arXiv:2302.13746v1 [math.AT] 27 Feb 2023

赋拓扑的标准构造与局部拟正规子群

Z. Pashaei*, N. Gorentas, R. Abdi

数学系，理学院，凡·尤尊居伊尔大学，土耳其凡城，65080 校区，

摘要

本文扩展了 $[13, 14]$ 中的一些结果。令 $H \leq \pi_1(X, x_0)$。本文第一部分致力于研究较弱的条件，在这些条件下，相对于 H 的同伦豪斯多夫性会转化为相对于 H 的同伦路径豪斯多夫性。利用这些条件，我们探讨基本群上的须状拓扑与商拓扑之间的联系。随后，我们讨论当 H 是局部拟正规子群时，标准构造 X_H 上两个确定拓扑的重合。最后，例 3.14 表明，这类子群比正规子群更为广泛，并说明了将这些结果加以推广的合理性。

关键词：同伦豪斯多夫、同伦路径豪斯多夫、强小环传递空间、拟拓扑基本群、触须拓扑、套索拓扑、覆盖映射。

2020年数学主题分类：57M10、57M12、57M05、55Q05。

1. 引言

在经典覆盖理论中，半局部单连通性是一个关键条件。事实上，当 X 是 Peano 半局部单连通时，X 的连通覆盖空间与 $\pi_1(X, x)$ 的所有子群的共轭类相对应。因此，$\pi_1(X, x)$ 中可能存在许多子群，它们不对应于覆盖映射，却对应于覆盖映射 $[4, 5]$ 的其他一般化形式。基本群 $\pi_1^{qtop}(X, x)$ 上存在一种自然拓扑，

*通讯作者电子邮箱：szpashaei1986@yahoo.com（Z. Pashaei）、ngortas@yahoo.com（N. Gorentas）、a.roghayeh86@gmail.com（R. Abdi）

提交至 Elsevier 的预印本 2023年2月28日

它在覆盖空间存在性问题中发挥着重要作用： X 存在普遍覆盖空间，当且仅当 $\pi_1^{qtop}(X,x)$ 是离散的。因此，若 $\pi_1^{qtop}(X,x)$ 是离散的，则 $\pi_1(X,x)$ 的全子群都是覆盖子群。

如果 X 是非半局部单连通空间，例如一维 Menger 万有曲线、夏威夷耳环以及其他复杂的局部空间，我们就没有单连通覆盖。因此，人们开始将万有覆盖空间的概念加以推广，以涵盖这类空间。考察覆盖空间中那些本质性的性质，是一种共同的方法。其中一种推广就是半覆盖。半覆盖与基本群 $[3,\ 4]$上的拓扑群结构有关。另一种称为广义覆盖映射的方法，仅基于唯一提升性质来表述，并不一定是半覆盖映射 $[11]$。除此之外， $\pi_1^{qtop}(X,x)$的覆盖、半覆盖和广义覆盖子群的拓扑性质也已在 $[4,\ 6,\ 16]$中得到研究。 X 的万有连通覆盖空间的存在，使这三个概念相互重合。在 $[8]$, 中，Brodskiy 等人首次研究了基本群上的触须拓扑， $\pi_1^{wh}(X,x)$，并证明在 X 是小环传递（简称 SLT）空间的情况下， $\pi_1^{wh}(X,x)$不依赖于点 $x \in X$ 的选择。论文 $[8]$ 中的一些结果与强 SLT 空间有关，后者是 SLT 空间的更强版本。 $[13,\ 14]$中的作者引入了比 SLT 空间和强 SLT 空间更为广泛的空间。这些新方法的优势之一，在于其广泛性及其推广。 $[14]$ 的例 2.16 表明，（强）SLT 空间比半局部单连通空间和小环空间更为广泛。此外，（强）SLT 空间及其推广相较于半局部单连通和小环方法还具有许多其他优势。下面让我们回顾研究人员最近获得的一些基本结果。

- 皮亚诺拓扑空间 X 是 SLT，当且仅当 $\tilde{X}_e^{wh} = \tilde{X}_e^{top}$。其扩展版本见 $[13]$ 的定理 3.2；此外，我们可以验证，只要 X 在 x_0处是 SLT， $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 就是拓扑群。$\sim$ $\sim$
- 道路连通空间 X 是强 SLT，当且仅当 $X_e^{wh} = X_e^{l}$。其扩展版本见 $[14]$ 的定理 4.2。
- $\pi_1^{wh}(X,x_0)$ 离散的一个等价条件是， X 在 x_0处半局部单连通。
- 令 X 为 SLT 空间，则 h.H 与 h.p.H 的概念等价；其相对版本也成立。

- $\pi_1(X, x_0)$ 的每个广义覆盖子群（例如 H）都是半覆盖子群，前提是 X 在 x_0处为 H-SLT空间。
- 每个 $\pi_1(X, x_0)$ 的半覆盖子群（例如 H）都是覆盖子群，只要X 在 x_0处是强 H-SLT 空间。

