arXiv:2302.13842v2 [math.OA] 2 Mar 2023

信号通信与模理论

Roberto Longo*罗马第二大学数学系，科学研究街 1 号，I-00133 罗马，意大利

摘要

我们提出一种概念框架，将在通信理论中出现的长椭球微分算子解释为熵算子；具体而言，我们将其期望值写成若干项之和，并通过量子场论所启发的嵌入，使每一项都能从熵的角度加以解读。这为 Slepian 等人关于同时集中一个函数及其傅里叶变换这一问题的经典研究增添了新的意义，尤其是为截断傅里叶变换与扁长算子相交换这一“幸运的巧合”提供了新的理解。关键在于这样一个概念：相对于一个实线性子空间，复希尔伯特空间中一个向量的熵。作者最近借助冯·诺依曼代数的 Tomita-Takesaki 模理论引入了这一概念。我们将扁长算子推广到高维情形，并证明它存在一个与截断傅里叶变换相交换的自然扩张；这在一定程度上推广了 Connes 的一维结果，即存在一个延拓到整条实线且与截断傅里叶变换相交换的自然自伴扩张。

*电子邮件：longo@mat.uniroma2.it

1 引言

本文旨在借助冯·诺依曼代数的模理论，并遵循量子场论框架下关于熵的近期概念与抽象分析，将在信号传输理论中发挥重要作用的扁长算子解释为熵算子。我们先简要介绍本研究的背景。

带限信号。假设 Alice 向 Bob 发送一个信号，该信号由时间函数 f 编码。Bob 只能在某个时间区间内测量 f 的值；此外，信号装置会将 f 的频率滤波至某个区间内。为简单起见，假设这两个区间都等于区间 $B = (-1, 1)$。众所周知，如果函数 f 及其傅里叶变换 f 的支撑都位于有界区间内，那么 f就是零函数。因此，我们面临的问题是：如何同时最大化这两个区间内的能量和振幅谱部分

$$||f||_B^2/||f||^2\,, \quad ||\hat{f}||_B^2/||\hat{f}||^2\,, \tag{1}$$

其中 $||\cdot||$、 $||\cdot||_B$ 表示 $\mathbb{R}$ 和 B上的 L^2-范数，这就是集中问题。

在支撑集中意义下，对一个函数及其傅里叶变换进行最佳逼近，是一个经典问题；特别是，它构成了量子力学中海森堡不确定性关系的理论基础，在量子场论中也有研究，参见 [10]。

在20世纪60年代，Slepian、Pollak 和 Landau 在开创性工作中研究了这一问题 [22, 12], 另见 [21]。使（1）达到最大值的函数，是与截断傅里叶变换相关的角算子的特征函数。这是一个希尔伯特-施密特积分算子，其谱分析难以先验地完成。然而，正如 [22], 中揭示的幸运巧合，这个积分算子与一个线性微分算子——扁长算子——对易

$$W = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - x^2\,, \tag{2}$$

后者与角算子具有相同的特征函数，因此这些特征函数得以求出。

W 是一个经典算子，它通过在长球坐标系中分离三维标量波动方程而产生。近来，Connes 重新审视了这一算子，并引发了人们对它的新兴趣 [5]。论文 [6, 7] 展示了长球谱与黎曼 ζ函数零点的渐近分布之间令人印象深刻的关系。本文与这一点无关；不过，本文第3节受到了 [7]中部分分析的启发，并对其进行了推广。

我们的目的是从概念层面理解扁长算子相对于上述幸运巧合所发挥的作用。我们将论证，扁长算子会产生一个熵算子，具体含义将在下文解释。在这一目标下，我们将在高维中推广扁长算子，并以量子场论的背景为指导对其进行分析。

我们将考虑扁长算子

$$W_{\min} = (1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r - r^2\,, \tag{3}$$

在施瓦茨空间 $S(\mathbb{R}^d)$ 上，其中 r $\mathbb{R}^d$ 中的径向坐标为，并证明它存在一个自然的闭扩张 W，该扩张与截断傅里叶变换对易。我们将看到

$\pi E_B W$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的期望值（其中 E_B 是到 $L^2(B)$ 上的正交投影）是正的、自伴的，并且其期望值确实是熵量。

在一维情形中， W 本身就是自伴的 [7], ，而且这在高维情形中可能也成立；不过，就我们的目的而言，只需知道 $E_B W$ 是自伴的。

模理论，向量熵。20世纪70年代，Tomita 和 Takesaki 揭示了算子代数中一种深刻而基础的结构。特别是，对于冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$上的任意忠实正规态 φ ，都存在一个与之相伴的规范单参数自同构群 σ^φ ，其作用于 $\mathcal{M}$，称为模群，参见 [23]。人们很快便在量子统计力学的框架下认识到这种内禀演化在物理学中的重要性，因为 σ^φ由 KMS热平衡条件刻画，参见 [8]。

如今，模理论的部分内容以更初等的形式呈现出来，并可能与并非直接关联算子代数的领域有所交集：其一般框架仅由复希尔伯特空间的一个实线性子空间构成，参见 [13, 18]。

设 $\mathcal{H}$ 为一个复希尔伯特空间， H 为 $\mathcal{H}$的实线性子空间；考虑其闭包后，不妨设 H 是闭的。若 H 是闭的，且 H 、 $\overline{H+iH}=\mathcal{H}$ 、 $H\cap iH=\{0\}$，则称 H 为标准子空间。每个闭实线性子空间 H 都含有一个标准子空间作为直和分量，因此限制到该分量后，不妨设 H 是标准子空间。

当 H为标准子空间时，反线性算子 $S\colon H+iH\to H+iH, S(\Phi_1+i\Phi_2)=\Phi_1-i\Phi_2$便是良定义、闭且为对合的。其极分解 $S=J_H\Delta_H^{1/2}$ 给出一个反线性、为对合的酉算子 J_H 以及一个作用于$\mathcal{H}$上的正的、非奇异的自伴算子 Δ_H ，分别称为模共轭和模算子，使得

$$\Delta_H^{is}H=H\ ,\quad J_H H=H'\ ,$$

$s\in\mathbb{R}$；此处， H' 是 H的辛正交补 $H'=(iH)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ ，即相对于实内积 $\Re(\cdot,\cdot)$而言与 iH 正交的子空间。关于模理论和标准子空间的基本结果，请参阅 [14] 。

若 H满足 $H\cap H'=\{0\}$，则称标准子空间 H为因子型。因此， $H+H'$在 $\mathcal{H}$ 中稠密，而 $H+H'$ 是 H 与 H'的直和（作为线性空间）。同样，通过限制到因子型分量，我们可以假设 H 是因子型的。我们的抽象结果可立即推广到非因子型、非标准的情形。

T相对于 H 的切割投影是一个实线性、稠密定义的投影

$$P_H : H+H'\to H\ ,\ \Phi+\Phi'\mapsto\Phi\ .$$

熵　　向量 $\Phi\in\mathcal{H}$ 相对于标准子空间 $H\subset\mathcal{H}$ 的熵定义为　　y

$$S_\Phi=\Im(\Phi,P_H i\log\Delta_H\,\Phi)=(\Phi,iP_H i\log\Delta_H\,\Phi)\,;\tag{4}$$

这一概念在 [15, 3]中引入。要理解 S_Φ 的熵的含义，一种初步方式是考虑通过在 $\mathcal{H}$上的福克希尔伯特空间中进行二次量子化，与 H 相关联的冯·诺依曼代数 $R(H)$；那么， S_Φ 就是相干态（与 Φ 相关联）和 $R(H)$上的真空态之间的荒木相对熵 [1] 。然而，在本文中，这一事实并未发挥任何直接作用。

注意， $iP_H i\log\Delta_H$是一个实线性算子。这是我们首次遇到熵算子，即一种实线性、正的、自伴算子，其期望值给出

状态熵。在具体情形中，子空间 H 可能对应于流形上的一个区域，而 Φ 对应于信号，此时 S_Φ 便具有了 Φ局域熵的含义。
波包的熵密度。关于半空间情形下波包的局域熵，已有文献[15, 3, 4] 进行研究；关于空间球情形的研究见 [17] ，这与本文直接相关；这些研究均受量子场论启发。

设 $\mathcal{T}$为波包的实线性空间，即，若 Φ 是定义在 $\mathbb{R}^{1+d}$上的实值函数，满足波动方程 $\partial_t^2\Phi = \nabla_x^2\Phi$，且其柯西数据属于实施瓦茨空间$S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$，则 $\Phi \in \mathcal{T}$。量子相对论力学告诉我们， $\mathcal{T}$具有自然的（洛伦兹不变的）复预希尔伯特结构，因此经过完备化，我们得到一个复希尔伯特空间$\mathcal{H}$。柯西数据支撑于 $\mathbb{R}^d$ 的开单位球 B 内的波包构成 $\mathcal{H}$ 的一个实线性子空间，记为 $H = H(B)$（取闭包后）。 Φ 在 B 中的熵为

$$S_\Phi = \pi \int_B (1-r^2)\langle T_{00}\rangle_\Phi \, dx + \pi D \int_B \Phi^2 dx \,. \tag{5}$$

