arXiv:2302.13873v2 [math.FA] 3 Feb 2025

算子矩膨胀的块分解

B. V. Rajarama Bhat、Anindya Ghatak 和 Santhosh Kumar Pamula

摘要。设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子序列。若希尔伯特空间 $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$ 上的有界算子 B 满足

$$A_n = P_{\mathcal{H}}B^n|_{\mathcal{H}} \text{ for all } n\geq 1,$$

其中 $P_{\mathcal{H}}$ 是从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{H}$. 的投影。扩张存在性问题是经典矩问题的一种推广。我们给出了自伴扩张存在的充要条件，并为这些扩张提供了显式的块算子表示。例如，自伴扩张可以写成块三对角形式。

给定一个正可逆算子 A，若算子 T 对应的序列 $\{A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}\}_{n\geq 1}$ 存在酉扩张，则称 T 属于 $\mathcal{C}_A$ 类。我们找出了一类便于处理的 $\mathcal{C}_A$ 类算子，对于这类算子，可以显式地以块算子形式写出等距扩张和酉扩张。这包括正标量 ρ 对应的著名 $\mathcal{C}_\rho$ 类。此处，特殊情形 $\rho = 1$ 和 $\rho = 2$ 分别对应于压缩算子的 Schäffer 表示，以及数值半径不超过一的算子的 Ando 表示。

1. 引言

从 Sz.-Nagy 的开创性工作（[32]）开始，扩张理论在算子理论中一直发挥着基础性作用。许多研究者对此进行了探索。早期研究主要采用经典函数论和基础算子理论中的技巧。得益于 W. Arveson、V. I. Paulsen 等人的工作（[35]），我们有了来自完全正映射理论的新工具。相关文献浩如烟海，因此我们仅引用 Orr Shalit 最近的一篇扩张理论综述 [43] 及其中的参考文献。

设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，$\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是作用在 $\mathcal{H}$上的有界线性算子序列。若希尔伯特空间 $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$ 上的有界算子 B 满足

$$A_n = P_{\mathcal{H}}B^n|_{\mathcal{H}} \text{ for all } n\geq 1.$$

通常，将 $n=0$ 包含在该序列中较为方便，此时我们取 $A_0 = I$为该希尔伯特空间上的恒等算子。算子矩问题旨在确定算子序列满足哪些条件，才能保证存在具有指定性质的扩张 B；例如，我们可以要求 B 为酉算子/等距算子/自伴/正，或者要求 B 的谱包含于复平面的某个给定子集中。

这个问题的两个特殊情形是众所周知的。Sz.-Nagy 的一个结果告诉我们，如果对于某个算子 A 有 $A_n = A^n\, n\geq 0$，那么当且仅当 A 是压缩算子时，它才存在酉扩张。

另一种特殊情形是 $\mathcal{H}$ 为一维空间，此时 A_n 是标量序列，而 B 是作用在 $\mathcal{K}$ 上的自伴算子。这相当于要求

$$A_n = \langle u, B^nu\rangle = \int_{\sigma(B)} x^n d\mu(x)$$

其中，u 是 $\mathcal{K}$ 中的单位向量，μ 是由向量态$\langle u、(\cdot)u\rangle$. 得到的 B 的谱测度。换言之，这是寻求具有指定矩的测度的经典矩问题。

日期：2025年2月4日。2010 数学学科分类。46L07, 47A12, 47A20, 47A57, 47B35。关键词和短语。矩问题、扩张、块算子、泊松变换、正定核、Toeplitz算子、Hankel算子。

一般算子矩问题鲜为人知，但如果我们开始检索，就会发现相关文献散见于各处。Sz.-Nagy（[33]）早已思考过这一问题。另请参见 [13, 26, 49]）。此外，我们还可以参考V. I. Paulsen 的优秀著作[35], ，作者在其中讨论了算子值序列的（等距／酉算子、正）扩张问题。

本文的首要目标是对算子矩问题的相关基本成果作一个连贯的总结。我们希望这能为本文所呈现的结果提供一些历史背景。本文并非意在成为一篇综述。本文主要采用完全正映射理论中的现代方法，或利用正核方法来证明扩张的存在性。我们着重强调的一点是，扩张可以表示为块算子矩阵，并且可以通过针对这类矩阵的 Schäffer 型构造获得。这似乎是一种相当普遍的现象。这一点非常有用，因为它有助于我们直观地理解扩张。对于压缩算子的幂，Schäffer 构造给出的扩张是双边移位算子的一个 2×2 块算子扰动。在最后一节中，我们得到了一些作为扩张算子出现的双边移位算子的 4×4 块算子扰动。

全文中，$\mathcal{H}$ 表示一个复希尔伯特空间，并且我们遵循物理学家的惯例，将内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 定义为关于第二个变量线性、关于第一个变量共轭线性。此外请注意，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示$\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的空间，而 $C(X)$是紧 Hausdorff 空间 X. 上所有连续函数构成的 C^*代数。一般而言，我们用 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 等表示 C^*代数。特别地，所有以 $\mathcal{A}$中的元素为矩阵项的 $n \times n$ 矩阵构成的 C^* 代数记作 $M_n(\mathcal{A})$。对于 $\mathcal{H}$的一个子集 M，子空间 $[M] := \text{span}(M)$是 $\mathcal{H}$ 中包含 M的最小闭子空间。

定义 1.1（算子序列的扩张）。设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子序列，且 $A_0 = I$。若存在希尔伯特空间 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 上的有界线性算子扩张，即存在 有界线性算子 B 作用于希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$，满足

$$A_n = P_{\mathcal{H}} B^n\big|_{\mathcal{H}}, \quad for\ all\ \ n \geq 0. \tag{1}$$

那么 B 称为扩张。若B 具有正、自伴、等距或酉算子的性质，则称该扩张为正扩张、自伴扩张、等距扩张或酉扩张。若正扩张、自伴扩张或等距扩张满足以下条件，则称其为极小扩张：

$$\mathcal{K} = \overline{\text{span}}\{B^n(\mathcal{H}) : n \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2}$$

这里需要作一些说明。按照约定，对于任意算子 B，B^0 均视为恒等算子。因此，取 $A_0 = P_{\mathcal{H}} B^0\big|_{\mathcal{H}}$ 后，条件 $A_0 = I$. 实际上是多余的。因此，我们实际上只考虑 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的扩张。然而，对于极小性，在公式（2）中包含 $n = 0$ 很重要。对于酉扩张，公式（2）中的极小性条件应替换为

$$\mathcal{K} = \overline{\text{span}}\{B^n(\mathcal{H}) : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3}$$

问题 1.2。给定一个算子序列，我们希望考虑具有指定性质（如为正、自伴等）的扩张。由此产生的一些自然问题如下：

(1) **存在性：** 具有指定性质的扩张存在的充要条件是什么？(2)**唯一性：** 当具有指定性质的扩张存在时，能否在极小性假设下证明该扩张在酉等价意义下唯一？(3) **构造：** 我们能否显式构造这些扩张，而不是仅仅抽象地证明它们的存在性和唯一性？

唯一性问题很容易回答。为便于查阅，我们将其表述为一个定理。

定理 1.3。设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个有界算子序列，并且存在定义在希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$. 上的自伴/正/等距/酉扩张 B。则给定的算子序列存在一个具有相同指定性质的最小扩张。此外，这样的最小扩张在酉等价意义下是唯一的。

证明。 假设 B 是希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ 上的一个自伴扩张。于是，将 B 限制在子空间 span $\{B^n h: \ h \in \mathcal{H}, \ n \in \mathbb{Z}_+\}$ 上，我们得到 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 的一个最小自伴扩张，其形式为：

$$\langle B^m g, B^n h\rangle = \langle g, B^{m+n} h\rangle = \langle g, A_{m+n} h\rangle \text{ for all } g, h \in \mathcal{H}, m, n \in \mathbb{Z}_+$$

若我们考虑 $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2.)$ 上的两个最小扩张 B_i，那么通过定义$U\left(B_1^n h\right) = B_2^n h$ 对每个 $h \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{Z}_+$，并将其线性且连续地延拓，我们得到一个等距算子。由于这些扩张的极小性，它实际上是一个酉算子。显然，对于正扩张，同样的结论也成立。

现在假设 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是给定序列 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 在某个包含 $\mathcal{H}$ 的希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 中的等距扩张。由于 B 是一个等距算子，内积 $\langle B^m g, B^n h\rangle$ 可确定为：

$$\langle B^m g, B^n h\rangle = \begin{cases} \left\langle g, A_{n-m} h\right\rangle & \text{if } n \geq m \\ \left\langle g, \left(A_{m-n}\right)^* h\right\rangle & \text{if } n \leq m \end{cases}$$

由此可知，将 B 限制在子空间 span$\{B^n h: \ h \in \mathcal{H}, \ n \in \mathbb{Z}_+\}$ 上，得到的是 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 的最小等距扩张。最小等距扩张在酉等价意义下的唯一性，与前一种情形类似。对于酉扩张，我们将 $\mathbb{Z}_+$ 替换为 $\mathbb{Z}$，便得到相应的结果。

□

第一个问题更为微妙。显然，对于任意给定的算子值序列 $\{A_n\}_{n\geq 0}$，未必存在 B 满足方程（1）。可以轻易得出一些必要条件。列举如下：

(1) 序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 应满足增长界 $\|A_n\| \leq M^n$，其中 $M > 0$.为某个值。(2) 若要使 B 为正（分别为自伴），则 A_n应为正（分别为自伴）。若要使B 为等距或酉算子，则 A_n应为压缩算子。

条件 (1) 很自然，因为我们寻求的是有界算子的扩张。条件 (2) 也显而易见。值得指出的是，关于正扩张和酉算子／等距扩张的存在性问题，由 V. I. Paulsen [35] 进行了讨论。本文探讨自伴扩张的必要且充分条件。

现在简要介绍本文的安排。我们在定理 1.2 和定理 2.3、定理 4.2中回顾并总结了问题 2.3 第一问的一些已知答案。更具体地说，定理 2.3给出了以 Hankel 矩阵表述的自伴扩张问题的必要且充分判据。酉扩张／等距扩张的 [35]存在性由 V. I. Paulsen 给出。因此，定理 2.3 为问题 1.2 的第 1问提供了 完整的答案。此外，我们考察 $\mathcal{C}_A$ 类算子，作为酉扩张的一个特例。在本文中，我们推导出算子值序列属于 $\mathcal{C}_A$ 类的必要且充分条件（参见定理 4.2）。

因此，本文的重点是问题 1.2中的第三个问题。在此，我们尝试为各种扩张类推导块算子形式。在定理 2.7中，我们证明，若$\{A_n\}_{n\geq 0}$ 存在自伴扩张（记为 B），则 B 具有三对角形式（见定理 2.6），其各块由递归关系给出（见第 2 节）。在定理 3.2中，我们证明，若 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 存在等距扩张（记为 V），则 V 具有方程（23）所示的形式，且 V 的各块由第 3 节所述的递归关系给出。

随后，我们研究所谓 $\mathcal{C}_A$类中允许等距扩张的算子值序列。我们给出算子属于 类的若干充要条件 $\mathcal{C}_A$（见定理 4.2 和定理 4.4）。

在最后一节中，我们研究了 $\mathcal{C}_A$-类算子中的一个特殊子类，对于这类算子，可以明确写出其等距扩张和酉扩张的块算子形式（见定理5.3和定理 5.5）。此外，我们还描述了它们的最小扩张空间（见命题 5.4和注 5.6）。 $\rho = 1$ 和 $\rho = 2$ 的情形尤为值得关注，因为它们分别对应于压缩算子的 Schäffer表示，以及数值半径不大于一的算子的 Ando表示。在研究过程中，我们发现了一个

值得关注的引理5.1 中的一个观察结果，即每个 $\mathcal{C}_\rho$-类都存在部分等距扩张。此外，我们还给出了实现这一点的明确方法。

2. 自伴扩张

2.1. 经典矩问题。 矩问题最早出现在 Stieltjes 于1894年的开创性著作中。在此之前，P. L. Chebyshev 和 Markov 曾在其关于“积分的极限值”的研究中使用矩的概念。Kre˘in [23]的文章对这些发展作了综述。不过，Stieltjes 是第一位将矩问题视为独立问题并将其表述为如下形式的数学家：给定一个实数序列$\{m_n : \ n \geq 0\}$，是否存在一个支撑于 $\mathbb{R}$ 上的拉东测度 μ，使得

$$m_n = \int_0^\infty x^n \, d\sigma(x), \ \forall \, n \geq 0? \tag{4}$$

后来在1920年，Hamburger [20] 将问题的范围扩展到考虑支撑于 $[0, \infty)$上的此类测度是否存在；Hausdorff [19] 则讨论了支撑于 $[0, 1]$. 上的此类测度是否存在，以及问题是否可解。许多学者为这一方向作出了重要贡献，例如可参见 R. Nevanlinna [30], 、M. Riesz [40], 、T. Carleman [14], 和M.H. Stone [46]的研究。

一般而言，对于 $\mathbb{R}$ 的任意闭子集 K， K 矩问题 [41] 旨在确定是否存在一个测度 μ，其支集包含于集合 K，使得

$$m_n = \int_K x^n \, d\mu(x), \ \forall n \geq 0. \tag{5}$$

K 有三种特殊取值因其自然重要性和历史原因而尤为突出，即 *Hamburger*矩问题 （当 $K = [0, \infty$ 时）、*Stieltjes*矩问题 （当$K = \mathbb{R}$时）和 *Hausdorff*矩问题 （当 $K = [0, 1]$ 时）。