请注意， [9]中定义的局部拟正规子群性质（见定义 3.1），促使我们改进了文献 [13, 14] 中的一些结果。在第 3 节开头，我们旨在统一上述两个重要概念。借助这一巧合，我们获得了关于基本群上的须状拓扑与商拓扑之间联系的信息。不过，我们采用新的条件来拓展文献 [14] 中的定理 4.2。最后，例 3.14 表明，局部拟正规子群比正规子群更为普遍，而正规子群是文献 [13, 14] 中某些定理的条件之一。

2. 定义与术语

全文中，(X, x_0) 表示一个带基点道路连通空间，H 表示基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的一个子群。如果 X 连通且局部道路连通，则称其为 Peano 空间。对于给定的路径 $\alpha : [0, 1] \to X$,$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ 是其反向道路。设 γ 和 δ 是 X 中的路径。 γ 与 δ 的拼接记为 $\gamma * \delta$，其中 $\gamma(1) = \delta(0)$。此外，将把单位区间集合 $[0, 1]$ 映到 x 的常值路径记为 c_x。对于给定的 $x \in X$， $P(X, x)$ 表示起点为 x 的路径子空间，而 $\Omega(X, x)$ 表示初点和终点均为 x 的路径子空间。令 $\alpha \in P(X, x_0)$，将 $\pi_1(X, x)$ 的道路共轭子群 $[\bar{\alpha}H\alpha] = \{[\bar{\alpha} * \delta * \alpha] \mid [\delta] \in H\}$ 记为 H_α。映射 $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ 表示由连续函数 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 诱导的同态。 $\pi_1(X, x_0)$ 的子群 $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ 称为 Spanier 子群，它由形如 $\alpha * \beta * \bar{\alpha}$ 的元素生成，其中 $\beta \in \Omega(X, \alpha(1))$，且 Im($\beta$) 包含于 $\mathcal{U}$ 的某个元素中。在下述定理中，Spanier 证明了 Spanier 子群有助于确定映射何时为覆盖映射。请注意，若 X 有一个覆盖映射 $p : X \to X$，且 $p(\tilde{x}_0) = x_0$，使得 $p_\#\pi_1(X, \tilde{x}_0)$ 与 H 相等，则称 H 为覆盖子群。

定理 2.1。 *[15,* 定理 2.5。*13]* 给定一个佩亚诺空间 X， $H \leq \pi_1(X, x_0)$ 是覆盖子群，当且仅当存在一个关于 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$，使得 $\pi(\mathcal{U}, x_0) \leq H$。

标准构造由 Spanier 在 [15] 中提出，当时他正准备对至少有一个万有覆盖空间的佩亚诺空间 X 的覆盖空间进行分类。取 $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$。我们称 α 和 β 具有相同的等价

类，记作 $\alpha \sim \beta$，当且仅当 $\beta(1) = \alpha(1)$ 且 $[\alpha] \in H[\beta]$。定义 $\sim X_H = P(X, x_0) / \sim$。令 $[\alpha]_H$ 表示 α 的等价类。置 $\tilde{x}_H = [c_{x_0}]_H$。~当 H 平凡时，我们用 X 代替 X_H；这称为标准构造。~回顾一下，迄今为止已经研究了三种类型的拓扑。商映射 $q\colon P(X, x_0) \to \widetilde{X}_H$ 在 $\widetilde{X}_H$ 上诱导出商拓扑，记作 $\widetilde{X}_H^{top}$；其中 $P(X, x_0)$ 赋有紧开拓扑。为了构造覆盖空间，Spanier 在 X_H 上定义的拓扑如下；有些人称之为触须拓扑 [7, 19]，并记作 X_H^{wh}。

定义 2.2. 标准构造上的触须拓扑具有如下基

$$N_H([\alpha]_H, U) = \{[\gamma]_H \mid \gamma \simeq \alpha * \delta \ for\ some\ \delta\ inside\ open\ subset\ U\ of\ \alpha(1) = \delta(0)\}$$

定义 2.3. 标准构造上的套索拓扑具有如下基 s

$$N_H([\alpha]_H, \mathcal{U}, U) = \{[\beta]_H \mid \beta \simeq \alpha * \gamma * \delta \ for\ some\ [\gamma] \in \pi(\mathcal{U}, \alpha(1))\ and\ for\ some\ \delta\ inside\ U\ of\ \alpha(1) = \delta(0)\}$$

~其中 $U \in \mathcal{U}$。记作 X_H^l。

~容易观察到，$\pi_1(X, x_0)$ 是 X 的子集。由 $\widetilde{X}^{wh}$、$\widetilde{X}^{top}$ 和 $\widetilde{X}^{l}$ 在 $\pi_1(X, x_0)$ 上诱导的拓扑分别记为 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$、$\pi_1^{qtop}(X, x_0)$ 和 $\pi_1^{l}(X, x_0)$（更多细节参见 [3, 6, 8, 13, 14, 19]）。