这里， $D = (d-1)/2$ 和 $\langle T_{00}\rangle_\Phi = \frac{1}{2}\big((\partial_t\Phi)^2 + |\nabla_x\Phi|^2\big)$ 是 Φ的能量密度。我们在此讨论 $d > 1$ 情形； $d = 1$ 情形与之类似，但由于红外奇异性需要进行修改，而这与我们的讨论无关。

$\langle T_{00}\rangle_\Phi$ 中的两项各有不同的含义，分别对应于波包的动能和势能。 $\mathcal{H}$ 自然是与柯西数据相关的两个实希尔伯特子空间的直和。

用 Φ的柯西数据 f、g表示，相对于 B的模哈密顿量 $\log\ \Delta_B$为

$$\imath \log \Delta_B = \pi \begin{bmatrix} 0 & M \\ L-2D & 0 \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 0 & (1-r^2) \\ (1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r - 2D & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

[17]。这里，

$$L = (1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r \tag{7}$$

是一个高维勒让德算子。
表达式 S_Φ中的两项各自，

$$S_\Phi = -\pi(f, L_D f)_B + \pi(g, Mg)_B \,,$$

$L_D \equiv L - 2D$具有熵的含义。正如我们将从一般角度讨论的那样， $-\pi(f, L_D f)_B$是 f的场熵，而 $\pi(g, Mg)_B$是 g在 B中的动量熵，或抛物熵。由此我们推断， $-\pi(f, Lf)_B$也是一个熵量，即 f在 B中的勒让德熵。

集中度的度量。现在我们回到通信理论的背景。截断傅里叶变换算子显然可定义于任意空间维数。事实上，集中问题也常出现在高维中。尽管采用的视角与本文不同， [20],中也对这一问题进行了研究。

如前所述，高维扁长算子 (3) 可推广为作用于$L^2(\mathbb{R}^d)$上的自然算子 W，该算子同时与傅里叶变换和截断傅里叶变换交换； W 还与到 $L^2(B)$上的正交投影 E_B 及其傅里叶共轭 $\hat{}\ E_B$交换。

由于 $-W + M = -L + 1$，给定 $f \in S(\mathbb{R}^d)$ 为实数，我们有

$$-\pi(f, Wf)_B + \pi(f, Mf)_B = -\pi(f, Lf)_B + \pi(f, f)_B \,;$$

也就是说， $-\pi(f, Wf)_B$等于 f 的勒让德熵与 $\pi||f||_B^2$（我们称之为玻恩熵）之和，减去 f 的抛物熵，即

$$-\pi(f, Wf)_B + \pi \int_B (1-r^2) f^2 dx = \pi \int_B (1-r^2)|\nabla f|^2 dx + \pi \int_B f^2 dx \,.$$

我们得出， $-\pi(f, Wf)_B$是一种熵量，即一种信息度量，我们称之为关于 B的 f 长椭球熵。换言之， $-\pi E_B W$ 是一个熵算子。 [22], 即 W 与截断傅里叶变换可交换这一幸运巧合，可由这一事实得到概念上的澄清。

根据 [22], 中特征值的排序结果，我们得到

$$\text{lower prolate entropy} \longleftrightarrow \text{higher concentration}$$

其中，集中性同时体现在空间域和傅里叶模态中，如上所述。这是直观的，因为信息与熵相反。上述对应关系在一维情形下成立，我们预计它在一般情形下也成立。

换言之，为了同时最大化式（1）中的两个量，我们必须最小化长椭球熵。

2 高维勒让德算子

勒让德算子是一维线性微分算子 $\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$。它是一个斯图姆-刘维尔算子，之所以广为人知，可能是因为它在 $L^2(-1,1)$上的特征函数是勒让德多项式。下面，我们考虑该算子的一个自然的高维推广。

令 $S(\mathbb{R}^d)$ 为光滑且快速衰减函数的施瓦茨空间， $d \geq 1$。目前，我们处理复值函数；相应的实值函数结果可通过限制得到。我们将作用于 $S(\mathbb{R}^d)$ 的 d 维勒让德算子记作 $L_{\min}$，并定义为

$$L_{\min} = \nabla(1-r^2)\nabla\,; \tag{8}$$

也就是说， $L_{\min}$ 是向量场 $(1-r^2)\nabla$ 的散度，其中 ∇ 表示梯度， r 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的径向坐标。 $L_{\min}$ 可写为

$$L_{\min} = (1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r\,, \tag{9}$$

事实上

$$\nabla(1-r^2)\nabla = \sum_k \partial_k\big((1-r^2)\partial_k\big) = \sum_k -2x_k\partial_k + \sum_k (1-r^2)\partial_k^2 = -2r\partial_r + (1-r^2)\nabla^2\,.$$

我们将 $L_{\min}$ 视为希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的线性算子，其定义域为 $D(L_{\min}) = S(\mathbb{R}^d)$。与 $L_{\min}$ 相关的二次型为

$$(f, L_{\min} g) = -\int_{\mathbb{R}^d} (1-r^2)\nabla\bar{f}\cdot\nabla g\, dx\,, \quad f, g \in S(\mathbb{R}^d)\,, \tag{10}$$

因为根据分部积分，我们有

$$(f, \nabla\cdot(1-r^2)\nabla g) = \sum_k (f, \partial_k[(1-r^2)\partial_k g]) \\ = -\sum_k (\partial_k f, [(1-r^2)\partial_k g]) = -\int_{\mathbb{R}^d} (1-r^2)\nabla g\cdot\nabla \bar{f}\, dx\,. \quad (11)$$

引理 2.1. $L_{\min}$ 是一个厄米算子。

证明. 方程（10）表明

$$(f, L_{\min} g) = (L_{\min} f, g)\,,$$

对所有 $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$，因此 L 是厄米的。 □

因此 $L_{\min} \subset L_{\max}$，其中 $L_{\max} \equiv L^*$ 表示 $L_{\min}$的伴随算子。

引理 2.2. $D(L_{\max})$ 是所有满足以下条件的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的集合： $\nabla(1-r^2)\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 在分布意义下成立，且 $L_{\max} f = \nabla(1-r^2)\nabla f$ 在 $D(L_{\max})$ 上成立。

证明. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，特别地， $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ 是一个温和分布。令 $g \in S(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$(f, \nabla(1-r^2)\nabla g) = \langle \nabla(1-r^2)\nabla f, g\rangle\,,$$

其中，后者表示分布 $\nabla(1-r^2)\nabla f$ 在测试函数 g 上的取值。现在， $f \in D(L_{\max})$ 当且仅当线性泛函 $g \in S(\mathbb{R}^d) \mapsto (f, \nabla(1-r^2)\nabla g)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上连续，因此根据里斯引理，当且仅当 $\nabla(1-r^2)\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$。□

设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位开球， E_B 是从 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^2(B)$ 的正交投影，也就是说， E_B 是由 B 的特征函数 χ_B 定义的乘法算子。注意

$$(f, Lf) \le 0\,, \quad f \in S(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{supp}(f) \subset \bar{B}\,,$$

由（10）可得。

引理 2.3。设 f、g 是 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑函数。我们有

$$\int_B f\nabla(1-r^2)\nabla g = -\int_B (1-r^2)\nabla f\cdot\nabla g\,. \quad (12)$$

证明。考虑到向量场 $G = (1-r^2)\nabla g$ 在 ∂B 上消失，我们有

$$\int_B f\nabla\big((1-r^2)\nabla g\big) = \int_B f\,\mathrm{div}\, G = -\int_B G\cdot\nabla f + \int_{\partial B} fG\cdot\mathbf{n} = -\int_B (1-r^2)\nabla g\cdot\nabla f\,,$$

因此（12）成立。 □

$L_{\min}$ 不与 E_B 交换，但以下结论成立。

命题 2.4。设 $f \in S(\mathbb{R}^d)$。则 $\chi_B f \in D(L_{\max})$，并且我们有

$$L_{\max}\chi_B f = \chi_B L_{\min} f\,. \tag{13}$$

此外， $L_{\max}$ 在 $S(\mathbb{R}^d) + \chi_B S(\mathbb{R}^d)$上是厄米的。

证明。为证明该陈述的第一部分，即等式 (13)，我们必须验证，对于任意 $g \in S(\mathbb{R}^d)$，都有 $(f, \chi_B L_{\min} g) = (\chi_B L_{\min} f, g)$，即

$$(\chi_B f, L_{\min} g) = (L_{\min} f, \chi_B g)\,. \tag{14}$$

考虑到向量场 $G = (1-r^2)\nabla g$ 在 ∂B上消失，根据等式 (12)，我们有

$$(\chi_B f, L_{\min} g) = \int_B \bar{f} L_{\min} g = \int_B \bar{f}\nabla\big((1-r^2)\nabla g\big) = -\int_B (1-r^2)\nabla\bar{f}\cdot\nabla g\,, \tag{15}$$

因此，(14) 成立，因为上述等式中的最后一项关于 f 和 g是对称的。 □

我们将 $L_{\max}$ 在 $S(\mathbb{R}^d) + \chi_B S(\mathbb{R}^d)$上的限制的闭包记为 L。根据命题 13， L 是厄米的，并且与 E_B对易。

给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们将其傅里叶变换记为 $\hat{}\, f$

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot p} f(x)dx\,,$$

$\hat{}$ 并由 $\mathcal{F}$傅里叶变换算子： $\mathcal{F}f = f$。根据普朗歇尔定理， $\mathcal{F}$是 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的酉算子。

