所有 $r \leq Diam(\partial X)$

$$C^{-1} r^D \leq \nu_o(B(r, \xi)) \leq C r^D. \tag{2.9}$$

测度类 ν_o 在 Γ 的作用下保持不变，且与 ϵ 的选择无关。关于帕特森–沙利文测度理论，请参阅 [32], [33], [15] 和 [17]。

2.5. 阴影与 Busemann 函数的控制。

上方有界的 Gromov。 Connell 和 Muchnik 的研究中采用了这一假设 [19] , Garncarek 关于边界酉表示的研究中也采用了这一假设[22]。我们称空间 X 相对于 是上方有界的 Gromov , 如果存在常数 o, 使得对于所有 $M>0$, 都有 $x \in X$ 成立

$$\sup_{\xi \in \partial X}(\xi, x)_o \geq d(o, x)-M. \tag{2.10}$$

从概念上说，这一定义允许我们选择边界中的一个点，使其扮演从 o 出发并经过 x 的测地线在负曲率单连通黎曼流形背景下的前向端点的角色。

我们将满足以下条件的边界中的一点记为 $\hat{x}_o$

$$(\hat{x}_o, x)_o \geq d(o, x)-M. \tag{2.11}$$

特别地，每个粗测地度量空间都具有上方的 Gromov 有界性（例如参见 [22,引理 4.1]）。

2.5.1. 阴影的定义。设 (X, d) 是一个粗测地、 ϵ-良好且 δ-双曲的空间。设 $r>0$ 和一个基点 $o \in X$。对于任意 $x \in X$, 记其阴影为$O_r(o, x)$, 定义如下:

$$O_r(o, x):=\{\xi \in \partial X \mid(\xi, x)_o \geq d(x, o)-r\}. \tag{2.12}$$

引理 2.2。设 $r>M+\delta$。则

$$B(\hat{x}_o, e^{-\epsilon(d(o,x)-r+\delta)}) \subset O_r(o, x) \subset B(\hat{x}_o, e^{-\epsilon(d(x,o)-r-\delta)}).$$

证明。假设 $r>M+\delta$。对于左侧的包含关系，我们有

$$\begin{aligned}(\xi, x)_o & \geq \min\{(\xi, \hat{x}_o)_o, (\hat{x}_o, x)\}-\delta \\ & \geq \min\{d(o, x)-r+\delta, d(o, x)-M\}-\delta \\ & =d(o, x)-r \\ & \geq d(o, x)-r.\end{aligned}$$

对于另一侧的包含关系

$$\begin{aligned}(\xi, \hat{x}_o)_o & \geq \min\{(\xi, x)_o, (\hat{x}_o, x)_o\}-\delta \\ & \geq \min\{d(x, o)-r, d(o, x)-M\}-\delta \\ & \geq d(o, x)-r-\delta.\end{aligned}$$

□

上述引理结合 ν_o 的 Ahlfors正则性可得

引理 2.3. 存在 $C>0$, 使得对于任意 $x \in X$, 以及对于 $r>M+\delta$

$$C^{-1} e^{-Qd(o,x)} \leq \nu_o(O_r(o, x)) \leq C e^{-Qd(o,x)}.$$

下面给出一个引理，讨论边界的阴影所构成的覆盖及其重数。

引理 2.4。我们有以下两个性质:

(1) 对于足够大的 $R>0$，存在 $r>0$ 使得

$$\cup_{\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}} O_r(o,\gamma o)=\partial X.$$

(2) 对所有足够大的 R、$r>0$，存在一个整数 m，使得对所有 $\xi\in\partial X$，我们都有对所有 $n\in\mathbb{N}$、$\sum_{\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}} \mathbf{1}_{O_r(o,\gamma o)}(\xi)\le m$.

证明。令 κ 为群 Γ 在包含 o 的 X 上的作用的一个相对紧基本域的直径。令

$$R>3(C_X+\kappa) \tag{2.13}$$

其中 C_X 是由假设 2.6 得到的常数。
我们证明 (1)。令 $\xi\in\partial X$，并考虑表示 ξ 的 r_o 条粗测地线。定义$z_\xi:=r_o(nR+R/2)$。因此，$nR\le d(o,z_\xi)<(n+1)R$. 由于该作用是余紧的，存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $d(\gamma o,z_\xi)\le\kappa$. 选择 (2.13) 可确保 $nR\le d(\gamma o,o)<(n+1)R$. 因此，

$$\begin{aligned}(\xi,\gamma o)_o &\ge \min\{(\xi,z_\xi)_o,(z_\xi,\gamma o)_o\}-\delta\\ &\ge \min\{(n+1)R-3C_X,nR-\kappa\}-\delta\\ &\ge nR-\kappa-\delta\\ &\ge |\gamma|-R-\kappa-\delta,\end{aligned}$$

因此，$\xi\in O_r(o,\gamma o)$，且满足 $r=R+\kappa+\delta$。
现在证明（2）。取满足（2.13）的 $r>0$ 和 R。对于任意 $\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}$，以及所有$\xi\in O_r(o,\gamma o)$

$$\begin{aligned}(\gamma o,z_\xi)_o &\ge \min\{(\gamma o,\xi)_o,(\xi,z_\xi)_o\}-\delta\\ &\ge \min\{|\gamma|-r,(n+1)R-3C_X\}-\delta\\ &\ge \min\{nR-r,(n+1)R-3C_X\}-\delta\\ &\ge \min\{nR-r,nR-C_X\}-\delta\\ &\ge nR-r-\delta.\end{aligned}$$

根据格罗莫夫积的定义，我们推得 $d(\gamma o,z_\xi)\le\rho$，其中 $\rho=2(R+r+\delta)$。因此，集合 $\{\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}|O_r(o,\gamma o)\ni\xi\}$ 包含于 $B(z_\xi,\rho)\cap\Gamma.o$。由于该作用是余紧的，取一个大于 $\kappa>0$ 的正数 R'，便得到$|B(z_\xi,\rho)\cap\Gamma.o|\le|B(o,R')\cap\Gamma.o|$，且满足 $R'=\rho-\kappa$。令 $m:=|B(o,R')\cap\Gamma.o|$，即可完成证明。□

回忆一下，存在 $M>0$，使得若 γ 是 Γ中的一个元素，则可以选取 $\hat{}\gamma_o$ 中的一点 ∂X，满足（2.11）

$$(\hat{\gamma}_o,\gamma o)_o\ge|\gamma|-M.$$

引理 2.5. 存在 $C>0$，使得对所有 $\xi\in\partial X$，都存在 $g_\xi\in S^{\Gamma}_{n,R}$，使得对所有 $\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}$, $\beta_\xi(o,\gamma o)\le\beta_{\hat{\gamma}_o}(o,g_\xi o)+C$.