半覆盖映射基于局部同胚性质定义（参见[2, 4]）。与覆盖子群的定义类似，若 H~可以表示为某个半覆盖映射的形式，例如 $p\colon X \to X$，则称 H 为半覆盖子群。已有研究表明，半覆盖与拟拓扑基本群 $\pi_1^{qtop}(X)$ [2] 的开子群相对应。文献 [16] 的作者尝试识别哪些子群是开的。这一尝试促使他们定义了一类特殊子群，它们与 Spanier 子群十分相似。首先，他们引入了路径开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in P(X, x_0)\ and\ \alpha(1) \in V_\alpha\}$，它是 X 的一个开覆盖。子群 $\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0) \leq \pi_1(X, x_0)$ 称为路径 Spanier 子群，它由具有如下形式的元素生成：$\alpha * \beta * \bar{\alpha}$，其中 β 是一个以 $\alpha(1)$ 为起点和终点的环路，且其像包含于 $V_\alpha \in \mathcal{V}$ 中。

定理 2.4. *[16,* 推论 3.*3]*对于给定的佩亚诺空间 X，H 是半覆盖子群，当且仅当它包含一个路径 Spanier 子群。

与万有覆盖映射不同，Fischer 和 Zastrow 最初在 [10]，中定义的广义万有覆盖映射，在研究复杂局部空间的基本群（例如夏威夷耳环的基本群）时发挥着重要作用（更多详情见 [10, 12]）。此后，Brazas 在 [5] 中将该定义推广到了 $\pi_1(X, x_0)$ 的一般子群，定义如下。

~定义 2.5. 若映射 $p:(X,\tilde{x}) \to (X,x)$ 具有以下性质，则称其为广义覆盖映射：

~1. X 是一个佩亚诺空间，

~2. 对于每个映射 $g:(Z,z) \to (X,x)$，存在唯一的映射 $\tilde{g}:(Z,z) \to (X,\tilde{x})$~，使得 $p \circ \tilde{g} = g$，前提是 $g_{\#}\pi_1(Z,z) \subseteq p_{\#}\pi_1(X,\tilde{x})$

在这一扩展中，仅使用了覆盖映射的唯一提升性质。注意，这两个概念不一定相同（参见 [10, 命题 3.6], [15, 推论 2.5.14]）。在 [5, 引理 5.10], 中验证了，每个与子群 H 相关的广义~覆盖映射，例如 $p:(X,\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$，意味着~ $p_{\#}\pi_1(X,\tilde{x}_0) = H$，都等价于一个特定的映射，称为端点投影~映射， $p_H:(X_H^{wh},\tilde{x}_H) \to (X,x_0)$，其中 $p_H([\alpha]_H) = \alpha(1)$。换言之，任何广义覆盖空间的拓扑都与标准拓扑一致。

定义 2.6. *[10,* p. *190]*令 $\alpha \in P(X,x_0)$ 满足 $\alpha(1) = x$ 且 $g \notin H$。若存在一个包含 x 的开子集 $U \subseteq X$，使得 $i_{\#}\pi_1(U,x)_{\tilde{\alpha}} \cap Hg = \emptyset$，则称 X相对于 H 是同伦豪斯多夫的（简称 h.H）。

定义 2.7. *[6]*令 $\alpha,\beta \in P(X,x_0)$ 满足 $\alpha(1) = \beta(1) = x$ 且 $[\alpha] \notin H[\beta]$。此外，假设我们有单位区间 I的一个分割 $\{[t_{i-1},t_i] |\ 1 \leq i \leq n \ such\ that\ t_0 = 0,\ t_n = 1\}$ 以及开子集 $U_1,U_2,...,U_n$，满足 $\alpha([t_{i-1},t_i]) \subseteq U_i$，其中 $i = 1$为 $2,...,n$。若 $\lambda \in P(X,x_0)$ 是另一条路径，满足 $\lambda(1) = x$，且其中 $\lambda([t_{i-1},t_i]) \subseteq U_i$，并且 $\lambda(t_i) = \alpha(t_i)$，使得对于 $i = 0$，有 $1,...,n$，$[\lambda] \notin H[\beta]$，则称 X相对于 H 是同伦路径豪斯多夫的（简称 h.p.H）。

请注意，H 在 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 中闭的条件之一是 p_H 具有路径唯一提升性质。

定理 2.8. *[6]* 设 X 是一个佩亚诺空间。若 H 在 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 中闭，则 p_H 具有路径唯一提升性质。

定理 2.9. 若 H 在 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 中闭，则 X 相对于 H 是 h.p.H。若 X 是佩亚诺空间且相对于 H 是 h.p.H，则 H 在 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 中闭。

下面的命题给出了 p_H 成为广义覆盖映射的充分必要条件。

命题 2.10. *[5]* 设 $H \leq \pi_1(X,x_0)$。那么

- 如果 p_H 是广义覆盖，则 X 相对于 H 是 h.H。

- p_H 如果 X 相对于 H 是 h.p.H，则 • p_H 是广义覆盖。

在 [8], Brodskiy 等人最初提出了（强）小环传递空间的概念。其扩展版本基于 $\pi_1(X, x_0)$ 的任意子群定义。

定义 2.11。 *[13,* 定义 2.*11]* 设 $\alpha \in P(X, x_0)$，且 $\alpha(1) = x_0$。如果对于每个开子集 U at x_0，都存在一个开子集 V at x，使得 $i_{\#}\pi_1(V, \alpha(1))_{\bar{\alpha}} \subseteq Hi_{\#}\pi_1(U, x_0)$，则称 X is an H-小环传递（简称 H-SLT）空间 at x_0。然而，如果对于每个 $\delta \in P(X, x_0)$，且 $\delta(1) = x$，X is H_δ-SLT at x，则称 X is an H-SLT 空间。当 H 为平凡群时，我们用 SLT 代替 H-SLT。