关于矩问题及分析中相关问题的精彩综述，可参阅 Akhiezer [3] 和 Schmudgen [39]。我们从 [3, 39] 回顾这些矩问题的解存在所需的一些充要条件（另请参阅其中的参考文献）。首先，对每个 $n \geq 0$，矩序列$\{m_n\}_{n\geq 0}$ 对应的 Hankel 矩阵定义为

$$H_n = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \quad \text{and}$$

$$H_n^{(1)} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+1} & m_{n+2} & \cdots & m_{2n+1} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Hamburger矩问题有解 [39,定理 3.8] 当且仅当相应的 Hankel 矩阵

$$H_n \geq 0 \text{ for every } n \geq 0.$$

Stieltjes矩问题有解 [39, 定理 3.12] 当且仅当相应的 Hankel 矩阵

$$H_n \geq 0 \text{ and } H_n^{(1)} \geq 0 \text{ for every } n \geq 0.$$

此外，Hausdorff矩问题有解 [39, 定理 3.15] 当且仅当序列 $\{m_n : \ n \geq 0\}$ 是完全单调的，即:

$$(-1)^k(\Delta^k m)_n \geq 0 \text{ for every } n, k \geq 0,$$

其中

$$(\Delta^k m)_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i m_{i+n}.$$

另外，参见[3, 定理 2.6。4]，了解 Hausdorff矩问题的详细解法。也可以考虑支撑在复平面子集上的测度，例如参见 [2, 39]。

说到算子序列的扩张，显然，起点是 Sz.-Nagy 的以下著名定理。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，并考虑算子值序列 $\{T^n\}_{n\geq 0}$。当且仅当 T 是压缩算子时，该序列存在最小等距扩张或酉扩张。此外，最小扩张在酉等价意义下唯一。（参见 [32] 或 [35, 定理 1。1]）。我们称它们为 T的扩张。1955年，Schäffer [42] 给出了最小等距扩张和酉扩张的显式构造，如下：设 $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$，$D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$，且 $\mathcal{D}_T := \text{值域} D_T$，$\mathcal{D}_{T^*} = \text{值域} D_{T^*}$。取

$$\mathcal{K} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T \oplus \mathcal{D}_T \oplus \cdots .$$

Then

$$V = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & \cdots \\ D_T & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

在 $\mathcal{K}$ 上是 T 的最小等距扩张。取 $\mathcal{L} = \cdots \oplus \mathcal{D}_{T^*} \oplus \mathcal{D}_{T^*} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T \oplus \mathcal{D}_T \oplus \cdots$，并定义 U 在 $\mathcal{L}$ 上为

$$U = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & I & & & & & \\ & & I & & & & \\ & & & D_{T^*} & \mathbf{T} & & \\ & & & -T^* & D_T & & \\ & & & & & I & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

粗体表示算子 T 从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 的位置，且省略了值为 0 的项。本文为若干算子值矩序列提供了 Schäffer 型构造。

2.2. **自伴扩张**。1952年，Sz-Nagy 得到了一个序列的算子存在自伴扩张且其谱包含于某个给定紧集中的充要条件。

定理 2.1。[33] 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是一个紧集。设 $\{A_n : n \geq 0\}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一列有界自伴算子，其中 $A_0 = I$。它存在一个自伴算子扩张 B，且 $\sigma(B) \subseteq X$，当且仅当

$$c_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n \geq 0, \tag{6}$$

每当复多项式 $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \geq 0$ 对所有 $x \in X$.

算子序列的自伴扩张的存在性与相应汉克尔矩阵的正性相关。为说明这一点，我们先给出以下观察。

$_n$**引理 2.2**。 设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个序列，满足 $A_0 = I$。则 $\sum X_i^* A_{i+j} X_j \geq 0$ 当且仅当对于$_{i,j=0}$任意 $X_0, X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $n \geq 0$，相应的汉克尔矩阵

$$H_n := \begin{bmatrix} I & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & A_{n+2} & \cdots & A_{2n} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \textit{for all } n \geq 0.$$

证明。 假设对所有 $n \geq 0$， $H_n \geq 0$均成立，并令 X_0、 X_1、 $\cdots$、 $X_n \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）。对于每个 $g \in \mathcal{H}$，我们可见

$$\left\langle g, \Big(\sum_{i,j=0}^{n} X_i^* A_{i+j} X_j\Big) g \right\rangle = \sum_{i,j=0}^{n} \langle X_i g,\ A_{i+j} X_j g \rangle = \langle \widetilde{g}, H_n \widetilde{g} \rangle \geq 0,$$

其中 $\widetilde{g} = \begin{bmatrix} X_0 g \\ \cdots \\ X_n g \end{bmatrix}$。为证明逆命题，选取并固定满足 $\|g\| = 1.$ 的 $g \in \mathcal{H}$。现在，

对于h_0、 h_1、 $\cdots$、 $h_n \in \mathcal{H}$，取 $X_i = |h_i\rangle\langle g|$ （$0 \leq i \leq n$）。于是

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, H_n \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \right\rangle &= \sum_{i,j=0}^{n} \langle h_i,\ A_{i+j} h_j \rangle \\ &= \left\langle g, \Big(\sum_{i,j=0}^{n} |h_i\rangle\langle g|^* A_{i+j} |h_j\rangle\langle g| \Big) g \right\rangle \\ &= \langle g, \sum_{i,j=0}^{n} X_i^* A_{i+j} X_j g \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子序列。考虑相应的 Hankel 矩阵:

$$H_n := \begin{bmatrix} I & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & A_{n+2} & \cdots & A_{2n} \end{bmatrix},$$

and

$$H_n^{(2)} := \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & A_4 & \cdots & A_{n+2} \\ A_3 & A_4 & A_5 & \cdots & A_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n+2} & A_{n+3} & A_{n+4} & \cdots & A_{2n+2} \end{bmatrix}.$$

在下面的定理中，我们既使用完全正映射的方法，也使用正核的方法。继定理 2.3 之后，我们以 Hankel 矩阵的形式给出了有界自伴扩张的一种新刻画。

现在我们回顾一些 C^*-代数理论中的定义和基本结果。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是幺正 C^*-代数。容易看出， M_n（$\mathcal{A}$）是所有元素来自 $\mathcal{A}$ 的矩阵的集合，它是一个 C^*-代数， M_n（$\mathcal{B}$）也同样如此。 M_n（$\mathcal{A}$）中的典型元素记作 $[a_{ij}]$。若线性映射 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其为:

(1) 正，如果对于每个 $a \geq 0$， $\varphi(a) \geq 0$ in $\mathcal{B}$

(2) 完全正，如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 φ_n: $M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ 定义为

$$\varphi_n\Big([a_{ij}]\Big) := [\varphi(a_{ij})]$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$. 都是正的

(3) 完全有界，若 $\|\varphi\|_{cb} := \sup\{\|\varphi_n\| : \ n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

注意，正映射未必是完全正的。例如，若我们定义

$$\varphi([a_{ij}]) = [a_{ji}] \ \text{ for all } \ [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$$

则 φ 是正的，但不是完全正的。每个完全正映射 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 都是完全有界的，且 $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi(1_{\mathcal{A}})\|$，其中 $1_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的单位元（见 [35, 命题 3.6]），并且由 [35] 的定理 3.11 可知，若 $\mathcal{A}$ 是交换的，则 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为正蕴含 φ 为完全正。有关完全正映射和完全有界映射基本结果的详细讨论与深入分析，请参阅Vern I. Paulsen 所著的 著作 [35]。

定理 2.3. 设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是一个自伴算子序列，满足 $A_0 = I$ 且对所有 n都有 $\|A_n\| \leq 1$。那么，当且仅当.....时，它存在自伴压缩扩张

$$H_n \geq 0 \ \textit{and} \ H_n^{(2)} \leq H_n \ \ \textit{for each} \ \ n.$$

证明. 假设存在一个自伴压缩扩张 B，其作用于希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$。由于 $\sigma(B) \subseteq [-1,1]$, 由定理 2.1 可知，映射 φ: $C[-1,1] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$定义如下：

$$\varphi(x^m) = A_m \ \text{for} \ m \geq 0,$$

是正的，因此它是完全正的，因为定义域 $C\big([-1,1]\big)$是一个交换C^*-代数。现在考虑元素 $L \in M_{n+1}(C[-1,1])$，其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

那么 $L^*L \geq 0$ 属于 $M_{n+1}(C[-1,1])$。由于 $H_n = \varphi_{n+1}(L^*L)$，且 φ 是完全正的， $H_n \geq 0$.我们定义 $G \in M_{n+1}(C[-1,1])$如下：

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} & x\sqrt{1-x^2} & \cdots & x^n\sqrt{1-x^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

那么 $G^*G \geq 0$ 属于 $M_{n+1}(C[-1,1])$。由于 $H_n - H_n^{(2)} = \varphi_{n+1}(G^*G)$，且 φ 是完全正的，$H_n - H_n^{(2)} \geq 0$.

反过来，假设对于每个 $n.$， $H_n \geq 0$ 和 $H_n^{(2)} \leq H_n$ 成立。令 $M := \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{H}$。定义映射$k$: $M \times M \to \mathbb{C}$ 如下：

$$k((m,g),(n,h)) = \langle g, \ A_{m+n}h\rangle, \ \ \text{for every } m,n \in \mathbb{Z}_+, \ g,h \in \mathcal{H}. \tag{7}$$

由于 $H_n \geq 0$ 对所有 $n \geq 0$，根据引理 2.2，可知 k 是一个正定核。设 V 为 M 上所有仅在 M的有限多个点之外为零的复值函数组成的向量空间。由于 k 是正定的， V 关于以下定义构成一个半内积空间：

$$\langle \xi, \eta\rangle := \sum_{x,y\in M} \overline{\xi(x)}\eta(y)k(x,y) \ \text{ for every } \xi,\eta \in V.$$

令 $\mathcal{N}=\{\xi\in V:\ \langle\xi,\xi\rangle=0\}$。根据柯西-施瓦茨不等式，$\mathcal{N}=\{\xi:\ \langle\xi,\eta\rangle=0$，对于每个 $\eta\in V\}$ 都是 V的子空间。令 $\mathcal{K}$ 为商空间 $V/\mathcal{N}$的完备化所得到的希尔伯特空间。定义 $\lambda:\ M\to\mathcal{K}$为

$$\lambda(m,g)=\delta_{(m,g)}+\mathcal{N},\ \text{for all}\ (m,g)\in M.$$

由于 $\langle\lambda(0,g)\ \lambda(0,h)\rangle=\langle g,$ 对每个 $h\rangle\ g,h\in\mathcal{H}$ 都成立，我们看到，$\mathcal{H}$ 可通过映射 $g\mapsto\lambda(0,g)$ 识别为 $\mathcal{K}$ 的子空间。此外，

$$\mathcal{K}=\overline{\operatorname{span}}\{\lambda(m,g):\ m\geq 0,\ g\in\mathcal{H}\}$$

。对每个 $(m,g)\in M$，定义 $B(\lambda(m,g))=\lambda(m+1,g)$。不失一般性，$m_0=0,m_1=1,\cdots,$ $m_n=n,\ g_i\in\mathcal{H}$ 对 $0\leq i\leq n$ 成立，并且由于 $H_n^{(2)}\leq H_n$，我们得到

$$\begin{aligned}
\Big\|B\Big(\sum_{i=0}^{n}c_i\lambda(m_i,g_i)\Big)\Big\|^2&=\sum_{i,j=0}^{n}\overline{c_i}c_j\langle\lambda(i+1,g_i),\ \lambda(j+1,g_j)\rangle\\
&=\sum_{i,j=0}^{n}\overline{c_i}c_j\langle g_i,\ A_{i+j+2}(g_j)\rangle\\
&=\left\langle\begin{bmatrix}c_0g_0\\ \vdots\\ c_ng_n\end{bmatrix},\ H_n^{(2)}\begin{bmatrix}c_0g_0\\ \vdots\\ c_ng_n\end{bmatrix}\right\rangle\\
&\leq\left\langle\begin{bmatrix}c_0g_0\\ \vdots\\ c_ng_n\end{bmatrix},\ H_n\begin{bmatrix}c_0g_0\\ \vdots\\ c_ng_n\end{bmatrix}\right\rangle\\
&\leq\sum_{i,j=0}^{n}\overline{c_i}c_j\langle g_i,\ A_{i+j}(g_j)\rangle\\
&=\Big\|\sum_{i=0}^{n}c_i\lambda(m_i,g_i)\Big\|^2.
\end{aligned}$$

这意味着 B 是稠密子空间上的压缩算子，并且可延拓为 $\mathcal{K}$ 上的线性压缩算子。仍以 B 表示该延拓，容易看出 B 是自伴的。此外，对于每个 $g,h\in\mathcal{H}$,

$$\langle\lambda(0,g),P_{\mathcal{H}}B^n|_{\mathcal{H}}\lambda(0,h)\rangle=\langle\lambda(0,g),\ \lambda(n,h)\rangle=\langle g,A_nh\rangle.$$