证明。取一点 $\xi \in \partial X$。考虑一条从 o 出发、表示 ξ 的粗测地线 r_o，并在其上选取一点 z_ξ，使得 $nR \le d(z_\xi, o) < (n+1)R$（因为 R 足够大）。对于 $\gamma \in S^\Gamma_{n,R}$，我们有

$$\begin{aligned}(\gamma o, z_\xi)_o &\ge \min\{(\gamma o, \hat{\gamma o})_o, (\hat{\gamma o}, z_\xi)_o\} - \delta \\ &\ge \min\{|\gamma| - M, (\hat{\gamma o}, z_\xi)_o\} - \delta,\end{aligned}$$

因此，要么 $(\hat{\gamma o}, z_\xi)_o \le (\gamma o, z_\xi)_o + \delta$，要么 $(\gamma o, z_\xi)_o \ge |\gamma| - M - \delta \ge d(o, z_\xi) - M - R - \delta \ge (\hat{\gamma o}, z_\xi)_o - M - R - \delta$. 换言之，

$$(\hat{\gamma o}, z_\xi)_o \le (\gamma o, z_\xi)_o + C_{\delta,M,R} \tag{2.14}$$

其中 $C_{\delta,M,R} = M + R + \delta$. 由此可得

$$\begin{aligned}(\xi, \gamma o)_o &\ge \min\{(\xi, z_\xi)_o, (z_\xi, \gamma o)_o\} - \delta \\ &\ge \min\{nR - C_X, (z_\xi, \gamma o)_o\} - \delta \\ &\ge \min\{nR - C_X, (\hat{\gamma o}, z_\xi)_o - C_{\delta,M,R}\} - \delta \\ &\ge (\hat{\gamma o}, z_\xi)_o - C',\end{aligned}$$

其中 $C' = C_X + R + \delta + C_{\delta,M,R} > 0$。

等式 (2.5) 表明 $\beta_\xi(o, \gamma o) \le \beta_{\hat{\gamma o}}(o, z_\xi) + 2C'$. 现在，选取足够大的 R，使得存在 $g_\xi \in \Gamma$ 满足 $d(g_\xi o, z_\xi) \le \kappa$ 且 $go \in S^\Gamma_{n,R}$，其中 κ 是包含 o 的 Γ 在 X 上作用的基本域的直径。于是

$$\beta_{\hat{\gamma o}}(o, z_\xi) = \beta_{\hat{\gamma o}}(o, g_\xi o) + \beta_{\hat{\gamma o}}(g_\xi o, z_\xi) \le \beta_{\hat{\gamma o}}(o, g_\xi o) + d(g_\xi o, z_\xi) \le \beta_{\hat{\gamma o}}(o, g_\xi o) + \kappa.$$

为完成证明，写作

$$\beta_\xi(o, \gamma o) \le \beta_{\hat{\gamma o}}(o, g_\xi o) + 2C' + \kappa.$$

□

2.6. Roblin-Margulis式等分布。以下定理首次以这种形式出现在 [13, 定理3.2] 中，其灵感来自 [29]和[28]中的结果。以 $x \in X$ 为中心的单位Dirac质量记为 D_x。

定理2.6. 对任意足够大的 $R > 0$，存在一个测度序列$\mu_{n,R} : \Gamma \to \mathbb{R}^+$，使得

(1) 存在满足以下条件的 $C > 0$：对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有$\gamma \in S^\Gamma_{n,R}$，均有

$$\mu_{n,R}(\gamma) \le C / |S^\Gamma_{n,R}|.$$

(2) 我们有如下收敛：

$$\sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) D_{\gamma o} \otimes D_{\gamma^{-1} o} \rightharpoonup \nu_o \otimes \nu_o,$$

当 $n \to +\infty$ 时，对于 $C(\overline{X} \times \overline{X})$ 中的弱*收敛。

2.7. L^p-表示。 表达式 (1.1) 的 π_t 定义了一个等距 L^p-表示 Γ，其指数为

$$p = \frac{2}{1+2t}, \tag{2.15}$$

其中有 $0 < t < 1/2$。记其共轭指数为

$$q = \frac{2}{1-2t}. \tag{2.16}$$

注意，相对于（非退化）配对，(π_t, L^p) 的逆共轭表示为 $(\pi_{-t}, \overline{L^q})$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (v, w) \in L^p \times \overline{L^q} \to \int_{\partial X} v(\xi)\overline{w}(\xi) d\nu_o(\xi) \in \mathbb{C}.$$

特别地，对于任意 $\gamma \in \Gamma$， $\pi_t(\gamma)$ 的伴随算子 $\pi_t^*(\gamma)$ 为

$$\pi_t^*(\gamma) = \pi_{-t}(\gamma^{-1}). \tag{2.17}$$

2.8. 一个交织算子。沿用 [10], ，回顾 $t > 0$ 上算子 $\mathcal{I}_t$ 的定义：对几乎处处的 $\xi \in \partial X$

$$\mathcal{I}_t(v)(\xi) := \int_{\partial X} \frac{v(\eta)}{d_{o,\epsilon}^{(1-2t)D}(\xi, \eta)} d\nu_o(\eta). \tag{2.18}$$

在 [10] 中已经指出， $\mathcal{I}_t$ 是作用于 $L^2(\partial X, \nu_o)$ 上的自伴紧算子。我们将证明，对于 $0 < t < 1/2$，公式 (2.18) 将 $\mathcal{I}_t$ 定义为从 $L^p(\partial X, \nu_o)$ 到 $L^q(\partial X, \nu_o)$ 的有界算子，其中 $1/p = 1/2 + t$ 和 $1/q = 1/2 - t$，参见命题 3.3。此外，在 ϵ-良好空间的假设下，由于关系式 (2.4)，可保证算子 $\mathcal{I}_t$ 将 π_t 与 π_{-t} 从 $L^p(\partial X, \nu_o)$ 交织到 $L^q(\partial X, \nu_o)$，参见 [10, 命题 3.17]。也就是说，对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 以及所有 $v \in L^p(\partial X, \nu_o)$:

$$\mathcal{I}_t \pi_t(\gamma) v = \pi_{-t}(\gamma) \mathcal{I}_t v. \tag{2.19}$$

此外，考虑

$$\tilde{\sigma_t} : x \in \overline{X} \mapsto \int_{\partial X} e^{(1-2t)Q(x,\eta)_o} d\nu_o(\eta) \in \mathbb{R}^+. \tag{2.20}$$

注意到 $\tilde{\sigma_t}$ 限制在 ∂X 不过就是 σ_t 在（1.3）中定义的函数。我们回顾一下，函数 $\tilde{\sigma_t}$ 在 $\overline{X}$ 上连续，参见 [10, 命题 3。4]。

3. Interpolation theory: Strong inequality of type (p, q) for the intertwining operator and Application of Riesz-Thorin Theorem

本节旨在介绍一些插值理论的材料，以证明关于算子 $\mathcal{I}_t$ 的主要结果，其中 $0 < t < 1/2$ 基于弱型Schur检验。插值理论和Lorentz空间与边界表示之间的联系已见于论文 [18] 和 [20, 第 6]章。另请参阅近期的工作[25]。

3.1. Lorentz空间、插值及其应用。 我们遵循 [18]。设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个测度空间。若 $f:\Omega\ \to \mathbb{C}$ 是一个可测函数，则定义 f

$$f^*(t) := \inf\left\{s > 0 | \mu\big(\{|f| > s\}\big) \le t\right\}.$$

实函数 f^* 是一个正的非增函数，与 $|f|$ 等测且右连续。于是，当 $1 < p$、$q < \infty$ 时，定义范数如下

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

以及带有 $q = \infty$ 的 $1 < p < \infty$：

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{t^{1/p} f^*(t) | t \in [0, +\infty]\}.$$

定义 $1 < p < +\infty$ 和 $1 < q \le +\infty$ 的Lorentz空间。

$$L^{p,q}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ measurable } |\|f\|_{p,q} < +\infty\}.$$

以下是一些有用的事实：

(1) $L^{p,\ p} = L^p$.(2) $(L^{p,\ q})^* = L^{p',\ q'}$.