定义 2.12。 *[14,* 定义 1。*3]* 对每个 $x \in X$ 以及每个在 x_0 处的开子集 U，存在一个在 x 处的开子集 V，使得对于每个 $\alpha \in P(X, x_0)$，若 $\alpha(1) = x$，则有 $i_{\#}\pi_1(V, \alpha(1))_{\bar{\alpha}} \subseteq Hi_{\#}\pi_1(U, x_0)$。此时，我们称 X 在x_0处是强 H-SLT空间。然而，如果对于每个满足$\delta(1) = x$的 $\delta \in P(X, x_0)$， X 在 x处是强 H_δ-SLT，则称 X 是强 H-SLT空间。与上述定义类似，当 H 为平凡群时，我们用强 SLT 代替强 H-SLT。

3. 主要结果

一些学者在 [5, 9, 10, 13]中研究了定义 2.6 和定义 2.7 及其相互关系。这类空间的一个重要特征可以从命题 2.10 中看出。虽然相对于 H 的每个 h.p.H 都是相对于 H的 h.H，但反之未必成立（见 [12, 18]）。确定这两个概念何时一致具有重要意义。回顾可知，半局部单连通这一性质会导致这些概念一致。 [13,中的作者甚至在定理 2.5] 中证明：当 H 为正规子群时，该结论对相对于 H 的小环传递空间成立。本文的主要目的之一是推广这一结论。事实上，我们考虑了另一个子群来替代正规子群；它被称为局部拟正规子群。

定义 3.1. *[9]* 设 $\alpha \in P(X, x_0)$ 满足 $\alpha(1) = x_0$。若对每个开子集 $x \in U$，都存在 x 的一个开子集 $V \subseteq U$，使得 $H\pi(\alpha, V) = \pi(\alpha, V)H$，则称 H 是局部拟正规子群。

引理 3.2. 设 $\alpha \in P(X, x_0)$。若 H 是局部拟正规子群，则 H_α 也是局部拟正规的。

证明。令 δ 为从 x 到 y 的任意路径。由于 H 是局部拟正规群，我们有 $H\pi(\alpha * \delta, V) = \pi(\alpha * \delta, V)H$。现在，我们证明 $H_\alpha\pi(\delta, V) = \pi(\delta, V)H_\alpha$。

首先，取元素 $[\bar{\alpha} * h * \alpha * \delta * \beta * \delta] \in H_\alpha\pi(\delta, V)$，其中 $[h] \in H$ 且 $[\beta] \in \pi_1(V, y)$。注意到 $[\bar{\alpha} * h * \alpha * \delta * \beta * \delta] = [\bar{\alpha} * h * \alpha * \delta * \beta * \delta * \bar{\alpha} * \alpha]$。显然，$[h*\alpha*\delta*\beta*\delta*\bar{\alpha}] \in H\pi(\alpha * \delta, V)$。根据上述关系，存在 $[h'] \in H$ 和 $[\beta'] \in \pi_1(V, y)$，使得 $[h*\alpha*\delta*\beta*\delta*\bar{\alpha}] = [\alpha*\delta*\beta'*\delta*\bar{\alpha}*h'] \in \pi(\alpha * \delta, V)H_\alpha$。因此，$[\bar{\alpha}*h*\alpha*\delta*\beta*\delta] = [\bar{\alpha}*h*\alpha*\delta*\beta*\delta*\bar{\alpha}*\alpha] = [\bar{\alpha}*\alpha*\delta*\beta'*\delta*\bar{\alpha}*h'*\alpha] = [\delta * \beta' * \delta * \bar{\alpha} * h' * \alpha] \in \pi(\delta, V)H_\alpha$，这意味着 $H_\alpha\pi(\delta, V) \subseteq \pi(\delta, V)H_\alpha$。类似地，我们可以得到 $\pi(\delta, V)H_\alpha \subseteq H_\alpha\pi(\delta, V)$。 □

注 3.3. 假设 H 是一个局部拟正规子群。根据引理 3.2 的证明，若用常值路径 c_x 替代 δ，则 $H_\alpha\pi(c_x, V) = \pi(c_x, V)H_\alpha$。注意，$\pi(c_x, V) = i_\#(V, x)$，其中 $i : V \to X$ 是一个包含映射。

