arXiv:2302.13983v1 [physics.class-ph] 27 Jan 2023

具有多层超材料结构的弹性静力学及极化激元共振的代数框架

邓有军、孔令正、刘宏宇和朱丽艳

摘要。多层结构广泛用于构建超材料器件，以实现包括超分辨率成像和隐身斗篷在内的各种前沿应用。本文建立了一个一般性的数学框架，用于研究 $\mathbb{R}^d$ 中的多层材料结构内的弹性静力学，$d = 2, 3$。该多层结构由同心球构成，每一层填充常规弹性材料或弹性超材料。层数可以任意，各层的材料参数也可以彼此不同。在实际应用中，多层结构可作为各种材料器件的构建模块。考虑入射场对多层结构的照射，我们首先利用弹性动量矩阵推导出精确的扰动场，该矩阵的维数与层数相同。通过高度复杂而精细的分析，我们全面研究了弹性动量矩阵的谱性质。这使我们能够建立一个便捷的代数框架，用于研究与多层超材料结构相关的极化激元共振，而这构成了许多超材料应用的基础。

关键词： 多层固体结构、负弹性材料、极化激元共振、弹性动量矩阵、谱分析、特征多项式**2020年数学学科分类：** 35B34、35L05、35P15、74B05、74J20

1. 引言

我们研究多层固体结构中的弹性变形及其诱发的特殊共振现象。具体而言，我们允许存在负弹性材料，即具有负体积模量的弹性材料，它们构成所谓弹性超材料中的一个重要类别。事实上，具有负刚度的奇异弹性材料已被人工构造出来 [19,20],并被提出用于诸多革命性应用，包括超分辨率弹性成像和隐身斗篷。在构建用于实现这些前沿应用的超材料器件时，多层结构经常被用作构件。此外，我们还想指出，由这些负结构诱发的所谓极化激元共振构成了这些应用的基础。

在 [11], 中，作者研究了线性弹性力学中与单个弹性超材料颗粒相关的表面极化激元共振，并探讨了其在弹性波成像中的应用。这可视为一种单层超材料结构。在 [8, 9, 22, 26], 中，研究者提出了核壳结构，基于所谓的异常局域共振实现弹性变形隐身。这里，核内填充常规弹性材料，壳内则填充负弹性材料，且常规弹性材料和负弹性材料均为均匀材料。如果核与壳中的材料参数以一种精细的方式匹配，同时还涉及几何构型，便会产生异常局域共振，继而由入射场诱发隐身效应。这种核壳器件可视为一种双层超材料结构。上述研究还在 [12, 13, 24]中从微观尺度拓展到了宏观尺度。类似地，单层或双层超材料结构也已广泛应用于光学和声学领域，并得到理论研究；例如，参见 [3,4,10,14,15,17,18,21,23,25,28,29] 及其中引用的文献；特别是， [16], 研究了静电学中的多层超材料结构。受这些研究启发，我们在 $\mathbb{R}^d$中考虑更一般的分层超材料结构中的弹性静态变形，$d = 2, 3$。事实上，我们考虑由同心球构成的多层结构，其中每层填充常规弹性材料或弹性超材料。层数可以任意，每层的材料参数可以各不相同，但均为均匀材料。这涵盖了上述许多已有研究，其中层数为 1 或 2。随后，我们研究此类一般分层弹性超材料结构所能诱发的极化激元共振。为此，我们首先用所谓的弹性动量矩阵表示入射场作用下多层结构内部的弹性静态场，该矩阵的维数为

其维数与层数相同。通过高度复杂且精细的分析，我们全面研究了弹性动量矩阵的谱性质。这进而为研究与多层超材料结构相关的极化激元共振建立了一个便捷实用的代数框架。在实际应用中，多层结构可作为各种材料器件的构建单元，而我们的代数框架有助于恰当选择超材料参数，从而诱发所需的共振，进而实现定制化应用。我们将在未来的工作中沿这一方向开展研究。