(3) $L^{p,\ q_1} \subset L^{p,\ q_2}$ 其中 $q_1 < q_2$，即

$$\|v\|_{L^{p,q_2}} \le C_{p,q_1,q_2}\|v\|_{L^{p,q_1}},$$

for some $C_{p,q_1,q_2} > 0$.

下面介绍一个来自插值理论的基本工具，称为弱型Schur检验。

命题3.1. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间，并设 $1 < p, q, r < \infty$ 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1.$$

设 $k:\ X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ 是可测函数，并假设存在 $A > 0$ 使得

$$\|k(\cdot, y)\|_{L^{r,\infty}} \le A \text{ for a.e. } y \in Y,$$
$$\|k(x, \cdot)\|_{L^{r,\infty}} \le A \text{ for a.e. } x \in X.$$

因此，只要 v 属于 $L^p(Y, \nu)$，公式 $Tv(x) = \int_Y k(x, y)v(y)d\nu(y)$ 就定义了一个几乎处处有定义的、属于 $L^q(X, \mu)$ 的函数。此外，对于所有 $1 \le s \le \infty$，存在常数 $C = C_{p,q,r,s} > 0$，它依赖于 p, q, r, s，使得

$$\|Tv\|_{L^{q,s}} \le CA\|v\|_{L^{p,s}}.$$

证明请参见[34,命题 6.1] 。

3.1.1. 边界上齐次函数的类似物。

引理 3.2。设 $1 < 1/p < \infty$. 对于所有 $\xi \in \partial X$，我们有

$$\frac{1}{d_{o,\epsilon}^{pD}(\xi,\cdot)} \in L^{1/p,\infty}.$$

证明。设 $s > 0$. 对于所有 $\xi \in \partial X$，我们有

$$\nu_o(\{\eta | d_{o,\epsilon}^{-pD}(\xi,\eta) > s\}) = \nu_o(\{\eta | d_{o,\epsilon}(\xi,\eta) < s^{-1/pD}\}) = \nu_o\big(B(\xi, s^{-1/pD})\big).$$

对于所有 $\xi \in \partial X$，以及 $t > 0$，我们得到：

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{d_{o,\epsilon}^{pD}(\xi,\cdot)}\right)^*(t) &= \inf\{s > 0 | \nu_o(\{\eta | d_{o,\epsilon}^{-pD}(\xi,\eta) > s) \le t\} \\ &= \inf\{s > 0 | \nu_o\big(B(\xi, s^{-1/pD})\big) \le t\} \\ &\le \inf\{s > 0 | C s^{-1/p} \le t\} \\ &= C^p t^{-p},\end{aligned}$$

对于一个常数 $C > 0$ 由阿尔福斯正则性性质 2.9 得出。由此可知$1/d_o^{pD}, \epsilon(\xi,\cdot) \in L^{1/p}, \infty$. □

对于 $t > 0$，对于所有 $\xi \in \partial X$，我们有

$$\frac{1}{d_{o,\epsilon}^{(1-2t)D}(\xi,\cdot)} \in L^{r,\infty},$$

其中 $r = 1/(1-2t)$。由对称性可知，对所有 $\eta \in \partial X$

$$\frac{1}{d_{o,\epsilon}^{(1-2t)D}(\cdot,\eta)} \in L^{r,\infty}$$

也成立。由此得到以下结果：

命题 3.3。设 $0 < t < 1/2$，并设 p、q 满足 $1/p = 1/2+t$ 和 $1/q = 1/2-t$。算子 $\mathcal{I}_t$ 是从 $L^p(\partial X, \nu_o)$ 到 $L^q(\partial X, \nu_o)$ 的有界算子。

证明。 注意到 $1/p + (1-2t) = 1/2 + t + (1-2t) = 1 + 1/2 - t = 1 + 1/q$. 命题3.1 蕴含

$$\|\mathcal{I}_t(v)\|_{L^{q,s}} \le C_t \|v\|_{L^{p,s}}$$

对所有 $1 \le s \le \infty$。取 $p \le s = 2/1 - 2t = q$。因此 $\|\mathcal{I}_t(v)\|_{L^{q,\ s}} = \|\mathcal{I}_t(v)\|_{L^q}$ 并且 $\|v\|_{L^{p,\ s}} = \|v\|_{L^{p,\ q}} \le C_{p,\ q}\|v\|_{L^{p,\ p}} = \|v\|_{L^p}$ 由（3）可完成证明。 □

3.2. 谱隙估计和 Riesz-Thorin定理的推论 .

3.2.1. 双曲群上的球函数。如 [6], 所述，我们回顾与 π_t相关的球函数的定义。它是以下矩阵系数：

$$\phi_t : \gamma \in \Gamma \mapsto \langle \pi_t(\gamma)\mathbf{1}_{\partial X}, \mathbf{1}_{\partial X}\rangle \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

并引入函数 $\omega_t(\cdot)$，其中 $t \in \mathbb{R}^*$ 定义为

$$\omega_t(x) = \frac{2\sinh\left(tQx\right)}{e^{2tQ} - 1}. \tag{3.2}$$

注意，对于所有 $t \in \mathbb{R}^*$，函数 $\omega_t(\cdot)$ 都是正函数，并且在 $\mathbb{R}$ 的紧集上一致收敛于 $\omega_0(x) = x$ （当 $t \to 0$ 时），且 $\omega_{-t}(x) = e^{2tQ}\omega_t(x)$。

在 [6], 以下估计中，称为Harish-Chandra–Anker估计，名称取自 [1] 已证明如下结果：存在 $C > 0$，使得对任意 $t \in \mathbb{R}$，对所有$\gamma \in \Gamma$

$$C^{-1}e^{-\frac{1}{2}Q|\gamma|}\big(1+\omega_{|t|}(|\gamma|)\big) \le \phi_t(\gamma) \le Ce^{-\frac{1}{2}Q|\gamma|}\big(1+\omega_{|t|}(|\gamma|)\big). \tag{3.3}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$，令

$$\widetilde{\phi}_t(x) := e^{-\frac{1}{2}Qx}\big(1+\omega_{|t|}(x)\big). \tag{3.4}$$

3.2.2. 一个 L^p-谱不等式。我们简要回顾一些事实。在 [6] 中，已证明了以下谱不等式，它推广了所谓的“Haagerup性质”或 RD性质。取足够大的 $R > 0$。存在 $C > 0$，使得对任意 $t \in \mathbb{R}$，以及所有支撑于 $S^{\Gamma}_{n的R}$，都有

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^2\to L^2} \le C\omega_{|t|}(nR)\|f_n\|_{\ell^2}. \tag{3.5}$$

对于 $R > 0$ 足够大且任意 $n \in \mathbb{N}^*$，考虑$f_n = \sum_{\gamma\in S^{\Gamma}_{n,\ R}} \mu_{n,\ R}(\gamma)\ D_\gamma \in \mathbb{C}[\Gamma]$支撑于$S^{\Gamma}_{n,\ R}$。注意，定理1的（5.3）蕴含存在某个正数常数 $C > 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f_n\|_{\ell^2} = \|\sum_{\gamma\in S^{\Gamma}_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)D_\gamma\|_{\ell^2} \le C/|S^{\Gamma}_{n,R}|^{\frac{1}{2}}.$$