定理 3.4. 设 X 在 x_0 处是一个 H-SLT 空间，且 H 是局部拟正规子群。若 X 相对于 H 是 h.H，则 X 相对于 H 是 h.p.H。

证明. 假设 $[\beta * \bar{\alpha}] \notin H$ where $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$ and $\alpha(1) = \beta(1) = x$. 由于X相对于 H 是 h.H, 因此存在 x_0 的一个开子集 $U \subseteq X$，使得 $i_\#\pi_1(U, x_0) \cap H[\beta * \bar{\alpha}] = \emptyset$. 另一方面，由于 H 是局部拟正规子群，存在 x_0 的一个开子集 $V \subseteq U$，使得 $Hi_\#\pi_1(V, x_0) = i_\#\pi_1(V, x_0)H$ and $i_\#\pi_1(V, x_0) \cap H[\beta * \bar{\alpha}] = \emptyset$. 对每个 $t \in [0, 1]$，考虑从x_0 到 $\alpha_t(1) = \alpha(t) = x_t$ 的路径 $\alpha_t = \alpha\,|_{[0,t]}$，并令 $\alpha_{t_0} = c_{x_0}$. 根据假设，在 x_t 处存在开子集$V_t \subseteq X$，使得对于 V_t 中以 x_t 为起点的任意闭路径 β_t，都存在 V 中以 x_0 为起点的闭路径 γ_t，使得 $[\alpha_t * \beta_t * \bar{\alpha}_t]_H = [\delta_t]_H$，或者等价地，$[\alpha_t * \beta_t * \bar{\alpha}_t] \in H[\delta_t]$. 由闭区间 $I = [0, 1]$ 的紧致性及 α 的连续性，存在 $[0, 1]$ 的一个分割 $\{[t_{i-1}, t_i] |\ i = 1, 2, ..., n \ such \ that \ t_0 = 0,\ t_n = 1\}$ 和开子集 $U_1, ..., U_n$，使得 $\alpha[t_{i-1}, t_i] \subseteq U_i$. 对于 $i = 1, 2, ..., n$，令 $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$. 另取一条路径 γ，从 x_0 到 x，使得 $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ 的像包含于 U_i 中，其中 $i = 1, 2, ..., n$，且对 $i = 0, 1, ..., n$，有 $\gamma(t_i) = \alpha(t_i)$. 若令$\theta_i = \alpha_{t_{i-1}} * \gamma_i * \bar{\alpha}_i * \bar{\alpha}_{t_{i-1}}$，其中 $1 \le i \le n$。不难看出，θ_i's 是 U_i 中以 $\alpha(t_{i-1})$ 为起点的环路。如前所述，对于 $\theta_1, ..., \theta_n$，分别有 $[\delta_1], ..., [\delta_n]$ 属于 $i_*\pi_1(V, x_0)$，使得对 $i = 1, 2, ..., n$，有 $[\theta_i] \in H[\delta_i]$. 由于 $Hi_\#\pi_1(V, x_0) = i_\#\pi_1(V, x_0)H$, $H[\delta_1]H[\delta_2] \in HHi_\#\pi_1(V, x_0)[\delta_2] = Hi_\#\pi_1(V, x_0)$, 并且同理有 $H[\delta_1]H[\delta_2]H[\delta_3] \in Hi_\#\pi_1(V, x_0)H[\delta_3] = HHi_\#\pi_1(V, x_0)[\delta_3] = Hi_*\pi_1(V, x_0)$。通过连续性进行这一过程，得到 $H[\delta_1]H[\delta_2]...H[\delta_n] \in Hi_\#\pi_1(V, x_0)$。注意 $\gamma * \bar{\alpha} = \theta_1 *.. * \theta_n$. 因此，$[\gamma * \bar{\alpha}] = [\theta_1 * ... * \theta_n] \in H[\delta_1]H[\delta_2]...H[\delta_n] = Hi_\#\pi_1(V, x_0)$。换言之，存在 V 中以 x_0 为起点的闭路径 δ，使得 $[\gamma * \bar{\alpha}] \in H[\delta]$, 即 $[\gamma * \bar{\alpha} * \delta] \in H$。我们有 $[\gamma * \beta] = [\gamma * \bar{\alpha} * \delta][\delta * \alpha * \beta]$. 由于 $i_\#\pi_1(V, x_0) \cap H[\beta * \bar{\alpha}] = \emptyset$, 所以 $[\delta * \alpha * \beta] \notin H$。因此，$[\gamma * \beta] \notin H$，因为 $[\gamma * \bar{\alpha} * \delta] \in H$。这意味着$X$ 相对于 H 是 h.p.H。

□

推论 3.5. 假设 H 是局部拟正规，且 X 是 H-SLT。若 X 相对于 H_α 是 h.H，则对每个 $\alpha \in P(X, x_0)$， X 相对于 H_α 是 h.p.H。

证明。根据注 3.2， H_α 是局部拟正规。然而，根据假设， X 在 x处是 H_α- SLT。因此，定理 3.4得出， X 相对于 H_α是 h.p.H。 □

注 3.6. 鉴于推论 3.5，“H-SLT”和“H 的局部拟正规性”这两个条件保证：对于每个 $\alpha \in P(X, x_0)$，相对于 H_α 的 h.p.H 与相对于 H_α 的 h.H 是等价的。在 H=*1*的情况下，当 X 是 SLT 空间时，h.H 与 h.p.H 也相同。