在傅里叶变换中， $L_{\min}$由算子 $\hat{}\, L_{\min} = \mathcal{F}L_{\min}\mathcal{F}^{-1}$给出；显然， $D(\hat{}\, L_{\min}) = S(\mathbb{R}^d)$。我们将其记为

$$M = (1-r^2) \tag{16}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上由 $(1-r^2)$ 定义的乘法算子。

引理 2.5. $\hat{}\, L_{\min} = -r^2(1+\nabla^2) - 2r\partial_r$ 在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上，其中 r 表示径向坐标$|p|$，也属于对偶空间 $\mathbb{R}^d$。因此

$$\hat{L}_{\min} = L_{\min} - (\nabla^2 + 1) + M\,. \tag{17}$$

证明. 令 $f \in S(\mathbb{R}^d)$，则有

$$-\big((1-r^2)\nabla^2 f\big)\hat{}\,(p) = (1+\nabla_p^2)(|p|^2\hat{f}) = |p|^2\hat{f} + 2d\hat{f} + |p|^2\nabla_p^2\hat{f} + 4p\cdot\nabla_p\hat{f}$$

因此，考虑到等式 $p\cdot\nabla_p = r\partial_r$,

$$\mathcal{F}\big((1-r^2)\nabla^2\big)\mathcal{F}^{-1} = -r^2(1+\nabla^2) - 4r\partial_r - 2d\,.$$

另一方面,

$$\mathcal{F}(r\partial_r)\mathcal{F}^{-1} = -r\partial_r - d\,,$$

因此，根据表达式（9），

$$\hat{L}_{\min} = \mathcal{F}\big((1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r\big)\mathcal{F}^{-1} = -r^2(1+\nabla^2) - 2r\partial_r\,.$$

因此

$$\hat{L}_{\min} = (1-r^2)\nabla^2 - 2r\partial_r - (\nabla^2+1) + (1-r^2) = L_{\min} - (\nabla^2+1) + M\,. \tag{18}$$

□

3 高维扁长算子

现在，我们将 [7, 第 1] 节中的一些结果推广到更高维度。

令 $W_{\min}$ 为作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的算子，其定义如下：

$$W_{\min} = \nabla(1-r^2)\nabla - r^2 = L_{\min} - r^2 \tag{19}$$

其中 $D(W_{\min}) = S(\mathbb{R}^d)$。$W_{\min}$ 是扁长算子的高维推广。根据命题 2.1，$W_{\min}$ 是厄米算子，因为它是 $S(\mathbb{R}^d)$ 上 $L_{\min}$ 的厄米扰动；此外，

$$-W_{\min} \geq -L_{\min} \geq 0$$

在 $D(W_{\min})$ 上，$\cap L^2(B)$，因此 $-W_{\min}$ 是定义域上的正算子。

我们明确指出这一等式：

$$-L_{\min} = -W_{\min} + M - 1 \tag{20}$$

在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上，并且

$$-L_{\min} \leq -W_{\min} \leq -L_{\min} + 1 \quad \text{on } L^2(B) \cap D(L_{\min})\,, \tag{21}$$

因为在 $L^2(B)$ 上 $0 \leq M \leq 1$。

命题3.1. $W_{\min}$ 与傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 对易：

$$\widehat{W}_{\min} = W_{\min}\,.$$

与 $\mathcal{F}$ 对易的 $L_{\min}$ 和 M 的任意线性组合都与 $W_{\min}$ 成比例。

证明. 我们有 $\hat{M} = 1 + \nabla^2$，因此由 (17) 得到 $\hat{L}_{\min} = L_{\min} + M - \hat{M}$，于是

$$L_{\min} + M = \hat{L}_{\min} + \hat{M}$$

在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上。根据 (20)，我们于是有

$$W_{\min} = L_{\min} + M - 1\,, \tag{22}$$

所以 $W_{\min} = \mathcal{F} W_{\min} \mathcal{F}^{-1}$，如所求。

最后，如果 $a \in \mathbb{R}$，我们有

$$\mathcal{F}(L_{\min} + aM)\mathcal{F}^{-1} = (L_{\min} + M - \hat{M}) + a\hat{M} = (L_{\min} + aM) + (1-a)(M - \hat{M})\,,$$

因此，$L_{\min} + aM$ 与 $\mathcal{F}$ 对易，当且仅当 $(1-a)(M-M) = 0$，也就是说，当且仅当 $a = 1$。 □

令 $\hat{E}_B = \mathcal{F} E_B \mathcal{F}^{-1}$ 为正交投影 $E_B: L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(B)$ 的傅里叶变换共轭，因此 $(\hat{E}_B f)\hat{} = \chi_B \hat{f}$。换言之，

$$\hat{E}_B f = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \widetilde{\chi}_B * f\,,$$

其中，波浪号表示傅里叶逆变换，$*$ 表示卷积乘积。令$W_{\max} = W_{\min}^*$。我们有

$$D(W_{\max}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \nabla(1-r^2)\nabla f - r^2 f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ (distributional sense)} \right\}$$

and

$$W_{\max} f = \nabla(1-r^2)\nabla f - r^2 f\,, \quad f \in D(W_{\max})\,, \tag{23}$$

i在分布意义下。显然，根据命题 3.1， $W_{\max}$ 也与 $\mathcal{F}$交换

$$W_{\max} = \mathcal{F} W_{\max} \mathcal{F}^{-1}\,. \tag{24}$$

命题 3.2. 设 $f \in S(\mathbb{R}^d)$。则 $E_B f$，$\hat{}E_B f \in D(W_{\max})$ 且

$$W_{\max} E_B f = E_B W_{\min} f, \quad W_{\max} \hat{E}_B f = \hat{E}_B W_{\min} f\,. \tag{25}$$

证明. 显然， M 与 E_B可交换。由于 $W_{\min} = L_{\min} + M - 1$ (22)，由命题 2.4 可得 $E_B f \in D(W_{\max})$且 $W_{\max} E_B f = E_B W_{\min} f$，即式 (25) 中的第一个等式成立。

由于 $W_{\min}$、 $W_{\max}$ 与 $\mathcal{F}$、$\hat{}E_B = \mathcal{F} E_B \mathcal{F}^{-1}$可交换，且 $\mathcal{F} S(\mathbb{R}^d) = S(\mathbb{R}^d)$，对第一个等式应用傅里叶变换即可得到第二个等式。□

由上述命题可得

$$\mathcal{D} \equiv S(\mathbb{R}^d) + \chi_B S(\mathbb{R}^d) + \widehat{\chi_B S(\mathbb{R}^d)} \subset D(W_{\max})$$

and

$$W_{\max}(f + \chi_B g + \hat{\chi}_B * h) = W_{\min} f + \chi_B W_{\min} g + \hat{\chi}_B * W_{\min} h\,, \quad f, g, h \in S(\mathbb{R}^d)\,; \tag{26}$$

回顾一下，$\hat{}\chi_B$是一个在无穷远处趋于零的光滑 L^2-函数，$\hat{}\chi_B(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\underline{正弦_p}^{\,p}$若 $d = 1$。

引理 3.3. 设 $f \in D(W_{\max})$是一个光滑函数。那么，函数 $\chi_B f \in D(W_{\max})$也满足，且 $W_{\max}\chi_B f = \chi_B W_{\max} f$。

证明。如果 $f \in S(\mathbb{R}^d)$，则该引理由命题3.2同理可得。现在设 $f \in D(W_{\max})$ 为一个光滑函数。取 $f_0 \in S(\mathbb{R}^d)$，使其在 $\bar{B}$ 的某个邻域上等于 f。于是 $\chi_B f = \chi_B f_0$，所以 $\chi_B f \in D(W_{\max})$。此外，

$$W_{\max}\chi_B f = W_{\max}\chi_B f_0 = \chi_B W_{\min} f_0 = \chi_B W_{\max} f\,,$$

其中最后一个等式成立，是因为根据（23）， $W_{\max}$ 通过局部作用于 f，因此在 B 的某个邻域上 $W_{\max} f = W_{\min} \bar{f_0}$。□

引理 3.4。对于每个 $g \in S(\mathbb{R}^d)$， $E_B\,\hat{}E_B g$ 属于 $D(W_{\max})$，并且有

$$E_B W_{\max} \hat{E}_B g = W_{\max} E_B \hat{E}_B g\,. \tag{27}$$

$\hat{}$ 证明。我们可以对 $f = E_B g$ 应用引理 3.3；事实上， $f = \hat{}\chi_B * g$ 是光滑函数，因为 g 是光滑的，而且根据命题3.2， f 属于 $W_{\max}$ 的定义域。□

回顾一下，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的闭线性算子 Z 与 $\mathcal{H}$ 上的正交投影 F 可交换，当且仅当

$$ZF \supset FZ\,; \tag{28}$$

这意味着

$$u \in D(Z) \implies Fu \in D(Z)\ \&\ ZFu = FZu\,.$$

如果 $\mathcal{D} \subset D(Z)$ 是 Z 的核，那么只需验证上述条件对所有 $u \in \mathcal{D}$ 都成立。

将截断傅里叶变换记为 $\mathcal{F}_B = E_B \mathcal{F} E_B$。注意

$$\mathcal{F}_B^* \mathcal{F}_B = E_B \mathcal{F}^* E_B \mathcal{F} E_B = E_B \hat{E}_B E_B$$