引理2.4 (1) 蕴含了存在 $C > 0$ 使得$|S^{\Gamma}_{n,R}| \le Ce^{-QnR}$。根据（3.3）的下界以及上述增长估计，我们推导出以下“谱隙”：存在常数 $C > 0$ 使得对于任意 $t \in \mathbb{R}$，对所有 $\gamma \in \Gamma$，以及所有非负整数 n

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^2\to L^2} \le C\widetilde{\phi}_t(nR), \tag{3.6}$$

其中 $\widetilde{\phi}_t(nR)$ 满足 $C^{-1}\widetilde{\phi}_t(nR) \le \phi_t(\gamma) \le C\widetilde{\phi}_t(nR)$，对所有 $\gamma \in S^{\Gamma}_{n,R}$ 其中 C 是一个与 n 无关的常数。
本小节的目的是证明上述不等式（3.6）的一个 L^p-版本。

尽管 π_t 是对 L^p 的等距作用，且具有 $1/p = 1/2 + t$，它也定义了一个表示 $\pi_t : \Gamma \to \mathbb{GL}(L^r)$，其中 $\mathbb{GL}(L^r)$表示作用于 L^r上的有界可逆线性算子群。更准确地说

命题3.4. 对于任意 $-1/2 \le t \le 1/2$，对所有 $\gamma \in \Gamma$，算子 $\pi_t(\gamma)$ 都是 L^r 上的有界可逆算子，对所有 $1 \le r \le \infty$ 均成立；此外，$\gamma \in \pi_t(\gamma) \in \mathbb{GL}(L^r)$ 是一个群同态。

证明. 取 $-1/2 \le t \le 1/2$。假设 $1 \le r < \infty$。对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 以及所有 $v \in L^r$，我们有

$$\begin{aligned}\|\pi_t(\gamma)v\|_r^r &= \int_{\partial X} e^{r(1/2+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)}|v(\gamma^{-1}\xi)|^r d\nu_o(\xi)\\ &= \int_{\partial X} e^{Q\beta_\xi(o,\gamma o)+(r(1/2+t)-1)Q\beta_\xi(o,\gamma o)}|v(\gamma^{-1}\xi)|^r d\nu_o(\xi)\\ &\le e^{|r(1/2+t)-1)|Q|\gamma|}\int_{\partial X} e^{Q\beta_\xi(o,\gamma o)}|v(\gamma^{-1}\xi)|^r d\nu_o(\xi)\\ &= e^{|r(1/2+t)-1)|Q|\gamma|}\|v\|_r^r,\end{aligned}$$

其中，不等式由以下事实得出：对于所有 $\xi \in \partial X$ 以及所有 x、$y \in X$，$|\beta_\xi(x,y)| \le d(x,y)$。

对于情形 $r=\infty$，对所有 $\gamma \in \Gamma$ 以及所有 $v \in L^\infty$，我们有

$$\|\pi_t(\gamma)v\|_\infty \le e^{|1/2+t|Q|\gamma|}\|v\|_\infty.$$

因此，对于所有 $\gamma \in \Gamma$，算子 $\pi_t(\gamma)$ 对于所有 $1 \le r \le \infty$ 都是 L^r 上的有界可逆算子。拉东-尼科迪姆导数的余循环性质意味着 π_t 是一个态射，因此 $\pi_t^{-1}(\gamma) = \pi_t(\gamma^{-1})$。□

为了证明 L^p-版本的不等式（3.6），我们需要下面这个关键引理。

引理 3.5。令 $R > 0$ 足够大。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n = \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,\,R}} \mu_{n,\,R}(\gamma) D_\gamma \in \mathbb{C}[\Gamma]$。将 $\pi_t(f_n)$ 视为从 $L^\infty \to L^\infty$ 出发且满足 $t \in [-1/2, 1/2]$ 的算子。存在 $C_\infty > 0$，使得对于所有 $t \in [-1/2, 1/2]$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^\infty \to L^\infty} \le C_\infty \widetilde{\phi}_t(nR).$$

证明。令 $t \in \mathbb{R}$ 满足 $-1/2 \le t \le 1/2$ 和 $R > 0$。考虑函数序列 $(G_n)_n$，其对每个 n 的定义为

$$G_n : \xi \in \partial X \mapsto \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)}.$$

另考虑

$$\check{G}_n : \xi \in \partial X \mapsto \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma^{-1}) e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)}.$$

令 $F \in L^\infty(\partial X, \nu_o)$。对于每个 $\xi \in \partial X$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\begin{aligned}|\pi_t(f_n)F(\xi)| &= \Big|\sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)} F(\gamma^{-1}\xi)\Big|\\ &\le \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)} |F(\gamma^{-1}\xi)|\\ &\le \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\xi(o,\gamma o)} \|F\|_\infty,\end{aligned}$$

因此:

$$\|\pi_t(f_n)F\|_\infty \le \|G_n\|_\infty \|F\|_\infty.$$

换言之，我们将证明

$$\sup_n \frac{\|G_n\|_\infty}{\widetilde{\phi}_t(nR)} < \infty.$$

取 $\xi \in \partial X$。引理 2.5 意味着可以将 $R > 0$ 取得足够大，使得存在 $C > 0$ 和 $g_\xi \in S_{n,\ R}$，对所有 $\gamma \in S^\Gamma_{N,\ R}$均成立

$$\beta_\xi(o, \gamma o) \le \beta_{\hat{\gamma}_o}(o, g_\xi o) + C.$$

此外，引理 2.2 的右包含意味着存在 $C' > 0$，使得对所有 $\eta \in O_r(o,\ \gamma o)$

$$\beta_{\hat{\gamma}_o}(o, g_\xi o) \le \beta_\eta(o, g_\xi o) + C'.$$

由此得到如下所述的“拟平均值性质”

$$e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_{\hat{\gamma}_o}(o,g_\xi o)} \le \frac{C_{Q,t}}{|\nu_o(O_r(o,\gamma o))|}\int_{O_r(o,\gamma o)} e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\eta(o,g_\xi o)}d\nu_o,$$

其中 $C_{Q,\ t} = e^{(\frac{1}{2}+t)Q+C'}$.因此，取一个与 $t \in [-1/2, 1/2]$ 无关的吸收常数 C，我们得到

$$\begin{aligned}
G_n(\xi) &\le C\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_{\hat{\gamma}_o}(o,g_\xi o)} \\
&\le C\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \frac{\mu_{n,R}(\gamma)}{\nu_o(O_r(o,\gamma o))}\int_{O_r(o,\gamma o)} e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\eta(o,g_\xi o)}d\nu_o(\eta) \\
&\le C\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \int_{O_r(o,\gamma o)} e^{(\frac{1}{2}+t)Q\beta_\eta(o,g_\xi o)}d\nu_o(\eta) \\
&\le C\phi_t(g_\xi),
\end{aligned}$$

其中第一个不等式由引理2.5得出，第二个不等式由引理2.3 结合$|S^\Gamma_{n\text{的增长性得出},\ R}|$ 最后一个不等式则由覆盖 $\cup_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} O_r(o,\gamma o)$ 的有限重数得出，该结论已在引理 2.4中证明。

