arXiv:2302.13882v1 [math.CV] 27 Feb 2023

二次曲面的求积

Bj¨orn Gustafsson[1]

2023年2月28日

摘要

我们系统地研究二次曲线的求积性质，即在边界由二次曲线构成的平面区域上对全纯函数进行积分。要全面理解这一问题，必须拓展传统的研究框架，允许区域为多层区域，换言之，允许它们实际上是黎曼球面的分歧覆盖曲面；此外，还要使用球面面积测度，而非欧几里得测度。

本文第一部分探讨实代数曲线的两种不同观点：按照传统观点，它们位于不可定向的实射影平面上；但若要研究它们在求积中的作用，就必须将它们映射到黎曼球面上。

主要结果包括澄清一项先前的定理（与 V. Tkachev 合作完成）：分歧覆盖映射产生具有所需求积性质的区域，当且仅当它可延拓为参数化黎曼曲面的双重曲面上的亚纯映射。论文的后半部分详细研究了边界由椭圆、双曲线、抛物线及其逆像构成的区域，重点讨论双曲线情形；其中一些结果似乎是新的。

主题分类： 14A25, 14H55, 30F10, 31A05, 51M15.

关键词：圆锥曲线、椭圆、双曲线、抛物线、求积域、实代数曲线、对称黎曼曲面、分歧覆盖映射。

[1]数学系，瑞典皇家理工学院，100 44 斯德哥尔摩 ，瑞典。电子邮箱：gbjorn@kth.se

目录

1 引言 2

2 亏格与黎曼–赫尔维茨公式 5

3 射影空间中的代数曲线 7
3.1 概述.7 3.2 射线表示.8

4 求积域 12
4.1 经典求积域.12 4.2 关于球面测度的求积域 16 4.3 留数考量.19 4.4 一个简单示例.23

5 椭圆 24
5.1 圆盘.24 5.2 真椭圆.25 5.3 求积数据.27

6 双曲线 30
6.1 概述.30 6.2 求积数据.32 6.3 物理平面中的求积恒等式.36 6.4 权重损失.37 6.5 非实系数和偶极子密度.38 6.6 总结.39

7 抛物线 40

8 通过二次曲线的反演得到的区域 42
8.1 双纽线，或诺伊曼卵形线.42 8.2 双纽线.45 8.3 心脏线.46

9 附录：定理 4.1 证明的一些计算细节 46

1 引言

这篇短文源于 Henrik Shahgholian 提出的一个问题：为什么平面上椭圆和抛物线的外部是零求积域，而双曲线的外部却不是？部分答案可以从

位势理论和偏微分方程的角度，在 Shahgholian 本人及其他数学家的论文中找到；不过在这里，我们将尝试从更具哲学意味的角度作答，借助我们所称的多层代数域，或求积黎曼曲面。

本文更侧重于实代数几何，而非偏微分方程，但这两个研究领域通过位势理论，尤其是求积域，彼此相连。论文标题稍有文字游戏之意：求积一词源自拉丁语名词“quadrature”，意为使形状成为正方形，指的是数值积分。将一个区域变成正方形，或将其划分为许多小正方形后，便可通过将所得正方形边长（平方）的二次方，读出每个正方形的面积。出于相关原因，“二次曲线”指由二次方程描述的曲线。“圆锥曲线”与之大致同义，但更偏重几何意义，即圆锥与平面的交线。本文的实际主题最终是对由二次代数曲线围成的区域上的全纯函数进行积分，这些曲线主要是椭圆、双曲线和抛物线。

圆锥曲线这一主题历史悠久，而位势理论的历史“仅”可追溯至牛顿引力理论（1687年）。不过，牛顿本人很早就认识到，圆锥曲线在引力理论中具有特殊作用。除了这些曲线在行星运动中的作用之外，还有这样一条定理：椭球形均质壳（椭圆形相似壳层）在其空腔内部产生的引力为零。这一定理由牛顿本人在三维情形下证明（至少部分证明），后来由 P.S. Laplace 和 J. Ivory 推广，参见 [30, 39],；尤其可参阅近期论文 [27]，其中包含丰富的几何方面内容。关于 James Ivory 的生平，参见 [8]。V. Arnold学派发表的若干论文，例如 [2, 3, 47, 4]，进一步给出了关于双曲面的结果；而 [37, 11, 14, 44, 12, 42, 28, 29, 6, 32]则阐述了零求积域与自由边界正则性理论之间的联系。

椭球壳层不会产生内部引力这一性质，可以从拉普拉斯生长过程（或 Hele-Shaw移动边界问题）的角度来理解；这一过程保持调和矩，并且与求积域有关。[46, 36, 21]列出了一些一般性资料。关于求积域理论的概述，请参阅 [20] 。 [34]研究了求积域的拓扑，部分内容与希尔伯特第十六问题有关。

本文系统研究了以二次曲线为边界的平面区域的求积性质，并在一定程度上探讨了这类区域的反演。我们通过

采用球面面积测度而非欧几里得面积测度，消除了外部区域面积无限所带来的困难。从整体上看，这并未改变求积域的类别，因此这种改变无关紧要；不过，有些计算会变得更加复杂。

与传统处理方式的另一点不同在于，我们允许域是“多层的”，即由某个一致化曲面到该域的分歧覆盖映射多次覆盖。后一曲面应当是某个对称的、或称“实”的“分割型”黎曼曲面的一半。这仅仅意味着该黎曼曲面（假设为紧的）具有一个反共形对合，并且去掉该对合的不动点后，曲面会变得不连通。

由此得到的多叶求积域的边界，或者用 Sakai [40], 的术语来说，求积黎曼曲面的边界，是代数曲线；而且本质上，所有代数曲线中有一半都以这种方式出现。因此，我们的许多论述都属于实代数几何的范畴。但这里出现了一种二分：实代数曲线的自然所在是实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ ，而势论方面的考量则更多发生在黎曼球面 $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$上。

从积极的角度看，这实际上让理论更加有趣、更加丰富，而且还有一些意想不到的结果。椭圆和抛物线的理论相当直接，而双曲线则无法在不涉及多层域以及 $\mathbb{RP}^2$ 与 $\mathbb{CP}^1$之间的二分的情况下加以讨论：在$\mathbb{RP}^2$ 中，双曲线是一条处处光滑的曲线（甚至在无穷远点处也是如此），按实代数几何的术语来说，它是一条“卵形曲线”。卵形曲线的内部是包含焦点的两部分，而外部则是中间区域；从拓扑上看，它是一个莫比乌斯带（请记住， $\mathbb{RP}^2$ 是不可定向的）。见图3。 $\mathbb{CP}^1$ 中相应的、具有势论意义的多层区域由包含焦点的其中一部分构成，该部分的重数为二，焦点为分支点；越过曲线后，区域以重数一延伸，直至曲线的另一部分。至于 $\mathbb{CP}^1$ ，双曲线在无穷远处有一个奇点；事实上，经过反演后，它会变成一条双纽线。

在对射影空间中的代数曲线进行初步讨论（部分内容通过相应的投影映射来阐述，见第2节和第3节）之后，我们在第4节转而介绍本研究框架下求积域的基本定义和一般性质。这一部分扩展并在一定程度上澄清了先前的处理方式 [23]。本文唯一的主要结果

是定理 4.1。其证明中的一些计算细节留待附录第 9 节处理。

在第 2–4 节讨论了这些一般问题之后，我们将在余下的第 5–8 节中系统地讨论二次曲线的各种特殊情形：椭圆、双曲线、抛物线，以及这些曲线的反演。这些章节在很大程度上以计算为主，但计算并不总是容易。其中一个主要结论是，双曲线确实是多叶求积域。若使用欧几里得面积测度而非球面测度，那么它们就是多叶零求积域

本文配有一些希望能有所帮助的图片，大多数是用“TikZ”绘制的。不过，这些图片并非计算上的精确结果，主要用于说明。

2 亏格与黎曼-赫尔维茨公式

对于次数为 d、亏格为 g 的平面代数曲线 $P(z,w) = 0$，亏格公式指出

$$\mathrm{g} + \text{number of singular points} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \tag{1}$$

该公式假设曲线是不可约的；此外，在我们的讨论中，曲线还将是实的，即当 $w = \bar{z}$ 时， $P(z,w)$ 为实值。坐标函数 z 和 w 可视为该紧黎曼曲面M 上的亚纯函数，该曲面将曲线一致化；因此，这些坐标函数也可视为从 M 到黎曼球面的分支覆盖映射。对于这样的映射，令 m 表示叶数，令 b 表示分支点数（一般来说， z 和 w 对应的数值会有所不同）。那么，黎曼-赫尔维茨公式指出

$$2m - \mathrm{b} = 2(1 - \mathrm{g}). \tag{2}$$

详情请参阅 [31, 15, 7, 13] 。

亏格公式与黎曼-赫尔维茨公式之间的一个根本区别是，严格来说，亏格公式指的是曲线在二维复射影空间中的完备化 $\mathbb{CP}^2$ （例如，必须计算该空间内的奇点）；从这个角度看，相应的实代数曲线 $P(z,\ \bar{z}) = 0$ 成为

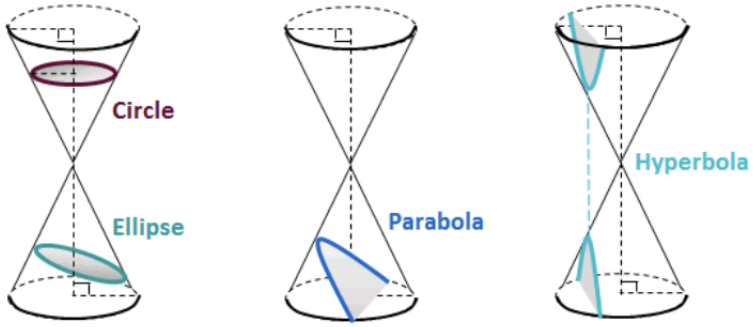

图1：圆锥曲线。图片转载自 mathhints.com。

实射影空间 $\mathbb{RP}^2$的一个子集。另一方面，(2) 指的是一个亚纯函数 $z : M \to \mathbb{CP}^1$，这使得同一条曲线本质上成为黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$的一个子集。$\mathbb{RP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^1$ 的有限部分都可以自然地与 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$等同起来，但说到无穷远点时，它们的差异就相当大： $\mathbb{CP}^1$ 只有一个无穷远点，而 $\mathbb{RP}^2$ 则有一整条由渐近方向表示的无穷远射影直线。此外， $\mathbb{RP}^2$ 是不可定向的。事实上，记 S^2 为 $\mathbb{R}^3$中的单位球面，则存在同胚 $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ 和 $\mathbb{RP}^2 \cong S^2/$（对跖点视为同一点）。

对于二次曲线（圆锥曲线） $d = 2$，因此亏格公式表明 $\mathbf{g} = 0$，且不存在奇点。因此 $\mathbf{b}$ =2$(m - 1)$，这意味着在下文讨论的大多数情形中，$\mathbf{b} = 2$。一个例外是圆，此时 $m = 1$，所以 $\mathbf{b} = 0$。我们还将讨论通过对二次曲线进行反演（例如对跖映射 $z \mapsto -1/\bar{z}$）得到的曲线。这将引出诸如双纽线型曲线（内摆线的特殊情形）、伯努利双纽线和心脏线等曲线。这类反演不会改变亏格，因为曲线仍由同一个黎曼曲面参数化，但曲线的次数可能改变。通常，次数会从 $d = 2$ 变为 $d = 4$，此时亏格公式表明会有三个奇点。根据曲线的不同，这些奇点将分别起到求积节点、“特殊点”、光滑分支之间的交点或尖点的作用。一般而言，有些奇点在实数范围内可能不可见。

3 射影空间中的代数曲线

3.1 一般情况

我们关注实代数曲线；这里“实”的含义是，多项式 $Q(x,\ y) = P($ $x + \mathrm{i}y,\ x - \mathrm{i}y)$ 的系数均为实数。于是 $P(z,\ w)$ 的系数具有厄米对称性，而复曲线 $\{(z,\ w) \in \mathbb{C}^2 \colon P(z,\ w) = 0\}$ 具有对合 $(z,\ w)$ $\mapsto (\bar{w},\ \bar{z})$。一般而言，我们用同一个字母 J 表示所有反保角对合，其确切含义由上下文确定。 P 的实轨迹，即

$$V = \{z \in \mathbb{C} : P(z, \bar{z}) = 0\}, \tag{3}$$

是所提到的对合的不动点集。

与曲线 $P(z,\ w)$ 相关联的黎曼曲面 M 具有相应的反共形对合 $J \colon\ M \to M$。轨迹 (3) 可以从 J 的不动点集 Γ_M 中得到，也可以将其视为 M 的对称线，本质上即为坐标函数 z 作用下的像 $z(\Gamma_M)$，其中后者被视为定义在 M 上的亚纯函数。或者，也可以利用 w 得到，即 $V = w(\Gamma_M)$。

上述图景实际上有所简化，例如，必须仔细地将上述射影空间中的代数曲线紧化，而且事实证明， V 可能包含并非来自 Γ_M 的偶然点。我们将在下文详述这些细节。

二维实射影空间是等价类（或比值）的集合

$$\mathbb{RP}^2 = \{[\,t : x : y\,] : (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)\},$$

表示复数域中 $\mathbb{R}^3$过原点的直线。如上所示，只有比值才是重要的，即对于任意 $\lambda \neq 0$、 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有 $[\,t \colon\ x \colon\ y\,] = [\,\lambda t \colon\ \lambda x \colon\ \lambda y\,]$。有限平面 $\mathbb{R}^2$ 可以通过（x、 y） $\mapsto [\,1 \colon\ x \colon\ y\,]$自然嵌入 $\mathbb{RP}^2$ 中。复射影平面$\mathbb{CP}^2$ 的定义类似，只是 t、 x、 y、 λ可以是复数。不过，在我们的语境中，将坐标命名为 t、 z、 w，并通过 $z = x + \mathrm{i}y$、 $w = x - \mathrm{i}y$确定实子空间会更合适，其中 x、 $y \in \mathbb{R}$。因此我们将处理

$$\mathbb{CP}^2 = \{[\,t : z : w\,] : (t, z, w) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\},$$

配备了反保角对合

$$[\,t : z : w\,] \mapsto [\,\bar{t} : \bar{w} : \bar{z}\,].$$

该对合的不动点集是 $\mathbb{CP}^2$ 中的“实对角线”，满足 $t \in \mathbb{R}$ 和 $w = \bar{z}$。因此，它由以下点组成

$$[t : z : \bar{z}] = [t : x + \mathrm{i}y : x - \mathrm{i}y] \quad (t, x, y \in \mathbb{R}).$$

在这种实射影空间表示中，第三个分量$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$是多余的，可以舍去。因此，实射影空间实际上可以视为等价类的集合

$$\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}} = \{[t : z] : t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} = \{[t : x + \mathrm{i}y] : t, x, y \in \mathbb{R}\}, \quad (4)$$

其中，若两个数对相差一个非零实因子，它们就表示同一个点。下标 red 表示 “ 约化 ”，意即舍去了一个无关紧要的分量。集合 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 的定义让人想起一维复射影空间的定义

$$\mathbb{CP}^1 = \{[t : z] : (t, z) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)\},$$

它是黎曼球面的一种模型。在这里，总可以选择t 为实数；事实上，两个值 $t = 0$和 $t = 1$涵盖了所有可能的等价类。因此存在一个自然的满射

$$\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}} \to \mathbb{CP}^1, \quad (5)$$