定理 3.7. 设 X 是一个 H-SLT空间。那么，对于每个 $\alpha \in P(X, x_0)$， X 相对于 H_α 是 h.H，当且仅当 H_α 在 $\pi_1^{wh}(X, \alpha(1))$ 中是闭的。

证明。“仅当”：取 $\alpha \in P(X, x_0)$，其中 $\alpha(1) = x_0$。 $[1,$ 命题 3.9$]$ 中证明了，相对于 H_α 具有 h.H 性质意味着 H_α 在 $\pi_1^{wh}(X, x)$ 中是闭的。

“若”：根据假设， X 在 x处是 H_α-SLT。根据 $[13,]$ 的定理 2.6，若 H_α 在 $\pi_1^{wh}(X, x)$ 中是闭的，则 X 相对于 H_α具有 h.H 性质。 □

在 $[13,]$ 的一些结果中会用到 H 的正规性，例如推论 2.8 和 2.9。这些结果可以改进如下。

推论 3.8。设 X 是局部道路连通的 H-SLT 空间，且 H 是局部拟正规的。那么， H_α 在 $\pi_1^{qtop}(X, x)$ 中闭，当且仅当 H_α 在 $\pi_1^{wh}(X, x)$ 中闭。

证明。只需证明充分性。由定理 3.7， X 相对于 H_α 是 h.H，而推论 3.5 表明 X 相对于 H_α是 h.p.H。因此，由定理 2.9 可知， H_α 在 $\pi_1^{qtop}(X, x)$中是闭的。 □

引理 5.10（见[5]）展示了端点投影映射的用途。不过请注意， p_H 的唯一提升性质源于其路径唯一提升性质 $[5,$ 引理 5.9$]$。事实上，若映射 $p : X \to X$ 满足 $p(\tilde{x}_0) = \widetilde{x_0}$且 $H = p_\# \pi_1(X, \tilde{x}_0)$，那么当 p_H 具有路径唯一提升性质时，它就是广义覆盖映射。在 $[6,]$ 中，人们发现基本群的某些指定子群会使端点投影映射具有路径唯一提升性质，例如 $\pi_1^{qtop}(X, x_0)$的闭子群。下面的推论说明， $[13]$中的推论 2.9 对局部拟正规子群成立。

推论 3.9. 假设 $\alpha \in P(X, x_0)$，X 是一个局部道路连通的 H-SLT，且 H 是局部拟正规子群。那么， H_α 在 $\pi_1^{qtop}(X, \alpha(1))$ 中是闭的，当且仅当 p_{H_α}具有唯一路径提升性质。

证明. “仅当”：由定理 2.8 可立即得出。

“如果”：根据命题 2.10， X 相对于 H_α是 h.H。由于 X 是 H-SLT，定理 3.7 得出 X 相对于 H_α是 h.p.H。因此，定理 2.9 意味着H_α 在 $\pi_1^{qtop}(X,x)$ 中是闭的。 □

Virk 和 Zastrow 首次在 [19]中引入了路径同伦类 $\sim X$上的 whisker 拓扑与 lasso 拓扑之间的联系。随后， [14] 中的作者不仅阐明了 $\widetilde{X}_H^{wh}$与 $\widetilde{X}_H^{l}$之间的联系，还刻画了使二者重合的条件 [14, 定理 4.2]；它们并不一定相同 [19]。其中一个条件是 H 的正规性。我们证明，对于局部拟正规子群，这种重合成立。

定理 3.10. 设 H 是局部拟正规子群。则 X 是强 H-SLT 空间，当且仅当对每条路径 $\alpha \in P(X,x_0)$， $\widetilde{X}_{H_\alpha}^{l} = \widetilde{X}_{H_\alpha}^{wh}$。