我们的研究还有一项动机和物理意义，可概述如下。事实上，正如前文所述，本研究中的多层结构可以完全由常规弹性材料构成，即其中不含超材料。这类常规多层结构已被提出用于实现所谓的 GPT消失（广义极化张量）或 ESC消失（弹性散射系数）结构，进而通过变换方法实现隐身效果增强的隐身器件；参见 [1, 27] 关于弹性情形的相关研究， [7] 关于电磁情形的研究， [5] 关于静电情形的研究，以及 [6] 关于声学情形的研究。这些研究中的关键技术要素是一个由某些积分算子定义的代数系统，其系数矩阵恰好就是本文在弹性情形下推导出的动量矩阵。动量矩阵的特征多项式显式公式及其相应根的估计，是 [5, 第 258]页和 [6,第 497]页中的未解问题：

(1) 然而，随着层数增加，以解析方式求解特征多项式似乎变得过于复杂，甚至证明特征多项式解的存在性也颇具挑战。这些数值证据表明，特征多项式确实有解，尽管我们无法证明这一点。
(2) 与电导率情形一样 *[5],* ，需要强调的是，对于任意层数，我们都不知道解是否存在。

由于这一原因，在上述提及的工作中，作者仅考虑了用数值方法验证少数层的这类多层结构的存在性。显然，在当前文章中，至少在弹性静力学情形下，我们可以彻底解决这些未决问题。这为通过遵循与上述工作类似的思路，构造更为一般的GPT消失结构以增强隐身器件的性能铺平了道路。然而，我们选择在其他地方沿着这一方向展开研究，并在本文中专注于极化激元共振的代数框架发展。

本文其余部分安排如下。第2节首先介绍多层结构的弹性静力散射问题，然后给出以弹性矩阵表示扰动场的形式。第3节建立极化激元共振的代数框架，并给出关于特征多项式显式公式及根估计的主要结果。第4节证明第3节的主要结果。第5节给出二维情形下的一些类似结果。第6节通过数值算例，求出固定多层结构的所有极化激元共振模态，并对极化激元共振进行模拟。第7节给出一些结论。

2. 多层超材料结构的弹性静力学

2.1. **多层超材料结构**。我们给出如图N所示的一般1层弹性结构。具体而言，我们构造如下层序列：D_0, $D_1, \dots, D_N$，其中

$$D_0 := \{r > r_1\}, \quad D_j := \{r_{j+1} < r \leqslant r_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad D_N := \{r \leqslant r_N\}, \tag{2.1}$$

并将相邻层之间的界面表示为

$$S_j := \left\{|x| = r_j\right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $N \in \mathbb{N}$ 且 $r_j \in \mathbb{R}_+$。 $\mathbb{R}^d$中的弹性结构配置由 Lam´e˜参数 λ 和 ˜μ 表征，如下所示：

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\lambda, \mu) \quad \text{and} \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_c(\mathbf{x})\chi(D) + \varepsilon_0\chi(\mathbb{R}^d \backslash \overline{D}), \tag{2.2}$$

其中 χ 表示特征函数；$\mathbb{R}^d \backslash D$ 是矩阵，即背景空间；而$D = \cup_{j=1}^N D_j$ 是N层弹性结构。在（2.2）中，λ 和μ 表示常规弹性材料的体积模量

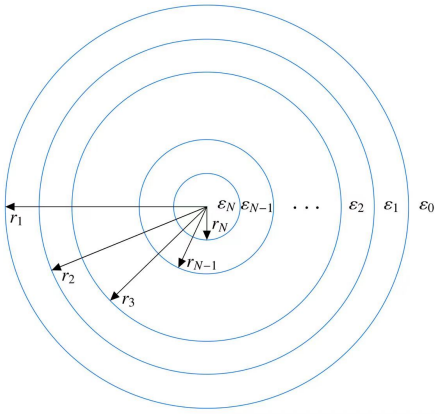


图 1. N层弹性结构示意图。

它们是满足以下强凸性条件的实常数,

$$\mu > 0 \quad \text{and} \quad d\lambda + 2\mu > 0. \tag{2.3}$$

(λ, μ) 是本研究中的参考弹性构型。 ε_0 设为正数，因此 $\underline{\varepsilon_0} \cdot (\lambda, \mu)$ 在矩阵 $\mathbb{R}^d \backslash D$ 中定义了一种常规弹性材料。对于 N 层结构，我们将 ε_c 设为以下形式

$$\varepsilon_c(\mathbf{x}) = \varepsilon_j, \quad \mathbf{x} \in D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.4}$$

其中

$$\varepsilon_j \in \mathbb{C} \text{ with } \Im\varepsilon_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.5}$$