将球函数的估计（3.3）应用于 $g_\xi \in S^\Gamma_{n,R}$ 结合上述不等式，可得对几乎处处的 $\xi \in \partial X$ 以及所有的 $n \in \mathbb{N}$:

$$G_n(\xi) \le C\widetilde{\phi}_t(nR).$$

Thus

$$\sup_n \frac{\|G_n\|_\infty}{\widetilde{\phi}_t(nR)} < +\infty,$$

如所要求。

ˇ 将上述方法应用于 G_n 可得

$$\sup_n \frac{\|\check{G}_n\|_\infty}{\widetilde{\phi}_t(nR)} < \infty.$$

□

最终我们得到适用于 L^p边界表示的径向性质RD的 L^p版本。

定理 3.6. 设 $R > 0$ 足够大，并设 $r \in [1, \infty]$ 使得 $0 \leq 1/r \leq 1$。存在 $C > 0$，使得对于任意 $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$，若对所有满足 $f_n = \sum_{\gamma \in S_{n,R}^{\Gamma}} \mu_{n,R}(\gamma) D_\gamma \in \mathbb{C}[\Gamma]$ 且支撑在 $S_{n,R}^{\Gamma}$ 上的 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^r \to L^r} \leq C \widetilde{\phi}_t(nR). \tag{3.7}$$

因此我们有

$$\sup_{\|v\|_p, \|w\|_q \leq 1} |\langle \pi_t(f_n) v, w \rangle| \leq C \widetilde{\phi}_t(nR). \tag{3.8}$$

注 3.7. 值得注意的是，上述定理可视为双曲群的 L^p-边界表示的径向性质RD的 L^p 版本。

证明。证明基于 Riesz-Thorin定理。我们将证明，对于任意 $t \in [-1/2, 1/2]$，以及每个 $n \in \mathbb{N}$，算子 $\pi_t(f_n)$ 作为从 $L^1 \to L^1$ 出发的算子，以及作为从 $L^\infty \to L^\infty$ 出发的算子时，相对于 n 都是一致有界的。

第二点由引理3.5得出。现在我们证明第一点。首先，注意到 $\pi_t(f_n)$ 保持正函数锥不变，因为 f_n 是正的，并且 π_t 自身也保持正函数锥不变。将函数 v 分解为实部和虚部，以及正函数和负函数后，只需对正函数找到一个界即可。假设 $v \geq 0$。

$$\begin{aligned} \|\pi_t(f_n) v\|_1 &= \langle \pi_t(f_n) v, \mathbf{1}_{\partial X} \rangle \\ &= \langle v, \pi_{-t}(\check{f}_n) \mathbf{1}_{\partial X} \rangle \\ &\leq \|\check{G}_n\|_\infty \langle v, \mathbf{1}_{\partial X} \rangle \\ &\leq C_\infty \widetilde{\phi}_t(nR) \|v\|_1, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理3.5的证明得出。因此，Riesz-Thorin定理意味着 $\pi_t(f_n)$ 定义了一个从 L^r 到 L^r 的有界算子，对任意满足 r 的 $1/r \in [0, 1]$。 □

4. Proofs

定理1.2 的证明分为三个步骤。

证明。令 $0 < t < \frac{1}{2}$。

步骤 1：一致有界性。对 $R > 0$ 以及所有非负整数 n，考虑支撑在 $S_{n,R}^{\Gamma}$ 上的函数 f_n，其定义如下：

$$f_n = \sum_{\gamma \in S_{n,R}^{\Gamma}} \mu_{n,R}(\gamma) \frac{D_\gamma}{\phi_t(\gamma)}.$$

注意，这是函数 $\sum_{\gamma \in S_{n,R}^{\Gamma}} \mu_{n,R}(\gamma) D_\gamma$ 的加权版本，其权重为球函数 $\phi_t(\gamma)$。定理3.6 的 L^p-谱不等式，加上存在 $C > 0$ 使得对所有 $\gamma \in S_{n,R}^{\Gamma}$，$C^{-1} \widetilde{\phi}_t(nR) \leq \phi_t(\gamma)$，可推出

$$\sup_n \|\pi_t(f_n)\|_{L^p\to L^p} < +\infty. \tag{4.1}$$

令 $K := \sup_n \|\pi_t(f_n)\|_{L^p\to L^p}$。给定 f, $g \in C(\overline{X})$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}|\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma o) g(\gamma^{-1}o) \frac{\langle \pi_t(\gamma)v, w\rangle}{\phi_t(\gamma)}| &\le C\|f\|_\infty \|g\|_\infty \|\pi_t(f_n)\|_{L^p\to L^p}\|v\|_p\|w\|_q \\ &\le K\|f\|_\infty\|g\|_\infty\|v\|_p\|w\|_q.\end{aligned}$$

根据巴拿赫–阿劳格鲁–布尔巴基定理，并且由于在自反空间上弱拓扑与弱*拓扑一致，该极限

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma o) g(\gamma^{-1}o) \frac{\langle \pi_t(\gamma)v, w\rangle}{\phi_t(\gamma)}$$

对所有 $v \in L^p$、所有 $w \in L^q$ 以及所有 f、$g \in C(\overline{X})$ 都存在，经过抽取子列后成立。

步骤 2：计算极限。

我们已经根据 [10] 知道，在 v中，w 对于 L^p的稠密子空间 L^q，我们得到了所需结果（例如，对所有 v、$w \in Lip(\partial X)$ 以及 f、$g \in C(\overline{X})$）

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma o) g(\gamma^{-1}o) \frac{\langle \pi_t(\gamma)v, w\rangle}{\phi_t(\gamma)} = \langle g_{|\partial X}\mathcal{R}_t(v), \mathbf{1}_{\partial X}\rangle\langle f_{|\partial X}, w\rangle.$$

步骤 3：结论。
假设 $0 < t < 1/2$。因此 $\mathcal{I}_t$，从而 $\mathcal{R}_t$ 在 L^p 上连续，并且满足 $1/p = 1/2 + t$。上述极限与第 1 步中的一致有界性最终推出：对于 f, $g \in C(\overline{X})$；对于 (v, w), $\in L^p \times L^q$：

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma o) g(\gamma^{-1}o) \frac{\langle \pi_t(\gamma)v, w\rangle}{\phi_t(\gamma)} = \langle g_{|\partial X}\mathcal{R}_t(v), \mathbf{1}_{\partial X}\rangle\overline{\langle w, f_{|\partial X}\rangle}.$$

□

4.1. 不可约性的证明。为了证明表示的不可约性，我们的主要工具是定理1.2。

引理 4.1。设 $0 < t < \frac{1}{2}$。向量 $\mathbf{1}_{\partial X}$ 对于 (π_t, L^p) 是循环的，而向量 σ_t 对于 $(\pi_{-t}, \overline{Im(\mathcal{I}_t)^{\|\cdot\|_q}})$ 是循环的。

证明。定理 1.2 对所有 $w \in L^q$ 均推出以下收敛性；并且对所有连续函数 $f \in C(\overline{X})$：

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma) f(\gamma o) \frac{\langle \pi_t(\gamma)\mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle}{\phi_t(\gamma)} = \langle f_{|\partial X}, w\rangle.$$

现在，给定函数 $f \in C(\partial X)$，考虑满足条件 $\tilde{f}_{|\partial X} = f$ 的 $\tilde{f} \in C(\bar{X})$。令

$$f_n := \sum_{\gamma \in S^{\Gamma}_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)\tilde{f}(\gamma o)\frac{\pi_t(\gamma)\mathbf{1}_{\partial X}}{\phi_t(\gamma)} \in \pi_t(\mathbb{C}[\Gamma])\mathbf{1}_{\partial X}. \tag{4.2}$$