证明。“仅当”：根据 whisker 拓扑和 lasso 拓扑的定义，显然，对于基本群的每个子群 N，$\widetilde{X}_N^{l}$ 比 $\widetilde{X}_N^{wh}$更粗。首先， ~ ~将证明 X_H^{wh}比 X_H^{l}更粗。为此，我们取 X_H^{wh} 的一个开子集 ~$([\alpha]_H, U)$。H 局部拟正规性的假设保证存在 $\alpha(1) = x$ 的一个开子集 $V \subseteq U$，使得 $H\pi(\alpha, V) = \pi(\alpha, V)H$。显然，我们有 $([\alpha]_H, V) \subseteq ([\alpha]_H, U)$。因此，由于 X是强 H-SLT，对于每个点 $y \in X$，在 y 处都存在一个开子集 W，使得对于从 x 到 y的每条路径 δ，以及每个闭路径 $\beta: I \to W$ at y，都存在一个闭路径 $\lambda: I \to V$ at x such ¯that $[\delta * \beta * \delta]_{H_\alpha} = [\lambda]_{H_\alpha}$。设 $\mathcal{W}$ 是由$\sim W$构成的 X 的一个开覆盖。在 X_H^{l}中定义开基邻域 $([\alpha]_H, \mathcal{W}, V)$。考虑 $[\alpha * l * \lambda]_H \in ([\alpha]_H, \mathcal{W}, V)$，其中 $[l] \in \pi(\mathcal{W}, \alpha(1))$，且 $\lambda: I \to V$ 是一条路径，满足 $\lambda(0) = \alpha(1) = x$。我们知道 $l = \Pi_{i=1}^{n} \alpha_i * \beta_i * \bar{\alpha}_i$，其中 α_i是满足 $\alpha_i(1) = x$ 的路径，而β_i是某个 $W \in \mathcal{W}$中以 $\alpha_i(1)$为基点的环路。对 $i = 1, 2, ..., n$，令 $\theta_i = \alpha_i * \beta_i * \bar{\alpha}_i$。由于 X是强 H-SLT， $i = 1$为2, ..., n时， $[\theta_i] \in H_\alpha i_\# \pi_1(V, x)$。因此，我们有 $[l] = [\theta_1 * \theta_2 * ... * \theta_n] \in (H_\alpha i_\# \pi_1(V, x))(H_\alpha i_\# \pi_1(V, x))...(H_\alpha i_\# \pi_1(V, x))$。由注 3.3，$(H_\alpha i_\# \pi_1(V, x))(H_\alpha i_\# \pi_1(V, x))...(H_\alpha i_\# \pi_1(V, x)) = H_\alpha i_\# \pi_1(V, x)$，从而 $[l] \in H_\alpha i_\# \pi_1(V, x)$。换言之，在 V 中存在一个以 x 为基点的环路 θ，使得 $[l] \in H_\alpha[\theta]$, ¯ ¯ ¯ ¯ ¯ ¯，即 $[l * \theta] \in H_\alpha$。记作 $[l * \theta] = [l * \lambda * \lambda * \theta]$。因此，我们有 $[l * \lambda * \lambda * \theta] \in [\bar{\alpha} H \alpha]$ or ¯ ¯equivalently, $[\alpha * l * \lambda * \lambda * \theta * \bar{\alpha}] \in H_\alpha$。这意味着 $[\alpha * l * \lambda]_H = [\alpha * \theta * \lambda]_H \in$ ~$([\alpha]_H, V) \subseteq ([\alpha]_H, U)$。因此，$([\alpha]_H, \mathcal{W}, V) \subseteq ([\alpha]_H, U)$表明 X_H^{l}比 X_H^{wh}更细~ ~ ~。所以， $X_H^{l} = X_H^{wh}$。注意，我们可以很容易地推导出，对于每条路径$\alpha \in P(X, x_0)$，空间 X都是一个强 H_α-SLT 空间。据此，由引理 3.2和~ ~上述陈述可知，对于每条路径 $\alpha \in P(X, x_0)$，$X_{H_\alpha}^{wh} = X_{H_\alpha}^{l}$。

“若”：证明与 [14, 定理 4.2] 的证明类似。

□

下面的推论是 [14] 中推论 4.3 的推广版本。

推论 3.11. 假设 H 是局部拟正规，且 $\alpha \in P(X, x_0)$ 满足 $\alpha(1) = x_。$ 如果 X 是强 H-SLT，那么 $(p_{H_\alpha}^{-1}(x))^{wh} = (p_{H_\alpha}^{-1}(x))^{l}$。

证明. 由定理 3.10 立即可得。 □

$\pi_1(X, x_0)$ 的所有 Spanier 子群的交记作 $\pi_1^{sp}(X, x_0)$，称为 Spanier 群 [12, 定义 2.3]。然而， $\pi_1(X, x_0)$ 中所有小环路的同伦类构成一个子群，记作 $\pi_1^s(X, x_0)$ [17,定义 1]；注意，环路 $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ 称为小环路，当且仅当它在 x_0 的每个开子集 U 中都有一个同伦代表。可以在 [12, 17] 中看到这些子群及其他重要子群的用途。下文将探讨这两个子群是否相等。当然，回顾一下，我们有关系式 $\pi_1^s(X, x_0) \leq \pi_1^{sp}(X, x_0)$。

命题 3.12. 设 $\pi_1^s(X, x_0)$ 含有局部拟正规子群 H。则 $\pi_1^s(X, x_0) = \pi_1^{sp}(X, x_0)$，若 X 在 x_0 处是强 H-SLT。