它将点 $[t : \ z] \in \mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 映射到 $\mathbb{CP}^1$中同名的点。但在 $\mathbb{CP}^1$ 空间中，它可能属于一个更大的等价类。更准确地说，当 $t = 0$时，情况便是如此：在 $\mathbb{CP}^1$ 中，所有满足$t = 0$ 的点都等价于 $[0 : \ 1]$,，也就是说，只有一个无穷远点；而对于 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$，数对 $[0 : \ z_1]$ 和 $[0 : \ z_2]$ 表示同一个无穷远点，当且仅当对于某个 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，有 $z_2 = \lambda z_1$ 。因此，可以选取形如 $[0 : \ e^{\mathrm{i}\varphi}]$的代表元。此时需注意，两个 φ 表示同一点，当且仅当它们相差 π 的整数倍（而不是 2π）。后一点与如下事实有关：$\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 是一个不可定向曲面，在拓扑上是一个“交叉帽”。另一方面，黎曼球面 $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ 是可定向的。

接下来，我们还将通过将坐标为（t, z）的 $\mathbb{R}^3$ 与坐标为（$t, x + \mathrm{i}y$）的 $=$ 等同起来，对实空间进行半复化；并按照（4）将 $\mathbb{RP}^2$ 与 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 等同起来。

3.2 射线表示

一般来说，像 $\mathbb{RP}^2$、 $\mathbb{CP}^2$、 $\mathbb{RP}^1$ 和 $\mathbb{CP}^1$ 这样的射影空间，可以定义为高于给定指标一维的向量空间中经过某个固定点的直线集合。例如，

$$\mathbb{RP}^2 = \{\text{lines } K \subset \mathbb{R}^3 \text{ through } (0, 0, 0)\}, \quad (6)$$

或者，选择另一个点，即北极 $N = (1,0,0)$，

$$\mathbb{RP}^2 = \{\text{lines } L \subset \mathbb{R}^3 \text{ through } N\}. \tag{7}$$

上述两种表示（6）和（7）各有其优点。在第一种情况下，每条直线 K 与单位球面 S^2 相交于两个对径点，即 p 和 $-p$。改用 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$ 后，这给出了一个双射

$$\mathbb{RP}^2_{\text{red}} \to S^2/(\text{antipodes identified}).$$

$$K \mapsto K \cap S^2 = \{\pm p\}. \tag{8}$$

在这里可以舍弃一个半球，例如“南”半球，从而得到如下描述

$\mathbb{RP}^2_{\text{red}} \cong$ （北半球）$\cup$（将对径点视为同一点的赤道），

从而确实呈现为一个“交叉帽”。

作为对（6）的进一步具体化，每条 K 非水平直线都与平面 $\{t = 1\}$ 恰好相交于一点（1， z）$\in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$。当该直线写成 $[1 : \ z]$时，这一点对应于该直线的射影坐标，因此直接对应于一个复数z，记为 $z_K = z_K\,(p) \in \mathbb{C}$，其中 p 如（8）所示。显然$z_K\,(-p) = z_K\,(p)$。任意水平直线表示 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$的一个无穷远点，而这样的直线具有如下射影表示：$[0 : \ e^{\mathrm{i}\varphi}]$，其中 $\varphi \in \mathbb{R}$ 取模 π。图2对此作了说明。

第二种选择 (7) 与立体投影有关，它将 S^2 与 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$对应起来。每条经过北极 $N = (1,0) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ 的非水平直线 L S^2 都会与之再相交于一点，记为 p；它也会与平面 $\{t = 0\}$ 相交于一点，记为 $(0, z)$，于是 $z = z_L(p) \in \mathbb{C}$。这就定义了立体投影

$$S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad p \mapsto z_L(p),$$

通过令 $z_L(N) = \infty$，可将其扩展到整个 S^2。因此，尽管 L 上的水平直线与 K上的一样多，但经由立体投影，水平直线 L 只对应一个无穷远点。从计算角度来看，立体投影中 $p \in S^2 \setminus \{N\}$ 与 $z = z_L(p) \in \mathbb{C}$ 各分量之间的关系为

$$p = \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \frac{2z}{|z|^2 + 1}\right) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}. \tag{9}$$

反过来，我们有

$$z = z_L(p) = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_0} \tag{10}$$

如果我们将 p 识别为点 $p = (x_0, x_1 + \mathrm{i}x_2) \in S^2 \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$。

S^2 从环境欧几里得空间继承的黎曼度量为

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2,$$

容易证明（当然，这也是众所周知的），它可写为

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

用 $z = z_L(p)$ 表示时。由于它具有形式$ds^2 = \lambda(z)^2|dz|^2$，其中标量因子为 $\lambda(z) > 0$，这意味着映射$p \mapsto z_L(p)$是 S^2 与黎曼球面$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$之间的保角映射。

接下来，将 $p \in S^2$ 的欧几里得坐标 (9) 视为射影坐标，则在此意义下，它们为

$$[\,\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} : \frac{2z}{|z|^2+1}\,] = [\,|z|^2 - 1 : 2z\,] = [\,1 : \frac{2z}{|z^2|-1}\,] \in \mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}.$$

这意味着复数 $2z_L/(|z_L|^2 - 1)$ 表示直线 K，前提是 $|z_L| \neq 1$。因此，取上述的 $z_K = z_K(p)$，有

$$z_K = \frac{2z_L}{|z_L|^2 - 1}, \tag{11}$$

or

$$\frac{1}{z_K} = \frac{1}{2}(\bar{z}_L - \frac{1}{z_L}), \tag{12}$$

后者表明，$1/z_K$ 是 $1/z_L$的调和函数。用 $p = (x_0, x_1 + \mathrm{i}x_2)$ 表示时，有

$$z_K(p) = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{x_0}. \tag{13}$$

与 $z_L(p)$ 相比，映射 $p \mapsto z_K(p)$ 不是保角的。事实上，z_L 与 z_K 之间的关系 (11) 既非解析也非反解析，因此 z_L 和 z_K 不可能同时保角。

当 $|z_L| = 1$直线 K 水平时，这意味着任何这样的 z_L 都表示 $\mathbb{RP}^2$中的一个无穷远点，此时 z_L 和 $-z_L$表示同一个点。最后我们指出（或回顾）

$$z_L(-p) = -\frac{1}{\overline{z_L(p)}}, \quad z_K(-p) = z_K(p).$$

我们将所有内容总结如下（再次参见图2）。

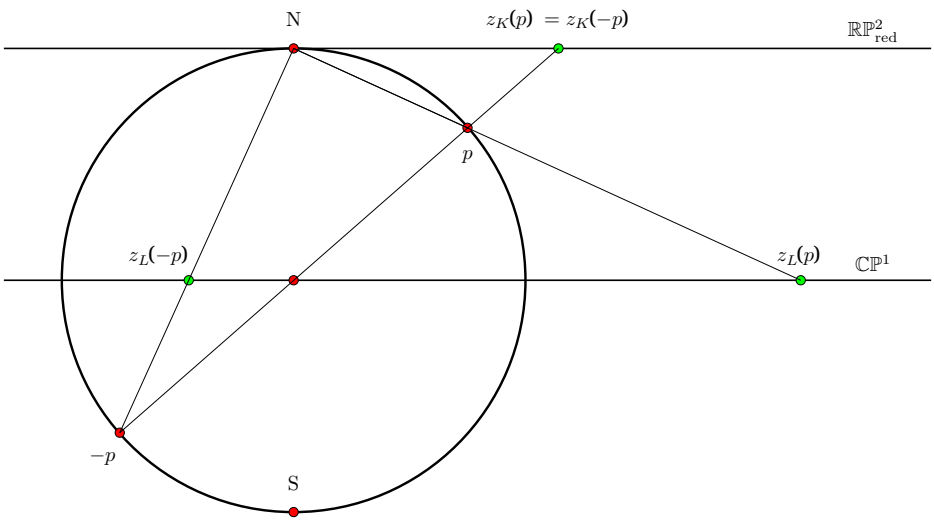

图2：球面在复平面和实平面上的投影 $p \mapsto z_L(p)$ 和 $p \mapsto z_K(p)$ 及其无穷远点示意图（二维视图）。

引理 3.1. 单位球面 $S^2 \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ 上的点 $p = (x_0, x_1 + \mathrm{i}x_2)$ 有两种自然的表示方式，可表示为（扩展）复数，即 z_L 和 z_K，定义如下。

1）通过立体投影（一种保角映射）

$$z_L : \quad S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$$

定义为

$$z_L(p) := \begin{cases} \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_0}, & p \neq N \quad (x_0 \neq 1), \\ \infty, & p = N \quad (x_0 = 1). \end{cases}$$

或者，将 $\mathbb{CP}^1$ 视为立体投影的目标，

$$z_L(p) := \begin{cases} [\,1 - x_0 : x_1 + \mathrm{i}x_2\,], & p \neq N, \\ [\,0 : 1\,], & p = N. \end{cases}$$

反过来，可以通过以下方式从 $z_L = z_L(p)$ 恢复 p

$$p = \left(\frac{|z_L|^2 - 1}{|z_L|^2 + 1}, \frac{2z_L}{|z_L|^2 + 1}\right).$$

2）作为映射到实射影平面的函数，在将对跖点粘合后为双射：

$$S^2/J \to \mathbb{RP}^2_{\text{red}}.$$

其定义为

$$\pm p \mapsto \begin{cases} [\,1 : z_K(p)\,], & x_0 \neq 0, \\ [\,0 : e^{\mathrm{i}\varphi}\,], & x_0 = 0, \end{cases}$$

其中

$$z_K(p) = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{x_0}, \quad x_0 \neq 0,$$

并且当 $x_0 = 0$ 时，$\varphi \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ 定义为 $x_1 + \mathrm{i}x_2 = e^{\mathrm{i}\varphi}$

总而言之，该引理中的映射为

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\cong} S^2 \longrightarrow S^2/J \xrightarrow{\cong} \mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{14}$$

对于有限点，对应关系由下式给出

$$z_L \mapsto [\,1 : z_L\,] \mapsto p \mapsto \{\pm p\} \mapsto [\,1 : x_K + \mathrm{i}y_K\,] \mapsto [1 : z_K\,] \mapsto z_K$$

而对于无穷远点，则由下式给出

$$\infty \mapsto [\,0 : 1\,] \mapsto N \mapsto \{N, S\} \mapsto [\,0 : e^{\mathrm{i}\varphi}\,] \mapsto [\,0 : 1\,] \mapsto \infty$$

其中 $S = (-1,0)$ 是南极。

4 求积域

4.1 经典求积域

传统上，求积域 [20] 的定义是：它是一个有界域（或开集）$\Omega \subset \mathbb{C}$，其中存在有限个点 z_1，……，$z_m \in \Omega$、整数 $m_j \geq 1$和系数 $a_{kj} \in \mathbb{C}$，使得恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_\Omega h(z)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj}h^{(j)}(z_k) \tag{15}$$

对 Ω h 中的所有可积解析函数均成立。最简单的例子是单位圆盘 $\mathbb{D}$，对于它，解析函数的平均值性质给出求积恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} h(z)dxdy = h(0). \tag{16}$$

已知求积域的边界是代数曲线。事实上，若 Ω 满足 (15)，则 $\partial\Omega$ 是如 (3) 所示的实代数簇，

但可能需要去掉有限个点，而这些点是该代数簇的奇点。对 (3) 中的代数方程 $P(z,\ \bar{z}) = 0$ 求解$\bar{z}$，可得 $\partial\Omega$ 的施瓦茨函数 $S(z)$。于是 $P(z,\ S(z)) = 0$ 恒等成立，并且

$$S(z) = \bar{z} \text{ on } \partial\Omega. \tag{17}$$

后一个方程是施瓦茨函数的定义性质，通常要求它在 $\partial\Omega$ 的至少一侧邻域内全纯。在此背景下，主要结论 [1] 是：Ω 是求积域，当且仅当 $\partial\Omega$ 存在一个可延拓为在整个 Ω 上亚纯的施瓦茨函数。

关于求积域的几本著作有 [9, 38,45, 46]。在后一本著作中，(15) 式所述的求积域被称为代数域。这个术语是恰当的，尽管求积域仅占所有由代数曲线围成的域中的一小部分。为缩小这一差距，[23] 人们尝试扩展求积域／代数域这一类，首先是在黎曼球面上使用球面面积测度，而非平面上的欧氏测度；其次，允许多重覆盖域。由此得到的多层代数域，或以 [40],另一种名称称为求积黎曼曲面的这一类，基本上涵盖了所有由代数曲线围成的域中的一半。这一类由那些多重覆盖域构成，它们是通过一个在整条曲面上亚纯的函数，将一个“分割型”对称（或“实”）黎曼曲面的一侧映射所得。若对称线将曲面分割为两半，则称该对称黎曼曲面为分割型。

一个由代数曲线围成、但不满足式（15）意义下的求积域定义的简单例子，是任意非圆椭圆的内部，例如由下式定义的域

$$x^2 + 2y^2 < 1.$$

另一方面，椭圆相对于复平面的外部是一个满足恒等式（15）的无界域；事实上，它是一个零求积域：

$$\int_{x^2+2y^2>1} h\, dxdy = 0 \tag{18}$$

对定义域中的所有可积全纯函数 h 均成立。有关这一方向的完整结果，请参见[37] 。从更一般的意义上说，可以将椭圆挽救为属于多层代数域这一类。

无论如何都无法挽救的定义域是

$$x^4 + y^4 < 1. \tag{19}$$

与该域相关的两个黎曼曲面，即由边界的代数方程定义的曲面和该域的 Schottky 双层，并不具有所需的典范同构，因而无法使该域成为求积域。正如我们将在下文试图论证的那样，曲线（19）几乎处处都出了问题。

一般的代数曲线是光滑的，也就是说没有奇点。然而，如（15）所示，围成求积域的代数曲线在复射影空间中取其完备化后，通常会有许多奇点。由 [18] 中进行的分类可知，（15）右端体现了其中一些奇点。右端的泛函更精确地对应于n（$n-1$）个奇点，其中 $n = \sum_{k=1}^{m} m_k$ 是求积恒等式的阶数。可以看出，围成（19）中该域的曲线根本没有奇点，即使将其视为 $\mathbb{CP}^2$中的代数曲线也是如此。单凭这一事实，就足以表明它不可能围成任何求积域。

利用亏格公式 (1)，再加上不存在奇点这一事实可知，上述代数曲线的亏格为三，而定义 (19) 中边界的实轨迹仅由一条闭曲线组成。一条单独的闭曲线无法将一个亏格为三的曲面分割为两个相等的部分，因此 (19) 对应的黎曼曲面不可能是“分割型”。最后，(19) 中区域的 Schottky 双层显然具有亏格零，而非三。

与椭圆的情形类似，抛物线也有一些相似的结果，但双曲线则有所不同，而且确实颇为有趣。我们先只考虑一个例子，即由下式定义的开集

$$x^2 - y^2 > 1. \tag{20}$$

作为复平面或黎曼球面的一个子集，它有两个连通分支。例如，从无穷远点的角度看，在进行一次对径反演之后，这两个分支看起来像图“∞”中的两个孔，即该曲线变成了一条双纽线。然而，当将其视为 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$ 的子集时，集合 (20) 通过所有方向为 $y = cx$、$|c| < 1$ 的渐近线而变为连通。曲线 $x^2 - y^2 = 1$在实代数几何的术语中称为“卵形曲线”，见[41, 16, 24]，；而由 (20) 定义的区域在该术语中就是其内部。

卵形曲线的外部，即 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$中(20)的补集，在拓扑上是一个莫比乌斯带。这与 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$在拓扑上是一个“交叉帽”完全一致；交叉帽是不可定向的，并且可以