因此， $f_n \to f$ 关于 L^p的弱拓扑。因此，由于 $C(\partial X)$在 L^p 中稠密，且弱拓扑与 $\|\cdot\|_p$ 的闭包重合，向量 $\mathbf{1}_{\partial X}$是 L^p的循环向量。

现在我们证明 σ_t 是 π_{-t}的循环向量。回忆对所有 $v \in L^p$，我们都有 $\mathcal{I}_t(v) \in L^q$，由命题 3.3可知。因此，对所有 $v \in L^p$，使用（4.2）中的相同记号，我们有

$$\langle f_n, \mathcal{I}_t(v)\rangle \to \langle f_{|\partial X}, \mathcal{I}_t(v)\rangle.$$

由于 $\mathcal{I}_t$ 是自伴的，对所有 $v \in L^p$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}_t(f_n), v\rangle &= \langle \sum_{\gamma \in S^{\Gamma}_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)\tilde{f}(\gamma o)\frac{\pi_{-t}(\gamma)\mathcal{I}_t(\mathbf{1}_{\partial X})}{\phi_t(\gamma)}, v\rangle \\ &\to \langle \mathcal{I}_t(f_{|\partial X}), v\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{I}_t(f_n) \in \pi_{-t}(\mathbb{C}[\Gamma])\sigma_t$.

因此

$$\overline{\pi_{-t}(\mathbb{C}[\Gamma])\sigma_t}^{\|\cdot\|_q} = \overline{\mathcal{I}_t(C(\partial X))}^{\|\cdot\|_q}.$$

最后，利用 $C(\partial X)$ 在 L^p 中的稠密性以及 $\mathcal{I}_t$ 的连续性，我们可得

$$\overline{\pi_{-t}(\mathbb{C}[\Gamma])\sigma_t}^{\|\cdot\|_q} = \overline{\mathcal{I}_t(L^p)}^{\|\cdot\|_q}.$$

□

定理 *1* 的证明。 首先，由于 $\mathcal{I}_t$ 是从 L^p 到 L^q的连续映射，因此子空间 $\ker \mathcal{I}_t$是 (π_t, L^p) 的闭不变子空间。因此，若 $\mathcal{I}_t$ 不是单射，则 (π_t, L^p) 不可约。

现在证明，若 $\mathcal{I}_t$ 是单射，则 (π_t, L^p) 对于 $1/p = 1/2 + t.$是不可约的。由于 $\mathcal{I}_t$ 是从 $L^p \to L^q$ 出发的连续算子，巴拿赫空间理论中的一个标准结果表明， $L^p/\ker \mathcal{I}_t$ 的对偶空间是空间 $Im(\mathcal{I}_t)^{\|\cdot\|_q}$，其中，对于 L^q，弱闭包与 $\|\cdot\|_q$-闭包相同（见 [30, 第 3] 章）。因此，$(\pi_t, L^p/\ker \mathcal{I}_t)$ 的对偶表示为 $(\pi_{-t}, Im(\mathcal{I}_t)^{\|\cdot\|_q})$。我们将证明 (π_{-t}, L^q) 不可约，从而得到 $(\pi_t, L^p/\ker \mathcal{I}_t)$ 的不可约性。

回忆一下， $\pi_{-t}(f)\sigma_t = \mathcal{I}_t(\pi_t(f)\mathbf{1}_{\partial X})$，对所有 $f \in \mathbb{C}[\Gamma]$，函数 σ_t在$Im(\mathcal{I}_t)^{\|\cdot\|_q}$中是循环的，其中 π_{-t}根据引理4.1。

现在，令 $0 \neq K \subset \overline{Im(\mathcal{I}_t)}^{\|\cdot\|}$ $\subset L^q(\partial X, \nu_o)$ 是一个由 π_{-t} 保持不变的 L^q-闭子空间。令$R > 0$ 足够大。对于任意 $w \in K \subset L^q$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 定义向量：

$$w_n := \sum_{\gamma \in S^{\Gamma}_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)\tilde{\sigma}_t(\gamma^{-1}o)\frac{\pi_{-t}(\gamma^{-1})w}{\phi_t(\gamma)} \in K, \tag{4.3}$$

其中 $\tilde{\sigma}_t$ 已在（2.20）中定义。定理 1.2 推出，对于所有 $v \in L^p(\partial X, \nu_o)$，当 $n \to +\infty$ 时：

$$\sum_{\gamma \in S^{\Gamma}_{n,R}} \mu_{n,R}(\gamma)\tilde{\sigma}_t(\gamma^{-1}o)\frac{\langle v, \pi_{-t}(\gamma^{-1})w\rangle}{\phi_t(\gamma)} \to \langle \mathcal{I}_t(v), \mathbf{1}_{\partial X}\rangle\langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle = \langle v, \mathcal{I}_t(\mathbf{1}_{\partial X})\rangle\langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle,$$

并且，关于 L^q 上的弱拓扑，上述收敛可表述如下：

$$w_n \to \langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle\sigma_t.$$

由于 K 是闭的，我们有 $\langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle\sigma_t \in K.$。因此，由于 σ_t 是循环的，只需证明存在 $0 \neq w \in K$ 使得

$$\langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle \neq 0.$$

假设结论不成立：对于所有 $w \in K$，都有 $\langle \mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle = 0$。那么对于所有 $\gamma \in \Gamma$，我们都有 $\langle \mathbf{1}_{\partial X}, \pi_{-t}(\gamma^{-1})w\rangle = 0 = \langle \pi_t(\gamma)\mathbf{1}_{\partial X}, w\rangle.$。因此，由于 $\mathbf{1}_{\partial X}$ 对于 $(\pi_t, L^p(\partial X, \nu_o))$ 是循环的，这意味着

$$K \subset \{w \in L^q | \langle v, w\rangle = 0, \forall v \in L^p\}$$

由于配对是非退化的，因此 $K = \{0\}$.

因此，若 $K \neq \{0\}$，则 K 包含 σ_t，从而必有 $Im(\mathcal{I}_t)\overline{\|\cdot\|_q}$，证明完毕。

□

5. Application to rank one semisimple Lie groups

设 G 是一个具有有限中心的连通半单李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 K 是 G 的一个极大紧子群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。设 $\mathfrak{p}$ 是相对于基 Killing 型 B，$\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{k}$ 的正交补。在包含于子空间 $\mathfrak{p}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔子代数中，设 $\mathfrak{a}$ 为极大的一个。我们假设 $\dim \mathfrak{a} = 1$，即 G 的实秩等于 1（特别地，G 非紧）。设 $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ 为与 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 相关联的根系。令

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

为 $\alpha \in \Sigma$ 的根空间。回顾一下，$\Sigma = \{-\alpha, \alpha\}$ 或 $\Sigma = \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\}$，其中 α 是一个正根（当且仅当对所有 $H \in \mathfrak{a}^+$，$\alpha(H) > 0$ 时，$\alpha \in \Sigma$ 为正）。若 $m_1 = \dim \mathfrak{g}_\alpha$，且 $m_2 = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ 记作 $\rho = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)$，则 α 为正根半和。设 H_0 为 $\mathfrak{a}$ 中满足 $\alpha(H_0) = 1$ 的唯一向量。因此，$\mathfrak{a} = \{tH_0, t \in \mathbb{R}\}$，且 $\mathfrak{a}_+ = \{H \in \mathfrak{a} | \alpha(H) > 0\}$ 可与严格正实数集对应。设 $\mathfrak{n}$ 为由正根的根空间直和构成的幂零李代数：