是角算子。

命题 3.5。 $W_{\max}$ 对 $\mathcal{D}$ 的限制是厄米的。其闭包

$$W = \overline{W_{\max}|_{\mathcal{D}}}$$

$\hat{}$ 是厄米算子，且与 $\mathcal{F}$ 和 E_B 对易，因此也与 E_B 和 $\mathcal{F}_B$ 对易。

证明。$W_{\max}|_{\mathcal{D}}$ 与 $\mathcal{F}$ 对易，因为 $W_{\max}$ 与 $\mathcal{F}$ 对易，且 $\mathcal{D}$ 是全局 $\mathcal{F}$-不变的。

现在证明 $W_{\max}|_{\mathcal{D}}$ 是厄米算子。首先注意，根据等式 (22)， $W_{\max}$ 在 $S(\mathbb{R}^d)+\chi_B S(\mathbb{R}^d)$ 上是厄米的，因为根据命题 2.4， $L_{\max}$ 在 $S(\mathbb{R}^d) + \chi_B S(\mathbb{R}^d)$ 上是厄米的，而且 M 在此定义域上也是厄米的。因此，根据 (24)， $W_{\max}$ 在 $S(\mathbb{R}^d)+\overline{}\chi_B S(\mathbb{R}^d)$ 上也是厄米的。

因此，我们需要证明 $W_{\max}$ 在 (26) 的混合项上是对称的。根据 (12)，我们只需验证对于所有 g, $h \in S(\mathbb{R}^d)$，$(\hat{}E_B g, W_{\max} E_B h) = (W_{\max}\hat{}E_B g, E_B h)$。

现在，由命题3.2和引理 3.4，我们得到

$$\begin{aligned}(\hat{E}_B g, W_{\max} E_B h) &= (\hat{E}_B g, E_B W_{\min} h) = (E_B \hat{E}_B g, W_{\min} h) = (W_{\max} E_B \hat{E}_B g, h)\\ &= (E_B W_{\max} \hat{E}_B g, h) = (E_B \hat{E}_B W_{\min} g, h) = (\hat{E}_B W_{\min} g, E_B h) = (W_{\max} \hat{E}_B g, E_B h)\,.\end{aligned}$$

因此， $W_{\max}|_{\mathcal{D}}$ 是厄米的，所以它的闭包 W 也是厄米的。

接下来需要证明 W 与 E_B可交换。我们需要验证 $E_B W \subset W E_B$。由 f、 g、 $h \in S(\mathbb{R}^d)$, 接下来需要验证 $E_B(f + E_B g + \hat{}E_B h)$属于 W 的定义域，并且

$$W E_B (f + E_B g + \hat{E}_B h) = E_B W (f + E_B g + \hat{E}_B h)\,. \tag{29}$$

由线性性，我们可以分别检查上述条件对这三个项是否成立。对于第一项，即情形 $g = h = 0$，我们有 $f \in \mathcal{D} \subset D(W)$，并且由命题3.2

$$W E_B f = W_{\max} E_B f = E_B W_{\min} f = E_B W f\,.$$

$\hat{}$ 现在考虑最后一项。借助 $k \equiv E_B h$，我们需要证明 $E_B k$ 属于 $D(W)$ 和 $W E_B k = E_B W k$。由于 k是光滑的，我们可以选取 $k_0 \in S(\mathbb{R}^d)$，使其在 B 的一个¯邻域内与 k一致；因此 $E_B k = E_B k_0 \in D(W)$，并由引理 3.3 得

$$W E_B k = W_{\max} E_B k = W_{\max} E_B k_0 = E_B W_{\max} k_0 = E_B W_{\max} k = E_B W k\,,$$

其中等式 $E_B W_{\max} k_0 = E_B W_{\max} k$ 的推导与引理 3.3 的证明相同，因为$W_{\max}$ 是局部作用的。

关于剩下的第二项情形，令 $g \in S(\mathbb{R}^d)$；显然 $E_B E_B g = E_B g \in \mathcal{D} \subset D(W)$，因此只需证明 $W E_B g = E_B W E_B g$。

现在，$W_{\max} E_B g$ 的支集位于作为分布，因为 $W_{\max}$ 是局部的；另一方面，$W_{\max} E_B g$ 是一个 L^2函数，因此 $W_{\max} E_B g = E_B W_{\max} E_B g$。我们得出

$$W E_B g = W_{\max} E_B g = E_B W_{\max} E_B g = E_B W E_B g\,,$$

证明至此完成。 □

$\hat{}W$ 是与 E_B 和 E_B都可交换的 $W_{\min}$ 的最小闭扩张。事实上，若 $\widetilde{W}$ 是具有此性质的 $W_{\min}$ 的一个扩张，则 $D(W)$必须包含 $E_B \mathcal{D}$和 $W E_B f = E_B W_{\min} f$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$。将$\hat{}$ E_B替换 $\widetilde{E_B}$，同理可得。因此 $\widetilde{W} \supset W$。

$\hat{}\,\hat{}$ 注意，角算子$E_B E_B E_B$ 是迹类的；事实上，$E_B E_B|_{L^2(B)}$ 是作用于 $L^2(B)$上的正的希尔伯特–施密特 T_B 算子，其核为 $k_B(x-y)$，其中

$$k_B(z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_B e^{-ix\cdot z} dx\, \chi_B(z)$$

（在 B 上为 $k_B = \hat{}\chi_B$，在 B 之外为零）。T_B 的特征值严格为正，$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \lambda_k > \cdots > 0$，且具有有限重数。等式

$$||\mathcal{F} f||^2 = (f, \mathcal{F}_B^* \mathcal{F}_B f) = (f_B, T_B f_B)_B\,,$$

$f_B = f|_B$，这表明 T_B 的归一化 k 阶特征函数在适当意义下集中于 λ_k 层。注意，在偶函数子空间上，$\mathcal{F}$ 是酉对合，$\hat{}$ 因此 $\mathcal{F}_B$ 是自伴的；所以 $\mathcal{F}_B$ 和 $\mathcal{F}_B^* \mathcal{F}_B = E_B E_B E_B$ 具有相同的特征函数。

现在我们证明 $-W$ 在 B 上是正的，即 $-E_B W$ 是正的。

命题 3.6。对于每个 $u \in D(W)$，我们有

$$-(u, Wu)_B = -\int_B \bar{u} W u\, dx \geq 0\,. \tag{30}$$

$\hat{}$ 证明。由于 $\mathcal{D}$ 是 W 的核，只需用 $u = f + E_B g + E_B h$、f、g、$h \in S(\mathbb{R}^d)$ 验证 (30) 即可。

现在，$\chi_B u$ 是 $\bar{B}$上的光滑函数；选取 $u_0 \in S(\mathbb{R}^d)$，使其在 $\bar{B}$上与 u 一致。由等式（29），我们有

$$\int_B \bar{u} W u dx = \int_B \bar{u} W_{\max} u dx = \int_B \bar{u}_0 W_{\min} u_0 dx = -\int_B \bar{u}_0 L u_0 dx - \int_B |x|^2 |u_0|^2 dx \leq 0$$

根据（15），因为 $W_{\max}$ 是局部的。 □

如前所见，W 和 L 都与 E_B对易。现在考虑它们在 $L^2(B)$上的限制，分别记为 W_B 和 L_B。

$\bar{}$ $\bar{}$令 $C^\infty(B)$ 表示 B 上直到边界的光滑函数空间；我们可以将$C^\infty(\bar{B})$ 视为 $L^2(B) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 的子空间。众所周知，$\chi_B S(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\bar{B})$。现在我们证明$\bar{}$ W_B 和 L_B 在 $C^\infty(B)$ 上本质自伴。我们还用 $C_0^\infty(B)$ 表示$\bar{}$ B 上的光滑函数空间，其中函数的紧支撑包含于 B。

推论 3.7。 W_B 和 L_B 都是 $L^2(B)$ 上的自伴正算子。 $C^\infty(\bar{B})$ 是 W_B 和 L_B的核。

证明。由于 W_B 是厄米的，且与正的希尔伯特-施密特算子 T_B对易，因此 W_B 是自伴的。

由于 W 与 E_B对易， $\mathcal{D}$ 是 W 和 $E_B\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$的核，因此 $E_B\mathcal{D}$ 是 W_B的核。另一方面， $E_B\mathcal{D} = \chi_B S(\mathbb{R}^d)$，因为 $S(\mathbb{R}^d)$中的函数 $+\hat{}E_B S(\mathbb{R}^d)^-$ ¯均为光滑函数；因此 $\chi_B\mathcal{D} = C^\infty(B)$。所以 $C^\infty(B)$是 W_B的核。由此，根据命题 3.6， W_B 是正的。

由于 L_B 是 W_B 在 $L^2(B)$上的有界扰动， L_B 也具有自伴性，其核为 $\_C^\infty(B)$。根据引理 2.3， L_B 是正的。□

在一维情形中， L_B 在 $C^\infty[-1,1]$ 上的本质自伴性（因而其有界扰动 W_B的本质自伴性）可由一个众所周知的事实得出：勒让德多项式构成 L_B特征函数的完备正交族。注意， L_B 在 $C_0^\infty(-1,1)$上不是本质自伴的，参见 [11]。