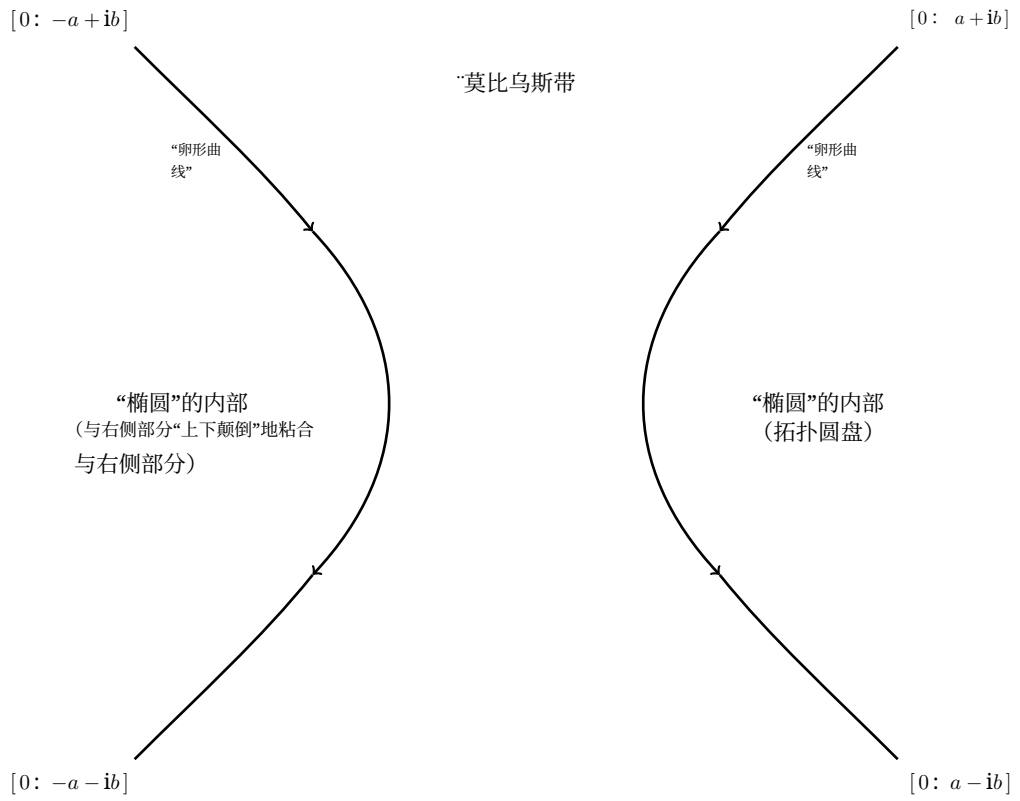

图3：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 作为 $\mathbb{RP}^2_{\text{red}}$ 中的一条非奇异曲线，经过两个无穷远点 $[0\colon -a - \mathrm{i}b] = [0\colon a + \mathrm{i}b]$ 和 $[0\colon -a + \mathrm{i}b] = [0\colon a - \mathrm{i}b]$。箭头表示双曲线如何成为莫比乌斯带的单个边界分支。

通过沿着各自唯一的边界曲线将一个圆盘和一个莫比乌斯带缝合起来得到。给双曲线的两个分支指定向下（ y 递减）的正方向，就可以直接看出其拓扑结构。对于一个区域的边界而言，这似乎不太对，但本例确实如此，正如我们在图3中试图阐明的那样。例如，图中卵形曲线的内部由两部分组成，但由于将无限远处直径两端相对的点粘合在一起，这两部分的定向相反。

双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 也是由圆锥截取得到的圆锥曲线

$$x^2 - y^2 = t^2$$

位于平面 $t = 1$ 上。这里圆锥有双重作用：除了像图1中那样作为一个标准圆锥的选择之外，它还给出了用齐次坐标表示的特殊双曲线的方程。因此，将 t, x, y 视为齐次坐标并将名称改为 x_0, x_1, x_1 后，自然会希望在 S^2 上寻找 $[t$ 的一个代表： $x + \mathrm{i}y] = [x_0\colon x_1 + \mathrm{i}x_2]$。这样的点 $p = (x_0, x_1 + \mathrm{i}x_2)$ 应满足

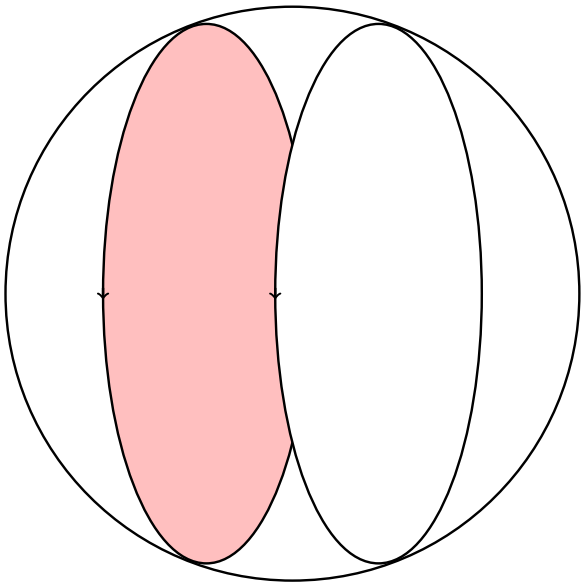

图4：双曲线的奇特图像：如式 (21) 所示，两个圆盘的边界曲线在球面上识别对径点后便成为一条双曲线。在此情形下，球面是射影平面的二重覆盖。

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$，此外还有 $x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$。这就得到了这两个圆

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_0^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \tag{21}$$

表示 S^2 与两个平行平面的交集。见图 4。

上述内容的含义很简单：根据引理 3.1 中的粘合 $z_K(p) = x + \mathrm{i}y$，我们通过式 (21) 将双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的轨迹 $\pm p \in S^2$ 粘合起来。注意，这两个圆在 S^2/J 中变成了一个圆，而由 $-1/\sqrt{2} < x_1 < 1/\sqrt{2}$ 定义的中间部分则变成了一个莫比乌斯带。

4.2 关于球面测度的求积域

现在我们不再局限于（15）的严格范围，并希望在不损失测试函数的情况下处理面积无限的区域，因此将普通面积测度替换为球面面积测度。我们将其与这个二形式对应起来：

$$\frac{dx \wedge dy}{\pi(1 + (x^2 + y^2))^2} = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi\mathrm{i}(1 + z\bar{z})^2}, \tag{22}$$

这里将其缩放，使得代表球面S^2的整个空间 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$的面积为一。

若 $h(z)$ 在有界域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 中解析，且如式 (17) 所示，令 $S(z)=\bar{z}$ 于 $\partial\Omega$ 上，则分部积分可得

$$\int_\Omega \frac{h(z)d\bar{z}\wedge dz}{(1+z\bar{z})^2}=\int_{\partial\Omega}\frac{h(z)\bar{z}dz}{1+z\bar{z}}=\int_{\partial\Omega}\frac{h(z)S(z)dz}{1+zS(z)}.$$

由此恒等式可知，Ω 是关于球面测度的求积域，当且仅当微分形式 $\frac{S\ z\ dz}{1+zS\ z}$ ()() 可亚纯延拓到整个 Ω。这又当且仅当 ~~$S(z)$ 本身~~在 Ω 中亚纯，因此 Ω 是球面求积域，当且仅当它是欧几里得求积域。于是球面求积恒等式为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Omega\frac{h(z)d\bar{z}\wedge dz}{(1+|z|^2)^2}=\sum_{z\in\Omega}\operatorname{Res}\frac{h(z)S(z)dz}{1+zS(z)},\tag{23}$$

其中右端是一个作用于 h 的泛函，其形式与式 (15) 的右端相同。

另一种分部积分可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Omega\frac{h(z)d\bar{z}\wedge dz}{(1+z\bar{z})^2}&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Omega\setminus\mathbb{D}(0,\varepsilon)}\frac{h(z)d\bar{z}\wedge dz}{(1+z\bar{z})^2}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}(0,\varepsilon)}\frac{h(z)dz}{z(1+z\bar{z})}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{h(z)dz}{z(1+z\bar{z})}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}(0,\varepsilon)}\frac{h(z)dz}{z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{h(z)dz}{z(1+zS(z))}.\end{aligned}$$

这里可以看出，若 $S(z)$ 在 $z=0$ 处没有极点，则最后一项中的两个部分都在 $z=0$ 处产生留数，但这些贡献彼此抵消。因此，若 $S(z)$ 在 $z=0$ 处正则，则最终的求积公式可写为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Omega\frac{h(z)d\bar{z}\wedge dz}{(1+|z|^2)^2}=-\sum_{z\in\Omega\setminus\{0\}}\operatorname{Res}\Big(\frac{h(z)}{1+zS(z)}\cdot\frac{dz}{z}\Big).\tag{24}$$

为了讨论多重覆盖域，坐标 z 必须替换为函数 $z=f(\zeta)$，其中 ζ 是一致化黎曼曲面 M 上的坐标。假设该曲面是“实的”且属于“分割型”。对 M 的这些假设更确切地说是指：M 应当是紧的，并配备一个反共形对合J：$M\to M$；记 Γ_M 为 J 的不动点集，则 $M\setminus\Gamma_M$ 恰有两个连通分支，分别记为 M_+ 和 M_-。它

假设 M 本身是连通的。其中一个连通分支，比如说 M_+，被选作多叶域 Ω 的模型。

如上所述，任意非常数亚纯函数 f 在M 上都会产生一个球面求积域。此类函数可视为一个全纯且可能有分歧的覆盖映射$M \to \mathbb{CP}^1$，由此得到的求积域 Ω 应与 $f(M_+)$（带有适当重数）等同。因此，求积恒等式中允许作为测试函数的 Ω 上的多值解析函数，是指那些提升到 M_+ 后成为单值函数的函数。这样一来，这些测试函数实际上就是M_+ 本身上的可积解析函数。

我们有时将 M 称为“参数”平面（或 ζ-平面），而将目标空间 $\mathbb{CP}^1$ （对应于 f ）称为“物理”平面（或 z-平面）。采用上述记号，我们按照 [23]中的方式，正式定义多层代数域的概念：

定义 4.1. 一个多层代数域是一个二元组 (M_+, f)，其中$M = M_+ \cup \Gamma_M \cup M_-$ 是一个分割型实紧黎曼曲面， f 是 M上的非常数亚纯函数。若存在一个双全纯映射 $\phi\colon M \to \tilde{M}$，使得 $\phi \circ J = \tilde{J} \circ \phi$ 且 $f = \tilde{f} \circ \phi$，则称这两个二元组 (M_+, f) 和 $(\tilde{M}_+, \tilde{f})$ 相同；其中， J 和 $\tilde{J}$ 分别表示 M 和 $\tilde{M}$上的对合。上述定义意味着，重要的只是像 $\Omega = f(M_+)$（带有适当重数）。

已在 [23] 中证明，从定义 4.1 中的 M 出发，并令f 为一个最初仅定义在 M_+上的非常数亚纯函数，则 f 能够延拓为在整个 M 上亚纯，当且仅当求积恒等式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{M_+} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|^2)^2} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_k - 1} \alpha_{kj} h^{(j)}(\zeta_k) \tag{25}$$

对所有 M_+中关于所指球面测度全纯且可积的函数 h 都成立。这里，$\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$、 $\zeta_k \in M_+$是固定的求积数据，导数应相对于求积节点附近适当的局部坐标取值。求积性质 (25) 也可以不指定系数 α_{kj} 来表述：对于所有在点 ζ_k 处至少具有 m_k 阶零点（$1 \le k \le m$）的全纯函数 h ，左边一项都应为零。

上述陈述中“容易”的蕴含，即 f 在整个 M 上亚纯意味着存在 (25) 型的公式，当然主要是计算问题（分部积分结合

留数演算）。然而，这实际上比乍看之下要稍微微妙一些。因此，我们将重新进行这项计算；此前在 [23]中并未将其完整展开。

4.3 留数考量

首先要指出，旋转黎曼球面可以避免某些麻烦。保持球面度量的莫比乌斯变换具有如下形式

$$w = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{26}$$

这些保定向的刚性变换可以与复共轭结合，从而将反演（如 $w = 1/\bar{z}$ ）和对跖映射 $w = -1/\bar{z}$ 也包含在内。将上文的亚纯映射（如 f ）与这样的莫比乌斯变换复合，可以将黎曼球面旋转到合适的位置。

特别地，可以使 f 在对称线 Γ_M上没有极点。事实上，如果 f 在该线上有这样的极点，则可以改为考虑任意一个函数

$$g(\zeta) = \frac{af(\zeta) + b}{-\bar{b}f(\zeta) + \bar{a}}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{27}$$

它没有这样的极点。于是

$$\frac{d\bar{f} \wedge df}{(1 + f\bar{f})^2} = \frac{d\bar{g} \wedge dg}{(1 + g\bar{g})^2},$$

并且可以用 g 代替 f来进行研究。上述内容也意味着，球面面积形式本身不受 f的极点或任何其他特定取值的影响。

由于球面面积形式是一个 2-形式，因此自动是闭的，且局部恰当。例如，在远离 f 的极点处，我们可以写成

$$\frac{d\bar{f} \wedge df}{(1 + f\bar{f})^2} = d\Big(\frac{\bar{f}df}{1 + f\bar{f}}\Big). \tag{28}$$

类似地，在远离 f 的零点处，

$$\frac{d\bar{f} \wedge df}{(1 + f\bar{f})^2} = -d\Big(\frac{df}{f(1 + f\bar{f})}\Big). \tag{29}$$

然而，球面面积形式不可能是全局恰当的，因为

$$\int_M \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1 + f\bar{f})^2} = m \neq 0. \tag{30}$$

这里， m 是 f 的次数（零点或极点的个数），并且我们用到了单位球面的总面积为一这一事实。

从（29）的右端出发并计算其外部¯导数，注意到 $1/(1+f\bar{f})$ 始终是光滑函数，并仔细考虑其余因子中的分布贡献，且利用 $df \wedge df = 0$，可得

$$-d\Big(\frac{1}{1+f\bar{f}}\cdot\frac{df}{f}\Big) = \frac{d(f\bar{f})}{(1+f\bar{f})^2}\wedge\frac{df}{f} - \frac{1}{1+f\bar{f}}\cdot d\Big(\frac{df}{f}\Big)$$

$$= \frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+f\bar{f})^2} - \frac{1}{1+f\bar{f}}\cdot d\Big(\frac{df}{f}\Big).$$

因此，重新整理各项，

$$\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+f\bar{f})^2} = -d\Big(\frac{df}{f(1+f\bar{f})}\Big) + \frac{1}{1+f\bar{f}}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big). \tag{31}$$

以类似方式，

$$\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+f\bar{f})^2} = d\Big(\frac{\bar{f}df}{1+f\bar{f}}\Big) - \frac{f\bar{f}}{1+f\bar{f}}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big). \tag{32}$$

上述表达式中的最后几项纯粹由分布贡献（狄拉克流）组成:

$$d\big(\frac{df}{f}\big) = \pi\big(\sum_{k=1}^{m}\delta_{\omega_k} - \sum_{j=1}^{m}\delta_{\xi_j}\big)d\bar{\zeta}\wedge d\zeta, \tag{33}$$

此处右端是与 f 的除子相对应的 2-形式流，其中 ω_k 表示 f 的零点， ξ_j 表示其极点，二者均按重数重复计入。例如，在 f 的一个零点处局部化后，该恒等式表明 $1/\pi z$ 是柯西-黎曼算子的基本解:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\big(\frac{1}{\pi z}\big) = \delta_0.$$

将后一关系写成不变形式，得到

$$d\big(\frac{dz}{z}\big) = \pi\,\delta_0\,d\bar{z}\wedge dz = 2\pi\mathrm{i}\,\delta_0\,dx\wedge dy,$$