也就是说， ε_c 具有分层分片常数结构。若 $\Re\varepsilon_j > 0$，则$\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu$在$D_j$中定义了一种常规弹性材料，其体积模量为 $\Re\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu$，显然满足式（2.3）中的强凸性条件； $\Im\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu)$ 表示该材料的损耗/阻尼参数。若 $\Re\varepsilon_j \leq 0$，则 $\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu)$ 在D_j中定义了一种弹性超材料，其体积模量 $\Re\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu)$ 显然违反了凸性条件（2.3）。本文将 $\varepsilon_j \cdot (\lambda, \mu)$（其中 $\Re\varepsilon_j \leq 0$）称为D_j中的负弹性材料。

总之，我们考虑一种相当一般的多层结构，其层数可以任意设定，且每一层中的材料可以是常规材料，也可以是负材料。此外，各层的材料参数可以彼此不同。

2.2. 弹性静力散射与动量矩阵。令 $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}) = (\mathrm{C}^{ijkl}(\mathbf{x}))^d_{i,j,k,l=1}$为一个四阶张量，使得

$$\mathbf{C}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}} = (\mathrm{C}_{ijkl}), \quad \mathrm{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) := \tilde{\lambda}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{kl} + \tilde{\mu}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} + \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) \in \mathbb{R}^d,$$

˜其中， $\boldsymbol{\delta}$ 为克罗内克δ， λ和 ˜μ为（2.2）中定义的弹性模量。相应的 Lam´é 算子$\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}$ 定义为

$$\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}\mathbf{u} := \nabla \cdot \mathbf{C}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}\nabla^s\mathbf{u} = \tilde{\mu}\Delta\mathbf{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{2.6}$$

其中应变张量为

$$\nabla^s\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T),$$

其中，$\mathbf{u}$ 是一个取值于 $\mathbb{C}^d$ 的函数，表示弹性形变场；T 表示矩阵的转置。

与式（2.2）–（2.4）所述的多层弹性结构构型相对应，弹性静力散射由以下拉梅´方程组控制:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}\mathbf{u} = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u} - \mathbf{H} = O(|\mathbf{x}|^{1-d}), & |\mathbf{x}| \to \infty, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中，位移场 $\mathbf{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)^d$，以及背景场 $\mathbf{H}$ 满足 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\mathbf{H} = 0$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中，且 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$定义见式（2.6），其中下标替换为 λ 和μ。

下文中，我们将研究范围限定在三维情形下的静电系统（2.7），并将在第5节给出相应的二维推广。回顾 [12,引理3。2], 其中引入了三类向量多项式:

$$\mathcal{T}_n^m(\mathbf{x}) = \nabla(r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})) \times \mathbf{x}, \quad n \geqslant 1, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$
$$\mathcal{M}_n^m(\mathbf{x}) = \nabla(r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})), \quad n \geqslant 1, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$

and

$$\mathcal{N}_n^m(\mathbf{x}) = \gamma_n^m r^{n-1} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x} + (1 - \frac{\gamma_n^m}{2n-1} - r^2)\nabla(r^{n-1} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{x}})),$$

其中

$$\gamma_n^m = \frac{2(n-1)\lambda + 2(3n-2)\mu}{(n+2)\lambda + (n+4)\mu}, \quad n \geqslant 1, \quad -(n-1) \leqslant m \leqslant n-1,$$

它们是 Lam´e$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\mathbf{u} = 0$ 在 $\mathbb{R}^d$中的解。通过直接计算，还可以验证

$$\widetilde{\mathcal{T}}_n^m(\mathbf{x}) = \nabla(r^{-n-1} Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})) \times \mathbf{x}, \quad n \geqslant 1, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n^m(\mathbf{x}) = \tilde{\gamma}_n^m r^{-n-2} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x} + (1 + \frac{\tilde{\gamma}_n^m}{2n+1} - r^2)\nabla(r^{-n-2} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{x}})), \quad n \geqslant 1, \quad -(n-1) \leqslant m \leqslant n-1,$$

where

$$\tilde{\gamma}_n^m = \frac{2(n+1)\lambda + (6n+11)\mu}{(n-1)\lambda + (n-5)\mu},$$

and

$$\widetilde{\mathcal{N}}_n^m(\mathbf{x}) = \nabla(r^{-n-1} Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})), \quad n \geqslant 1, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$

它们是原点以外区域内弹性系统 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\mathbf{u} = 0$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的解。