命题3.8. $C_0^\infty(B)$ 是 L_B 的型核，因而也是 W_B 的型核。此外， $-L_B$ 和 $-W_B$是 $-L_B|_{C_0^\infty(B)}$ 和 $-W_B|_{C_0^\infty(B)}$ 的 Friedrichs扩张。

证明。我们只考虑 L_B ，因为 W_B 是它的有界扰动。由于 L_B 在 $C^\infty(B)$ 上是¯本质自伴的，因此只需证明 $-L_B|_{C_0^\infty(B)}$ 的二次¯型 q 的型闭包包含 $C^\infty(B)$。

现在， q 在 $C_0^\infty(B)$ 上由 (12) 给出。根据 [19, 命题10.1], , 只需证明：给定 $\_u \in C^\infty(B)$，存在函数序列 $u_n \in C_0^\infty(B)$，使得 $u_n \to u$ 并且

$$q(u_n, u_n) = \int_B (1-r^2)|\nabla u_n|^2 dx$$

有界， $n \in \mathbb{N}$。首先设 $u = \chi_B$。令 $h_n \in C_0^\infty(-1,1)$ 为偶函数，使得 $h_n = 1$ 在 $(0, 1-\frac{1}{n})$ 上成立，并且 $|h_n'|$ 由 $2n$ 控制，然后令 $u_n(x) = h_n(r)$。于是 $u_n \to \chi_B$，且该序列

$$q(u_n, u_n) = \int_B (1-r^2)|\nabla u_n|^2 dx \le \int_{1-1/n \le r \le 1} (1-r^2)(2n)^2 dx \le \text{const.}\frac{1}{n^2}(2n)^2$$

¯有界。一般的 $u \in C^\infty(B)$ 情形可按同样的方法处理，只需将 u_n 替换为 $u_n u$。

因此， $C^\infty(\bar{B})$ 属于 $-L_B|_{C_0^\infty(B)}$ 的 Friedrichs扩张 $-L_F$ 的平方根 $\sqrt{-L_F}$ 的定义域。另一方面， $C^\infty(\bar{B})$ 是 $-L_B$ 的核，因而也是 $\sqrt{-L_B}$ 的核。由此可得 $L_B = L_F$。□

关于 Friedrichs扩张，参见例如 [19]。

4 模理论与向量熵

本节回顾关于标准子空间 H的模理论、相对于 H的向量熵的基本结构，以及它们在波包熵密度中的应用。

4.1 熵算子

设 $\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间，$H \subset \mathcal{H}$ 为标准子空间，即 H 是 $\mathcal{H}$ 的实线性闭子空间，满足 $H \cap iH = \{0\}$ 和 $\overline{H + iH} = \mathcal{H}$，其中 H' 是 H的辛正交补，

$$H' = \{\Phi' \in \mathcal{H} : \Im(\Phi, \Phi') = 0,\, \Phi \in H\}\,.$$

Tomita 算子

$$S_H : \Phi_1 + i\Phi_2 \in H + iH \mapsto \Phi_1 - i\Phi_2 \in H + iH\,, \quad \Phi_1, \Phi_2 \in H\,,$$

在 $\mathcal{H}$ 上是反线性的、闭的、稠密定义的，并且是对合的。令 $S_H = J_H \Delta_H^{1/2}$ 为 S_H 的极分解。Δ_H 称为与 H 相关联的模算子；它是 $\mathcal{H}$ 上一个规范的、非奇异的正自伴算子，满足

$$\Delta_H^{is} H = H\,, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

$\mathcal{H}$ 上的单参数酉群 $s \mapsto \Delta_H^{is}$ 称为 H 的模酉群，其生成元 $\log \Delta_H$ 即为模哈密顿量。J_H 是 $\mathcal{H}$ 上的反酉对合，并且是 $J_H H = H'$，称为 H 的模共轭。

为简单起见，假设 H 是因子型，即 $H \cap H' = \{0\}$；一般的闭实线性子空间情形见例如 [3, 第 2.1] 节。

向量 $\Phi \in \mathcal{H}$ 关于标准子空间 $H \subset \mathcal{H}$ 的熵定义为

$$S_\Phi = S_\Phi^H = \Im(\Phi, P_H A_H \Phi) = (\Phi, P_H^* \log \Delta_H \Phi) \tag{31}$$

（在二次型意义下），其中 P_H 是切割投影

$$P_H : H + H' \to H\,, \quad \Phi + \Phi' \mapsto \Phi$$

以及 $A_H = -i \log\, \Delta_H$ [15, 3]，即模酉群的半群生成元 $\frac{d}{ds}\Delta_H^{-is}|_{s=0}$。

我们有 $P_H^* = -iP_H i$，且公式见 [3]

$$P_H = (1 - \Delta_H)^{-1} + J_H \Delta_H^{1/2} (1 - \Delta_H)^{-1}\,; \tag{32}$$

（P_H 是（32）右侧的闭包）。

熵算子 $\mathcal{E}_H$ 定义为

$$\mathcal{E}_H = iP_H i \log \Delta_H \tag{33}$$

（右侧的闭包）。我们有

$$S_\Phi = (\Phi, \mathcal{E}_H \Phi)\,, \quad \Phi \in \mathcal{H}\,. \tag{34}$$

这里，对任意向量 $\Phi \in \mathcal{H}$，S_Φ 的定义如下。$S_\Phi = q(\Phi, \Phi)$，其中 q 是实二次型 $\Re(\Phi, \mathcal{E}_H \Psi)$ 的闭包，$\Phi, \Psi \in D(\mathcal{E}_H)$。因此，$\Phi$ 若不属于 q 的定义域，则 $S_\Phi = +\infty$。

命题 4.1. 熵算子 $\mathcal{E}_H$ 是实线性的、正的，并且关于标量积的实部是自伴的。

证明. $\mathcal{E}_H$ 显然是实线性的；由于向量熵是正的，因此它也是正的 [3,命题 2.5 (c)]。 $\mathcal{E}_H$ 的自伴性可由公式 (32) 得出，参见 [17, 引理 2.3]。

□

在我们看来，熵算子 $\mathcal{E}$ 是实数或复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的实线性算子，满足 $\mathcal{E}$ 是正的、自伴的，并且其期望值（f， $\mathcal{E}f$）、 $f \in \mathcal{H}$ 对应于熵量（相对于 B）。 $\mathcal{E}$ 可能是无界的，而（f， $\mathcal{E}f$）是在二次型意义下理解的，因此其取值于 $[0,\infty]$。通过对熵算子执行保持上述要求的运算，可以方便地构造更多熵算子。

基本情形。如果 $\mathcal{E}$ 是形如（33）的实希尔伯特空间 H 上的实线性算子，我们称 $\mathcal{E}$ 为熵算子。

限制与直和。如果 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ 作用于实希尔伯特空间直和 $H = H_+ \oplus H_-$ 上，那么 $\mathcal{E}$ 是 H 上的熵算子，当且仅当 $\mathcal{E}_\pm$ 都是熵算子。

度量变换。设 $\mathcal{S} \subset H$ 是希尔伯特空间 H 上熵 $\mathcal{E}$ 的核，并且 $(\cdot,\ \cdot)'$ 是 $\mathcal{S}$ 上的标量积；记相应的实希尔伯特空间完备化为 H'，并记 $\jmath : \mathcal{S} \subset H' \to H$ 为识别映射。如果 $\jmath^* \mathcal{E} \jmath$ 是稠密定义的，则其 Friedrichs扩张 $\mathcal{E}'$ 是 H' 上的熵算子。注意

$$(f, \mathcal{E}' f)' = (f, \mathcal{E} f)\,, \quad f \in \mathcal{S}\,.$$

和、差。若 $\mathcal{E}_1$、 $\mathcal{E}_2$ 是熵算子，且 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2$ 是稠密定义的正算子，则 Friedrichs 扩张 $\mathcal{E}$ 是熵算子。

玻恩熵。 πE_B（其中 E_B 是到 $L^2(B)$ 上的正交投影）是作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的熵算子。

为说明最后一项，请注意 $(f, E_B f) = ||f||_B^2$。在量子力学中，采用归一化 $||f||^2 = 1$ 时，$||f||_B^2$ 表示粒子局域于 Ω 中的概率，这符合玻恩诠释。此外，在通信理论中， $||f||_B^2$ 表示 f 中包含于 B [22] 的那部分能量。因此，我们定义

$$\pi(f, E_B f) = \pi ||f||_B^2 = \pi \int_B f^2 dx = \textit{Born entropy of } f \textit{ in } B\,, \tag{35}$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 为实数。出于兼容性考虑，选择 π 归一化（第 5 节）；

4.2 抽象场/动量熵

我们考虑两个实线性空间 $\mathcal{S}_+$ 和 $\mathcal{S}_-$，以及对偶性 $f, g \in \mathcal{S}_+ \times \mathcal{S}_- \mapsto \langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$。一个实线性可逆算子

$$\mu : \mathcal{S}_+ \to \mathcal{S}_-$$

也有定义；我们假设 μ 关于对偶性是对称且正的，即

$$\langle f_1, \mu f_2\rangle = \langle f_2, \mu f_1\rangle\,, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{S}_+\,, \tag{36}$$

$$\langle f, \mu f\rangle \geq 0\,, \quad f \in \mathcal{S}_+\,,$$

仅当 $f = 0$ 时，使用 $\langle f、\ \mu f\rangle = 0$。

因此， $\mathcal{S}_\pm$ 是实数预希尔伯特空间，其标量积为

$$(f_1,f_2)_+=\langle f_1,\mu f_2\rangle\,,\ \ (g_1,g_2)_-=\langle \mu^{-1}g_2,g_1\rangle\,,\quad f_1,f_2\in\mathcal{S}_+,\ g_1,g_2\in\mathcal{S}_-\,,$$