这也表明，狄拉克测度应被视为 2-形式流。请参阅 [22]中的引理1。

将（33）代入（31）和（32），并注意到每种情况下 $d\big(df/f\big)$ 前面的因子都会消去一半的狄拉克流，可得以下公式。

命题 4.1。 设 f 是 M 上的一个次数为 m的亚纯函数，ω_k 是其零点，ξ_j 是其极点，且二者均按重数重复计数。那么，在流的意义下，

$$\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+f\bar{f})^2}=-d\Big(\frac{df}{f(1+f\bar{f})}\Big)+\pi\sum_{k=1}^{m}\delta_{\omega_k}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta \tag{34}$$

$$=d\Big(\frac{\bar{f}df}{1+f\bar{f}}\Big)+\pi\sum_{j=1}^{m}\delta_{\xi_j}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta. \tag{35}$$

注记 4.1。 在 [23] 中，式 (34) 和 (35) 的最后几项被略微忽略了。另一方面，同样的项以相反的符号通常也会出现在前几项中，因此最终会相互抵消。见下文的定理 4.1。

注 4.2。 f 的零点和极点本身并不真正重要，在式 (34)、(35) 的分布贡献中，可以将它们替换为 f 的任意其他对跖点对的值。例如，对于任意 $c\in\mathbb{CP}^1$，极点可以替换为满足 η_j 且 $f(\eta_j)=c$ 的那些点。记 $c=[b:$ 在射影坐标中，将其按式 (27) 归一化，则 η_j 是式 (27) 中函数 g 的极点，并且用 g 表示时有

$$\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+f\bar{f})^2}=d\Big(\frac{\bar{g}dg}{1+g\bar{g}}\Big)+\pi\sum_{j=1}^{m}\delta_{\eta_j}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

注记 4.3。 不在分布或流的框架内处理极点，而是可以在奇点周围切出小孔，这样便会得到额外的边界积分，就像式 (24) 的推导中那样。

在命题 4.1 中对 M_+ 进行积分，并将斯托克斯定理与 $f=f^*$ 结合应用于 ∂M_+，可得到求积恒等式（25）的以下形式。

定理 4.1。 沿用命题 *4.1* 中的记号和假设，我们得到以下求积恒等式：对于函数 h，若其在 M_+ 上全纯，且关于经 f拉回到黎曼球面上的球面测度可积，则：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{M_+}h\,\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+|f|^2)^2}=-\sum_{M_+}\operatorname{Res}\frac{hdf}{f(1+ff^*)}+\sum_{\omega_k\in M_+}h(\omega_k) \tag{36}$$

$$=+\sum_{M_+}\operatorname{Res}\frac{hf^*df}{1+ff^*}+\sum_{\xi_j\in M_+}h(\xi_j). \tag{37}$$

按照注 *4.2* 中的说明，假设球面已旋转，使得 f 在 ∂M_+ 上的零点和极点均被避开。

上面右端的第一组求和是对 M_+ 中所示微分形式的所有奇点进行的。第二组求和（含显式列出的零点和极点）通常也包含在第一组求和中，但符号相反，因此通常会与第一组中的项相互抵消。

在假设 f^* 在 f 的极点处不为零，反之亦然的情况下，最后一条陈述可以表述得更精确。在这种情况下，只需对满足 $1+f(\zeta)f^*(\zeta)=0$ 的那些点 $\zeta\in M_+$ 求和，完整的恒等式于是变为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{M_+} h\,\frac{d\bar f\wedge df}{(1+|f|^2)^2} = -\sum_{1+ff^*=0}\operatorname{Res}\Big(\frac{h}{1+ff^*}\cdot\frac{df}{f}\Big) \tag{38}$$

$$= +\sum_{1+ff^*=0}\operatorname{Res}\Big(\frac{h}{1+ff^*}\cdot f^*df\Big). \tag{39}$$

证明。利用斯托克斯定理和命题 4.1，公式 (36)、(37) 可立即得出。注意，可以将因子 h 乘到 (35) 上，此时它会进入右端第一项中的微分形式。为方便起见，我们将 (36) 的计算按一连串等式重述如下：

$$\begin{aligned}
\int_{M_+} h\frac{d\bar f\wedge df}{(1+f\bar f)^2} &= -\int_{M_+} d\Big(\frac{h\,df}{f(1+f\bar f)}\Big)+\int_{M_+}\frac{h}{1+f\bar f}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big)\\
&= -\int_{\partial M_+}\frac{h}{1+f\bar f}\cdot\frac{df}{f}+\int_{M_+}\frac{h}{1+f\bar f}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big)\\
&= -\int_{\partial M_+}\frac{h}{1+ff^*}\cdot\frac{df}{f}+\int_{M_+}\frac{h}{1+f\bar f}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big)\\
&= -2\pi\mathrm{i}\sum_{M_+}\operatorname{Res}\Big(\frac{h}{1+ff^*}\frac{df}{f}\Big)+\int_{M_+}\frac{h}{1+f\bar f}\cdot d\big(\frac{df}{f}\big)\\
&= -2\pi\mathrm{i}\sum_{M_+}\operatorname{Res}\frac{hdf}{f(1+ff^*)}+2\pi\mathrm{i}\sum_{\omega_k\in M_+}h(\omega_k).
\end{aligned}$$

使用阿尔福斯–贝尔斯磨光子 [5]，可以证明斯托克斯定理的应用是合理的；这种方法由 [38] 引入，如今已成为求积域理论中的标准工具。

在所述假设下证明（38）、（39），即确认存在消去，需要对微分形式在

$$\frac{hdf}{f(1+ff^*)},\qquad \frac{hf^*df}{1+ff^*} \tag{40}$$

任意点附近进行冗长但直接的局部分析。为避免打断主要论述脉络，我们将这些细节留待附录说明，见第9节。

□

注4.4。可以用参数 $\varepsilon > 0$ 对球面面积测度进行缩放，使其在极限 $\varepsilon \to 0$下趋于欧几里得面积测度。利用

$$d\Big(\frac{f\bar{f}}{1+\varepsilon^2 f\bar{f}}\cdot\frac{df}{f}\Big)=\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+\varepsilon^2 f\bar{f})^2}+\frac{f\bar{f}}{1+\varepsilon^2 f\bar{f}}\cdot d\Big(\frac{df}{f}\Big),$$

这是（32）的推广，可以得到求积恒等式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{M_+} h\,\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+\varepsilon^2|f|^2)^2}=\sum_{M_+}\operatorname{Res}\frac{hf^*df}{1+\varepsilon^2 ff^*}+\sum_{\zeta_j\in M_+}\frac{1}{\varepsilon^2}h(\xi_j).$$

与定理的表述一样，在自然假设下，来自极点 ξ_j 的贡献会相互抵消。在极限 $\varepsilon \to 0$ 下，该恒等式呈现为传统形式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{M_+} h\,d\bar{f}\wedge df=\sum_{M_+}\operatorname{Res} hf^*df.$$

仍可能存在来自 f的极点的贡献，但这些贡献来自解 $\zeta \in M_+$，即来自 $1+\varepsilon^2 f(\zeta)f^*(\zeta) = 0$的解；这些解在极限 $\varepsilon \to 0$下已经成为 f 的极点。另一方面， f 的极点使得左侧成员中允许的函数 h 减少。例如， f 的一个一阶极点要求 h 在同一点具有二阶零点（除非补偿来自 f^*），因此，来自 f 的贡献通常不会出现在公式中。零求积域就是这种情况。

4.4 一个简单例子

为说明一般概念，我们取一个非常简单的例子。设 $M = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $J(\zeta) = \zeta$, $M_+ = \{\zeta\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, $f(\zeta) = \zeta^n$，其中 $n > 0$ 为整数。于是 $f^*(\zeta) = \zeta^n$，利用（38）可得，对于在 M_+中解析且可积的h，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{M_+} h\,\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1+|f|^2)^2}=-\sum_{M_+}\operatorname*{Res}_{1+ff^*=0}\Big(\frac{h}{1+ff^*}\cdot\frac{df}{f}\Big)$$

$$=-\sum_{\operatorname{Im}\zeta>0}\operatorname*{Res}_{\zeta=\sqrt[2n]{-1}}\Big(\frac{h(\zeta)}{1+\zeta^{2n}}\cdot\frac{nd\zeta}{\zeta}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(h(e^{\pi \mathrm{i}/2n}) + h(e^{3\pi \mathrm{i}/2n}) + \cdots + h(e^{(2n-1)\pi \mathrm{i}/2n})\big).$$

当 $n = 1$ 或 $n = 2$, f 在 M_+ 上为单叶函数时，结果可直接写成像域 $\Omega_1 = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ 和 $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 中的如下形式:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Omega_1} h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{2} h(\mathrm{i}), \tag{41}$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Omega_2} h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{2}\big(h(\mathrm{i}) + h(-(\mathrm{i})\big).$$

这里将 $h(z)$ 视为 $z = f(\zeta)$ 的函数。在第二个公式中，Ω_2 可以替换为 $\mathbb{C}\setminus I$，其中 I 是 $\mathbb{R}$ 的任意闭子集；事实上，它可由第一个公式以及关于反射域 $J(\Omega_1)$ 的相应公式推出。

值得注意的是，一般而言，$\partial\Omega_2$, 和 $\partial(\mathbb{C} \setminus I)$ 并不是一条完整的代数曲线。正如 [17]（引理1及其后的讨论）所述，这是本例中出现的一种特殊情况，因为 $f^* = f$，因此当 $n \geq 2$ 时，f 和 f^* 这一对并不能生成 M 上的亚纯函数域。

采用欧几里得面积测度而非球面测度时，Ω_1 和 Ω_2 都变成了零求积域。

5 椭圆

5.1 圆盘

最基本的求积域——单位圆盘 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$——由实代数曲线围成

$$\Gamma: \quad x^2 + y^2 = 1. \tag{42}$$

作为 $\mathbb{CP}^2$ 中的一条复代数曲线，它可以被识别为黎曼球面。

$\mathbb{D}$ 的 Schottky 双层也是黎曼球面的一个模型，可将其视为带有反共形对合 $J(z) = 1/\bar{z}$ 的 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$，其不动点集为 Γ。Γ 的外部（就像在保角结构中一样）只是 $\mathbb{D}$的另一个副本，可与 Schottky 双层中的背面对应起来。上述两个球面作为带有反共形对合的黎曼曲面，在典范意义下完全相同；这一事实对于 $\mathbb{D}$ 作为求积域的性质至关重要。这是一个适用于所有经典

求积域的普遍结论，如式 (15) 所示。圆盘及其外部 $\mathbb{D}^e$ 的求积恒等式显而易见：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{D}} h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{2} h(0),$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{D}^e} h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{2} h(\infty).$$

经过适当的球面旋转后，这些恒等式可以与（26）中的（41）对应。

曲线 Γ 也可以自然地视为实射影空间 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$中的一条曲线；从拓扑上看，实射影空间 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$可视为将球面 S^2 上的对跖点粘合而成。此时，曲线外部从拓扑上看就变成了一个莫比乌斯带，因此是一个不可定向曲面。这是实代数几何中的一般情形：一条将空间分成拓扑圆盘和莫比乌斯带的简单闭代数曲线，即一个“卵形曲线”。希尔伯特第十六问题探讨的是，在具有多个分支的实代数曲线中，卵形曲线彼此嵌套时可能出现的情形，见[41, 48, 16, 24]。

5.2 真椭圆

平面上的标准椭圆为（其中 $a > b > 0$）：

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{43}$$

它围成的区域为

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}.$$

用复坐标表示，方程（43）变为

$$z^2 + \bar{z}^2 - \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} z\bar{z} + \frac{4a^2b^2}{a^2-b^2} = 0, \tag{44}$$

并解出 $\bar{z}$，得到一个具有两个分支的多值函数：

$$S_{\pm}(z) = \frac{a^2+b^2}{c^2}\, z \pm \frac{2ab}{c^2} \sqrt{z^2 - c^2}.$$

这里 $\pm c$是焦点，其中

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0,$$

对应负号的分支 $S_-(z)$（当 z 取较大的正值时，平方根取正值）在 Γ 上等于 $\bar{z}$，且在椭圆外部区域内是单值的；在 Γ 内部，除去割线 $[-c,c]$ 的区域也如此。因此，这个分支就是曲线 Γ 的实际施瓦茨函数。另一分支 $S_+(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[-c,c]$ 中也单值，并可解析延拓穿过割线，在另一侧与 $S_-(z)$ 相接，参见图5。不过，它在 Γ 上不等于 $\bar{z}$。当 $z\to\infty$ 时，两个分支都线性趋于无穷大。

由此可知，$S(z)$ 是一个代数函数，它在二层黎曼曲面 M 上变为单值，该曲面覆叠于 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，其分支点位于 $\pm c$ 上，且每个分支在 $z=\infty$ 上都有一个简单极点。此外，它将代数方程 $P(z,\ w)=0$ 均匀化，其中

$$P(z,w)=z^2+w^2-\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}zw+\frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}, \tag{45}$$

其含义是，$P(z,\ S(z))\equiv 0$ 恒等成立。

黎曼曲面 M 是紧的、亏格为零且没有奇点。因此，只要将轨迹 $P(z,\ w)=0$ 紧化，就可以将 M 直接识别为该轨迹。紧化需在二维射影空间中进行，即引入 P 的齐次化式 $P(t,\ z,\ w)=t^2P(z/t,\ w/t)$，并定义

$$\operatorname{loc}P=\{[t:z:w]\in\mathbb{CP}^2:P(t,z,w)=0\}.$$

由于亏格为零，M 也可以识别为黎曼球面，因此我们有几种不同的模型：

$$\operatorname{loc}P\cong M\cong S^2\cong\mathbb{CP}^1\cong\mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

在 $\operatorname{loc}P$（或其有限部分）上，式（45）中出现的坐标函数 z 和 w 变为定义在 M 上的亚纯函数 f 和 f^*，并满足 $P(f,\ f^*)\equiv 0$。这里的 M 基本上是一个抽象黎曼曲面；不过，若为$M=M_+\cup\Gamma\cup M_-$选择模型 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\mathbb{D}\cup\partial\mathbb{D}\cup\mathbb{D}^e$，一种选择是令 f 为儒可夫斯基映射

$$f(\zeta)=\frac{1}{2}\big((a-b)\zeta+(a+b)\zeta^{-1}\big). \tag{46}$$

该函数在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内是单叶的，并将其映射到椭圆的外部 $\Omega=E^e$。全纯反射函数定义为关于 f 的函数，满足 $f^*=f\circ J$ 其中 $J(\zeta)=1/\zeta$，它为

$$f^*(\zeta)=\frac{1}{2}\big((a+b)\zeta+(a-b)\zeta^{-1}\big). \tag{47}$$

在边界上很容易理解（46）：取 $\zeta = e^{\mathrm{i}\varphi} \in \partial\mathbb{D}$ 后，它给出 $f(e^{\mathrm{i}\varphi}) = a\cos\varphi - \mathrm{i}b\sin\varphi$ 的参数化，其中 Γ。出现负号，是因为 φ 递减对应于 Ω ∂的正向。

如前所述，函数 $f(\zeta)$ 在单位圆盘内是单叶的，并且这一性质一直保持到半径 $R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{a+b}{c} > 1$。环域$1 < |\zeta| < R$ 映射到 $E \setminus [-c, c]$，此外，f 在 $R < |\zeta| < \infty$内也是单叶的，并将该区域映射到 $\mathbb{C} \setminus [-c, c]$。因此 $E \setminus [-c, c]$被覆盖两次，而圆 $|\zeta| = R$ 映射到焦线段 $[-c, c]$，后者也是反映射的一条支割线。在这个圆上 $|\zeta| = R$，我们有

$$f(\pm\mathrm{i}\frac{a+b}{c}) = 0, \quad f(\pm\frac{a+b}{c}) = \pm c, \quad f'(\pm\frac{a+b}{c}) = 0.$$