由于 $\{\mathcal{T}_n^m, \mathcal{M}_n^m, \mathcal{N}_n^m\}$ 构成一个完备系，我们可以假设背景场$\mathbf{H}$ 表示为

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\mathfrak{t}_{n,m}^0 \mathcal{T}_n^m + \mathfrak{m}_{n,m}^0 \mathcal{M}_n^m + \mathfrak{n}_{n,m}^0 \mathcal{N}_n^m). \tag{2.8}$$

那么，位移场 $\mathbf{u}$ 可以写成如下形式:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\mathfrak{t}_{n,m}^N \mathcal{T}_n^m + \mathfrak{m}_{n,m}^N \mathcal{M}_n^m + \mathfrak{n}_{n,m}^N \mathcal{N}_n^m), & \mathbf{x} \in D_N, \\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\mathfrak{t}_{n,m}^j \mathcal{T}_n^m + \mathfrak{m}_{n,m}^j \mathcal{M}_n^m + \mathfrak{n}_{n,m}^j \mathcal{N}_n^m) & \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\tilde{\mathfrak{t}}_{n,m}^j \widetilde{\mathcal{T}}_n^m + \tilde{\mathfrak{m}}_{n,m}^j \widetilde{\mathcal{M}}_n^m + \tilde{\mathfrak{n}}_{n,m}^j \widetilde{\mathcal{N}}_n^m), & \mathbf{x} \in D_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, \\ \mathbf{H} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (\tilde{\mathfrak{t}}_{n,m}^0 \widetilde{\mathcal{T}}_n^m + \tilde{\mathfrak{m}}_{n,m}^0 \widetilde{\mathcal{M}}_n^m + \tilde{\mathfrak{n}}_{n,m}^0 \widetilde{\mathcal{N}}_n^m), & \mathbf{x} \in D_0. \end{cases} \tag{2.9}$$

利用每一层上的传输条件，并运用向量球谐函数的正交性，可以将上述各项分离，得到不同的传输方程。为便于阐述，接下来我们主要考虑背景场仅包含一种模态的情况，其中 $n = 1$且 $m = 0$；关于这一点的进一步讨论，参见注释 2.2 。

假设背景场在 $\mathbb{R}^3$ 中均匀分布，即场 $\mathbf{H}$可表示为

$$\mathbf{H} = a_0 \mathcal{N}_1^0(\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

基于多层结构的对称性质，我们假设位移场$\mathbf{u}$ 采取如下形式

$$\mathbf{u} = \begin{cases} a_N \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_N, \\ a_j \mathcal{N}_1^0 + r^{-3} b_j \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1. \\ a_0 \mathcal{N}_1^0 + r^{-3} b_0 \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_0, \end{cases}$$

解**u** 满足传输条件

$$\mathbf{u}|_- = \mathbf{u}|_+ \quad \text{and} \quad \varepsilon_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_- = \varepsilon_{j-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_+ \quad \text{on} \quad S_j, \tag{2.11}$$

对于 $j = 1$、2、.....、N，其中 S_j 上的余法向导数（或牵引力）定义为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\nu} + \mu\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right)\boldsymbol{\nu} \tag{2.12}$$

其中， $\boldsymbol{\nu}$ 是S_j 的外单位法向量，并且

$$v|_\pm(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0^+} v(\mathbf{x} \pm h\boldsymbol{\nu}), \quad \mathbf{x} \in S_j,$$

对于任意函数v。接下来，我们定义

$$\beta_j = \frac{\frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j}{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.13}$$

现在给出多层结构外部扰动场**u** –**H** 的表示 .

定理 2.1。 设 **u** 是 *Lam´e* 系统 (2.1)–(2.7) 在 $\mathbb{R}^3$中的解，参数 ε_c 由(2.4)给出。设 **H**由 (2.10)给出。定义弹性动量矩阵 $\mathbb{P}_N$ 如下。

$$\mathbb{P}_N := \begin{bmatrix} \beta_1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_2/r_1)^3 & \beta_2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{N-1}/r_1)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{N-1}/r_2)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{N-1}/r_3)^3 & \cdots & -1 \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_N/r_1)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_N/r_2)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_N/r_3)^3 & \cdots & \beta_N \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