因此，B 是 $\{A_n\}_{n\geq 0}$. 的自伴压缩扩张 □

注 2.4。如果序列 $\{A_n:\ n\geq 0\}$ 满足 $A_0=I$ 具有自伴扩张，那么根据定理 *2.3*，可知 2×2 汉克尔矩阵

$$H_2=\begin{bmatrix}I & A_1\\ A_1 & A_2\end{bmatrix}\geq 0.$$

等价地，$A_2\geq A_1^2$. 或者，如果某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$ 上的自伴算子 B 是一个扩张，

$$A_2-A_1^2=P_{\mathcal{H}}B^2P_{\mathcal{H}}-P_{\mathcal{H}}BP_{\mathcal{H}}BP_{\mathcal{H}}=P_{\mathcal{H}}B(I-P_{\mathcal{H}})BP_{\mathcal{H}}\geq 0. \tag{8}$$

设 B 是某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$ 上的有界自伴算子，满足 $A_n=P_{\mathcal{H}}B^nP_{\mathcal{H}}$ 对每个 $n\geq 0.$ 如果我们假设 $A_2=A_1^2$ 那么由方程（8）可得 $(I-P_{\mathcal{H}})BP_{\mathcal{H}}=0$.这意味着子空间 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$ 下的约化子空间。由此可得 B. 因此，$A_1=B\big|_{\mathcal{H}}$，

$$A_n=B^n\big|_{\mathcal{H}}=\big(B\big|_{\mathcal{H}}\big)^n=A_1^n,\ \text{for}\ n\geq 1.$$

事实上，如今已知更强得多的结果（详见 [34] ）。在 K. Schmüdgen 的工作中 [39, 41] ，可以找到关于解存在的充要条件 K-矩问题，其中 K 是一个紧基本半代数集（即下列方程组的解集：

有限多项式不等式组 $p_1(x) \geq 0, p_2(x) \geq 0, \cdots, p_n(x) \geq 0$。F.-H. Vasilescu [51]在Schmüdgen 的结果基础上，针对半代数集的情形给出了 K-矩问题的一个显式解。关于这些主题的详细讨论，可参阅综述文章[50]。

2.3. 自伴扩张的具体构造。 现在我们转而讨论自伴扩张的一种具体构造。在此之前，先回顾文献中的一些已知事实。回顾一下文献中关于自伴算子与雅可比/三对角矩阵之间联系的一些已知事实。设 B 是定义在可分希尔伯特空间上的有界自伴算子，并且存在单位循环向量 v。相对于由集合 $\{v, Bv, B^2v, \cdots\}$经Gram-Schmidt过程得到的基，它可以表示为一个三对角矩阵。设矩阵 B 表示为：

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{b_0} & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & \overline{b_1} & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & \overline{b_2} & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{9}$$

那么它 与一族首一正交多项式相关，这族多项式由 $p_0(x) = 1, p_1(x) = (x - a_0)$，

$$p_n(x) = (x - a_{n-1})p_{n-1}(x) - |b_{n-1}|^2 p_{n-2}(x), \text{ for all } n \geq 2 \tag{10}$$

注意，这里方程（10）是通过按最后一行展开（$xI - B_n$）得到的，其中 B_n 是 $n \times n$ 的截断矩阵 B。此处引自 [12, 引理3。2]。需要注意的是， v的循环性确保了 $b_j \neq 0$ 对每个 j都成立。将基向量替换为乘以适当相位因子的同一组向量，实际上可以令 $b_j > 0$ 对每个 j都成立。如果考虑正交归一多项式而非正交多项式，递推关系需要稍作修改。关于该理论的精确公式及其他基本信息，可参见经典著作 [46]。关于这一思想在量子理论中的一些应用及详细示例，可参见[12]。

令 $\mu(\cdot) = \|E(\cdot)v\|^2$ 为定义在实直线的博雷尔 σ–域上的概率测度，其中 E 是与 B相关联的谱测度。显然，它支撑于B的谱上。于是 $\{p_n(x) : \ n \geq 0\}$ 是 $L^2(\mu)$的一组正交归一基(更多详情请参见[46])。此外，m阶矩由 μ 给出

$$\langle v, \ B^m v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m \, d\langle v, \ E_B(\lambda)v\rangle, \text{ for all } m \geq 0.$$

反过来，给定实直线上的任意紧支撑概率测度 μ ，我们可以取B 为作用在 x上的“乘以 $L^2(\mu)$”算子，并令循环向量 v 为常函数1。我们可以观察到 B 在由归一化正交多项式构成的基下的三对角形式。系数 $\{a_n, b_n : \ n \geq 0\}$ 称为测度 μ. 的Jacobi参数。这里 B 是该概率测度矩序列的自伴扩张。

这促使我们构造这样的三对角算子矩阵 B ，作为算子序列 $\{A_n$ 的自伴扩张： $n \geq 0\}$. 这类三对角块称为广义雅可比三对角关系，在量子理论中经常出现（详情参见 [1] ）。

引理 2.5。 设 B 是某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 上的有界算子。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$. 的闭子空间。假设

$$\mathcal{K} = \overline{span}\{B^n h : h \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{11}$$

那么， $\mathcal{K}$ 分解为希尔伯特空间的直和

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots$$

其中 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$，并且相对于此分解，算子 B 具有“上 *Hessenberg*”形式：

$$B = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} & \cdots \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots \\ 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & B_{32} & B_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

其中 $\mathcal{H}_n = \overline{B_{n(n-1)}(\mathcal{H}_{n-1})}$ 对每个 n均成立。反过来，任何上述形式的 B 都满足方程(11)。

证明。取

$$\mathcal{H}_{n]} = \overline{\text{span}}\{B^m h : 0 \le m \le n, h \in \mathcal{H}\}$$

and

$$\mathcal{H}_0 := \mathcal{H},\ \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{1]} \bigcap \mathcal{H}_0^{\perp},\ \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n]} \bigcap \mathcal{H}_{(n-1)]}^{\perp} \text{ for } n \ge 2.$$

那么显然 $\mathcal{K} = \oplus_{n\ge 1}\mathcal{H}_n$，并且由于 $B(\mathcal{H}_{n]}) \subseteq \mathcal{H}_{(n+1)]}$, $B(\mathcal{H}_n) \subseteq \oplus_{m=0}^{n+1}\mathcal{H}_{m+1}$。因此，算子 B 具有上述形式。值域、条件以及逆向结论都显而易见。□

定理 2.6。设 $\{A_n\}_{n\ge 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的自伴算子序列，且满足 $A_0 = I$，并在某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$上具有最小自伴扩张 B，其中 B 属于 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$。那么空间$\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots$($\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$)，使得算子 B具有如下三对角形式：

$$B = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01}^* & 0 & 0 & \cdots \\ B_{10} & B_{11} & B_{21}^* & 0 & \cdots \\ 0 & B_{21} & B_{22} & B_{32}^* & \cdots \\ 0 & 0 & B_{32} & B_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{12}$$

并且对所有 $n \ge 1.,\ \ \overline{\mathcal{H}_n = B_{n(n-1)}(\mathcal{H}_{n-1})}$

证明。根据前述引理，B 具有上 Hessenberg 形式。但由于 B 是自伴的，$B_{ij} = B_{ji}^* = 0$ 对于 $j >$ $(i+1)$。

□

考虑本定理的构造过程。我们尝试利用序列$\{A_n\}_{n\ge 0}$ 和扩张性质来确定各个块。这个过程是递归进行的，为此我们需要求某些算子的逆。一般来说，其中某些算子可能不可逆，因此我们可能需要修改构造过程。目前，我们假设在需要时相关算子均可逆。

由于 B 是矩序列 $\{A_n\}_{n\ge 0}$ 的自伴扩张，我们有 $(B^n)_{00} = A_n$，对每个 $n \ge 0$均成立。显然，$B_{00} = A_1$，且 B_{10} 可表示为：

$$A_2 = (B^2)_{00} = B_{00}^2 + B_{10}^* B_{10} = A_1^2 + B_{10}^* B_{10}.$$

也就是说，$B_{10}^* B_{10} = A_2 - A_1^2$。由于$(A_2 - A_1^2) \ge 0$ （见注2.4），我们可以选取 $B_{10} =(A_2 - A_1^2)^{1/2}$. 首先，我们说明如何计算对角块 B_{11}，然后建立递推关系以求得对角块和下对角块。由方程（12），可得

$$A_3 = (B^3)_{00} = \sum_{0\le r_1, r_2 \le 2} B_{0r_1} B_{r_1 r_2} B_{r_2 0} = \sum_{0\le r_1, r_2 \le 1} B_{0r_1} B_{r_1 r_2} B_{r_2 0},$$

因为当 r_1 或 r_2 为 2 时，$B_{0r_1} B_{r_1 r_2} B_{r_2 0} = 0$。这意味着

$$\begin{aligned} A_3 &= B_{00}^3 + B_{00}B_{01}B_{10} + B_{01}B_{10}B_{00} + B_{01}B_{11}B_{10} \\ &= B_{00}^3 + B_{00}B_{10}^* B_{10} + B_{10}^* B_{10} B_{00} + B_{10}^* B_{11} B_{10}. \end{aligned}$$

代入第一列的信息后，我们得到

$$B_{11} = (A_2 - A_1^2)^{-1/2}\Big[(A_3 - A_1^3) - A_1(A_2 - A_1^2) - (A_2 - A_1^2)A_1\Big](A_2 - A_1^2)^{-1/2}.$$

对角块和非对角块的公式如下。首先注意到，每个对角块都是一个自伴算子，并且通过对 B的奇次幂进行压缩得到。假设已知 B 的（$n-1$）列，则 B_{nn} 的计算如下：

$$\begin{aligned}
A_{2n-1} &= (B^{2n-1})_{00} \\
&= \sum_{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2(n-1)}\le 2n-2} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2(n-1)}0} \\
&= \sum_{\substack{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2(n-1)}\le 2n-2 \\ \&\ (r_{n-1},r_n)\neq(n,n)}} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2(n-1)}0} \\
&\quad + B_{01}\cdots B_{(n-1)n}B_{nn}B_{n(n-1)}\cdots B_{10} \\
&= \sum_{\substack{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2(n-1)}\le 2n-2 \\ \&\ (r_{n-1},r_n)\neq(n,n)}} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2(n-1)}0} \\
&\quad + B_{10}^*\cdots B_{n(n-1)}^*B_{nn}B_{n(n-1)}\cdots B_{10}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$B_{nn} = \Big(\prod_{i=1}^{n} B_{i(i-1)}^*\Big)^{-1} E_n \Big(\prod_{i=1}^{n} B_{i(i-1)}^*\Big)^{*^{-1}},$$

其中

$$E_n = \Big[A_{2n-1} - \sum_{\substack{1\le r_1,r_2,\ldots,r_{2(n-1)}\le 2n-2 \\ \&\ (r_{n-1},r_n)\neq(n,n)}} B_{1r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2(n-1)}1}\Big].$$

现在注意到，第一列中的下对角块由 $B_{21} = (A_2 - A_1^2)^{1/2}$给出。这些下对角块可以通过对 B. 的偶次幂进行压缩得到。假设已知 B 的（$n-1$）列，则 $B_{(n+1)n}$ 的获得方式如下：

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= (B^{2n})_{00} \\
&= \sum_{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2n-1}\le 2n-1} B_{1r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2n-1}0} \\
&= \sum_{\substack{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2n-1}\le 2n-1 \\ \&\ r_n\neq n}} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2n-1}0} \\
&\quad + B_{01}\cdots B_{(n-2)(n-1)}B_{(n-1)n}B_{n(n-1)}B_{(n-1)(n-2)}\cdots B_{10} \\
&= \sum_{\substack{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2n-1}\le 2n-1 \\ \&\ r_n\neq n}} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2n-1}0} \\
&\quad + B_{10}^*\cdots B_{(n-1)(n-2)}^*B_{n(n-1)}^*B_{n(n-1)}B_{(n-1)(n-2)}\cdots B_{10}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&B_{n(n-1)}^*B_{n(n-1)} \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B_{i(i-1)}^*\Big)^{-1}\Big[A_{2n} - \sum_{\substack{0\le r_1,r_2,\ldots,r_{2n-1}\le 2n-1 \\ \&\ r_n\neq n}} B_{0r_1}B_{r_1r_2}\cdots B_{r_{2n-1}0}\Big] \\
&\qquad\qquad \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B_{i(i-1)}^*\Big)^{*^{-1}}.
\end{aligned}$$

在这种情况下，我们可以选择

$$B_{n(n-1)} = \Big\{ \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B^*_{i(i-1)} \Big)^{-1} F_n \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B^*_{i(i-1)} \Big)^{*^{-1}} \Big\}^{1/2},$$

其中

$$F_n = \Big[A_{2n} \; - \sum_{\substack{0 \le r_1, r_2, \ldots, r_{2n-1} \le 2n-1 \\ \& \; r_n \ne n}} B_{0r_1} B_{r_1 r_2} \cdots B_{r_{2n-1}0} \Big].$$

根据这些计算和引理 2.5，我们得到以下结果。

定理 2.7. 设 $\{A_n\}_{n\ge 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的自伴算子序列，且 $A_0 = I$，存在自伴扩张。若上述递推关系中出现的逆算子均为定义良好的有界算子，则这些公式给出了如上所述具有块三对角形式的自伴最小扩张。