注意，采用（33）中的记号，f的零点 ω_j 和极点 ξ_j 由下式给出

$$\omega_j = \pm\mathrm{i}\frac{a+b}{c}, \quad \xi_j = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \qquad (j = 1, 2).$$

关于映射性质，我们可以用符号形式写为

$$f(\mathbb{D}) = 1 \cdot E^e = \Omega,$$

$$f(\mathbb{D}^e) = 2 \cdot E + 1 \cdot E^e,$$

见图5。

5.3 求积数据

接下来，我们确定与椭圆相关的求积恒等式（25），或（36）、（38）。取（46）中的 f，并直接利用（38），得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{D}} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1 + |f|)^2} = - \sum_{1 + ff^* = 0} \mathrm{Res}\left(\frac{h}{1 + ff^*} \cdot \frac{df}{f}\right). \tag{48}$$

由（46）、（47）可得

$$1 + f(\zeta)f^*(\zeta) = \frac{1}{4\zeta^2}\left(c^2\zeta^4 + (4 + 2(a^2 + b^2))\zeta^2 + c^2\right),$$

因此，求积节点的方程 $1 + ff^* = 0$变为

$$c^4\zeta^4 + (4 + 2(a^2 + b^2))c^2\zeta^2 + c^4 = 0.$$

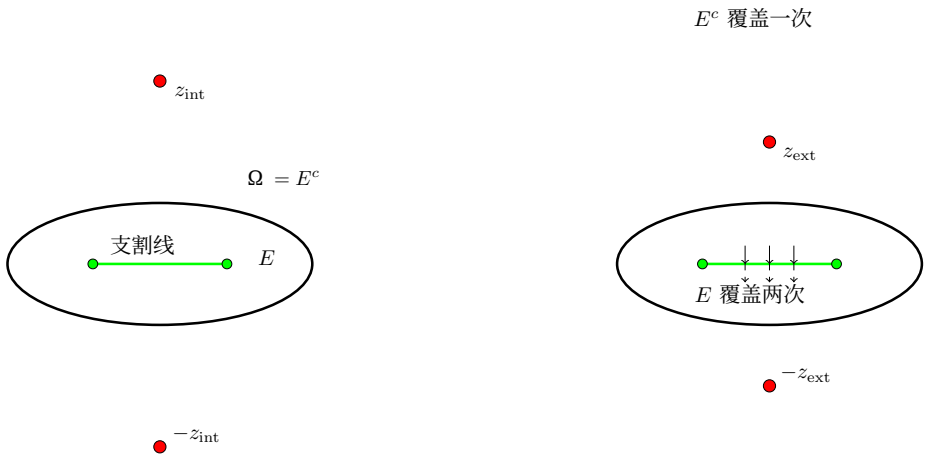

图5：左： 椭圆的外部 Ω E 作为两点求积域。右： 双层域 $2 \cdot E + 1 \cdot E^c$ 的情形类似。通过分支割在这些叶之间进行过渡。

先求解 $c^2\zeta^2$ 可得到两个解

$$(c^2\zeta^2)_\pm = -(2 + a^2 + b^2) \pm 2\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}, \tag{49}$$

它们是满足以下条件的负实数

$$(c^2\zeta^2)_+ \cdot (c^2\zeta^2)_- = c^4, \tag{50}$$

$$(c^2\zeta^2)_+ + (c^2\zeta^2)_- = -4 - 2(a^2 + b^2).$$

符号 $\pm$ 对应于式 (49) 中平方根的符号。

接下来取外部平方根，可得到四个纯虚解 $\pm\zeta_{\text{ext}}$ 和 $\pm\zeta_{\text{int}}$，它们是 ζ 自身的解。它们为

$$\pm\zeta_{\text{ext}} = \pm\frac{\mathrm{i}}{c}\sqrt{2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}} \in \mathbb{D}^e, \tag{51}$$

$$\pm\zeta_{\text{int}} = \pm\frac{\mathrm{i}}{c}\sqrt{2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}} \in \mathbb{D}, \tag{52}$$

其中 $\zeta_{\text{int}} \cdot \zeta_{\text{ext}} = \pm 1$ 由（50）给出。（48）的右端变为

$$-\sum_{1+ff^*=0} \operatorname{Res}\left(\frac{h}{1 + ff^*} \cdot \frac{df}{f}\right) = -\sum_{1+ff^*=0} \frac{h}{(1 + ff^*)'} \cdot \frac{f'}{f}$$

$$= -\sum_{\zeta=\pm\zeta_{\text{int}}} \frac{h(\zeta)}{c^2\zeta^2 + 2 + a^2 + b^2} \cdot \frac{c^2\zeta^2 - (a + b)^2}{c^2\zeta^2 + (a + b)^2}, \tag{53}$$

原则上可得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{D}} h \, \frac{df \wedge d\bar{f}}{(1+|f|)^2} = A_{\mathrm{int}} \big(h(\zeta_{\mathrm{int}}) + h(-\zeta_{\mathrm{int}}) \big) \tag{54}$$

其中 ζ_{int} 如（52）所示。同样，利用外部节点（51），

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{D}^e} h \, \frac{df \wedge d\bar{f}}{(1+|f|)^2} = A_{\mathrm{ext}} \big(h(\zeta_{\mathrm{ext}}) + h(-\zeta_{\mathrm{ext}}) \big).$$

将（51）、（52）（或更直接地，将（49））代入（53），即可得到系数 A_{int} 和 A_{int}。或者，也可以使用（23）或（24）。化简后，结果为

$$A_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \Big), \tag{55}$$

$$A_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2} \Big(1 + \frac{ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \Big). \tag{56}$$

特别地，

$$A_{\mathrm{int}} + A_{\mathrm{ext}} = 1, \tag{57}$$

这可以看作是（30）与 $m = 2$的直接推论。

点 $\pm\zeta_{\mathrm{int}}$ 和 $\pm\zeta_{\mathrm{ext}}$ 本身并没有特别的几何意义；从几何角度可以解释的是像点 $\pm z_{\mathrm{int}} = f$（$\pm\zeta_{\mathrm{int}}$）和 $\pm z_{\mathrm{ext}} = f$（$\pm\zeta_{\mathrm{ext}}$）。求解方程 $1 + zS(z) = 0$（与（24）相关）可以最直接地得到这些像点；该方程对应于 $1 + f(\zeta)\, f^*(\zeta) = 0$。该方程可写为

$$c^4 z^4 + \big(2(a^2+b^2) + 4a^2 b^2 \big) c^2 z^2 + c^4 = 0, \tag{58}$$

解为

$$\pm z_{\mathrm{int}} = \pm \frac{\mathrm{i}}{c} \sqrt{2a^2b^2 + a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}, \tag{59}$$

$$\pm z_{\mathrm{ext}} = \pm \frac{\mathrm{i}}{c} \sqrt{2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}. \tag{60}$$

它们具有与 ζ类似的对称性，例如 $z_{\mathrm{int}} \cdot z_{\mathrm{ext}} = \pm 1$，并按以下顺序位于虚轴上

$$\operatorname{Im} z_{\mathrm{int}} < -1 < \operatorname{Im} z_{\mathrm{ext}} < 0 < -\operatorname{Im} z_{\mathrm{ext}} < 1 < -\operatorname{Im} z_{\mathrm{int}}.$$

在这个物理 z平面中，求积恒等式（54）变为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Omega} h(z) \, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|)^2} = A_{\mathrm{int}} \big(h(z_{\mathrm{int}}) + h(-z_{\mathrm{int}}) \big), \tag{61}$$

根据上述数据，并将 h 视为$z = f(\zeta)$ 的函数。(54) 和 (61) 这两个恒等式是 [23] 中所出现公式的更精确版本。

6 双曲线

6.1 概述

接下来，我们考虑标准形式的一般双曲线。

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{62}$$

由椭圆的方程 (43) 将 b 替换为 $\mathrm{i}b$ 得到。因此，大部分计算与椭圆的情形相同，但几何方面的考虑以及某些其他问题有所不同，因此我们倾向于详细说明相关细节。此外，我们认为双曲线是本文研究的主要新对象。对于椭圆，我们假设 $a > b$，这主要是因为人们通常将椭圆想象为沿 x 轴定向。对于双曲线，我们只假设 $a,\ b > 0$。

在复坐标中，方程 (62) 变为 $P(z,\ \bar{z}) = 0$，其中

$$P(z,w) = z^2 + w^2 - \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} zw - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{63}$$

解出 $\bar{z}$ 可得施瓦茨函数

$$S(z) = \frac{a^2-b^2}{c^2}\, z \pm \frac{2ab}{c^2}\sqrt{c^2 - z^2}, \tag{64}$$

此时 $c = \sqrt{a^2+b^2} > 0$。两个分支点 $\pm c$ 位于实轴上，而不与曲线相交的支割线可选为两条线段 $[c, +\infty)$，$(-\infty,\ -c]$，它们在黎曼球面的无穷远点处相交。

上述意味着，$S(z)$ 在原点附近有两个单值分支。满足 $S(0) = 2ab/c$ 的那个分支可解析延拓至 Γ，并在 Γ 上满足 $S(z) = \bar{z}$。因此，这个分支就是 Γ的实际施瓦茨函数。于是，人们可能会预期，在 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 中不含分支点的那个分支区域内，会成立一个类似于椭圆外部区域的零求积恒等式（例如式（18））。然而事实并非如此，人们自然会对此原因感到疑惑。为了回答这一问题，我们需要对双曲线区域的求积性质进行相当系统的研究。我们按照以下方式命名 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 的各个分支区域:

$$\Omega_0 = \text{that component of } \mathbb{C} \setminus \Gamma \text{ which contains the point } z = 0,$$

$$\Omega_+ = \text{that component of } \mathbb{C} \setminus \Gamma \text{ which contains the point } z = +c,$$

$$\Omega_- = \text{that component of } \mathbb{C} \setminus \Gamma \text{ which contains the point } z = -c.$$

因此， $S(z)$ 在 Ω_0，中具有单值分支，但在 $\Omega_\pm$ 中没有。

尝试通过添加无穷远点来补全上述连通分支时，必须选择在哪个空间中进行补全：在 $\mathbb{CP}^1$ 中还是在 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 中。第一种情况下，只有一个无穷远点；经过反演后，双曲线变成双纽线，形状如“∞”。随后，Ω_0 映射到外部连通分支，而 $\Omega_\pm$ 映射到两个小环的内部（见“∞”）。更多内容参见第8.2节。

第二种情况下，曲线 Γ 本身补全为满足以下条件的那些 $[\,t:z\,]\in\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$

$$z^2+\bar z^2-\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}z\bar z-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}t^2=0. \tag{65}$$

选取 $t=1$ 后得到双曲线的有限部分，即（63）；额外的无穷远点具有以下形式：$[\,0$，其中 $e^{\mathrm{i}\varphi}\,]$ 满足 $\varphi\in\mathbb{R}$

$$\cos 2\varphi=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}. \tag{66}$$

这个方程定义了双曲线的渐近方向。注意，左端的周期为 π，这意味着渐近线的两个方向在极限时对应同一个无穷远点。特别地，这意味着 Γ 的两个连通分支在射影无穷远处并不相交，而是 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 中同一条光滑曲线的两部分。如果将 Γ 中界定 Ω_+ 的连通分支定向为使 Ω_+ 位于左侧，那么这条曲线会延续到 Γ 的另一个连通分支，并将其定向为使 Ω_0 位于左侧，见图3。

这种定向沿着 y 值递减的方向，与将 Γ 视为多叶域边界的观点一致

$$\Omega=2\cdot\Omega_+ +1\cdot\Omega_0, \tag{67}$$

它可以看作是 M_+ 在适当的覆盖映射 $f\colon M\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 下的像。只需将椭圆情形中的儒可夫斯基映射里的 b 替换为 $\mathrm{i}b$，即可得到 f 的一个明确选取，参见式 (46)、(47) 及后续方程。对于 $\zeta\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，这给出：

$$f(\zeta)=\frac{1}{2}\big((a-\mathrm{i}b)\zeta+(a+\mathrm{i}b)\zeta^{-1}\big), \tag{68}$$

并配有如式（47）中的函数 $f^*(\zeta)$，即

$$f^*(\zeta)=\frac{1}{2}\big((a+\mathrm{i}b)\zeta+(a-\mathrm{i}b)\zeta^{-1}\big).$$

取如式（63）中的 $P(z,\ w)$，方程 $P(f(\zeta)\ f^*(\zeta))\ =0$恒成立，与椭圆情形完全相同。

函数 f^* 仍然是 f的全纯反射，即 $f^*\ =_{-}f\circ J$，但现在使用了不同的对合，即 $J(\zeta)\ =\ \zeta$。这意味着 J 的不动点集是实轴，而一致化黎曼曲面的分解 $M=M_+\cup\Gamma\cup M_-$现在由 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\ =\ \mathbb{U}\cup($ $\mathbb{R}\cup\{\infty\})\cup\mathbb{L}$建模。这里， $\mathbb{U}$ 和$\mathbb{L}$ 分别是上半平面和下半平面。因此，我们取$M_+=\mathbb{U}=\{\zeta\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}\zeta>0\}$。 f 的零点和极点由下式给出

$$\omega_j=\pm\mathrm{i}\frac{a+\mathrm{i}b}{c},\quad \xi_j=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\qquad(j=1,2)$$

记号与（33）中相同。因此 $\omega_j\in\partial\mathbb{D},\xi_j\in\partial\mathbb{U}$。导数 f'的零点 $\zeta_{\pm}\ =\pm(a+\mathrm{i}b)/c$经 f映射到焦点$\pm c$，因此这些焦点是将 f 视为覆盖映射时的分支点。

注 6.1。有人可能会想知道，为什么将 b 替换为 $\mathrm{i}b$，即从椭圆转为双曲线时，对合会发生变化。根据 (45) 中的$P(z,\ w)$以及 (46) 和 (47) 中的 f和 f^*，代数恒等式 $P(f,\ f^*)\ =0$成立，而不受 a和 b所取值类型的影响。但若坚持满足关系式$f^*\ =\ f\circ J$，则由于复共轭的作用，J 的含义必须改变。

进一步而言，可以令 a 和 b 都为虚数，即在 (43)、(45)、(46)、(47) 中分别将它们替换为 $\mathrm{i}a$ 和 $\mathrm{i}b$ 。此时， $P(f,\ f^*)\ =0$仍然成立，但现在我们只能将 $f^*\ =\ f\circ\bar{J}$解释为满足 $J(\zeta)\ =\ -1/\zeta$的情形。这个对合没有不动点，这与此时曲线 (43) 没有实轨迹这一事实相符。

6.2 求积数据

根据 (38)，求积节点来自方程 $\zeta\in\mathbb{U}$ of $1+f(\zeta)f^*(\zeta)\ =0$ 的解。该方程展开为

$$c^4\zeta^4+\big(4+2(a^2-b^2)\big)c^2\zeta^2+c^4=0,$$

由此

$$(c^2\zeta^2)_{\pm}=-(2+a^2-b^2)\pm2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}\tag{69}$$

总共得到 $\mathbb{C}$ 中的四个解，

$$c\,\zeta_j=\pm\sqrt{-(2+a^2-b^2)\pm2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}},\tag{70}$$