且 μ 是一个酉算子。

令 $H_\pm$ 为 $\mathcal{S}_\pm$的实希尔伯特空间完备化。于是 μ 可延拓为一个酉算子$H_+\to H_-$，仍记为 μ。此外， $\mathcal{S}_+$ 与 $\mathcal{S}_-$ 之间的对偶性可延拓为 H_+ 与 H_-之间的对偶性

$$\langle f,g\rangle=(f,\mu^{-1}g)_+=(\mu f,g)_-\,,\quad f\in H_+,g\in H_-\,.$$

设 $\mathcal{H}=H_+\oplus H_-$。 $\mathcal{H}$上的双线性形式 β

$$\beta(\Phi,\Psi)=\langle g_1,f_2\rangle-\langle f_1,g_2\rangle \tag{37}$$

$\Phi\equiv f_1\oplus g_1$, $\Psi\equiv f_2\oplus g_2$是辛的且非退化的（系数1 2 是为了与下一节的情形保持一致）。这将是 $\mathcal{H}$的复标量积的虚部： $\Im(\Phi,\Psi)=\beta(\Phi,\Psi)$。

现在，算子

$$\imath=\begin{bmatrix}0&\mu^{-1}\\-\mu&0\end{bmatrix}\,, \tag{38}$$

也就是说， $\imath$： $f\oplus g\mapsto\mu^{-1}g\oplus-\mu f$是在 $\mathcal{H}=H_+\oplus H_+$上的一个酉算子。

根据 (36)， $\imath$保持 β，即 $\beta(\imath\Phi,\imath\Psi)=\beta(\Phi,\Psi)$。由于 $\imath^2=-1$，酉算子 $\imath$在 $\mathcal{H}$ 上定义了复结构（即乘以虚数单位），使其成为一个带有标量积的复希尔伯特空间

$$(\Phi,\Psi)=\beta(\Phi,\imath\Psi)+i\beta(\Phi,\Psi)$$

($i=\sqrt{-1}$)。也就是说

$$(\Phi,\Psi)=\big[\langle f_1,\mu f_2\rangle+\langle\mu^{-1}g_2,g_1\rangle\big]+i\big[\langle f_2,g_1\rangle-\langle f_1,g_2\rangle\big]\,,$$

$\Phi\equiv f_1\oplus g_1$、 $\Psi\equiv f_2\oplus g_2$ 如上所述。

现在假设 $K_\pm\subset H_\pm$ 是闭的实线性子空间。 $K\equiv K_+\oplus K_-$ 的辛正交补K' 为

$$K'=\big\{f\oplus g\in H:\beta(f\oplus g,h\oplus k)=0,\,h\oplus k\in K\big\}=K_-^o\oplus K_+^o\,,$$

其中， $K_\pm^o$ 表示在对偶性 $\langle\cdot,\cdot\rangle$下， $K_\pm$ 在 $H_\mp$ 中的湮灭子。

L让我们考虑 K 是标准且因子型的情形。此时，切割投影

$$P_K=K+K'\to K$$

是对角的

$$P_K=\begin{bmatrix}P_+&0\\0&P_-\end{bmatrix}\,,$$

其中 $P_\pm$ 投影 $P_\pm$： $K_\pm+K_\mp^o\to K_\pm$。

命题 4.2。模哈密顿量 $\log\Delta_K$ 和共轭 J_K 是对角的；因此$A_K=-\imath\log\ \Delta_K$ 是非对角的，即

$$A_K=\pi\begin{bmatrix}0 & \mathbf{M}\\ \mathbf{L} & 0\end{bmatrix}, \tag{39}$$

其中 M 和 L 为算子 $H_\pm\to H_{\mp}$。

$\Phi\equiv f\oplus g\in\mathcal{H}$ 相对于 K 的熵为

$$S_\Phi=-\pi\langle f,P_-\mathbf{L}f\rangle+\pi\ \langle g,P_+\mathbf{M}g\rangle\,. \tag{40}$$

特别地，如果 $\Phi\in K$,

$$S_\Phi=-\pi\langle f,\mathbf{L}f\rangle+\pi\langle g,\mathbf{M}g\rangle\,.$$

证明。由于 $K=K_+\oplus K_-$ 和 $\imath K=\mu^{-1}K_-\oplus\mu K_+$ 是直和子空间，Tomita 算子 S_K 显然是对角的，其伴随算子 S_K^*也是如此。因此，模算子 $\Delta_K=S_K^*S_K$是对角的。由于对数函数在 $(0,\infty)$ 上为实数，根据函数演算，模哈密顿量 $\log\Delta_K$ 也是对角的。此外，根据公式 (32)， J_K 也是对角的。

因此 A_K 是非对角的，因为 $\imath$ 是非对角的，并且我们可以将 A_K 写成 (39) 中的形式。我们有

$$P_KA_K=\pi\begin{bmatrix}0 & P_+\mathbf{M}\\ P_-\mathbf{L} & 0\end{bmatrix}, \tag{41}$$

因此， Φ 的熵为

$$S_\Phi=\beta(f\oplus g,P_KA_K\,f\oplus g)=\pi\beta(f\oplus g,P_+\mathbf{M}g\oplus P_+\mathbf{L}f)=-\pi\langle f,P_-\mathbf{L}f\rangle+\pi\langle g,P_+\mathbf{M}g\rangle\,.$$

□

基于公式 $P_K-\imath P_K\imath=2(1-\Delta_K)^{-1}$， Δ_K的对数是对角的这一事实已在 [2], 中得到证明；该公式由（32）推出。

熵算子为

$$\mathcal{E}_K=\pi\begin{bmatrix}-\mu^{-1}P_-\mathbf{L} & 0\\ 0 & \mu P_+\mathbf{M}\end{bmatrix}. \tag{42}$$

注意，由于 A_K 在 $\mathcal{H}$上是斜自伴且复线性的，我们有以下关系

$$\mathbf{M}^*=-\mathbf{L}=\mu\mathbf{M}\mu\,. \tag{43}$$

显然,

$$-\pi\langle f,P_-\mathbf{L}f\rangle=S_{f\oplus0}\,,\quad \pi\langle g,P_+\mathbf{M}g\rangle=S_{0\oplus g}\,.$$

于是我们定义:

$$\begin{aligned}-\ \pi\langle f,P_-\mathbf{L}f\rangle\quad & \textit{field entropy of } f\in\mathcal{S}_+\ w.r.t.\ K_+\,,\\ \pi\langle g,P_+\mathbf{M}g\rangle\quad & \textit{momentum entropy of } g\in\mathcal{S}_-\ w.r.t.\ K_-\,.\end{aligned}$$

（二次型意义）。请注意，在上述熵的定义中，直接起作用的只有对偶性，而非希尔伯特空间结构。

4.3 波包的局域熵

上述结构具体出现在波空间的语境中；也就是说，出现在量子场论中的自由无质量单粒子空间中。

用 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$ 表示实施瓦茨空间。众所周知，若 $f,g\in S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$，则在 $\mathbb{R}^{1+d}$ 上存在唯一的光滑实函数 $\Phi(t,\mathbf{x})$，它是波动方程的解

$$\Box\Phi\equiv\partial_t^2\Phi-\nabla_x^2\Phi=0$$

（一个波包，或简称波），其柯西数据为 $\Phi|_{t=0}=f$, $\partial_t\Phi|_{t=0}=g$。我们令$\Phi=w(f,g)$，并用 $\mathcal{T}$ 表示这些 Φ 的实线性空间；我们将经常使用以下对应关系

$$S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)\oplus S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)\longleftrightarrow\mathcal{T}\,,\qquad f\oplus g\longleftrightarrow w(f,g)\,. \tag{44}$$

因此，我们直接处理 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)\oplus S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$，并在其上考虑辛形式

$$\beta(f_1\oplus g_1,f_2\oplus g_2)=(g_1,f_2)-(f_1,g_2)\,, \tag{45}$$

其中，(45) 中的标量积是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的标量积。

我们令 $\mathcal{S}_+=S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$、 $\mathcal{S}_-=\mu S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$，其中 μ 由下式给出

$$\widehat{\mu f}(p)=|p|\hat{f}(p)\,. \tag{46}$$

$\mathcal{S}_+$ 与 $\mathcal{S}_-$ 之间的对偶性由 L^2 标量积给出。令 $H_\pm$ 为温和分布 $f\in S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)'$ 构成的实希尔伯特空间，使得其傅里叶变换$\hat{}$ f 是一个博雷尔函数，并且

$$\|f\|_\pm^2=\int_{\mathbb{R}^d}|p|^{\pm1}|\hat{f}(p)|^2dp<+\infty\,. \tag{47}$$

$\mathcal{S}_\pm$ 在 $H_\pm$中稠密，但 $S(\mathbb{R}^d)$仅当 $d>1$时成立。复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是赋予了由 $\imath$ (38)给出的复结构的实希尔伯特空间 $H=H_+\oplus H_-$。