例 2.8. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个自伴算子。我们定义矩序列 $\{A_n\}_{n\ge 0}$ 如下：

$$A_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-2}{2}} T^n & if\ n\ is\ even \\ \\ 0 & if\ n\ is\ odd\ . \end{cases}$$

则作用于 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上的 V，

$$V = \begin{bmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & T \\ 0 & T & 0 \end{bmatrix}$$

是 $\{A_n :\ n \ge 0\}$. 的自伴扩张

这个例子可以推广如下。设 $\{m_n : n \ge 0\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$. 上的紧支撑概率测度 μ 的矩序列。设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的有界自伴算子。那么 $\{m_n T^n : n \ge 0\}$ 是一个可自伴扩张的算子矩序列。取扩张空间 $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes L^2(\mu)$，通过将$h \in \mathcal{H}$ 与 $h \otimes 1$相对应，将 $\mathcal{H}$ 视为其子空间，其中 1 是 $L^2(\mu)$中的常值函数 1。设 B 是如公式（9）所示的 $L^2(\mu)$上乘以“x”的算子的三对角形式，其循环向量为 1。那么 $T \otimes B$是 $\{m_n T^n : n \ge 0\}$的一个自伴扩张：

$$T \otimes B = \begin{bmatrix} a_0 T & b_0 T & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 T & a_1 T & b_1 T & 0 & \ldots \\ 0 & b_1 T & a_2 T & b_2 T & \ldots \\ 0 & 0 & b_2 T & a_3 T & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

若算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $T(T^*T) = (T^*T)T.$，则称其为拟正规。回顾一下，当且仅当对所有 $k \in \mathbb{Z}_+$ [34]，$(T^*T)^k = T^{*k}T^k$时，T是拟正规的。

例 2.9。 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个拟正规算子。则由 $\{A_n\}_{n\ge 0}$定义的矩序列

$$A_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-2}{2}} T^{*\frac{n}{2}} T^{\frac{n}{2}} & if\ n\ is\ even \\ \\ 0 & if\ n\ is\ odd \end{cases}$$

具有自伴扩张。事实上， V作用于由 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 定义的

$$V=\begin{bmatrix}0 & T^* & 0\\ T & 0 & T^*\\ 0 & T & 0\end{bmatrix}$$

是 $\{A_n:\ n\geq 0\}$. 的一个自伴扩张

与之前类似，这个例子也可以推广为：对于算子矩序列 $\{1,0,m_2T^*T,0,m_4(T^*)^2T^2,\ 0,\ \ldots\}$，存在自伴扩张，其中 $\{m_n:\ n\geq 0\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、关于 0 对称的紧支撑概率测度 μ 的矩序列。这种对称性确保该测度的奇矩以及对角雅可比参数全部等于 0。

3. 酉算子扩张与等距扩张

本节讨论算子序列具有酉算子扩张或等距扩张的充要条件。设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中满足 $A_0=I$ 的一个序列。若存在一个包含 $\mathcal{H}$ 的希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，以及一个酉算子（分别为酉算子） $U\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$，使得……，则称 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 具有酉算子扩张（分别为等距扩张）。

$$A_n=P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}},\ \text{for all}\ \ n\geq 0. \tag{13}$$

显然，每个酉扩张都是等距扩张。特别地，Sz.-Nagy扩张定理表明，每个等距算子都有酉扩张。因此，如果一个序列有等距扩张，那么它也有酉扩张。由此可见，算子序列有等距扩张，当且仅当它有酉扩张。然而，极小性的概念有所不同。采用上述记号，酉扩张 U 作用于 $\mathcal{K}$ 是极小的，当且仅当

$$\mathcal{K}=\overline{\text{span}}\{U^nh:n\in\mathbb{Z},h\in\mathcal{H}\}.$$

另一方面，等距扩张 U 作用于 $\mathcal{K}$ 是极小的，当且仅当

$$\mathcal{K}=\overline{\text{span}}\{U^nh:n\in\mathbb{Z}_+,h\in\mathcal{H}\}.$$

设 $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|<1\}$ 是一个开单位圆盘。经典的Szegő核和泊松核[25, 17] 分别记作并定义为

$$S(w,z)=\frac{1}{1-\overline{w}z}\ \ for\ all\ z,w\in\mathbb{D}.$$

$$P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\ \ for\ all\ 0\leq r<1,0\leq\theta\leq 2\pi.$$

泊松核可以用Szegő核表示为

$$P_{r_1r_2}(\theta-t)=S(w,z)+\overline{S(w,z)}-1\ \text{for all}\ z,w\in\mathbb{D}\ \text{and}\ z=r_1e^{i\theta},w=r_2e^{it}.$$

此外，对于所有 $0\leq r<1$ 和 $0\leq\theta\leq 2\pi.$，$P_r\ (\theta)\ \geq 0$

考虑 Szegő核和泊松核，我们为算子序列定义一个算子值核函数。设 $\mathbf{A}=\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的压缩算子序列。相应的 Szegő核函数 $S_{\mathbf{A}}:\mathbb{D}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 定义为

$$S_{\mathbf{A}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nA_n^*\ \text{for all}\ z\in\mathbb{D}. \tag{14}$$

相应的泊松核函数定义为

$$P_{\mathbf{A}}(z)=S_{\mathbf{A}}(z)+S_{\mathbf{A}}(z)^*-I\ \text{for all}\ z\in\mathbb{D}. \tag{15}$$

F. H. Vasilescu 引入了算子值泊松核函数 [52] 用于 d算子元组，并利用缺陷算子研究全纯函数演算。这类泊松核函数无法推广到算子值序列，因为我们不具备半群性质（即$A_nA_m=A_{n+m}$ 可能不成立）。接下来，我们将证明关于泊松核的等距扩张和酉扩张的充要判据。

定理 3.1。设 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个序列，且满足 $A_0 = I$。则以下条件等价：

(i) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 存在酉／等距膨胀。*(ii)* 对每个 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sum_{\ell,k=0}^{n} \bar{c}_\ell c_k A_{k-\ell} \geq 0, \tag{16}$$

其中

$$A_{(k-\ell)} = \begin{cases} A_{k-\ell}, & k \geq \ell \\ A^*_{\ell-k}, & k < \ell. \end{cases}$$

(iii) $P_{\mathbf{A}}(z) \geq 0$ 属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立

证明。 在证明这一结果之前，我们指出这里有一个微妙之处。方程（16）中的条件先验而言弱于要求 $B(\mathcal{H})$值核 K： $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to B(\mathcal{H})$ 具有完全正性，

$$K(\ell, k) = A_{(k-\ell)}, \text{ for every } \ell, k \in \mathbb{Z} \tag{17}$$

因为那将意味着，

$$\sum_{\ell,k=0}^{n} \langle g_\ell, A_{(k-\ell)} g_k \rangle \geq 0, \text{ for all } g_0, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}.$$

（证明i） $\implies$ (ii): 假设方程（13）成立。令 $g \in \mathcal{H}$，那么对任意 $N \geq 0$，我们得到

$$\begin{aligned} \Big\langle g, \sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k A_{(k-\ell)} g \Big\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} c_0 g \\ c_1 g \\ \vdots \\ c_n g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & U & \cdots & U^N \\ U^* & I & \cdots & U^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U^{*N} & U^{*N-1} & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 g \\ c_1 g \\ \vdots \\ c_n g \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{\ell=0}^{N} c_\ell U^\ell g, \sum_{\ell=0}^{N} c_\ell U^\ell g \Big\rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(ii) $\underset{N}{\Longrightarrow}$ (i) 的证明：与 [35, 定理 2.6], 的证明类似，我们定义算子系统 $\mathcal{S} = \left\{ \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta} : \quad N \geq 0 \right\} \subset C(\mathbb{T})$，并定义 Φ: $\mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $\Phi(e^{in\theta}) = A_n$。只需证明 Φ 将严格正函数映射为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的正算子。假设 $f \in \mathcal{S}$ 严格为正，则由 Fejér-Riesz 定理（见[35, 引理 2.5]），可知 $f(e^{i\theta}) = \sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k e^{i(k-\ell)\theta}$，其中 c_0、c_1、……、$c_N \in \mathbb{C}$。因此$_{i,\ j=0}$

$$\Phi(f(e^{i\theta})) = \sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k \Phi(e^{i(k-\ell)\theta}) = \sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k A_{(k-\ell)} \geq 0.$$

这里 Φ是一个正映射，因此有界。由于根据 Stone-Weierstrass 定理， $\mathcal{S}$ 在 $C(\mathbb{T})$ 中稠密，我们可由 [35, 练习 2.2]将 Φ 延拓为定义在 $C(\mathbb{T})$ 上的正映射。我们仍将其记为Φ。因此，由 [35, 定理 3.11] 可知， Φ 是 $C(\mathbb{T})$ 上的完全正映射。

根据 Stinespring 定理，存在一个三元组 $(\mathcal{K}, \pi, V)$，其中 $\mathcal{K}$ 是一个希尔伯特空间，$\pi: C(\mathbb{T}) \to B(\mathcal{K})$ 是一个幺正 $*$- 同态， $V: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 是一个有界线性映射，满足

$$\Phi(f) = V^* \pi(f) V, \ \forall f \in C(\mathbb{T}). \tag{18}$$

由于 Φ 是幺正的， V 是一个等距算子，因此我们可以将 $\mathcal{H}$ 视为 $\mathcal{K}$ 的子空间，方法是将 $h \in \mathcal{H}$ 与 Vh 在 $\mathcal{K}$中对应起来。于是 方程（18）可写为

$$\Phi(f) = P_{\mathcal{H}}\pi(f)|_{\mathcal{H}}, f \in C(\mathbb{T}).$$

若 $f_0(z) = z$，则 $\pi(f_0)$ 是酉算子，因为，

$$\pi(f_0)^*\pi(f_0) = \pi(f_0)\pi(f_0)^* = \pi(|f_0(z)|^2) = I.$$

将 $U = \pi(f_0)$ 代入 $\mathcal{B}(K)$，得到

$$P_{\mathcal{H}}U^n\big|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}\pi(f_0)^n\big|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}\pi(f_0^n)\big|_{\mathcal{H}} = \Phi(z^n) = A_n, \text{ for } n \geq 0.$$

$(i) \implies (iii)$ 的证明：设 $\{A_n : n \geq 0\}$ 存在酉扩张。则存在某个希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ 上的酉算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$，使得

$$A_n = P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}} \text{ for all } n \geq 0. \tag{19}$$

首先注意，对每个 $z \in \mathbb{D}$，$(1 - zU^*)$ 都是可逆的，且 $(1 - zU^*)^{-1} = 1 + zU^* + z^2U^{*2} + \cdots$，并且

$$\|I + zU^* + z^2U^{*2} + \cdots\| \leq 1 + |z| + |z|^2 + \cdots = \frac{1}{1 - |z|}.$$

现在，经过简单计算可得

$$(I - zU^*)^{-1} + (I - \overline{z}U)^{-1} - I = (1 - |z|^2)(I - \overline{z}U)(I - \overline{z}U)^*.$$

此外，显然可知 $(I - zU^*)^{-1} + (I - \overline{z}U)^{-1} - I \geq 0$因为 $|z| < 1$.这意味着$P_{\mathcal{H}}\Big((I - zU^*)^{-1} + (I - \overline{z}U)^{-1} - I\Big)|_{\mathcal{H}} \geq 0$.利用扩张方程（19）中的假设，可知

$$\begin{aligned}
\|I\| + \|zA_1^*\| + \|z^2A_2^*\| + \cdots + \|z^nA_n^*\| & \\
&\leq 1 + |z|\|A_1^*\| + |z^2|\|A_2^*\| + \cdots + |z^n|\|A_n^*\| \\
&\leq 1 + |z|\|U^*\| + |z^2|\|U^{*2}\| + \cdots + |z^n|\|U^{*n}\| \\
&= 1 + |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^n \\
&\leq \frac{1}{1 - |z|} \text{ for all } z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

$_\infty$因此，该级数 $\sum z^nA_n^*$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$. 都范数绝对收敛。因此， $S_{\mathbf{A}}(z)$ 定义良好。此外，我们计算得

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{A}}(z) + S_{\mathbf{A}}(z)^* - I &= \sum_{n=0}^{\infty} z^nA_n^* + \sum_{m=0}^{\infty} \overline{z}^mA_m - I \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^nP_{\mathcal{H}}U^{*n}|_{\mathcal{H}} + \sum_{m=0}^{\infty} \overline{z}^mP_{\mathcal{H}}U^m|_{\mathcal{H}} - I \\
&= P_{\mathcal{H}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^nU^{*n}\Big)|_{\mathcal{H}} + P_{\mathcal{H}}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{z}^mU^m\Big)|_{\mathcal{H}} - I \\
&= P_{\mathcal{H}}\Big((I - zU^*)^{-1} + (I - \overline{z}U)^{-1} - I\Big)|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

由于 $P_{\mathcal{H}}\Big((I - zU^*)^{-1} + (I - \overline{z}U)^{-1} - I\Big)|_{\mathcal{H}} \geq 0$，因此我们有 $P_{\mathbf{A}}(z) \geq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$.