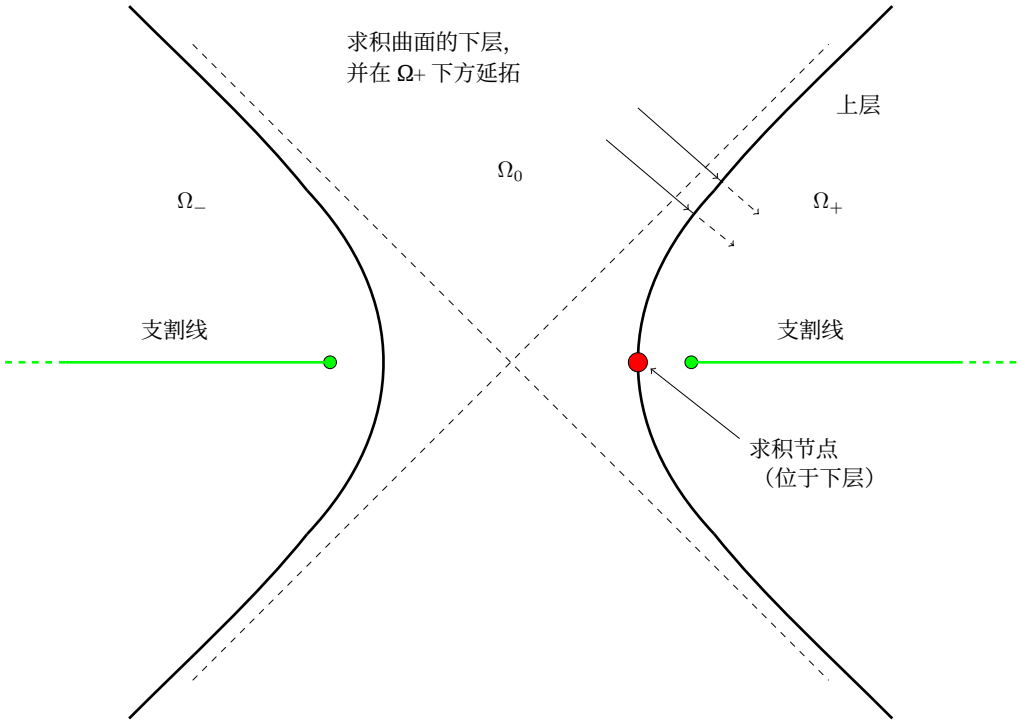

图 6：双曲线 $x^2-y^2=1$ 作为黎曼球面的一部分，其唯一的求积节点（二阶）位于曲线上，但在另一层（作为 Ω_0 的内点，以及其在 Ω_+下的延拓）。

($j = 1, 2, 3, 4$)，对应于平方根的不同选择。¯显然，对称性 $\zeta \mapsto \zeta$ 和 $\zeta \mapsto -\zeta$ 作用于解集。此外，由于 $\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4 = 1$，还存在关于单位圆的对称性。我们的目标是选择平方根，使得 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{U}$ 和 $\zeta_3, \zeta_4 \in \mathbb{L}_\circ$

参数值 $b = 1$标志着一次相变，因此我们需要考虑三个不同的范围：

- $0 < b < 1$：在此范围内，对于符号的两种选择，(69) 式的右端都是负实数。事实上，

$$(2 + a^2 - b^2)^2 - \left(2\sqrt{(1 + a^2)(1 - b^2)}\right)^2 = c^4 > 0.$$

  由此可知，(52) 式中的所有根 ζ_j 都是纯虚数，并且我们可以按照以下方式排列它们：

$$\operatorname{Im}\zeta_4 < \operatorname{Im}\zeta_3 < 0 < \operatorname{Im}\zeta_1 < \operatorname{Im}\zeta_2.$$

  这意味着，ζ_1 和 ζ_3 对应于在 (69) 式中选择正号，ζ_2 和 ζ_4 对应于选择负号，并且 (70) 式中的外层平方根应选择为使得 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{U}_\circ$

- $b = 1$：这种情况类似，但有两个重根：

$$\zeta_4 = \zeta_3 = -\mathrm{i}, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \mathrm{i}.$$

- $b > 1$：现在将 (70) 写成

$$c\,\zeta_j = \pm\sqrt{\alpha \pm \mathrm{i}\beta}, \tag{71}$$

  其中

$$\alpha = -(2 + a^2 - b^2),$$
$$\beta = 2\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 - 1)} > 0,$$

  并对根排序，使得 $j = 1,3$ 对应于 $\pm\sqrt{\alpha + \mathrm{i}\beta}$，其中 $\zeta_1 \in \mathbb{U}, \zeta_3 \in \mathbb{L}$；而 $j = 2,4$ 对应于 $\pm\sqrt{\alpha - \mathrm{i}\beta}$，其中$\zeta_2 \in \mathbb{U}, \zeta_4 \in \mathbb{L}_\circ$ 由于 $\beta > 0$ 这意味着 ζ_j 位于 j 个象限中的第一个，分别对应每个 $j = 1,2,3,4$。

按照上述约定，当 $b \neq 1$ 时，恒等式 (38) 变为：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{U}} h\,\frac{d\bar{f}\wedge df}{(1 + |f|)^2} = -\sum_{1+ff^*=0} \operatorname{Res}\left(\frac{h}{1 + ff^*}\cdot\frac{df}{f}\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{2} \frac{h(\zeta_j)}{c^2\zeta_j^2 + 2 + a^2 - b^2}\cdot\frac{c^2\zeta_j^2 - (a + \mathrm{i}b)^2}{c^2\zeta_j^2 + (a + \mathrm{i}b)^2}. \tag{72}$$

原则上，这具有如下形式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{U}} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|)^2} = A_1 h(\zeta_1) + A_2 h(\zeta_2). \tag{73}$$

与下半平面相关联的求积恒等式具有相同的形式：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{L}} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|)^2} = A_3 h(\zeta_3) + A_4 h(\zeta_4). \tag{74}$$

与椭圆情形类似，将（69）代入（72）后，系数 A_j 只有两个可能的值，即 A_+ 和 A_-。在双曲线情形中，这些值不必为实数；为清楚地展示这一情况，我们必须分别讨论 $b<1$ 和 $b>1$。经过一些计算可得

$$A_\pm = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{\mathrm{i}ab}{\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}\Big) \quad \text{when } b<1, \tag{75}$$

$$A_\pm = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}}\Big) \quad \text{when } b>1. \tag{76}$$

在这两种情形下

$$A_+ + A_- = 1,$$

而对于差值，

$$A_+ - A_- = \frac{\mathrm{i}ab}{\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}} \quad \text{if } b<1, \tag{77}$$

$$A_+ - A_- = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}} \quad \text{if } b>1, \tag{78}$$

在两种情形下均取正平方根。

对上述公式进行详细分析，可得（73）和（74）的以下粘合关系：

$$A_1 = A_3 = A_-, \quad A_2 = A_4 = A_+. \tag{79}$$

因此，主要的求积恒等式（73）可写成

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{U}} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|)^2} = \frac{1}{2}\big(h(\zeta_1)+h(\zeta_2)\big) - \frac{\mathrm{i}ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}\big(h(\zeta_1)-h(\zeta_2)\big)$$

当 $b<1$时，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{U}} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|)^2} = \frac{1}{2}\big(h(\zeta_1)+h(\zeta_2)\big) - \frac{ab}{2\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}}\big(h(\zeta_1)-h(\zeta_2)\big)$$

当 $b>1$时。左侧的前几项十分自然，因为 $\mathbb{U}$ 的部分双重覆盖像域要占据与黎曼球面本身一样大的面积（$\mathbb{L}$的像域也同样如此）。在 $b<1$的情况下，第二项是纯虚数；在 $b>1$的情况下，则是负实数。注意，通过选择使 b充分接近 1，可以使该项任意增大。此外，还可以调整 $b>1$，使来自 $h(\zeta_1)$ 的贡献消失，详见第 6.4 节。

转而考虑特殊情形 $b=1$，我们有 $\zeta_1=\zeta_2=\mathrm{i}$，求积恒等式变为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{U}} h\,\frac{d\bar f\wedge df}{(1+|f|)^2}=h(\mathrm{i})-\frac{a}{1+a^2}h'(\mathrm{i}). \tag{80}$$

在式 (73) 右侧令 $\zeta_1,\ \zeta_2\to\mathrm{i}$（由此可得 $b\to 1$），并在取极限时使用式 (70)、(77)、(78)、(79)，即可证明这一点：

$$A_1h(\zeta_1)+A_2h(\zeta_2)=\frac{1}{2}\big(A_1+A_2\big)\big(h(\zeta_1)+h(\zeta_2)\big)+\frac{1}{2}\big(A_1-A_2\big)\big(h(\zeta_1)-h(\zeta_2)\big)$$

$$=\big(A_++A_-\big)h(\zeta_{1,2})-\frac{1}{2}\big(A_+-A_-\big)(\zeta_1-\zeta_2)\cdot\frac{h(\zeta_1)-h(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\to h(\mathrm{i})-\frac{a}{1+a^2}h'(\mathrm{i}).$$

6.3 物理平面中的求积恒等式

回到一般双曲线，并将其视为 z-平面中的部分双层区域，此图中的求积节点$z_j=f(\zeta_j)$最容易通过求解方程$1+zS(z)=0$得到，即将式 (58) 中的 b 替换为 $\mathrm{i}b$。因此（比较式 (59)、(60)），

$$z_j=\pm\frac{1}{c}\sqrt{2a^2b^2-a^2+b^2\pm 2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}}.$$

平方根的分析与上一节类似：外层平方根在两对$\{z_1,z_2\}$ 和 $\{z_3,z_4\}$ 之间作出选择，内层平方根则在每一对内部作出选择。由此得到以下分类（比较图 7）。

- $0<b<1$：节点 z_j 由位于单位圆上的两对共轭复数构成，其中 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ 分别位于第四、第一、第二和第三象限。
- $b=1$：$z_1=z_2=1,\ \ z_3=z_4=-1$。

- $b > 1$: 所有节点均为实数，且满足

$$z_3 < -1 < z_4 < 0 < z_2 < 1 < z_1.$$

求积恒等式在所有情况下都具有以下形式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Omega h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|)^2} = A_- h(z_1) + A_+ h(z_2) \tag{81}$$

其中 $A_\pm$ 与（75）、（76）中的相同。积分是在一个双叶且有分支的黎曼曲面上进行的，函数 h 允许在两个叶上取不同的值，而这两个叶在 $\pm c$处分支相连。

当 $b = 1$时，求积恒等式中出现了 $z_1 = z_2 = 1$和 h 的导数，见（80）。将该导数解释为关于 z的导数时，必须考虑链式法则：由于 $\frac{d}{d\zeta} h(f(\zeta)) = f'(\zeta) h'(z)$，因此必须乘上因子 $f'(\mathrm{i}) = a$。结果为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Omega h(z)\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|)^2} = h(1) - \frac{a^2}{1+a^2} h'(1). \tag{82}$$

进一步特化到 $a = b = 1$时，Ω 的唯一求积节点$z_1 = z_2 = 1$ 位于曲线上。该节点实际上属于 Ω 的那一叶的内部，而 $z_1 = z_2$ 属于该叶，但同时也恰好位于另一叶的边界上。参见图 6。

6.4 权重损失

更详细地考察 $b > 1$ 的情形，会发现一个或许令人惊讶的现象：式 (81) 中 $h(z_1)$ 的系数可能消失。事实上，对于任意 $a > 0$，当 $ab = \sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}$ 时，系数 A_- 会消失；这在 $b = \sqrt{1+a^2}$ 时发生。参见方程 (76)。此时，参数空间中的求积节点为 $c\,\zeta_j = \pm \mathrm{i}\sqrt{1 \mp 2\mathrm{i}ab}$，内层符号的顺序与 $A_\pm$ 中的符号相对应。z-平面中的节点变为

$$z_j = f(\zeta_j) = \begin{cases} c & \text{for } j = 1, \\ 1/c & \text{for } j = 2. \end{cases}$$

因此，节点 $z_1 = c$失去了权重，变得只是“虚拟”的。求积恒等式化简为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Omega h\, \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1+|z|)^2} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}}\Big) h(\frac{1}{c}). \tag{83}$$

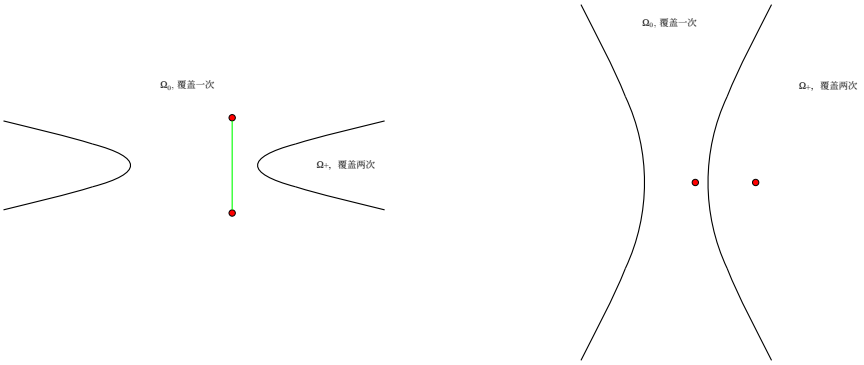

图7：双曲线的求积性质。左图： $a > b$、 $b < 1$ 以及非实权重，或者沿绿线的偶极子密度。右图： $a < b$、 $b > 1$以及实权重。

一个重要的观察是， c 是一个分支点。换言之，按照上述记号， $f'(\zeta_1) = 0$，而由于 $d\bar{f} \wedge df/(1+|f|^2)^2$ 包含因子 $|f'|^2$ ，这使得带有弱奇点的函数 h 在提升到覆盖曲面后可积。因此，原则上也可以接受带有轻微奇点的函数作为测试函数。从这个意义上说，求积节点的消失可以归因于测试函数的不足，因为实际上我们只允许全纯函数。

上述现象，即分支点处求积节点的权重损失，也在 [19] 中讨论过（尤其参见其中第8.4.1节），并且它决定了Bergman空间 [25, 26]中收缩零除子的关键性质。

6.5 非实系数与偶极子密度

当 $b > 1$时，(81) 中的系数 $A_j = A_\pm$ 是实数，且求积恒等式对 h的实部和虚部分别成立。这意味着 (81) 实际上对调和测试函数 h成立。然而，当 $b < 1$ 时，系数 $A_\pm$是非实数，恒等式 (81) 将 h的实部和虚部混合在一起。仍然可以得到一个适用于调和函数的求积恒等式，但这时必须扩展框架，并允许右侧出现更一般的求积泛函。为了精确说明这一点，我们

在 $b<1$ 且令 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$时，将 (81) 改写为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Omega h(z)\,\frac{d\bar z\wedge dz}{(1+|z|)^2} = \frac{1}{2}\big(h(z_1)+h(\bar z_1)\big) - \frac{\mathrm{i}ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}\big(h(z_1)-h_2(\bar z_1)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(h(z_1)+h(\bar z_1)\big) - \frac{\mathrm{i}ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}\cdot\int_{-y_1}^{y_1}\frac{\partial h(x_1+\mathrm{i}y)}{\partial y}dy$$

$$= \frac{1}{2}\big(h(z_1)+h(\bar z_1)\big) + \frac{ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}\cdot\int_{-y_1}^{y_1}\frac{\partial h(x_1+\mathrm{i}y)}{\partial x_1}dy.$$

对于后一种形式，实部与虚部之间没有混合，因此该方程对调和函数 h 成立，而不涉及它们的调和共轭函数。该方程的一种位势论解释是：它表达了限制在 Ω 上的球面面积测度与位于 z_1 和$\bar z_1$ 的两个点源，以及从 $\bar z_1$ 到 z_1的线段上的线偶极子密度之间的重力等价。