证明. 假设 $[\theta] \in \pi_1^{sp}(X, x_0)$，且 U 是 X 中包含 x_0 的一个开子集。由注 3.3 可知，存在一个开子集 $x_0 \in V \subseteq U$，使得 $i_{\#}\pi_1(V, x_0)H = Hi_{\#}\pi_1(V, x_0)$。由于 X 在 x_0 处是强 H-SLT，我们可以定义 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}$，使得 $\pi_1^{sp}(X, x_0) \subseteq \pi(\mathcal{U}, x_0)$ 且 $[\theta] \in \pi(\mathcal{U}, x_0)$。我们知道 $\theta = \Pi_{i=1}^n \gamma_i$，其中 $\gamma_i = \alpha_i * \beta_i * \bar{\alpha}_i$ 对于 $i = 1$、2、.....、n， α_i 是从 x_0 到 $\alpha_i(1)$ 的路径，而 β_i 是 $\alpha_i(1)$ 处某个 $U_i \in \mathcal{U}$ 中的闭路径。因此，存在一条闭路径 λ_i，它位于 V 中的 x_0 处，使得 $[\gamma_i * \lambda_i] \in H$，也就是说， $[\gamma_i] \in H[\lambda_i]$。于是，$[\theta] = [\gamma_1 * \gamma_2 * ... * \gamma_n] \in (H[\lambda_1])(H[\lambda_2])...(H[\lambda_n])$。根据关系 $i_{\#}\pi_1(V, x_0)H = Hi_{\#}\pi_1(V, x_0)$，存在一条闭路径 $\gamma: I \to V$，它位于 x_0 处，使得 $[\theta] \in H[\gamma]$，即 $[\theta] = [h * \gamma] = [h][\gamma]$。由于$H \subseteq \pi_1^s(X, x_0)$，因此 $[h] \in i_{\#}\pi_1(V, x_0)$。因此， $[\theta] \in i_{\#}\pi_1(V, x_0)$ 可推出 θ 是一个小环路，从而 $\pi_1^s(X, x_0) = \pi_1^{sp}(X, x_0)$。 □

推论 3.13. 若 X 在 x_0, $\pi_1^s(X, x_0)$ 处是强 SLT，则 $= \pi_1^{sp}(X, x_0)$。

证明. 这由命题 3.12 立即得出。 □

在下面的例子中，我们给出一个不是正规子群的局部拟正规子群。

例 3.14. 众所周知，若 $\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)$ 是 *[16]* 中的正规子群，则 Spanier 子群 $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ 与路径 Spanier 子群$\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)$ 相等。因此，路径 Spanier 子群不一定是正规子群。另一方面，对于每条路径 $\alpha \in P(X, x_0)$ 和每个开子集 $V_\alpha \in \mathcal{V}$of $\alpha(1)$， $\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)$ 和 $\pi(\alpha, V_\alpha)$ 中元素的形式表明，$\pi(\alpha, V_\alpha)\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0) = \tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)\pi(\alpha, V_\alpha)$。据此， $\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)$ 是局部拟正规的。

参考文献

参考文献

[1] M. Abdullahi Rashid, B. Mashayekhy, H. Torabi, S.Z. Pashaei，论拓扑化基本子群与广义覆盖，Bulletin of the Iranian Mathematical Society 43（2017年）2349-2370。[2] J. Brazas，半覆盖：覆盖空间理论的一种推广，Homol. Homotopy Appl. 14（2012年）33-63。[3] J. Brazas，作为拓扑群的基本群，Topology and its Applications 160（2013年）170-188。[4] J. Brazas，准拓扑基本群的半覆盖、覆盖、叠覆盖与开子群，Topol. Proc. 44（2014年）285-313。[5] J. Brazas，广义覆盖空间理论，Theory Appl. Categ. 30（2015年）1132-1162。[6] J. Brazas, P. Fabel，带商拓扑的基本群，Homo-topy Relat. Struc. 10（2015年）71-91。[7] N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz and A. Mitra，局部路径连通空间的覆盖映射，Fund. Math. 218（2012年）13-46。[8] N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz and A. Mitra, A.，万有覆盖空间上的拓扑与一致结构，arXiv: 1206.0071。[9] H. Fischer, J. Garcia，纤维化、路径唯一提升与连续单值化。Topology and its Applications 270（2020年）107047 1-9。[10] H. Fischer and A. Zastrow，广义万有覆盖空间与形状群，Fund. Math. 197（2007年）167-196。[11] H. Fischer and A. Zastrow，组合R树作为一维空间基本群的广义凯莱图，Geom. Dedicata 163（2013年）19-43。[12] H. Fischer, D. Repovˇs, ˇZ. Virk, A. Zastrow，论半局部单连通空间，Topology and its Applications 158（2011年）397-408。

[13] S.Z. Pashaei, B. Mashayekhy, H. Torabi, M. Abdullahi Rashid，关于基本群子群相关的小环传递空间。Topology and its Applications 232（2017年），242-255。[14] S.Z. Pashaei, B. Mashayekhy, H. Torabi, M. Abdullahi Rashid, 关于相对于基本群子群的强小环传递空间。Topology and its Applications 254（2019），117-131。[15] E.H. Spanier，《代数拓扑》，麦格劳-希尔，纽约，1966年。[16] H. Torabi, A. Pakdaman, B. Mashayekhy，论 Spanier 群及覆盖与半覆盖空间，arXiv:1207.4394。[17] ˇZ. Virk，小环空间，Topology and its Applications 157（2010）451-455。ˇ[18] Z. Virk, A. Zastrow，一个同伦豪斯多夫空间，但它不承认广义万有覆盖空间，Topology and its Applications 160（2013年）656-666。[19] ˇZ. Virk, A. Zastrow，与各种广义覆盖空间概念相关的拓扑比较，Topology and its Applications 170（2014年）52-62。