With

$$H_\pm(B)=\left\{f_\pm\in\mathcal{S}_\pm:\mathrm{supp}(f_\pm)\subset B\right\}^-\,,$$

标准子空间 $K\equiv H(B)\subset\mathcal{H}$ 为

$$H(B)=H_+(B)\oplus H_-(B)\,.$$

令 $\Delta_B=\Delta_{H(B)}$表示与 $H(B)$相关的模算子，并令 $A_B=-\imath$为log Δ_B。 Δ_B^{is}、 $s\in\mathbb{R}$在 $\mathcal{T}$ 上的作用是几何的 [9], , 因此 A_B可计算。

定理 4.3. [17]。在 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)\times S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$、 $d>1$上，我们有

$$A_B=\pi\begin{bmatrix}0 & (1-r^2)\\ (1-r^2)\nabla^2-2r\partial_r-2D & 0\end{bmatrix}\,, \tag{48}$$

也就是说

$$A_B=\pi\begin{bmatrix}0 & M\\ L_D & 0\end{bmatrix} \tag{49}$$

其中 $L_D=L-2D$; 这里， $L:\ H_+\to H_-$、 $M:\ H_-\to H_+$ 是算子 (7)、(16) 在 $S(\mathbb{R}^d)$ 和 $D=(d-1)/2$ （标度维数）上的闭包。

情形 $d=1$: 上述公式在 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})\times S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})$ 上仍然成立，其中 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})$ 是由零均值函数组成的$S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})$子空间 *[16]*。

下文中，我们假设 $d > 1$。情形 $d = 1$ 类似，只需将上述的$S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}) \times S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})$ 替换为 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}) \times S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R})$。

推论 4.4. [17]. 设 $\Phi = w(f, g)$ 是一个波包，其柯西数据为 $f, g \in S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$。$\Phi$ 在 B 中的熵（即相对于 $H(B)$）为

$$S_\Phi = -\pi(f, Lf)_B + \pi(g, Mg)_B + 2\pi D||f||_B^2$$

（L^2-标量积）[1] 。

证明. 由式 (40) 可得此推论，因为切割投影 $P_{H(B)}$ 由特征函数 χ_B 在 $S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d) \times S_{\mathrm{r}}(\mathbb{R}^d)$的两个分量上分别相乘给出，而对偶性 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 由 L^2 标量积给出。因此

$$\begin{aligned} S_\Phi &= -\pi(f, \chi_B L_D f) + \pi(g, \chi_B M g) \\ &= \pi \int_B (1 - r^2)|\nabla f|^2 d\mathbf{x} + \pi D \int_B f^2 dx + \pi \int_B (1 - r^2) g^2 dx \\ &= -\pi(f, Lf)_B + \pi(g, Mg)_B + \pi D||f||_B^2 \,, \end{aligned}$$

由等式 (15) 得出。 □

更一般地，若 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$S_{f \oplus g} = -\pi(f, L_B E_B f) + \pi(g, Mg)_B + 2\pi D||f||_B^2 \,, \tag{50}$$

在二次型意义下。因此，我们得到熵的一个下界。

推论 4.5。 $\Phi = f \oplus g$ 在 B, $f, g \in L^2(B)$中的熵，下界为

$$S_\Phi \geq 2\pi D||f||_B^2 \,. \tag{51}$$

当 $f = \chi_B$, $g = 0$时，不等式 (51) 取等号；此时

$$S_{f \oplus g} = 2\pi \mathrm{Vol}(B) D \,.$$

证明。不等式 (51) 显然成立，因为两项 $-\pi(f, Lf)_B$和 $\pi(g, Mg)_B$均非负。

由于 χ_B 属于 L_B 和 $L_B \chi_B = 0$的定义域，根据 (50)，当$f = \chi_B$, $g = 0$ 时，不等式取等号。 □

注意，由于 $-L_{\min} = -W_{\min} + M - 1$，我们可以将 S_Φ 改写如下，$\Phi = w(f, g)$：我们有

$$S_\Phi = \pi\Big(- (f, Wf)_B + (f, Mf)_B + (g, Mg)_B + \frac{d-2}{2}||f||_B^2 \Big) \,. \tag{52}$$

我们将在下一节看到，上述等式右侧的每一项都有熵的诠释。

我们在本节末尾写出公式 $|\nabla|(1 - r^2)|\nabla| = -L + 2D$ on $S(\mathbb{R}^d)$，它由 (43) 得出，其中 $|\nabla| = \sqrt{-\nabla^2}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上负拉普拉斯算子的平方根。

[1] [3, 17] 中的辛形式定义为 $1/2$ 由公式（45）给出的形式。本文中的熵值是其中熵值的两倍。

5 长椭球熵

根据定理 4.3，模哈密顿量 $\log \Delta_B = \imath A_B$ 是 $H = H_+ \oplus H_-$ 上由下式给出的线性算子的闭包

$$\log \Delta_B = \pi \begin{bmatrix} -\mu L_D & 0 \\ 0 & \mu^{-1} M \end{bmatrix}$$

其核定义域为 $S(\mathbb{R}^d) \oplus S(\mathbb{R}^d)$。

关于 $H(B)$ 的切割投影为 $P_B = \begin{bmatrix} \chi_B & 0 \\ 0 & \chi_B \end{bmatrix}$，因此 $\mathcal{E}_B = \imath P_B \imath \log\ \Delta_B$ 在 H 上的熵算子为

$$\mathcal{E}_B = \begin{bmatrix} -\pi \chi_B L_D & 0 \\ 0 & \pi \chi_B M \end{bmatrix}. \tag{53}$$

设 $\jmath_\pm :\ S(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to H_\pm$ 为 $S(\mathbb{R}^d)$ 上的识别映射。则 $\jmath_\pm^* = \mu^{\mp 1}$。

因此，在第 4.1 节所述意义下，对应于 $\mathcal{E}_B$ 的 $L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的熵算子 $\mathcal{E}'_B$ 为

$$\mathcal{E}'_B = \begin{bmatrix} -\pi E_B L_D & 0 \\ 0 & \pi E_B M \end{bmatrix}. \tag{54}$$

因此，$\mathcal{E}'_B$ 的两个分量中的每一个都是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的熵算子；根据（35），$-E_B L_B = -E_B L_D - 2D E_B$也是如此。更准确地说，$ME_B$在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上本质自伴；根据命题 3.8，$S(\mathbb{R}^d)$ 上的 $-E_B L_B$ 的 Friedrichs扩张等于 $L_B E_B$；因此，$-\pi L_B E_B$和 $\pi M E_B$ 都是希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的熵算子（见第 4.1 节）。

当 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 为实数时，我们设

$$\pi(f, Mf)_B = \pi \int_B (1 - r^2) f^2 dx = \textit{parabolic entropy of } f \text{ in } B\,.$$

这等于平面波 $\Phi = w(0, f)$ 的熵 S_Φ。

同理，我们设

$$-\pi(f, Lf)_B = \pi \int_B (1 - r^2) |\nabla f|^2 dx = \textit{Legendre entropy of } f \text{ in } B\,.$$

这等于定常波 $\Psi = w(f, 0)$ 的熵 S_Ψ。

现在，$-LE_B = -WE_B + ME_B - E_B$，因此 $\pi W E_B$ 也是一个熵算子；于是我们定义：

$$-\pi(f, Wf)_B = \pi \int_B \big((1 - r^2)|\nabla f|^2 + r^2\big) dx = \textit{prolate entropy of } f \text{ in } B\,,$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 为实数。

我们将讨论总结为以下定理。

定理 5.1. $-\pi W E_B$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的一个熵算子。长椭球熵与抛物熵之和等于勒让德熵与玻恩熵之和，以上各项均相对于 B而言。也就是说，对于每个 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，关系式 (55) 在二次型意义下成立。

WE_B 与截断傅里叶变换 $\mathcal{F}_B$可交换。设 V 是 LE_B、ME_B和 E_B的实线性组合，且与 $\mathcal{F}_B$可交换；则对于某些 a、$b \in \mathbb{R}$，有 $V = aWE_B + bE_B$。若 V还是正的，且 $V|_{L^2(B)}$ 的谱下界为零，则 $V = aWE_B$、$a \geq 0$。

证明。第一条结论可由我们的讨论及关系式立即得出

$$-(f,Wf)_B+(f,Mf)_B=-(f,Lf)_B+||f||_B^2\,, \tag{55}$$

参见（22），注意到 $-E_BL$ 在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上的 Friedrichs扩张 等于 $-L_BE_B$ ，依据命题 3.8。