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

令 $A = \exp(\mathfrak{a})$、$A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ 和 $N = \exp(\mathfrak{n})$。令 $G = KAN$ 为岩泽分解，$K\overline{A^+}K$ 为由 $\mathfrak{a}^+$ 定义的嘉当分解，其中 $\overline{A^+}$ 表示 A^+的闭包。令 $Z(A)$ 为 A 在 G 中的中心化子，且 $M = Z(A) \cap K$。群 M规范化 N。令 $P = MAN$为 G的极小抛物子群

与 $\mathfrak{a}^+$相关联。令 ν 为富斯滕伯格-泊松边界 G/P 上唯一的 Borel 正则 K-不变概率测度，且在作用 G 下准不变（一般性讨论参见 [?，附录 B] ）。令

$$\rho_t : G \to \mathcal{U}(L^p(G/P, \nu))$$

是 G 的相应 L^p-边界表示，并定义了相应的球函数

$$\phi_t(g) = \langle \rho_t(g)\ \mathbf{1}_{G/P}, \mathbf{1}_{G/P} \rangle.$$

G 的相应非紧型全局对称空间为 G/K ，其上配备由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 上的基 Killing 型诱导的 G-不变黎曼度量，记为 d；$\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 与 G/K 在点 $o = eK$ 处的切空间相认。维数为 k 的平坦子空间定义为局部等距映射 $\mathbb{R}^k \to G/K$ 的像。G 的秩是 G/K 中平坦子空间的最大维数。非紧型秩一全局对称空间分类如下：实双曲空间 $H^n(\mathbb{R})$、复双曲空间 $H^n(\mathbb{C})$、当 $n \geq 2$ 时的四元数双曲空间 $H^n(\mathbb{H})$，以及例外双曲空间，即二维八元数双曲空间 $H^2(\mathbb{O})$。

如果 (X, d) 是上述双曲空间之一，那么它是一个 CAT(-1)空间，特别是一个完备的测地线 δ-双曲空间，当然也属于适用于$\epsilon = 1$的 2.3 类空间。因此，可以考虑其格罗莫夫边界 ∂X ，或等价地，考虑 X 的几何边界。群 G 在 (X, d) 上通过等距变换作用，其离散子群在 X 上适当不连续地作用。假设 Γ 是格（均匀或非均匀），并对 (Γ, d) 进行相应的帕特森-沙利文构造，以基点$o = eK \in X$ 为基础，得到一个支撑在 ∂X 上的测度，记为 ν_{o}。ν_o 的豪斯多夫维数是 Γ 的临界指数 Q_Γ ，它与相应双曲空间 $Q_G = m_1 + 2m_2$的体积增长相一致。

从原点出发的测地射线可利用嘉当分解表示为$c(t) = ke^{tH_0} \cdot o = kMe^{tH_0} \cdot o$，其中 $t \in \mathbb{R}_+$ 且 $k \in K$。在秩一对称空间的情形下，富斯滕伯格-泊松边界 G/P 可以与几何边界 ∂X 等同。事实上，借助伊瓦萨瓦分解 KAN，可以将 $G/P = K/M$ 等同起来。事实证明，与格 Γ 相关的帕特森-沙利文测度 ν_o 支撑在维数为 Q_Γ 的 ∂X 上，并且与 G/P上的唯一 K-不变测度 ν 重合。

因此， Γ 的 L^p-边界表示不过是将 ρ_t 限制到 Γ

$$\pi_t : \gamma \in \Gamma \to \rho_{t_{|\Gamma}} \in \mathrm{Iso}(L^p(\partial X, \nu_o)) \tag{5.1}$$

其中 p 使得 $1/p = 1/2 + t$ 其中 $0 < t < 1/2$。由于 Γ 可能是一个非均匀格，前面针对双曲群所得的结果不适用于 Γ。然而，我们有引理 3.5的完全类似结论。

以下，对于 $R > 0$ 以及任意 $n \in \mathbb{N}$，球面 $S^\Gamma_{n,R}$ 是相对于长度函数 $|\gamma| := d(o, \gamma o)$ 定义的，该长度函数对应于对称空间 G/K上的黎曼度量 d 。此外，对于 $\mu_{n,R}$ ，可以取 $R > 0$ 以及任意 $n \in \mathbb{N}$的标准平均

$$\frac{1}{|S^\Gamma_{n,R}|} \sum_{\gamma \in S^\Gamma_{n,R}} D_\gamma.$$

引理5.1. 设 Γ 是 G中的一个格。设 $R>0$。对于所有 $t\in[-1/2,1/2]$ 和 $n\in\mathbb{N}$，令 $f_n=\frac{1}{|S^\Gamma_{n,R}|}\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}}D_\gamma\in\mathbb{C}[\Gamma]$。将 $\pi_t(f_n)$ 视为从 $L^\infty\to L^\infty$. 出发的算子。存在依赖于 R 的 $C_\infty>0$，使得对于所有 $t\in[-1/2,1/2]$

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^\infty\to L^\infty}\le C_\infty\widetilde{\phi}_t(nR).$$

证明。 事实上，证明沿用了 [9, 命题3。2] 和 [12, 第2节。5] □

因此，完全按照定理 1.2证明的方法，我们得到

定理5.2. 设 Γ 是一个具有有限中心 G的连通秩一半单李群中的格。设 $R>0$ 足够大，并设 $r\in[1,\infty]$ 使得 $0\le 1/r\le 1$。存在 $C>0$，使得对于任意 $-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$，若对于所有 $n\in\mathbb{N}$满足 $f_n=\frac{1}{|S^\Gamma_{n,R}|}\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}}D_\gamma\in\mathbb{C}[\Gamma]$ 支撑在 $S^\Gamma_{n,R}$ 上，则有：

$$\|\pi_t(f_n)\|_{L^r\to L^r}\le C\widetilde{\phi}_t(nR). \tag{5.2}$$

因此，我们有

$$\sup_{\|v\|_p,\|w\|_q\le 1}|\langle\pi_t(f_n)v,w\rangle|\le C\widetilde{\phi}_t(nR). \tag{5.3}$$

在2.6中所需的等分布定理，在格的背景下表述如下。关于更一般情形下的以下结果，请参阅[29] 。

定理 5.3. 设 Γ 是一个有限中心为 G 的连通秩一半单李群中的格。对于任意 $R>0$，有如下收敛：

$$\frac{1}{|S^\Gamma_{n,R}|}\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}}D_{\gamma o}\otimes D_{\gamma^{-1}o}\rightharpoonup\nu_o\otimes\nu_o,$$

当 $n\to+\infty$ 时，在 $C(\overline{X}\times\overline{X})$ 中弱*收敛。

最终，我们得到

定理 5.4. 设 Γ 是一个有限中心为 G 的连通秩一半单李群中的格。当 $R>0$ 足够大时，对于所有 $0<t<1/2$、所有 $f\,g\in C(\overline{X})$、所有 $v\in L^p(\partial X,\nu_o)$ 以及 $w\in L^q(\partial X,\nu_o)$：

$$\frac{1}{|S^\Gamma_{n,R}|}\sum_{\gamma\in S^\Gamma_{n,R}}f(\gamma)g(\gamma^{-1})\frac{\langle\pi_t(\gamma)v,w\rangle}{\phi_t(\gamma)}\to\langle g_{|\partial\Gamma}\mathcal{R}_t(v),\mathbf{1}_{\partial\Gamma}\rangle\langle f_{|\partial\Gamma},w\rangle,$$