$(iii) \implies (i)$ 的证明：受 [35] 的定理 2.14 启发，我们证明这一结果。假设对所有 $z \in \mathbb{D}.$，$P_{\mathbf{A}}(z) \geq 0$。令 $0 \leq r < 1$，则对每个 $l \in \mathbb{Z}$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{il\theta}P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{il\theta}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} r^ne^{in\theta}A_n^* + \sum_{m=0}^{\infty} r^me^{-im\theta}A_m\Big)d\theta$$

$$= \begin{cases} r^l A_l & \text{if } l \geq 0 \\ r^{-l} A_{-l}^* & \text{if } l < 0. \end{cases} \tag{20}$$

我们定义 φ: $\mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下:

$$\varphi\Big(\sum_{n=0}^{N} p_n e^{in\theta} + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} e^{-im\theta}\Big) = \sum_{n=0}^{N} p_n A_n + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} A_m^*,$$

N N对于所有 $\sum p_n e^{in\theta} + \sum \overline{q_m} e^{-im\theta} \in \mathcal{S}.$，现在只需证明映射 $\varphi: \mathcal{S} \to \mathcal{B}($
$\mathcal{H})$ 是一个$n=0$ $m=0$正映射。现在，我们观察到如下事实

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{N} p_n e^{in\theta}\Big) P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta}) d\theta &= \sum_{n=0}^{N} p_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{N} p_n r^n A_n. \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} e^{-im\theta}\Big) P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} r^m A_m^*.$$

综合以上结果，最终得到

$$\begin{aligned} &\varphi\big(\sum_{n=0}^{N} p_n e^{in\theta} + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} e^{-im\theta}\big) \\ &\quad = \sum_{n=0}^{N} p_n A_n + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} A_m^* \qquad (21) \\ &\quad = \lim_{r \to 1-} \big(\sum_{n=0}^{N} p_n r^n A_n + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} r^m A_m^*\big) \\ &\quad = \lim_{r \to 1-} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\sum_{n=0}^{N} p_n e^{in\theta} + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} e^{-im\theta}\big) P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta}) d\theta\Big). \qquad (22) \end{aligned}$$

注意，对于所有 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 和 $0 \leq r < 1$，我们有 $P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta}) \geq 0$. 这意味着，每当
N $N\sum p_n e^{in\theta} + \sum \overline{q_m} e^{-im\theta} \geq 0$ 时，我们有$n=0$ $m=0$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{N} p_n e^{in\theta} + \sum_{m=0}^{N} \overline{q_m} e^{-im\theta}\Big) P_{\mathbf{A}}(re^{i\theta})\, d\theta \geq 0, \text{ for evey } 0 \leq r < 1.$$

因此 φ 根据公式（21）是正的。证明完毕。 □

我们将在下一节更详细地介绍定理 3.1 。

3.1. **具体酉扩张**。 设 V是某个希尔伯特空间上的最小等距扩张$\mathcal{K}$，对应于压缩算子序列 $\{A_n\}_{n\geq 0}$，定义在 $\mathcal{H}$. 特别地， $\mathcal{K} =$ 张成空间$\{V^n\mathcal{H}: \ n \geq 0\}$。于是由引理 2.5, $\overline{\mathcal{K}}$可分解为

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots,$$

whe关于 $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}$ ，并且相对于此分解，算子 V 具有如下分块形式 :

$$V=\begin{bmatrix} V_{00} & V_{01} & V_{02} & \cdots & V_{0n} & \cdots \\ V_{10} & V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} & \cdots \\ 0 & V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} & \cdots \\ 0 & 0 & V_{32} & \cdots & V_{3n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{23}$$

我们希望利用给定的序列 $\{A_n\}$. 构造 V_{ij}。回忆 $\mathcal{H}_{n]}=\mathrm{s}pan\{V^m h:\ 0\leq\overline{m\leq} n-1,$ $h\in\mathcal{H}\}$ 以及对于具有 $\mathcal{H}_{0]}=\mathcal{H}_0$.的 $n\geq 1$，有 $\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_{n]}\bigcap\mathcal{H}_{(n-1)]}^{\perp}$

我们尝试利用序列 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 和扩张性质来确定这些块。与自伴扩张的情形类似，我们在需要时假设所涉及算子的可逆性。由于 V 是矩序列 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 的一个等距扩张，我们有 $P_{\mathcal{H}}V^n\big|_{\mathcal{H}}=A_n$。换言之，对于 $n\geq 0.$，有 $(V^n)_{00}=A_n$。现在计算 V 的第一列。显然，$V_{00}=A_1$，且由于 V 是一个等距算子，我们得到

$$I=(V^*V)_{00}=V_{00}^*V_{00}+V_{10}^*V_{10}=A_1^*A_1+V_{10}^*V_{10}.$$

由于 A_1 是一个压缩算子，可以选择使得 $V_{10}=(I-A_1^*A_1)^{1/2}$。 V 的第一行由如下递归关系给出：对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} A_n&=(V^n)_{00}\\ &=\sum_{0\leq r_1,r_2,\ldots,r_{(n-1)}\leq n-1} V_{0r_1}V_{r_1r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}\\ &=\sum_{0\leq r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\leq n-1\ \&\ r_1\neq n-1} V_{0r_1}V_{r_1r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}\\ &\quad+\sum_{0\leq r_2,\cdots,r_{n-1}\leq n-1} V_{0(n-1)}V_{(n-1)r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}. \end{aligned}$$

由于 $V_{ij}=0$ 只要 $i>j+1$，这意味着

$$\begin{aligned} &\sum_{0\leq r_2,\cdots,r_{n-1}\leq n-1} V_{0(n-1)}V_{(n-1)r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}\\ &\qquad\qquad=V_{0(n-1)}V_{(n-1)(n-2)}V_{(n-2)(n-3)}\cdots V_{10}. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} V_{0n}=&\Big[A_n-\sum_{0\leq r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\leq n-1\ \&\ r_1\neq n-1} V_{0r_1}V_{r_1r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}\Big]\\ &\Big(V_{(n-1)(n-2)}V_{(n-2)(n-3)}\cdots V_{10}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

接下来，我们利用 V 的等距性质，求出 V的 n^{th} 列的表达式。对于固定的 $n\in\mathbb{N}$，假设前（$n-1$）列已知，则通过计算第一列与 n^{th} 列的内积（该内积为零），可得 V_{1n}。也就是说，$V_{00}^*V_{0n}+V_{10}^*V_{1n}=0$，因此

$$V_{1n}=-(I-A_1^*A_1)^{-1/2}A_1^*V_{0n}.$$

事实上， V_{kn} 对于 $0<k\leq n$，其值由（$k-1$）th 列与 $n^{\text{th}}{}_k$列的内积给出，而该内积同样为零。也就是说，$\sum\limits_{i=0} V_{i\,(k-1)}^*V_{in}=0.$ 等价地，

$$V_{k(k-1)}^*V_{kn}+\sum_{i=0}^{k-1}V_{i(k-1)}^*V_{in}=0.$$

这意味着

$$V_{kn} = -\big(V^*_{k(k-1)}\big)^{-1}\sum_{i=0}^{k-1} V^*_{i(k-1)}V_{in}.$$

对于 $k = n+1$，我们有 $\sum_{i=0}^{n+1} V^*_{in}V_{in} = I$，等价地，$V^*_{(n+1)n}V_{(n+1)n} + \sum_{i=0}^{n} V^*_{in}V_{in} = I$. 这意味着

$$V^*_{(n+1)n}V_{(n+1)n} = I - \sum_{i=0}^{n} V^*_{in}V_{in}.$$

可以选取使得

$$V_{(n+1)n} = \big[I - \sum_{i=0}^{n} V^*_{in}V_{in}\big]^{1/2}.$$

因此，递推关系为

$$V_{00} = A_1,\ V_{10} = (I - A_1^*A_1)^{1/2},$$

$$V_{0n} = \Big[A_n - \sum_{0\le r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\le n-1 \ \&\ r_1\neq n-1} V_{0r_1}V_{r_1r_2}\cdots V_{r_{(n-1)}0}\Big]$$
$$\Big(V_{(n-1)(n-2)}V_{(n-2)(n-3)}\cdots V_{10}\Big)^{-1}.$$

and

$$V_{kn} = \begin{cases} -\big(V^*_{k(k-1)}\big)^{-1}\sum_{i=0}^{k-1} V^*_{i(k-1)}V_{in} & \text{if } 0 < k \le n \\ \Big[I - \sum_{i=0}^{n} V^*_{in}V_{in}\Big]^{1/2} & \text{if } k = n+1 \end{cases}$$

对于 $n > 0$.

以上计算得出如下结果。

定理 3.2. 设 $\{A_n\}_{n\ge 0}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的压缩算子序列，且 $A_0 = I$ 存在等距扩张。若上述递推关系中出现的逆算子均有定义且为有界算子，则这些公式给出了一个最小等距扩张，其块如上所述。

现在我们来看酉扩张。

定理 3.3。 设 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 上的一个酉算子，且 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$的闭子空间，满足 $\mathcal{K}=$张成空间$\{U^n h:\ \ h\in\mathcal{H},\ \ n\in\mathbb{Z}\}$. 则 $\mathcal{K}$ 可分解为

$$\mathcal{K} = \cdots\oplus\mathcal{H}_{-1}\oplus\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\cdots,$$

其中 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$，因此相对于此分解，$U$ 具有如下形式:

$$U = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline \cdots & 0 & 0 & U_{0(-1)} & U_{00} & U_{01} & U_{02} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & U_{1(-1)} & U_{10} & U_{11} & U_{12} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & U_{2(-1)} & 0 & U_{21} & U_{22} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & U_{3(-1)} & 0 & 0 & U_{32} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right].$$

证明。 取 $\mathcal{H}_{0]} = \mathcal{H}_0$，并令 $\mathcal{H}_{n]} =$张成空间$\{U^m h : \ 0 \le m \le n-1、\ h \in \mathcal{H}\}$和 $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n]} \bigcap \mathcal{H}_{(n-1)]}^{\perp}$，其中 $n \ge 1$. $\mathcal{K}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathcal{H}$，且 $\mathcal{K}_- = \mathcal{K}_+^{\perp}$.。显然， $\mathcal{K}_+ = \oplus_{n\ge 0}\mathcal{H}_n$且 $U(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{(n+1)]}$.。这意味着分块矩阵的第 n 列对所有 $n \ge 0$. 都满足所需性质。注意， $U^*(\mathcal{K}_-) \subseteq \mathcal{K}_-$，因为 $\mathcal{K}_- = \mathcal{K}_+^{\perp}$，且 $U(\mathcal{K}_+) \subseteq \mathcal{K}_+$.。我们断言

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U^{*n}(\mathcal{K}_-) = \{0\}.$$

令 $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U^{*n}(\mathcal{K}_-) = \{0\}$.令 $n \ge 0$，并且 $h \in \mathcal{H}$注意到 $x = U^{*n} x_n$对于某个 $x_n \in \mathcal{K}_-$.于是 $\langle x、\ U^{*n} h\rangle = \langle U^{*n} x_n、\ U^{*n} h\rangle = \langle x_n、\ h\rangle = 0$，且 $\langle x、\ U^m h\rangle = 0$对所有 $m \ge 0$.均成立。由此可得$x = 0$. 因此 $U^* : \ \mathcal{K}_- \to \mathcal{K}_-$ 是一个带有游荡子空间的移位算子

$$\mathcal{H}_{-1} := \mathcal{K}_- \ominus U^* \mathcal{K}_-.$$

因此， $\mathcal{K}_-$ 可以分解为

$$\mathcal{K}_{-1} = \cdots \oplus U^{*2}\mathcal{H}_{-1} \oplus U^* \mathcal{H}_{-1} \oplus \mathcal{H}_{-1}.$$

现在，只需证明 $U(\mathcal{H}_{-1}) \subseteq \mathcal{K}_+$. 考虑 $x \in \mathcal{H}_{-1}$，则对任意 $y \in \mathcal{K}_-$，我们有 $\langle Ux、\ y\rangle = \langle x、\ U^* y\rangle = 0$，因为 $x \perp U^* \mathcal{K}_-$.证明完毕。□

4. $\mathcal{C}_A$-CLASS OPERATORS

受 Sz.-Nagy 关于压缩算子的膨胀定理启发，Berger 和Stampfli [11], 获得了如下有趣的定理。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则数值半径 $w(T) \le 1$当且仅当算子序列 $\{\frac{1}{2}T^n,\ n \ge 1\}$存在一个酉扩张。由此引出了如下定义。固定 $\rho > 0$。则有界算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为属于 $\mathcal{C}_\rho$-类，如果存在某个希尔伯特空间 U 上的酉算子 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ 使得

$$\frac{T^n}{\rho} = P_{\mathcal{H}} U^n\big|_{\mathcal{H}}$$

对所有 $n \ge 1$ （见 [32]第43页）。借助 Sz.-Nagy 的膨胀定理， $\mathcal{C}_1$-类恰好是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中所有压缩算子的集合。类似地，由Berger-Stampfli 定理 [11] 可知，$\mathcal{C}_2$-类是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中所有数值半径小于或等于1的算子的集合。现在我们回顾[32] 中的一个定理，该定理刻画了 $\mathcal{C}_\rho$-类的有界线性算子，其中$\rho > 0$.