当 $b\to 1$时，由此 $y_1\to 0$，该公式在极限下与（82）一致。需牢记 $y_1<0$，因此最后一个积分的大小为 $\approx -2y_1\cdot{}^{\partial h}{}_{(x_1)}\,{}_{\partial x_1}$。

6.6 总结

总之，我们已经看到，由双曲线围成的多层域确实是关于球面面积测度的二阶求积域。如果某个求积节点恰好与一个分支点重合，则阶数实际上会降至一阶。将球面面积测度换成欧几里得测度后，所述域就变成零求积域（仍然是多层域），如注4.4所示。原因在于求积节点移至无穷远处，并且作为测试函数使用的全纯函数 h 必须在无穷远处有二阶零点，才能符合测试函数的条件。因此，求积节点变得不可见。

至于求积恒等式的形式，我们在参数空间中得到了以下恒等式：

命题 6.1. *在由双曲线 (62) 围成的 (67) 中的部分双重曲面区域 Ω 中，求积恒等式 (36) 取特定形式 (73)；用参数化 $f:\ \mathbb{U}\to\Omega$ 表示时，该参数化由 (68) 给出。换一种写法，*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{U}} h\,\frac{df\wedge d\bar f}{(1+|f|)^2} = \frac{1}{2}(h(\zeta_1)+h(\zeta_2))+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}ab}{\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}}(h(\zeta_1)-h(\zeta_2)),$$

当 $b<1$，且

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{U}} h\,\frac{df\wedge d\bar f}{(1+|f|)^2} = \frac{1}{2}(h(\zeta_1)+h(\zeta_2))+\frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}}(h(\zeta_1)-h(\zeta_2)),$$

当 $b>1$。求积节点 ζ_j 由公式 *(70)* 给出。当 $b=1$，则$\zeta_1=\zeta_2=\mathrm{i}$，且恒等式的形式为 *(80)*，即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{U}} h\,\frac{d\bar f\wedge df}{(1+|f|)^2}=h(\mathrm{i})+\frac{a}{1+a^2}h'(\mathrm{i}).$$

在以上所有等式中，假设 h 在 $\mathbb{U}$ 上全纯，并且关于左侧项中的测度可积。

7 抛物线

我们考虑如下形式的一般抛物线

$$\Gamma:\quad 4ax=y^2,$$

or

$$8a(z+\bar z)+(z-\bar z)^2=0. \tag{84}$$

作为 $\mathbb{CP}^2$ 中坐标为 $[t:z:w]$ 的复曲线，它是

$$8at(z+w)+(z-w)^2=0, \tag{85}$$

而在坐标为 $[t:x+\mathrm{i}y]$的实射影空间 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 中，

$$4atx=y^2.$$

在 $\mathbb{RP}^2_{\mathrm{red}}$ 中观察时，抛物线是一条光滑曲线，恰好经过一个无穷远点，即 $[0:1]$。抛物线在该点与无穷远直线相切。事实上，在 $[0:1]$ 附近，无穷远直线可参数化为 $u\mapsto[0:e^{\mathrm{i}u}]$，抛物线则可参数化为 $v\mapsto[\frac{v^2}{4a}:1+\mathrm{i}v]$。这里 u，v 为实数，其中 $u=v=0$ 对应于点 $[0:1]$。两条曲线在 $u=v=0$ 处的导数均为 $[0:\mathrm{i}]$，因此彼此相切。相比之下，双曲线经过两个实无穷远点，而实椭圆曲线则完全不到达无穷远处。另一方面，将抛物线视为 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 中的一条曲线时，它在无穷远点处变成奇异曲线，并在此处有一个尖点。事实上，从无穷远点观察，抛物线会变成心脏线，见第 8.3 节。

备注 7.1。 在复射影空间 $\mathbb{CP}^2$ 中，抛物线 (85) 再次仅在一个点处与无穷远直线相交，即 $[t:z:1:1],$，该点为切点。对于一般椭圆 (43)，复化边界曲线的无穷远点为$[0:a-b:a+b]$ 和 $[0:a+b:a-b]$。在圆的特殊情形（$a=b=r$）下，这些点变为 $[0:0:1]$ 和 $[0:1:0],$；事实上，这恰好是任意经典求积域（如 (22) 中所示）所适用的无穷远点，参见 [18]。对于一般双曲线 (62)，无穷远点变为 $[0:a-\mathrm{i}b:a+\mathrm{i}b]$ 和 $[0:a+\mathrm{i}b:a-\mathrm{i}b]$。

对 (84) 求解 $\bar{z}$，得到施瓦茨函数

$$S(z) = z - 4a + \sqrt{16a(a-z)}, \tag{86}$$

它在 $z = a$ 处有一个分支点，另一个分支点为 $z = \infty$。令 D 表示 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 中包含支割线 $[a, +\infty)$ 的那个连通分支，并令 Ω 表示 $\mathbb{C}$ 中的补连通分支。

已知 [37]，Ω 是关于平面面积测度的零求积域。相应的结论在高维中也成立，此时可通过用椭球穷竭抛物面，并利用 [14] 中的主要结果来证明。H. Shahgholian [43]、L. Karp [29] 等人发展了这种穷竭方法。

对于球面测度，Ω 成为一个两点求积域。实抛物线 Γ 可参数化为 $z = x + \mathrm{i}y = f(\zeta)$，$\zeta \in \mathbb{R}$，其中

$$f(\zeta) = 4a(\zeta^2 + \mathrm{i}\zeta).$$

该函数在黎曼球面上是亚纯函数，并且在上半平面 $\mathbb{U}$ 中是单叶的，其中 $f(\mathbb{U}) = \Omega$。取 $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$、$M_+ = \mathbb{U}$ 后，我们便处于与双曲线类似的情形。关于 $J(\zeta) = \zeta$ 的全纯反射函数为

$$f^*(\zeta) = 4a(\zeta^2 - \mathrm{i}\zeta)$$

求积恒等式便如 (38) 所示，变为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{U}} h \, \frac{df \wedge d\bar{f}}{(1+|f|)^2} = - \sum_{1+ff^*=0} \operatorname{Res}\Big(\frac{h}{1+ff^*} \cdot \frac{df}{f} \Big). \tag{87}$$

给出求积节点的方程 $1 + ff^* = 0$ 展开为 $1 + 16a^2\zeta^2(\zeta^2 + 1) = 0$，其根为

$$\zeta = \zeta_j = \pm\sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}}. \tag{88}$$

这些数 $\zeta_j (j = 1,2,3,4)$ 都是非实数，并且成共轭复数对。求积节点是其中位于上半平面 $\mathbb{U}$ 的两个数，记作 ζ_1 和 ζ_2。进一步分析分为三种情况：

- $0 < a < \frac{1}{2}$：每个象限中各有一个根。
- $a = \frac{1}{2}$：虚轴上有两个重根，分别为 $\zeta_1 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ 和 $\mathrm{i}\sqrt{2}$，$\zeta_2 = \overline{\zeta_3} = \zeta_4 = -\overline{\zeta_1}$。
- $\frac{1}{2} < a < \infty$：重根已分裂为位于虚轴上的共轭单根对。

对于单根 $\zeta_j \in \mathbb{U}$，我们有

$$-\sum_{1+ff^*=0} \operatorname{Res}\Big(\frac{h}{1+ff^*}\cdot\frac{df}{f}\Big) = -\sum_{1+ff^*=0} \frac{h}{(1+ff^*)'}\cdot\frac{f'}{f}$$

$$= -\frac{1}{32a^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{2\zeta_j+\mathrm{i}}{\zeta_j^2(2\zeta_j^2+1)(\zeta_j+\mathrm{i})}\cdot h(\zeta_j), \tag{89}$$

由（88）可知，求积公式（87）变得明确。在 z-平面中可得

$$z_j = f(\zeta_j) = -2a \pm \sqrt{4a^2-1} \pm \mathrm{i}\sqrt{-8a^2 \pm 4a\sqrt{4a^2-1}},$$

但一般而言，这个表达式似乎难以简化。因此，我们只在重根这一特殊情形下给出更明确的结果，即当 $a = \frac{1}{2}$ 时。于是

$$z_{1,2} = f(\zeta_{1,2}) = f(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) = -1-\sqrt{2},$$

直接运用（24）、（86）进行简单计算，可得 Ω 的求积公式：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Omega h(z)\frac{d\bar{z}\wedge dz}{(1+|z|^2)^2} = (1-\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot h(-1-\sqrt{2}) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot h'(-1-\sqrt{2}).$$

注意，系数 $1-1/(2\sqrt{2})$ 略小于 $\bar{1}$（=球面的面积），这与抛物线的外部 Ω 占据球面的大部分区域这一情况相符。见图8。

8 通过二次曲线反演得到的区域

8.1 双纽线，或诺伊曼卵形线

对式（44）形式的椭圆进行反演，例如通过对跖映射 $z \mapsto -1/\bar{z}$，可得

$$z^2 + \bar{z}^2 - \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}z\bar{z} + \frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}z^2\bar{z}^2 = 0,$$

或者，写成实形式，

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = 0. \tag{90}$$

形状见图9。它可以看作两个部分重叠的圆盘的“粘合和”，平面情形请参见 [10, 35] 。

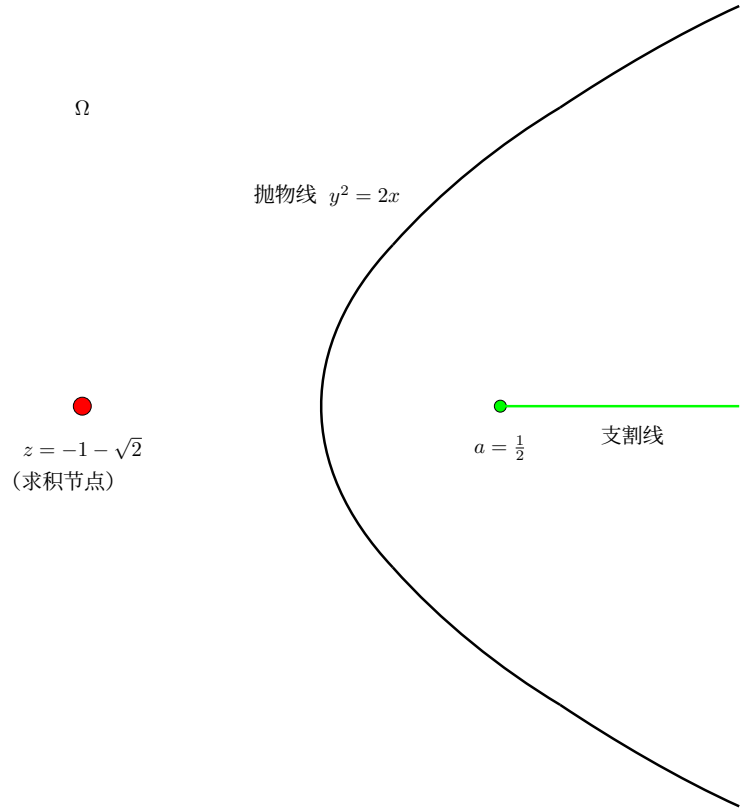

图8：带有 $a = \frac{1}{2}$ 的抛物线。外部区域的二阶求积节点以红色标出。分支点和支割线（可选）以绿色标出。其含义与图5中的椭圆类似。

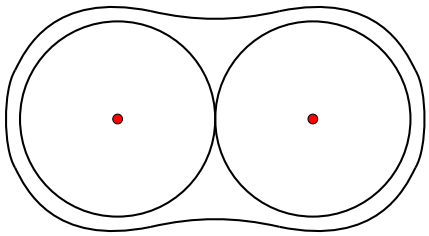

图9：双纽线及其由两个相切圆盘组成的极限情形。欧氏测度的求积节点以红色标出。球面测度的求积节点则更靠近原点。（与文中的方程（90）相比，图像旋转了90度。）

我们看到，方程现在的次数为四，它描述了一个经典的两点求积域，称为诺伊曼卵形线，或据一些资料所称的双纽线，它是内摆线的一种特殊情形。在平面情形（欧几里得度量）下，方程（90）内部区域 Ω 的求积恒等式相当简单：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Omega} h(z) d\bar{z} dz = \frac{a^2+b^2}{4a^2b^2} \Big(h(-\frac{\mathrm{i}c}{2ab}) + h(\frac{\mathrm{i}c}{2ab}) \Big).$$

对于球面度量，公式与（55）结合后将如（61）所示，但节点 $\pm z_{\mathrm{int}}$ 会经过执行反演的映射而移动。换言之，求积节点将为 $\pm 1/\bar{z}_{\mathrm{int}}$ ，其中 z_{int} 如（59）所示。

曲线（90）的次数为 $d = 4$，但仍由黎曼球面参数化，因此其亏格为零。因此，亏格公式（1）表明，必须有三个奇点。一些奇点来自求积节点：在（15）的一般设定中，代数曲线 $\partial\Omega$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 上的延拓，在两个无穷远点处分别有 $[0:1:0]$ 和 $[0:0:1]$，即重数为 n_1，.....， n_m 的简单尖点，且切向方向各不相同。正如 [18] 中的详细分析所示，这对亏格公式（1）中奇点项的总贡献为 n （$n-1$）。这里 $n = \sum_{k=1}^{m} m_k$ 是求积恒等式的阶数。

在当前的双纽线情形下， $n = 2$ 因此 $n(n-1) = 2$。所以还需要考虑另一个奇点。这就是所谓的“特殊点” [44, 45], ，它是 $S(z) = \bar{z}$ 的一个孤立解。它位于 $[1:0:0] \in \mathbb{CP}^2$，换言之，位于复平面的原点。

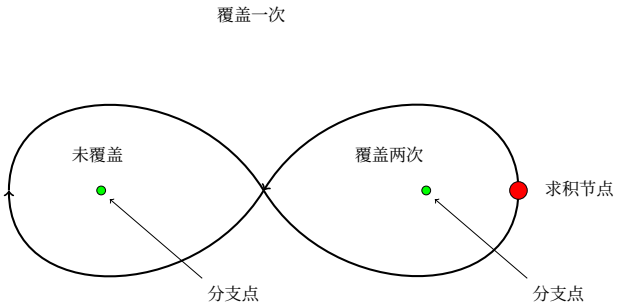

图10：作为多层求积域的双纽线（93）。

8.2 双纽线

双曲线的对跖版本是一条双纽线。事实上，反演 $z \mapsto -1/\bar{z}$ 使方程 (63) 变为

$$z^2 + \bar{z}^2 - \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} z\bar{z} - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} z^2\bar{z}^2 = 0, \tag{91}$$

or

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2 + a^2y^2 - b^2x^2 = 0, \tag{92}$$

一条伯努利双纽线。由于反演是黎曼球面上的刚性变换，双纽线与双曲线一样，也是一个求积域。这条曲线的次数为 $d = 4$，并且在原点有一个显而易见的奇点（两条光滑分支的交点）。

特殊情形 $a = b = 1$ 格外显著。此时双纽线变为 $z^2 + \bar{z}^2 = 2z^2\bar{z}^2$, 即

$$|z^2 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, \tag{93}$$

它是图 6 中双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的反演。求积恒等式的形式为 (82), 节点位于曲线上，见图10。

马蹄曲线和心形线（见下一节）按照传统意义都属于求积域，而伯努利双纽线域要符合这一条件，则确实需要借助黎曼曲面的框架。同样，伯努利双纽线与平面拉普拉斯生长过程并不相容，参见 [33], ; 要使伯努利双纽线适用，就需要考虑覆盖面上的此类过程，如 [19], 。