如 $n\to+\infty$。

5.1. 交织算子。 $L^2(K/M,\nu_o)$ 上从 ρ_t 到 K 的限制由下式给出

$$\rho_t(k)v(\xi)=v(k^{-1}\xi),$$

由于 ν_o 是 K不变的，并注意到该表示不再依赖于 t，并且给出了 K的酉表示。因此，交织关系2.19如下所示：对所有 $k\in K$ 以及对所有 $t>0$

$$\mathcal{I}_t\rho_t(k)=\rho_t(k)\mathcal{I}_t.$$

Peter-Weyl 定理意味着

$$L^2(K/M,\nu_o) = \oplus_{n\geq 0} V_n,$$

其中 V_n 是 K的有限维不可约酉表示。因此，Schur 引理表明，存在一个标量序列 $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ 使得 $\mathcal{I}_t$ 限制在 V_n 上是如下的标量算子 $\mathcal{I}_{t|_{V_n}} = \lambda_n Id|_{V_n}$ 其中 $\lambda_n \neq 0$ 对所有 $n \geq 0$成立。由此我们推得，视为作用于 L^2 上的算子时， $\mathcal{I}_t$ 是单射的，因此它作为从 L^p 到 L^q的算子也是单射。将定理 5.4 应用于秩一半单李群中的格，并完全采用定理 1 的相同论证，即可完成定理 2的证明。

References

[1] J.-P. Anker, *La forme exacte de l'estimation fondamentale de Harish-Chandra. (French) [The exact form of Harish-Chandra's fundamental estimate]* 巴黎科学院报告，数学系列 I（），第 9 期，371-374。[2] U. Bader，R. Muchnik，*Boundary unitary representations, irreducibility and rigidity.* 现代动力学杂志 5（2011），第 1 期，49-69。[3] U. Bader，J. Dymara，*Boundary unitary representations right-angled hyperbolic buildings.* 现代动力学杂志 10（2016），413-437。[4] S. Blach ` ¨ ère，P. Haıssinsky，*Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups.* ´ 44, 4 2011 683 721 P. Mathieu，《高等师范学校科学年鉴》，第（）期，–。[5] K. Boucher，*Analogs of complementary series for CAT(-1) groups*，arXiv:2007.15369，2020。[6] A. Boyer，*Some spherical functions on hyperbolic groups*《拓扑与分析杂志》，2019。[7] A. Boyer，*Equidistribution, ergodicity, and irreducibility in CAT(-1) spaces.*《群、几何与动力学》11（2017），第 3 期，777-818。[8] A. Boyer，D. Mayeda *Equidistribution, ergodicity and irreducibility associated with Gibbs measures*.《赫尔维数学评论》92（2017），第 2 期，349-387。[9] A. Boyer *Harish-Chandra's Schwartz algebras associated with discrete subgroups of semisimple Lie groups* 27 2017 3, 831 844 ，《李理论杂志》（），第 - 期。[10] A. Boyer 和 J-C. Picaud，*Riesz operator and some spherical representations for hyperbolic groups*，arXiv:2201.00077，2021。[11] A. Boyer 和 A. Pinochet-Lobos，*An ergodic theorem for the quasi-regular representation of the free group.* 24 2017 2, 243 255 《比利时数学会 Simon Stevin 通报》（），第 - 期。[12] A. Boyer，G. Link，Ch. Pittet，*Ergodic boundary representations.*《遍历理论与动力系统》39（2019），第 8 期，2017-2047。[13] A. Boyer 和 L. Garncarek，*Asymptotic Schur orthogonality in hyperbolic groups and application to monotony* 371 2019 6815 6841 ，《美国数学会汇刊》（），-。[14] M.R. Bridson；A. Haefliger，*Metric spaces of non-positive curvature.*《数学科学基础丛书》［《数学科学基本原理》］, 319。施普林格出版社，柏林，1999。[15] M. Burger 和 S. Mozes，*CAT(-1)-spaces, divergence groups and their commensurators*，《美国数学会杂志》9（1996），第 1 期，57-93，[16] Pierre-Emmanuel Caprace，Mehrdad Kalantar，Nicolas Monod，*A type I conjecture and boundary representations of hyperbolic groups* 2110 00190, 2021 ，arXiv: . .[17] M. Coornaert，*Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov (French, with French summary).* 159 1993 2, 241 270 《太平洋数学杂志》（），第 - 期。[18] F. Astengo，M. Cowling 和 B. Di Blasio，*The Cayley transform and uniformly bounded representations* 241 ，《泛函分析杂志》，第 213 卷，第 2 期，第 –269 页，2004。[19] C. Connell，R. Muchnik，*Harmonicity of quasiconformal measures and Poisson boundaries of hyperbolic spaces.* 17 2007 3, 《几何与泛函分析》（），第

[20] A. Fig`à-Talamanca，M.A. Picardello *Harmonic analysis on free groups*，《纯粹与应用数学讲义》第 87 卷，1983。[21] V. Finkelshtein， *Diophantine Properties of Groups of Toral Automorphisms.* 博士论文，伊利诺伊大学芝加哥分校，2017年，共77页。[22] L. Garncarek, *Boundary representations of hyperbolic groups*，arXiv:1404.0903，2014。[23] E. Ghys，P. de la Harpe。 *Panorama. (French) Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*（伯尔尼，1988），1-25，数学进展丛书第83卷，¨Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990。[24] M. Gromov, *Hyperbolic groups*，《群论论文集》，Springer，"MSRI 出版物"丛书（第8号），1987年，第75-263页。纽约，2001。[25] G-A. Gruetzner，*Harmonic analysis on the boundary of hyperbolic groups*，预印本，https://hal.inria.fr/hal-03963498/，2023。[26] M-G. Kuhn，T. Steger, *More irreducible boundary representations of free groups.*《杜克数学杂志》82（1996），第 2 期，381-436。[27] M-G. Kuhn，T. Steger， *Monotony of certain free group representations.*《泛函分析杂志》179（2001），第 1 期，1-17。[28] G. Margulis， *On some aspects of the theory of anosov systems.*《施普林格数学专著》，施普林格出版社，柏林，附 Richard Sharp 撰写的综述：双曲流的周期轨道，由 Valentina Vladimirovna Szulikowska 从俄文译出，2004。[29] T. Roblin, *Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique， mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative*，法国数学会回忆录，新系列第95卷（2003）。[30] Robert E. Megginson， *An introduction to Banach space theory.* 数学研究生教材，第183卷。施普林格出版社，纽约，1998。[31] B. Nica 和 J. ˇSpakula， *Strong hyperbolicity.*《群、几何与动力学》第10卷，第3期，2016年，951 964页。

[32] 136 1976 3 4, 241 273, S. J.

[33] *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* Patterson， *The limit set of a Fuchsian group.*《数学学报》（），第 - 期——D. Sullivan，《高等科学研究所数学出版物》50（1979），171-202。[34] T. Tao， *Lecture Notes 2*，笔记247 A。

Université de Paris Cité - Paris - France
Email address: adrien.boyer@imj-prg.fr
Université de Corte - Corsica
Email address: paoli j@univ-corse.fr