The定理 4.1. [32, 定理 11。1] 令 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\rho > 0$. 那么 $T \in \mathcal{C}_\rho$ 当且仅当 f

$$\Big(\frac{2}{\rho} - 1\Big)\|zTh\|^2 + 2\Big(1 - \frac{1}{\rho}\Big) Re\big(\langle zTh,\ h\rangle\big) \ \le \ \|h\|^2, \ for\ all\ h \in \mathcal{H},\ |z| \le 1.$$

此外，它等价于满足以下条件：

$$(\rho - 2)\big\|(I - zT)h\big\|^2 + 2Re\big(\langle (I - zT)h,\ h\rangle\big) \ge 0, \tag{24}$$

对所有 $h \in \mathcal{H},\ |z| \le 1$.

M. A. Dritschel、H. J. Woerdeman [29] 为 $\mathcal{C}_2$-类建立了模型理论。过去几十年来，人们对 $\mathcal{C}_\rho$-类算子进行了广泛研究。关于其中一些研究，请参见 [5, 10, 11, 28, 21, 22, 31] 及其中的参考文献。H. Langer 以自然的方式推广了这一概念，并引入了 $\mathcal{C}_A$-类。令 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为正可逆算子。若算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足算子值序列 $\{A_n\}_{n\ge 1}$，其中

$$A_n := A^{-\frac{1}{2}} T^n A^{-\frac{1}{2}}, \ \text{for } n \ge 1, \tag{25}$$

存在酉扩张。我们能找到的关于这一概念的最早参考文献是 [32]。

定理 4.2。 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个正可逆算子，算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。 则以下条件等价：

(i) $T \in \mathcal{C}_A$-类。

(ii) 对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{C}$，我们有

$$\sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k \zeta_A(k-\ell) \geq 0 \text{ for each } N \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

其中，$\zeta_A(n)$ 定义如下：

$$\zeta_A(n) := \begin{cases} A^{-\frac{1}{2}} T^n A^{-\frac{1}{2}} & \text{if } n > 0; \\ I & \text{if } n = 0; \\ A^{-\frac{1}{2}} T^{*-n} A^{-\frac{1}{2}} & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

(iii) T 满足以下条件：

$$(I - zT)^{-1} + (I - \overline{z}T^*)^{-1} + A - 2I \geq 0 \text{ for all } |z| < 1.$$

(iv) T 满足以下条件：

$$\langle (I - zT)h, (A - 2I)(I - zT)h \rangle + 2\mathrm{Re}\langle h, (I - zT)h \rangle \geq 0 \text{ for all } |z| < 1, h \in \mathcal{H}. \tag{27}$$

证明。 根据定理 3.1，立即可见，(i) 与 (ii) 等价。下面，我们证明其他蕴含关系。

(i) $\Longrightarrow$ (iii)：令 $\mathbf{A} = \{A_n\}_{n \geq 0}$，其中 $A_n = A^{-\frac{1}{2}} T^n A^{-\frac{1}{2}}$ 对于 $n \geq 1$ 以及 $A_0 = I$. 假设 $T \in \mathcal{C}_A$. 则根据定理 3.1， $P_{\mathbf{A}}(\overline{z}) \geq 0$ 对于所有 $z \in \mathbb{D}$. 换言之，

$$(I + zA^{-\frac{1}{2}} T A^{-\frac{1}{2}} + z^2 A^{-\frac{1}{2}} T^2 A^{-\frac{1}{2}} + \ldots \infty) + (I + \overline{z} A^{-\frac{1}{2}} T^* A^{-\frac{1}{2}} + \overline{z}^2 A^{-\frac{1}{2}} T^{*2} A^{-\frac{1}{2}} + \ldots \infty) - I \geq 0.$$

由此可得

$$(I - zT)^{-1} + (I - \overline{z}T^*)^{-1} + A - 2I \geq 0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)：令 $h \in \mathcal{H}$，则对所有 $z \in \mathbb{D}$，有

$$\left\langle (I - zT)h, \left((I - zT)^{-1} + (I - \overline{z}T^*)^{-1}\right)(I - zT)h \right\rangle + \left\langle (I - zT), (A - 2I)(I - zT)h \right\rangle \geq 0.$$

注意到

$$\left\langle (I - zT)h, \left((I - zT)^{-1} + (I - \overline{z}T^*)^{-1}\right)(I - zT)h \right\rangle = 2Re\langle (I - zT)h, h \rangle.$$

这意味着

$$\langle (I - zT)h, (A - 2I)(I - zT)h \rangle + 2\mathrm{Re}\langle (I - zT)h, h \rangle \geq 0 \text{ for all } |z| < 1, h \in \mathcal{H}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i)：假设

$$\langle (I - zT)h, (A - 2I)(I - zT)h \rangle + 2\mathrm{Re}\langle (I - zT)h, h \rangle \geq 0 \text{ for all } |z| < 1, h \in \mathcal{H}.$$

然后通过逆向计算，我们可以证明

$$P_{\mathbf{A}}(\overline{z}) \geq 0$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$. 因此，由定理3.1， $T \in \mathcal{C}_A$. □

可以看出， [47] 中的定理 2.15 在假设(i) 和(iv) 成立的条件下，得到了它们的等价性，其中 A满足 $mI \leq A \leq MI$，对某个 m， $M > 0$。然而，我们基于泊松核思想的证明与 [47]中给出的证明不同。此外，定理4.2保证 T 的谱位于闭单位圆盘内。

命题 4.3. 设 $T \in \mathcal{C}_A$. 则

$$\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}},$$

其中 $\sigma(T)$ 表示 T 的谱，而 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$. 的开单位圆盘

证明。 假设 $T \in \mathcal{C}_A$ 那么 T 满足定理 27 中的方程（4.2）。假设$\sigma(T) \not\subset \overline{\mathbb{D}}$。那么存在一个 $z_0 \in \mathbb{C}$使得 $|z_0| < 1$并且 $\frac{1}{z_0} \in \sigma_{app}(T)$ 近似的

T 的点谱。因此存在一个序列 $\{h_n\}$，属于 $\mathcal{H}$，且满足 $\|h_n\| = 1$，使得 t

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{z_0}I - T)h_n = 0.$$

立即可得

$$\lim_{n\to\infty}(I - z_0T)h_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\|z_0Th_n\| = 1,\ \text{and}\ \lim_{n\to\infty}\langle z_0Th_n, h_n\rangle = 1.$$

取 $r > 0$ 足够小，使得 $r|z_0| + |z_0| < 1.$。于是，对于所有 h_n，由假设可得

$$\begin{aligned}
0 \leq &\big\langle (I - z_0T - rz_0T)h_n, (A - 2I)(I - z_0T - rz_0T)h_n\big\rangle \\
&+ 2\mathrm{Re}\big\langle (I - z_0T - rz_0T)h_n, h_n\big\rangle \\
\leq &\|A - 2I\|\big\langle (I - z_0T - rz_0T)h_n, (I - z_0T - rz_0T)h_n\big\rangle \\
&+ 2\mathrm{Re}\big\langle (I - z_0T - rz_0T)h_n, h_n\big\rangle \\
\leq &\|A - 2I\|\|(I - z_0T - rz_0T)h_n\|^2 + 2\mathrm{Re}\big\langle (I - z_0T - rz_0T)h_n, h_n\big\rangle \\
\leq &\|A - 2I\|\|(I - z_0T)h_n - rz_0Th_n\|^2 \\
&+ 2\mathrm{Re}\big\langle (I - z_0T)h_n, h_n\big\rangle - 2r\mathrm{Re}\big\langle z_0Th_n, h_n\big\rangle
\end{aligned}$$

令 n 趋于无穷大，取极限可得

$$0 \leq \|A - 2I\|r^2 - 2r.$$

这意味着

$$2 \leq \|A - 2I\|r$$

当 $r > 0.$ 足够小时，这与 $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}.$ 矛盾 □

在下一个结果中，我们运用标准方法，给出一个关于正映射的另一条充要判据。

定理 4.4。设 A，$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 其中 A 是一个正可逆算子，并设 $\mathcal{S} \subseteq C(\mathbb{T})$ 是由下式定义的算子系统

$$\mathcal{S} = \big\{p(e^{i\theta}) + \overline{q(e^{i\theta})} :\ p, q\ are\ polynomials\big\}.$$

那么，由下式定义的映射 $\varphi_A :\ \mathcal{S} \subseteq C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\varphi_A\big(p(e^{i\theta}) + \overline{q(e^{i\theta})}\big) := p(T) + q(T)^* + (A - I)\big(p(0) + \overline{q(0)}\big)I.$$

当且仅当算子 T 属于 $\mathcal{C}_A$-类时，它是正映射。

$_N$证明。设 $T \in \mathcal{C}_A.$ 现在，设 $f(e^{i\theta}) = \sum a_ne^{in\theta} \in \mathcal{S}$ 严格为正。于是应用$_{n=-N}$ Riesz-Fejer 定理，我们可知 $f(e^{i\theta}) = \sum \overline{c_\ell}c_ke^{i(k-\ell)\theta}$ 对某些 $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{C}.$ 这$_{0\leq\ell,\ k\leq N}$ 意味着

$$\begin{aligned}
\varphi_A(f(e^{i\theta})) &= \sum_{\ell=0}^{N}|c_\ell|^2 + \sum_{0\leq\ell\neq k\leq N}\overline{c_\ell}c_kT_{(k-\ell)} + (A - I)\sum_{\ell=0}^{N}|c_\ell|^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{N}|c_\ell|^2A + \sum_{0\leq l\neq k\leq N}\overline{c_\ell}c_kT_{(k-\ell)} \\
&= A^{\frac{1}{2}}\big(\sum_{\ell=0}^{N}|c_\ell|^2I + \sum_{0\leq\ell\neq k\leq N}\overline{c_\ell}c_kA^{-\frac{1}{2}}T_{(k-\ell)}A^{-\frac{1}{2}}\big)A^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\ell,k=0}^{N}\overline{c_\ell}c_k\zeta_A(k-\ell)\Big)A^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$_N$由于 $T \in \mathcal{C}_A$，根据定理 4.2，我们有 $\sum \overline{c_\ell} c_k \zeta_A(k-\ell) \geq 0$. 因此 $\varphi_A(f(z)) \geq 0$ 只要$_{\ell, k=0} f(z)$ 就是 $\mathcal{S}$. 中的严格正元素。现在，设 $g \in \mathcal{S}$ 为正。于是，对任意 $\epsilon > 0.$， $g + \varepsilon \cdot 1$ 都严格为正。于是 $\varphi_A(g) + \varepsilon A = \varphi_A(g + \varepsilon \cdot 1) \geq 0$ 对所有 $\varepsilon > 0.$ 成立。取极限 $\epsilon \to 0$，得到 $\varphi_A(g) \geq 0.$ 因此映射 φ_A 是正的。

反过来，设 φ_A 是一个正映射。根据定理 4.2，只需证明

$$\sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k \zeta_A(k-\ell) \geq 0.$$

注意到

$$\sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k \zeta_A(k-l) = A^{-\frac{1}{2}} \varphi_A\Big(\sum_{0 \leq \ell,k \leq N} \overline{c_\ell} c_k e^{i(k-\ell)\theta} \Big) A^{-\frac{1}{2}}.$$

由于 φ_A 是正的，且 $\overline{c_\ell} c_k e^{i(k-\ell)\theta} \geq 0$，我们有

$$\sum_{\ell,k=0}^{N} \overline{c_\ell} c_k \zeta_A(k-l) \geq 0.$$

证明至此完成。 □

作为定理 4.4的直接应用，我们得到了 V. Istrăţescu [18] 的一个结果：若$0 \leq B \leq A$，且 A, B 均可逆，则 $\mathcal{C}_B \subseteq \mathcal{C}_A$.