WE_B 与 $\mathcal{F}_B$ 对易，依据命题 3.5。V 的刻画可通过类似于证明命题 3.1 中所采用的论证得到。□

抛物型分布（$1-r^2$）同时出现在抛物熵和勒让德熵的表达式中。在 B 的中心附近，抛物熵接近玻恩熵。另一方面，在 B 的边界附近，长椭球熵接近玻恩熵。

现在让我们具体讨论 [22] 中研究的一维情形（即在 $L^2(B)$ 的偶函数子空间上）。由于 T_B 是严格正的希尔伯特 – 施密特算子，其特征值可以排列为 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>0$；此外，这些特征值都是单的； $-W_B$ 的特征值可以排列为 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\infty$；它们按逆序对应于 λ_k，也就是说， T_B 和 $-W_B$ 共享相同的 k——特征函数 f_k；当我们将其归一化为 $||f_k||_B^2=1$ 后，该特征函数除相位外是唯一的。于是

$$(f_k,T_Bf_k)_B=\lambda_k\,,\quad -(f_k,W_Bf_k)_B=\alpha_k\,,$$

且 $\pi\alpha_k$ 是 f_k的长椭球熵。

由于信息与熵相反，上述关系表明了一个直观事实：在 B中，长椭球熵较低、因而信息较高的函数，在空间和傅里叶模态中的支撑集中度也更高。 f_1 携带的信息最佳，因为它实现了最优集中。

我们预计， T_B 和 W_B 的特征值之间的排序对应关系在更高维情形下也成立。

6 任意半径球内的集中

这里简要说明，本文的结果如何轻易地推广到任意半径球内局域化的情形。更一般的扁长算子

$$W_{\min}(c)=\nabla(1-r^2)\nabla-c^2r^2$$

在 [22]、 $c>0$中进行了研究。我们将 $W_{\min}(c)$视为作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$、定义域为 $S(\mathbb{R}^d)$的算子。记 δ_λ、 $\lambda>0$为 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的伸缩算子

$$(\delta_\lambda f)(x)=\lambda^{-d/2}f(\lambda^{-1}x)\,,$$

因此， δ_λ 是一个酉算子。我们还令 $\mathcal{F}_\lambda=\delta_\lambda^{-1}\mathcal{F}$；特别地， $\mathcal{F}_{2\pi}$ 是通信理论及其他领域常用的傅里叶变换。

命题6.1. $W_{\min}(c)$ 与 $\mathcal{F}_c$ 对易。

证明. 由于 $\delta_\lambda^{-1} r \delta_\lambda = \lambda r$ 和 $\delta_\lambda^{-1} \nabla \delta_\lambda = \lambda^{-1}\nabla$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c W_{\min}(c) \mathcal{F}_c^{-1} &= \delta_c^{-1}\mathcal{F}\big(\nabla(1-r^2)\nabla - c^2 r^2\big)\mathcal{F}^{-1}\delta_c \\
&= \delta_c^{-1}\mathcal{F}\big(\nabla(1-r^2)\nabla - r^2 + r^2 - c^2 r^2\big)\mathcal{F}^{-1}\delta_c \\
&= \delta_c^{-1}\mathcal{F}\big(\nabla(1-r^2)\nabla - r^2\big)\mathcal{F}^{-1}\delta_c + \delta_c^{-1}\mathcal{F}\big(r^2 - c^2 r^2\big)\mathcal{F}^{-1}\delta_c \\
&= \delta_c^{-1}\big(\nabla(1-r^2)\nabla - r^2\big)\delta_c - \delta_c^{-1}\big(\nabla^2 - c^2\nabla^2\big)\delta_c \\
&= c^{-2}\big(\nabla(1-c^2 r^2)\nabla\big) - c^2 r^2 - c^{-2}\nabla^2 + \nabla^2 \\
&= \nabla(c^{-2} - r^2)\nabla - c^2 r^2 - c^{-2}\nabla^2 + \nabla^2 \\
&= \nabla(1-r^2)\nabla - c^2 r^2 = W_{\min}(c)\,.
\end{aligned}$$

□

现在，对 $W_{\min}(c)$ 的分析与情形 $c = 1$ 中相同。 $W_{\min}(c)$ 具有一个自然的ˆ扩张 W_c ，它与 $\mathcal{F}_c$、 E_B、 E_{B_c} 对易，其中 B_c 表示以原点为中心、半径为 c 的球。

与球 B_λ 中的局域化以及傅里叶变换中 $B_{\lambda'}$ 对应的扁长算子，可通过用伸缩算子共轭 W_c 得到，即 $W_{\lambda,\ \lambda'} = \delta_\lambda W_c \delta_\lambda^{-1}$ ，

$$W_{\lambda,\lambda'} = \nabla(\lambda^2 - r^2)\nabla - \lambda'^2 r^2\,,$$

$\lambda\lambda' = c$。 $W_{\lambda,\ \lambda'}$ 与 $E_{B_\lambda} = \delta_\lambda E_B \delta_\lambda^{-1}$ 以及 $\delta_\lambda \hat{}E_{B_c}\delta_\lambda^{-1} = \hat{}E_{B_{\lambda'}}$ 对易。
现在，

$$W_{\lambda,\lambda'} = \nabla(\lambda^2 - r^2)\nabla + \lambda^{-2}c^2(\lambda^2 - r^2) - c^2 = \nabla(\lambda^2 - r^2)\nabla + \lambda'^2 M_\lambda - c^2$$

在 L^2 上 (B_λ)，其中 L_λ 是 $\nabla(\lambda^2 - r^2)\nabla$ 和 $M_\lambda = (1 - r^2)$ 的自然扩张，因 s

$$-\pi(f, W_{\lambda,\lambda'} f)_{B_\lambda} + \lambda^2\lambda'^2\pi||f||^2_{B_\lambda} = -\pi(f, L_\lambda f)_{B_\lambda} + \lambda'^2\pi(f, M_\lambda f)_{B_\lambda}\,, \tag{56}$$

一个推广了定理 5.1 的熵关系。

(56) 左侧第一项是 f 关于 B_λ 和 $B_{\lambda'}$ 的长椭球熵。不过请注意，勒让德熵 $-\pi(f, L_\lambda f)_{B_\lambda}$ 不依赖于 λ'；当 $\lambda' \to 0$ 时，长椭球熵趋近于勒让德熵。

致谢。感谢 A. Connes 和 G. Morsella 提供宝贵意见。
作者获得 GNAMPA-INdAM 的资助。他感谢授予罗马第二大学数学系的 2023—2027 卓越项目 MatMod@TOV。

参考文献

[1] H. Araki，冯·诺依曼代数状态的相对熵，京都大学数理解析研究所出版物11 (1976年)，809–833。[2] H. Bostelmann， D. Cadamuro， C. Minz，双圆锥模算子的质量依赖性，arXiv:2209.04681

[3] F. Ciolli, R. Longo, G. Ruzzi，波中的信息，《数学物理通讯》379, (2020年) 979–1000。[4] F. Ciolli, R. Longo, A. Ranallo, G. Ruzzi，相对熵与弯曲时空，《几何物理学杂志》172 (2022年)，104416[5] A. Connes，显式公式、迹公式与ζ函数零点的谱实现，《法兰西公学院年鉴》95 (1998年)，115–12。[6] A. Connes, M. Marcolli，“非交换几何、量子场与动机”，美国数学学会书目系列，55。美国数学学会，普罗维登斯，2008年。[7] A. Connes, H. Moscovici，紫外长球谱与ζ函数零点相吻合，《美国国家科学院院刊》119，(2022年) 第22期，1–7。[8] R. Haag，《局域量子物理》，施普林格出版社 (1996年)。[9] P.D. Hislop, R. Longo，自由无质量标量场理论所关联的局域代数的模结构，《数学物理通讯》84 (1982年)，71–85。[10] A.M. Jaffe，量子场论中的高能行为。一、严格局域化场，《物理评论》158 (1967年)，1454。[11] V. Katsnelson，长球微分算子的自伴边界条件，载于：《不定内积空间、Schur分析与微分方程》，357–386，算子理论进展与应用，263，Birkhäuser/Springer，Cham，2018年。[12] H.J. Landau, H.O. Pollak，长球波函数、傅里叶分析与不确定性。II，《贝尔系统技术期刊》40 (1961年)，65–84。[13] P. Leyland, J.E. Roberts, D. Testard，自由电磁场的对偶性，马赛预印本，1976年，未发表。[14] R. Longo，实希尔伯特子空间、模理论、 $SL(2,\mathbb{R})$与共形场论，载于：《锡比乌的冯·诺依曼代数》，33-91，Theta，2008年。[15] R. Longo，相干激发的熵，《数学物理快报》109 (2019年)，2587-2600。[16] R. Longo，魏尔代数的模结构，《数学物理通讯》392 (2022年)，145–183。勘误，出处同上（即将刊出）。[17] R. Longo, G. Morsella，无质量模哈密顿量，《数学物理通讯》https://doi.org/10.1007/s00220-022-04617-1, arXiv:2012.00565[18] M.A. Rieffel, A. van Daele，Tomita-Takesaki理论的有界算子方法，《太平洋数学杂志》69 (1977年)，第1期，187–221。[19] K. Schmüdgen，《希尔伯特空间上的无界自伴算子》，数学研究生教材，265。施普林格出版社，Dordrecht，2012年[20] D. Slepian，长球波函数、傅里叶分析与不确定性。IV. 向多维的推广；广义长球函数，《贝尔系统技术期刊》43 (1964年)，3009–3057。[21] D. Slepian，关于傅里叶分析、不确定性与建模的若干评论，《SIAM评论》23, 379–393 (1983年)。[22] D. Slepian, H.O. Pollak，长球波函数、傅里叶分析与不确定性。I，《贝尔系统技术期刊》40 (1961年)，43–63。[23] M. Takesaki，《算子代数理论》，I与II，施普林格出版社，纽约—海德堡，2002年与2003年。