8.3 心脏线

对抛物线 (84) 作对径反演，可得到一条无界心形线。若要使心形线有界，就需要以抛物线本身之外的某一点为中心进行反演。最佳选择是焦点 $z = a$，因此令 $w = (z - a)^{-1}$，便可在 w 平面上得到一条有界心形线，其尖点位于 $w = 0$。它可以由单位圆盘参数化为

$$w = \frac{1}{2a}\big(\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\big) - \frac{1}{4a} \quad (\zeta \in \mathbb{D}),$$

它是一个研究得相当充分的求积域。在平面情形（欧几里得面积测度）下，在$w = -1/4a$处有一个二阶求积节点。

边界方程变为（其中 $w = u + \mathrm{i}v$），

$$4a^2(u^2 + v^2)^2 + 4au(u^2 + v^2) - v^2 = 0.$$

其次数仍为 $d = 4$。与双纽线的情形类似，双重求积节点解释了亏格公式所确定的三个奇点中的两个。剩下的奇点是原点处的尖点。

9 附录：定理 4.1 证明的若干计算细节

为了证明定理 4.1 的最后几个结论，即确认导致（38）的消去确实存在，我们将对这些微分形式进行详细的局部分析

$$\frac{h\,df}{f(1 + f f^*)}, \quad \frac{h f^*\,df}{1 + f f^*} \tag{94}$$

在任意一点附近，我们在局部坐标系 ζ中将该点取为原点。我们假设如下展开成立，其中$a,\ b,\ c \neq 0$和 $k,\ \ell,\ j$为整数：

$$f(\zeta) = a\zeta^k + \text{higher powers},$$
$$f'(\zeta) = b\zeta^\ell + \text{higher powers},$$
$$f^*(\zeta) = c\zeta^j + \text{higher powers}.$$

如果 $k = 0$，那么 $\ell \geq 0$。如果 $k \neq 0$，那么 $\ell = k - 1$、$b = ka$。对于测试函数，我们将首项系数归一化为 1：

$$h(\zeta) = \zeta^r + \text{higher powers} \quad (r \geq 0).$$

我们将证明，在定理 4.1 中所述的假设下，公式 (36) 中存在消去，现将其重述如下：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{M_+} h \, \frac{d\bar{f} \wedge df}{(1+|f|^2)^2} = -\sum_{M_+} \operatorname{Res} \frac{hdf}{f(1+ff^*)} + \sum_{\omega_k \in M_+} h(\omega_k),$$

使得右端取更简单的形式

$$-\sum_{1+ff^*=0} \operatorname{Res} \left(\frac{h}{1+ff^*} \cdot \frac{df}{f} \right)$$

出现在（38）中。为此，我们需要确定（94）中第一个微分形式在$\zeta = 0$处的留数，即

$$\frac{hdf}{f(1+ff^*)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\zeta^{r+\ell-k} d\zeta + \dots}{1 + ac\zeta^{k+j} + \dots}. \tag{95}$$

主要有三种情况，以及由此产生的一些子情况。

- $k+j>0$：在这种情况下，当且仅当 $r+\ell-k=-1$时才存在留数。– 如果 $k=0$，则 $\ell \geq 0$，从而 $r+\ell-k \geq 0$，因此 不存在留数。– 如果 $k>0$，则 $r+\ell-k=r-1$，当且仅当$r=0$时存在留数。此时留数的大小为 $b/a=k$。然而，这个留数会与第一条定理公式中名为 h（ω_k）的 k 项相抵消（后一个“k”仅仅是一个索引）。– 如果 $k<0$，则 $j>0$。这 由假设排除 。

- $k+j=0$：在这种情况下，(95) 中的分母为 $1+ac+\mathcal{O}(\zeta)$。

  – 如果 $1+ac \neq 0$，那么 $\mathcal{O}(\zeta)$ 项不是主项，并且当且仅当 $r+\ell-k=-1$ 时，我们再次得到留数贡献。其余分析与 $k+j>0$ 的情况完全相同。

  –如果 $1+ac=0$，那么 $1+ff^*$ 在 $\zeta=0$ 处有一个零点，阶数为 $s \geq 1$，记作：

  $$1+f(\zeta)f^*(\zeta) = q\zeta^s + \mathcal{O}(\zeta^{s+1}), \quad q \neq 0.$$

  这意味着 (95) 中的微分形式如下：

  $$\frac{hdf}{f(1+ff^*)} = \frac{b}{aq} \cdot \zeta^{r+\ell-k-s} d\zeta + \text{higher powers},$$

  并且当 $r=s+k-\ell-1$ 时会有留数贡献。
  这种情况对应于方程 (36) 中的**存留留数**，
  也就是说，那些来自满足 $1+ff^*=0$ 的点的项。

- $k+j<0$: 那么，(95) 中的首项幂为 $\zeta^{r+\ell-2k-j}d\zeta$，当且仅当 $r+\ell-2k-j=-1$ 时才有留数贡献。
  – 如果 $k=0$，那么 $j<0, \ell\geq 0$，因此 $r+\ell-2k-j>0$，且**没有留数**。– 如果 $k\neq 0$，那么 $r+\ell-2k-j=r-1-(k+j)\geq r\geq 0$，且**没有留数**。

为证明 (38)，我们考察 (94) 中的第二个微分形式：

$$\frac{hf^*df}{1+ff^*}=bc\cdot\frac{\zeta^{r+j+\ell}d\zeta+\ldots}{1+ac\zeta^{k+j}+\ldots}. \tag{96}$$

这里又有几种情况。

- $k+j>0$: 在这种情况下，当且仅当 $r+j+\ell=-1$ 时，$\zeta=0$ 处才有留数贡献。留数的大小为 bc。
  – 如果 $k=0$，那么 $j>0$，因此 $r+j+\ell>0$，且**没有留数**。– 如果 $k\neq 0$，那么 $r+j+\ell=r+j+k-1\geq r\geq 0$，仍然**没有留数**。

- $k+j=0$ 和 $1+ac\neq 0$: 再次存在留数，条件为$r+j+\ell=-1$。

  – 如果 $k=0$，从而 $j=0$，那么 $r+j+\ell\geq 0$，且**不存在留数**。– 如果 $k\neq 0$，使得 $r+j+\ell=r+j+k-1=r-1$，则当 $r=0$时存在留数。留数的大小为 $bc=kac$。* 如果 $k>0$，则 $j<0$。这**根据假设已排除**。* 如果 $k<0$，则 $j>0$。这**根据假设已排除**。

- $k+j=0$和 $1+ac=0$。那么 $1+ff^*$在 $\zeta=0$处有一个零点，其阶数为 $s\geq 1$，记作：

$$1+f(\zeta)f^*(\zeta)=q\zeta^s+\mathcal{O}(\zeta^{s+1}),\quad q\neq 0.$$

（96）中的微分形式现在为

$$\frac{hf^*df}{1+ff^*}=\frac{bc}{q}\cdot\zeta^{r+j+\ell-s}d\zeta+\text{higher powers}.$$

并且当 $r=s+k-\ell-1$ 时存在一个留数。
这种情况对应于方程（38）中的**剩余留数**，即来自满足 $1+ff^*=0$ 的点的留数。

- $k+j<0$: 因此，（96）中的首项幂为 $\zeta^{r+\ell-k}d\zeta$，当且仅当 $r+\ell-k=-1$ 时才有留数贡献。

– 如果 $k=0$，那么 $\ell \geq 0$，所以 $r+\ell-k \geq 0$，且**没有留数**。– 如果 $k \neq 0$，那么 $r+\ell-k=r-1$，且当 $r=0$ 时有留数。* 如果 $k>0$，那么 $j<0$。这**根据假设予以排除**。* 如果 $k<0$，则根据 $bc/ac = b/a = k = -|k|$ 有贡献。这个**留数会抵消**，同时抵消定理第二个公式中称为 $h(\zeta_j)$ 的 $|k|$ 项。

上述分析证实了在所述假设下的求积恒等式 (38)。事实上，这表明即使不作这些假设（极点与零点互不重合），定理中第一种形式 (36) 里显式含有零点和极点的项，也会被留数和中的项抵消。但一般而言，要明确这些和的取值范围并不容易。

参考文献

[1] D. AHARONOV 和 H. S. SHAPIRO，《解析函数满足求积恒等式的域》，《数学分析杂志》，30（1976年），第39–73页。[2] V. I. ARNOL′ D，《双曲层的牛顿势》，《第比利斯大学学报》，232/233（1982年），第23–29页。[3] ，《牛顿吸引理论的某些代数几何方面》，载于《算术与几何》，第II卷，《数学进展》第36卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1983年，第1–3页。[4] V. I. ARNOLD 和 B. A. KHESIN，《流体动力学中的拓扑方法》，《应用数学科学》第125卷，施普林格出版社，纽约，1998年。[5] L. BERS，《逼近定理》，《数学分析杂志》，14（1965年），第1–4页。[6] L. A. CAFFARELLI、L. KARP 和 H. SHAHGHOLIAN，《自由边界的正则性及其在Pompeiu问题中的应用》，《数学年刊》（第2辑），151（2000年），第269–292页。[7] C. H. CLEMENS，《复曲线理论剪贴簿》，《大学数学丛书》，Plenum Press，纽约-伦敦，1980年。[8] A. D. D. CRAIK，《James Ivory，F.R.S.，数学家：“有史以来最不幸的人”》，《英国皇家学会笔记与记录》，54（2000年），第223–247页。[9] P. J. DAVIS，《施瓦茨函数及其应用》，美国数学协会，纽约州布法罗，1974年。《卡鲁斯数学专著》第17号。

[10] P. DIACONIS 和 W. FULTON，《一个生长模型、一场博弈、一种代数、拉格朗日反演和特征类》，《都灵理工大学数学研讨会报告》，49（1991年），第95–119页（1993年）。《交换代数与代数几何》，II（意大利文）（都灵，1990年）。[11] E. DIBENEDETTO 和 A. FRIEDMAN，《多孔介质中的气泡生长》，《印第安纳大学数学杂志》，35（1986年），第573–606页。[12] V. M. ENTOV 和 P. I. ` ETINGOF，《赫勒-肖池中的气泡收缩》，《力学与应用数学季刊》，44（1991年），第507–535页。[13] H. M. FARKAS 和 I. KRA，《黎曼曲面》，《数学研究生教材》第71卷，施普林格出版社，纽约，第2版，1992年。[14] A. FRIEDMAN 和 M. SAKAI，《复数域中零求积域的刻画》，复数域^N，《印第安纳大学数学杂志》，35（1986年），第607–610页。[15] P. GRIFFITHS 和 J. HARRIS，《代数几何原理》，Wiley-Interscience [约翰·威立父子公司]，纽约，1978年。《纯粹与应用数学》。[16] B. H. GROSS 和 J. HARRIS，《实代数曲线》，《高等师范学校科学年刊》（第4辑），14（1981年），第157–182页。[17] B. GUSTAFSSON，《求积恒等式与 Schottky 双层》，《应用数学学报》，1（1983年），第209–240页。[18] ，《从代数几何观点看求积域上的奇点与特殊点》，《数学分析杂志》，51（1988年），第91–117页。[19] B. GUSTAFSSON 和 Y.-L. LIN，《分支黎曼曲面上的拉普拉斯生长》，《数学讲义》第2287卷，施普林格，Cham，[2021] ©2021年。[20] B. GUSTAFSSON 和 H. S. SHAPIRO，《什么是求积域？》，载于《求积域及其应用》，《算子理论：进展与应用》第156卷，Birkh¨ auser，巴塞尔，2005年，第1–25页。[21] B. GUSTAFSSON、R. TEODERSCU 和 A. VASIL′EV，《经典与随机拉普拉斯生长》，《数学流体力学进展》，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2014年。[22] B. GUSTAFSSON 和 V. G. TKACHEV，《紧黎曼曲面上的结式》，《数学物理通讯》，286（2009年），第313–358页。[23] ，《多层代数域的指数变换》，《计算方法与函数理论》，11（2011年），第591–615页。[24] J. HARRIS，《代数几何》，《数学研究生教材》第133卷，施普林格出版社，纽约，1992年。《入门课程》。

[25] H. HEDENMALM, 《平方可积解析函数的因式分解定理》, 纯粹与应用数学杂志, 422（1991年）, 第45–68页。[26] H. HEDENMALM、B. KORENBLUM 和 K. ZHU, 《Bergman空间理论》, 数学研究生教材第199卷, 施普林格出版社, 纽约, 2000年。[27] I. IZMESTIEV 和 S. TABACHNIKOV, 《重新审视Ivory定理》, 可积系统杂志, 2（2017）, 页码 xyx006, 共36页。[28] L. KARP, 《椭球的牛顿势》, 复变函数理论与应用, 25（1994）, 第367–371页。[29] ，《论零求积域》, 《函数论计算方法》, 8（2008）, 第57–72页。[30] O. D. KELLOGG, 《位势理论基础》, 数学科学基础丛书, 第31卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1967年。重印自1929年第一版。[31] K. KENDIG, 《初等代数几何》, 数学研究生教材第44卷, 施普林格出版社, 纽约—柏林, 1977年。[32] D. KHAVINSON 和 E. LUNDBERG, 《位势理论中的椭球故事》, 美国数学会通报, 61（2014年）, 第148–156页。[33] D. KHAVINSON、M. MINEEV-WEINSTEIN、M. PUTINAR 和 R. TEODORESCU, 《伯努利双纽线无法在拉普拉斯生长中存续》, 数学研究快报, 17（2010）, 第335–341页。[34] S.-Y. LEE 和 N. G. MAKAROV, 《求积域的拓扑》, 美国数学会杂志, 29（2016）, 第333–369页。[35] L. LEVINE 和 Y. PERES, 《具有多个源的内部聚集模型的标度极限》, 数学分析杂志, 111（2010）, 第151–219页。[36] A. S. MARGULIS, 《位势理论中的移动边界问题》, 数学科学与应用进展, 5（1995）, 第603–629页。[37] M. SAKAI, 《零求积域》, 《数学分析杂志》, 40（1981）, 第144–154页（1982年）。[38] ，《求积域》, 数学讲义第934卷, 施普林格出版社, 柏林, 1982年。[39] ，《障碍问题及其应用》, 京都大学公报, 502（1983）, 第1–12页。[40] ，《单连通求积域族的有限性》, 载于《位势理论》（布拉格, 1987年）, Plenum, 纽约, 1988年, 第295–305页。

———

———

———

[41] I. R. SHAFAREVICH, 《基础代数几何》, 施普林格学习版, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1977年。由 K. A. Hirsch 从俄语翻译。数学科学基础丛书第213卷（1974年）的修订重印版。[42] H. SHAHGHOLIAN, 《非均质椭球的牛顿势》, 《SIAM数学分析杂志》, 22（1991）, 第1246–1255页。[43] , 《求积域与施瓦茨势》, 《数学分析与应用杂志》, 171（1992）, 第61–78页。[44] H. S. SHAPIRO, 《无界求积域》, 载于《复分析 I》（大学公园市, 马里兰州, 1985—1986年）, 数学讲义第1275卷, 施普林格, 柏林, 1987年, 第287–331页。[45] , 《施瓦茨函数及其向高维的推广》, 阿肯色大学数学科学讲义第9卷, 约翰·威利父子公司, 纽约, 1992年。Wiley-Interscience出版物。[46] A. N. VARCHENKO 和 P. I. ETINGOF, 《为什么圆形液滴的边界会变成四阶曲线》, 美国数学会大学讲座丛书, 罗得岛州普罗维登斯, 第三版, 1992年。[47] A. D. VAˇINSHTEˇIN 和 B. Z. SHAPIRO, 《牛顿定理与艾沃里定理的多维类比》, 《泛函分析及其应用》, 19（1985）, 第20–24页、96页。[48] G. WILSON, 《希尔伯特第十六问题》, 《拓扑学》, 17（1978）, 第53–73页。