定理 4.5。 设 A, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $TA = AT$. 则以下条件等价等价 *t:*

(1) $T \in \mathcal{C}_A$.(2) 对所有 $z \in \mathbb{D}$，以下条件成立：

$$A - (A-I)zT - (A-I)\overline{z}T^* + (A-2I)|z|^2 T^*T \geq 0.$$

(3) 对所有 $z \in \mathbb{D}$，以下条件成立：

$$|z|^2 T^*T \leq \big(A - (A-I)zT\big)^* \big(A - (A-I)zT\big).$$

证明。 (1) $\iff$ (2) 利用定理 4.2的 (iv)，我们注意到 $T \in \mathcal{C}_A$ 当且仅当 if

$$(I - zT)^*(A-2I)(I-zT) + (I-zT) + (I-zT)^* \geq 0$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$. 由于 $TA = AT$，结论立即成立。

(2) $\iff$ (3) 首先，我们观察以下计算。

$$\begin{aligned}
&A^{-\frac{1}{2}} \Big(A - (A-I)zT - (A-I)\overline{z}T^* + (A-2I)|z|^2 T^*T \Big) A^{-\frac{1}{2}} \\
=&I - A^{-1}(A-I)zT - A^{-1}(A-1)\overline{z}T^* + A^{-1}(A-2I)|z|^2 T^*T \\
=&\Big(I - A^{-1}(A-I)zT \Big)^* \Big(I - A^{-1}(A-I)zT \Big) - A^{-2}|z|^2 T^*T \\
=&A^{-1} \Big(A - (A-I)zT \Big)^* \Big(A - (A-I)zT \Big) A^{-1} - A^{-2}|z|^2 T^*T \\
=&A^{-1} \Big(\big(A - (A-I)zT \big)^* \big(A - (A-I)zT \big) - |z|^2 T^*T \Big) A^{-1}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$A - (A-I)zT - (A-I)\overline{z}T^* + (A-2I)|z|^2 T^*T \geq 0 \text{ for all } z \in \mathbb{D}.$$

当且仅当

$$|z|^2 T^*T \leq \big(A - (A-I)zT \big)^* \big(A - (A-I)zT \big) \text{ for all } z \in \mathbb{D}.$$

□

注 4.6. 由定理*4.5*，我们可以得到一个重要的刻画（详见 [29] ），即数值域压缩算子满足 $T \in \mathcal{C}_2$ 当且仅当

$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}T) \leq I, \ \textit{for all}\, \theta.$$

5. $\mathcal{C}_A$类算子的一个子类的具体等距扩张和酉扩张

设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$为一个正可逆算子。回顾一下，算子 T 属于 $\mathcal{C}_A$类，意味着由下式给出的序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$

$$A_n := A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}, n \geq 1 \tag{28}$$

存在酉扩张。一般而言，我们不知道如何写出$\mathcal{C}_A$类算子的扩张。在这里，我们针对一个子类给出具体构造。

首先，我们为 $\{A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}\}_{n\geq 1}$写出一个等距扩张。设 $A, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个交换对，满足 $A \geq 0$ 且 $\|C\| \leq 1$. 那么 $I + A(A-2I)C^*C \geq 0$ 作为 C 是一个压缩算子。假设

$$I + A(A-2I)C^*C = I - C^*C + (A-I)^2C^*C$$

可逆，并取

$$T = A[I + A(A-2I)C^*C]^{-\frac{1}{2}}(I - C^*C)^{\frac{1}{2}}C.$$

在这种情况下，我们将看到 T 属于 $\mathcal{C}_A$类，并且可以明确写出 T的等距扩张和酉扩张。

考虑上述的 A、C。引入一些记号将很方便。取

$$B = (I + A(A-2I)C^*C)^{-\frac{1}{2}}, D = (I - C^*C)^{\frac{1}{2}}, D_* = (I - CC^*)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，

$$T = ABDC.$$

现在取如下由下式定义的有界算子序列 $\{T_n\}_{n\geq 0}$

$$T_0 = I, \text{ and } T_n = A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}} = A^{n-1}(BDC)^n \text{ for all } n \geq 1. \tag{29}$$

我们的目标是证明序列 $\{T_n\}_{n\geq 0}$ 存在等距扩张。换言之，在某个希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ 上存在一个等距算子 V，使得

$$T_n = P_{\mathcal{H}}V^n|_{\mathcal{H}} \text{ for all } n \geq 0.$$

此外，我们希望找到一个具有显式分块结构的 V。

我们注意到，由于 A 为正算子且与 C 交换，因此它也与 C^* 交换。由此可得，A 也分别与 B、D、D_* 交换。因此，我们得到 $BD = DB$。另一方面，我们看到

$$D_*^2C = (I - CC^*)C = C(I - C^*C) = CD^2.$$

由于 D 和 D_* 都是正算子，$D_*C = CD$. 此外，

$$\begin{aligned} &B^2\big(D^2 + (A-I)^2C^*C\big) \\ &\quad = \big(I + A(A-2I)C^*C\big)^{-1}\big(I - C^*C + A(A-I)C^*C - (A-I)C^*C\big) \\ &\quad = \big(I + A(A-2I)C^*C\big)^{-1}\big(I - A(A-I)C^*C - AC^*C\big) \\ &\quad = (I + A(A-2I)C^*C)^{-1}(I + A(A-2I)C^*C) \\ &\quad = I. \end{aligned}$$

因此，

$$(BD)^2 = I - B^2(A-I)^2C^*C. \tag{30}$$

我们首先在 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. 上得到一个部分等距扩张

引理 5.1。 在 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上定义 R：

$$R=\begin{bmatrix} BDC & BDD_* \\ (A-I)CBC & (A-I)CBD_* \end{bmatrix} \tag{31}$$

则 R 是一个偏等距算子，且

$$T_n = P_{\mathcal{H}}R^nP_{\mathcal{H}} \text{ for all } n\geq 1.$$

证明。 利用上面得到的交换关系，通过直接计算可知

$$R^*R=\begin{bmatrix} C^*C & C^*D_* \\ D_*C & D_*^2 \end{bmatrix}.$$

显然， R^*R 是一个自伴算子，且

$$\begin{aligned}(R^*R)^2 &= \begin{bmatrix} C^*C & C^*D_* \\ D_*C & D_*^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^*C & C^*D_* \\ D_*C & D_*^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (C^*C)^2+C^*D_*^2C & C^*CC^*D_*+C^*D_*D_*^2 \\ D_*CC^*C+D_*^2D_*C & D_*CC^*D_*+D_*^4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^*C+C^*(1-CC^*)C & C^*CC^*D_*+C^*(1-CC^*)D_* \\ D_*CC^*C+D_*(1-CC^*)C & D_*^2CC^*+D_*^2(1-CC^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^*C & C^*D_* \\ D_*C & D_*^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此， R^*R 是一个投影，而 R 是一个偏等距算子。接下来，我们按如下方式计算 R^2：

$$\begin{aligned}R^2 &= \begin{bmatrix} BDC & BDD_* \\ (A-1)CBC & (A-1)CBD_* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} BDC & BDD_* \\ (A-1)CBC & (A-1)CBD_* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (BDC)^2+(A-1)BDD_*CBC & * \\ (A-1)CBCBDC+(A-1)^2CBD_*CBC & * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (BDC)^2+(A-1)BDCDCBC & * \\ (A-1)CBCBDC+(A-1)^2CBCDBC & * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(BDC)^2 & * \\ A(A-1)CBCBDC & * \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此， $P_{\mathcal{H}}R^2|P_{\mathcal{H}} = A(BDC)^2 = A^{-\frac{1}{2}}T^2A^{-\frac{1}{2}}$.故由归纳法，我们得出

$$P_{\mathcal{H}}R^n|_{\mathcal{H}} = A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}.$$

□

令 $D_R=(1-R^*R)^{\frac{1}{2}}$ 为与该偏等距算子相关联的缺陷算子。由于$(1-R^*R)$是一个投影，$(1-R^*R)^{\frac{1}{2}}=(1-R^*R)$。因此， $D_R=\begin{bmatrix} D^2 & -C^*D_* \\ -D_*C & CC^* \end{bmatrix}$.

注 5.2. 利用 R 的 Schäffer 构造，以及命题 *5.1*，我们可以给出与 $\{A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}\}$ 相关的$\mathcal{C}_A$-类矩序列的等距扩张的直接显式形式。设 $\tilde{V}$： $\ell^2(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})\to\ell^2(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 是由下式给出的等距算子

$$\tilde{V}=\left[\begin{array}{c|cccc} R & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_R & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right],$$

$_{Rec}$利用 R 的 *Schäffer* 构造，显然 $P_{\mathcal{H}}\tilde{V}^n|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}R^n|_{\mathcal{H}} = A^{-\frac{1}{2}}T^nA^{-\frac{1}{2}}$.

下面给出一种更直观简洁的等距扩张构造方法。

定理 5.3。 取 $\mathcal{K}=\mathcal{H}^{\oplus 3}\oplus\ell^2(\mathcal{H})$。 考虑定义在 $\mathcal{K}$ 上的 V，使其满足

$$V=\left[\begin{array}{ccc|cccc} BDC & BDD_* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (A-I)CBC & (A-I)CBD_* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D & -C^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right].$$

那么， V 是 $\{A_n\}_{n\geq 0}$.的等距扩张

证明。 扩张性质由引理 5.1 得出。只要注意到 V，等距性质显然成立

$$D_R=(I-R^*R)=\left[\begin{array}{c} D \\ -C \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} D & -C^* \end{array}\right].$$

□

上一个定理并未断言极小性。不过，定理 5.3 比 备注5.2 更进一步，能够找到最小扩张。为了得到最小等距扩张，我们需要确定最小扩张空间 $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n\mathcal{H}$. 下面的命题将利用定理 5.3 来完成这一点。

命题 5.4。 设 V 是定理 5.3中定义的最小等距扩张。那么最小扩张空间 $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n\mathcal{H}$ 具有如下形式

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n\mathcal{H}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n,$$

其中 $\mathcal{H}_0:=\mathcal{H}$， $\mathcal{H}_1:=V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}$. 此外，

$$\mathcal{H}_1=\{(0\oplus(A-I)CBCh\oplus Dh\oplus\cdots):h\in\mathcal{H}\}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n&:=V^n\mathcal{H}\ominus\bigvee_{m=0}^{n-1}V^m\mathcal{H}\\&=\Big\{(0\oplus(n\ \ copies\ )\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\cdots):h\in\mathcal{H}\Big\}\end{aligned}$$

对于 $n\geq 2$，其中 P 是到 $\ker(I-A)BDC$.的投影

证明。 首先注意到 $\mathcal{H}\bigvee V\mathcal{H}=\mathcal{H}\oplus(V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H})$。设 $h\in\mathcal{H}$，则可观察到

$$\begin{aligned}Vh&=\big(BDCh\oplus(A-I)CBCh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big),\\V^2h&=\Big(A(BDC)^2h\oplus A(A-I)CBCBDCh\oplus DBDCh-(A-I)C^*CBCh\\&\quad\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\Big).\end{aligned}$$

于是显然可知

$$V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}=\{(0\oplus(A-I)CBCh\oplus Dh\oplus 0\oplus 0\oplus\cdots):h\in\mathcal{H}\}.$$

接下来，我们将求出 $V^2\mathcal{H}\ominus(\mathcal{H}\bigvee V\mathcal{H})$。首先，我们将 V^2h 写成

$$\begin{aligned}V^2h&=\big(A(BDC)^2h\oplus 0\oplus\cdots\big)+\big(0\oplus(A-I)CBC(ABDCh)\\&\quad\oplus DABDCh\oplus 0\oplus\cdots\big)+\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BCh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big).\end{aligned}$$

显然，第一项和第二项分别属于 $\mathcal{H}$ 和 $V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}$ 。我们想要理解这个等式的最后一项。我们断言

$$V^2\mathcal{H}\ominus(\mathcal{H}\vee V\mathcal{H})=\big\{\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\}.$$

注意到

$$\big\langle\big(0\oplus(A-I)CBCg\oplus Dg\oplus 0\oplus 0\oplus\cdots\big),\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big)\big\rangle=0$$

作为 $(I-A)BDCPh=0$. 因此，我们有

$$\big\{\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\}\subseteq V^2\mathcal{H}\ominus(\mathcal{H}\vee V\mathcal{H}).$$

现在，只需证明

$$\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BC(I-P)h\oplus 0\oplus\cdots\big)\in V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}$$

对所有 $h\in\mathcal{H}$. 。为此，设

$$\Big\langle\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BC(I-P)h\oplus 0\oplus\cdots\big),\big(0\oplus(A-I)CBCg\oplus Dg\oplus 0\oplus\cdots\big)\Big\rangle=0,\tag{32}$$

对所有 $g\in\mathcal{H}$. 。这意味着对所有 $g\in\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}0&=\big\langle(I-A)BC(I-P)h,Dg\big\rangle\\&=\big\langle(I-A)BDC(I-P)h,g\big\rangle\\&=\big\langle(I-A)BDCh,g\big\rangle,\end{aligned}$$

作为 $(I-A)BDC(I-P)h=0$. 由此可得

$$(I-A)BDCh=0\text{ and }h\in\mathrm{ran}P.$$

因此，我们有

$$\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BC(I-P)h\oplus 0\oplus\cdots\big)=0$$

在式（32）所定义的条件下。因此，我们得到

$$\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BC(I-P)h\oplus 0\oplus\cdots\big)\in V\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}$$

对于所有 $h\in\mathcal{H}$. 因此，我们有

$$\begin{aligned}&\big\{\big(0\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\}\\=&V^2\mathcal{H}\ominus(\mathcal{H}\vee V\mathcal{H}).\end{aligned}$$

现在很容易看出

$$\begin{aligned}&\big\{\big(0\oplus 0\oplus 0\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\}\\=&V^3\mathcal{H}\ominus(\mathcal{H}\vee V\mathcal{H}\vee V^2\mathcal{H}).\end{aligned}$$

利用归纳法，我们可以证明

$$\begin{aligned}&\big\{\big(0\oplus(n\text{ copies })\oplus(I-A)BCPh\oplus Dh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\}\\=&V^n\mathcal{H}\ominus(\bigvee_{m=0}^{n-1}V^m\mathcal{H}).\end{aligned}$$

□

现在我们明确写出序列 $\{T_n\}_{n\geq 0}$. 的一个酉扩张

定理 5.5。 令 $\mathcal{K}=\ell^2(\mathcal{H})\oplus\mathcal{H}^{\oplus 3}\oplus\ell^2(\mathcal{H})$，则作用于 $\mathcal{K}$ 的 U 定义如下分块矩阵表示

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} \ddots & & & & & \\ & I & & & & \\ \hline & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -(A-I)BC^* & \mathbf{BDC} & BDD_* & 0 \\ & & B_*D_* & (A-I)CBC & (A-I)CBD_* & 0 \\ & & 0 & D & -C^* & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & I \\ & & & & & I \\ & & & & & \ddots \end{array}\right]. \tag{33}$$

其中，以粗体显示的 BDC 是 U， 的(00) 项，而 B_* 定义为

$$B_*=(I+A(A-2I)CC^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

则 U 是 $\{T_n\}_{n\geq 0}$. 的酉扩张

证明。 考虑由以下定义的分块算子矩阵 M：

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(A-I)BC^* & \mathbf{BDC} & BDD_* & 0 \\ B_*D_* & (A-I)CBC & (A-I)CBD_* & 0 \\ 0 & D & -C^* & 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

不难验证

$$M^*M=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ MM^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

这显然意味着 $U^*U=UU^*=I$.最后，我们得到了所需的结论

$$P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}}=P_{\mathcal{H}}M^n|_{\mathcal{H}}=T_n \text{ for all } n\geq 0.$$

证明至此完成。 □

正如前面所讨论的，酉扩张的最小扩张空间具有如下形式

$$\mathcal{K}=\bigvee_{n=-\infty}^{\infty}U^n\mathcal{H}.$$

最小扩张空间可写为

$$\mathcal{K}_+\bigvee\mathcal{K}^-=\mathcal{K},\ \text{where } \mathcal{K}_+=\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\mathcal{H},$$

$-\infty$以及 $\mathcal{K}^-=\bigvee U^n\mathcal{H}$. 由于 $U|_{\mathcal{K}_+}$ 是之前构造的等距算子 V，因此 $\mathcal{K}_+$$n=0$的分解显而易见。

注 5.6. $\mathcal{K}_-$ 可以分解为

$$\mathcal{K}_-=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_{-n}$$

$n-1$其中 $\mathcal{H}_{-1}:=U^*\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}$， $\mathcal{H}_{-n}:=U^{*n}\mathcal{H}\ominus\bigvee U^{*m}\mathcal{H}$对于 $n\geq 2$. 此外，$m=0$

$$\mathcal{H}_{-1}:=\big\{\big(\cdots\oplus-(A-I)CBh\oplus\boldsymbol{0}\oplus D_*DBh\oplus 0\oplus\cdots\big):h\in\mathcal{H}\big\},$$

$$\mathcal{H}_{-n} := \Big\{ \big(\cdots \oplus -(A-I)CBCh \oplus B_*^{-\frac{1}{2}} DBQh \\ \oplus 0 \oplus (-n+2)\ times\ \oplus \boldsymbol{0} \oplus \cdots \big) : h \in \mathcal{H} \Big\}$$

且 Q 是到 $\ker(A-1)B^{\frac{1}{2}}C^*DB$.上的投影

5.1. 特殊情形（$\mathcal{C}_\rho$-类）。当 A 为正标量 ρ时，对应于算子中的 $\mathcal{C}_\rho$-类。这一类非常丰富，且已得到广泛研究。然而，除了 $\rho = 2$之外，文献中尚未给出此类算子的等距扩张和酉扩张的显式块算子描述。当且仅当 $w(T) \leq 1$时，算子 T 属于 $\mathcal{C}_2$ 类，其中$w(T)$表示 T的数值域。T. Ando [6] 给出了此类的酉扩张，它与以下构造（取 $\rho = 2$）一致。我们回顾 Durzst [16]的结果：当且仅当 T 具有如下形式时， $T \in \mathcal{C}_\rho(\rho > 0)$:

$$T = \rho(1 + \rho(\rho-2)C^*C)^{-\frac{1}{2}} DC,$$

其中 $\rho > 0, C$是压缩算子，且 $D = (I - C^*C)^{\frac{1}{2}}$. 在此情形下，我们可以像上文那样写出等距扩张和酉扩张。我们注意到

$$B = (I + \rho(\rho-2)C^*C)^{-\frac{1}{2}}, B_* = (I + \rho(\rho-2)CC^*)^{-\frac{1}{2}}$$

and

$$T_n = \rho^{n-1}(BDC)^n = \frac{(\rho BDC)^n}{\rho} = \frac{T^n}{\rho}.$$

注 5.7。 此外，对于 $\rho = 2$，为 $B = B^* = I$ 的情形，算子 B, B^* 在 $\mathcal{C}_2$ 类的酉扩张和等距扩张中不起任何作用。

注 5.8。 引理 *5.1* 给出了一个关键观察。若 $T \in \mathcal{C}_\rho$，则 $\frac{T^{*n}}{\rho}$ 存在一个部分等距扩张。利用这一部分等距扩张，可以完全理解此类算子的扩张。值得注意的是，即使在 $\rho = 2$ 的情形下，这一观察此前也未曾为人所知。关于 $\rho = 2$ 的 *Ando*扩张定理，详情请参阅 [6] （另见 [29]）。

问题 5.9。 如何为 $\mathcal{C}_A$ 类的一般算子写出等距扩张和酉扩张的分块分解？

致谢。 第一作者获 SERB（印度）J C Bose Fellowship（编号 JBR/2021/000024）资助。第二作者获印度政府原子能部（DAE）的 NBHM 博士后奖学金资助（文件编号 0204/1(4)/2022/R&D-II/1198）。第三作者获 SERB（印度）的 Startup Research Grant 资助（文件编号 SRG/2022/001795）。作者还感谢印度统计研究所班加罗尔中心的统计数学部提供了优良的研究环境。第二作者还从与 Tirthankar Bhattacharyya 的多次深入讨论中获益匪浅。

我们衷心感谢匿名审稿人提供的宝贵建议，这些建议有助于改进本文的表述。

参考文献

[1] L. Accardi 和 Y. G. Lu，《与递增希尔伯特空间滤过及广义雅可比三对角关系相关的量子理论》，J. Stoch. Anal. **2** (2021)，第 1 期，文章编号 4，共 11 页。[2] A. Aharon，《单位圆盘上正测度的一个矩问题》，Pacific J. Math. **59** 2, 317 1975 325 ( )，第 – 期。[3] N. I. Akhiezer，《经典矩问题及分析中的若干相关问题》，N. Kemmer 译，Hafner Publishing Co.，纽约，(1965)。[4] T. Andô, C. K. Li，《算子半径与酉算子》，Oper. Matrices **4** (2010)，第 2 期，273–281。[5] T. Andô, K. Okubo，《与 $\mathcal{C}_\rho$ 类算子相关的常数》，Manuscripta Math.**16** (1975)，第 4 期，385–394。[6] T. Andô，《数值半径为一的算子结构》，Acta Sci. Math. (Szeged)，**34** (1973)，11–15。[7] T. Andô，《算子的截断矩问题》，Acta Sci. Math. (Szeged)，**31** (1970)，319–334。

[8] W. B. Arveson, C^*-代数的子代数，《数学学报》123 (1969)，141–224。[9] M. Bakonyi, D. Timotin, 有序群的交织提升定理，《泛函分析杂志》199 (2003)，第 2 期，411–426。[10] C. A. Berger, J. G. Stampfli，范数关系与斜扩张，Acta Sci. Math. (Szeged) 28 (1967)，191–195。[11] C. A. Berger, J.G. Stampfli，数值域映射定理，《美国数学杂志》89 (1967)，1047–1055。[12] B V Rajarama Bhat 和 K R Parthasarathy，量子概率中的广义谐振子，斯特拉斯堡概率研讨会 25，(1991) 39-51。[13] T. Bisgaard，正定算子序列，《美国数学会会刊》121 (1994)，第 4 期，1185–1191。[14] T. Carleman，关于矩问题，《巴黎科学院院报》174 (1922)。[15] P. L. Chebyshev，积分的极限值，Chelsea 出版公司，纽约 (1961)。[16] E. Durszt，$\mathcal{C}_\rho$类中算子的分解，Acta Sci. Math. (Szeged) 37 (1975)，第 3-4 期，195–199。[17] L. Grafakos，经典傅里叶分析，第二版，《数学研究生教材》第 249 卷，施普林格，纽约，(2008)。[18] V. Istrăţescu，关于希尔伯特空间中一类幂有界算子的注记，Acta Sci. Math. (Szeged) 29 (1968)，311–312。[19] F. Hausdorff，有限区间上的矩问题，《数学杂志》16 (1923)，220–248。[20] H. L. Hamburger，关于 Stieltjes 矩问题的一种推广，《数学年刊》82 (1920)，120–164；81 (1920)，第 2-4 期，235–319；82 (1921)，168–187。[21] John A. R. Holbrook，支配与酉 ρ-扩张相关的算子半径的不等式，《密歇根数学杂志》18 (1971)，149–159。[22] John A. R. Holbrook，关于 Sz. Nagy 和 Foias 的幂有界算子，Acta Sci. Math. (Szeged) 29 (1968)，299–310。[23] M. G. Kreĭn，P. L. Čebyšev 和 A. A. Markov 的思想在积分极限值理论中的应用及其进一步发展，《数学科学进展》(新系列) 6 (1951)；《美国数学会译丛》(2) 12 (1959)。[24] W. S. Li, D. Timotin，中心安藤扩张及相关正交性质，《泛函分析杂志》154 (1998)，第 1 期，1–16。[25] R. A. Martínez-Avendaño 和 P. Rosenthal，Hardy–Hilbert 空间上算子导论，《数学研究生教材》第 237 卷，施普林格，纽约，2007。[26] L. N. Luminiţa，算子相移在 L矩问题中的应用，《美国数学会会刊》123 (1995)，第 3 期，747–754。[27] A. A. Markov，代数连分数的若干应用。（学位论文），圣彼得堡 (1884)。[28] Dritschel, Michael A., McCullough, Scott, Woerdeman, Hugo J，ρ-压缩算子的模型理论，$\rho \leq 2$。《算子理论杂志》41 (1999)，第 2 期，321–350。[29] Dritschel, Michael A., Woerdeman, Hugo J.，数值半径单位球中的模型理论与线性极点，《美国数学会回忆录》129 (1997)，第 615 号。[30] R. Nevanlinna，有界函数的渐近展开与 Stieltjes 矩问题，《芬兰科学院年刊》A 18 (1922)。[31] B. Sz.-Nagy, C. Foias，关于希尔伯特空间中某些类的幂有界算子，Acta Sci. Math. (Szeged) 27 (1966)，17–25。[32] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kerchy，希尔伯特空间上算子的调和分析，第二版，施普林格，纽约 (2010)。[33] B. Sz.-Nagy，自伴算子的一个矩问题，Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 3 (1952)，285–293 (1953)。[34] P. Pietrzycki, J. Stochel，拟正规算子的亚正规 n 次根仍为拟正规算子，《泛函分析杂志》 **280** 2021 109001 ( ) V. I. Paulsen，完全有界映射与算子代数，[35]《剑桥高等数学研究》第 78 卷，剑桥大学出版社，剑桥，(2002)。[36] G. Popescu，多变量算子理论中的酉不变量，《美国数学会回忆录》200 (2009)，第 941 号。[37] G. Popescu，熵与多变量插值，《美国数学会回忆录》184 (2006)，第 868 号。[38] G. Popescu，非交换球上的双曲几何，《数学文献》14 (2009)，595–651。[39] K. Schmüdgen，矩问题，《数学研究生教材》第 277 卷，施普林格，Cham，2017。[40] M. Riesz，关于矩问题，第一篇论文。《数学、天文学与物理学档案》16 (1922)。[41] K. Schmdgen，紧半代数集上的 K-矩问题，《数学年刊》289 (1991)，第 2 期，203–206。[42] J. J. Schäffer，关于压缩算子的酉扩张，《美国数学会会刊》6 (1955)，322。[43] O. M. Shalit，扩张理论：导览，《扩张理论：导览》，载于：Bastos, M.A., Castro, L., Karlovich, A.Y. (编)，算子理论、泛函分析与应用。《算子理论：进展与应用》第 282 卷，比克豪泽 (2021)。[44] T. J. Stieltjes，连分数研究，《图卢兹数学科学学院年刊》(6) 4 (1995)。[45] W. F. Stinespring，C^*-代数上的正函数，《美国数学会会刊》6 (1955)，211–216。

[46] M. H. Stone，希尔伯特空间中的线性变换及其在分析中的应用，《美国数学会专题出版物》（第15卷），1932年。[47] Suen, Ching Yun， W_A 压缩算子，《正性》**2** （1998），第4期，301–310。[48] D. Timotin，多重压缩的正则膨胀与模型，《印第安纳大学数学杂志》**47** 2，671 1998 684 ( ), no. – 。[49] F.-H. Vasilescu，次正规性与矩问题，《Extracta Math.》**24** （2009），第2期，167。[50] F.-H. Vasilescu，谱测度与矩问题，《谱分析及其应用》，Theta 高等数学丛书，第2卷，Theta，布加勒斯特，2003年，第173-215页。[51] F.-H.Vasilescu，算子多重序列的矩问题，《数学分析与应用杂志》**219** 2，246 1998 259 ( ), no. - 。[52] F.-H. Vasilescu，算子值泊松核，《泛函分析杂志》**110** （1992），第1期，47–72。印度统计学院统计与数学单元，R. V. College Post，班加罗尔 560059，印度电子邮箱：bhat@isibang.ac.in 贝内特大学，Tech Zone 2，大诺伊达，北方邦 201310，印度电子邮箱：anindya.ghatak123@gmail.com 印度科学教育与研究学院（IISER）莫哈利分校数学科学系，SAS Nagar，Manauli Post，旁遮普邦 140306，印度电子邮箱：santhoshkp@iisermohali.ac.in