若 $\mathbb{P}_N$ 可逆，则 *Lam´*系统 (2.7) 存在唯一解，其解由以下公式给出：

$$\mathbf{u} - \mathbf{H} = r^{-3}\boldsymbol{e}^T \Upsilon_N (\mathbb{P}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e}\mathbf{H}, \tag{2.15}$$

其中 $\boldsymbol{e} := (1, 1, \ldots, 1)^T$， 且

$$\Upsilon_N := \begin{bmatrix} r_1^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_N^3 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

注 2.1。 显然，动量矩阵 $\mathbb{P}_N$ 的可逆性等价于 Lam´e 系统 (2.7) 的适定性。若 $\Re\varepsilon > 0$，即 $\mathbf{C}_{\tilde{\lambda},\,\tilde{\mu}}$ 为正则弹性介质，则 $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\,\tilde{\mu}}$ 是椭圆偏微分算子（偏微分算子），这保证了 (2.7) 的适定性，进而保证$\mathbb{P}_N$ 可逆。另一方面，如果某些层中的弹性材料为负，则 $\mathbb{P}_N$ 的椭圆性可能遭到破坏。尽管如此，对于这些负值材料（例如 ε_j），若有 $\Im\varepsilon_j > 0$，则$\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\,\tilde{\mu}}$ 的椭圆性仍可保持，因此 $\mathbb{P}_N$可逆。我们将在后续分析中对此进行说明。

注2.2. 我们指出，为了推导精确的扰动公式（2.15），这里只考虑均匀背景场的情形。然而，即使背景场包含更多模态，也应当可以利用形式（2.9）推导出相应的扰动公式。例如，若 $\mathbf{H} = \mathrm{t}^0_{n,m}\mathcal{T}^m_n$ 对于某些特定的 m和n成立，则位移场**u** 可写为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathrm{t}^N_{n,m}\mathcal{T}^m_n, & \mathbf{x} \in D_N, \\ \mathrm{t}^j_{n,m}\mathcal{T}^m_n + \tilde{\mathrm{t}}^j_{n,m}\widetilde{\mathcal{T}}^m_n, & \mathbf{x} \in D_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, \\ \mathrm{t}^0_{n,m}\mathcal{T}^m_n + \tilde{\mathrm{t}}^0_{n,m}\widetilde{\mathcal{T}}^m_n, & \mathbf{x} \in D_0. \end{cases}$$

通过采用与下文中定理2.1 证明类似的策略，可以推导出系数 $\tilde{\mathrm{t}}^0_{n,\,m}$ 的精确公式。如果背景场包含其他模态，例如 $\mathcal{M}^m_n$，表示公式可能会更加复杂，但这不会带来任何实质性困难。为简化起见，并更好地表达我们的主要思想，我们只研究均匀分布背景场的情形。

2.3. **定理 2.1 的证明**。 利用界面 S_j（$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$）两侧的传输条件（2.11），可以推导出以下方程

$$\begin{cases} a_j + b_j r_j^{-3} = a_{j-1} + b_{j-1} r_j^{-3}, \\ \varepsilon_j \left((3\lambda + 2\mu) a_j - 4\mu b_j r_j^{-3} \right) = \varepsilon_{j-1} \left((3\lambda + 2\mu) a_{j-1} - 4\mu b_{j-1} r_j^{-3} \right) \end{cases} \tag{2.17}$$

其中我们设 $b_N = 0$。利用（2.13）并对方程（2.17）作一些基本整理，可得

$$\begin{aligned} &\beta_1 (a_1 - a_0) + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \sum_{j=2}^{N} (a_j - a_{j-1}) \Big(\frac{r_j}{r_1} \Big)^3 = a_0, \\ &- \sum_{j=1}^{l-1} (a_j - a_{j-1}) + \beta_l (a_l - a_{l-1}) + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \sum_{j=l+1}^{N} (a_j - a_{j-1}) \Big(\frac{r_j}{r_l} \Big)^3 = a_0, \quad l = 2, 3, \ldots, N-1, \\ &- \sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j-1}) + \beta_N (a_N - a_{N-1}) = a_0. \end{aligned}$$

当弹性材料参数 ε_j、$j = 1$、2、.....N 均为正时，矩阵 $\mathbb{P}_N$ 可逆，此时有

$$\boldsymbol{a} = a_0 (\Xi (\mathbb{P}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}), \tag{2.18}$$

其中 $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, \ldots\ldots,\ a_N)^T$，而 Ξ 定义为

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

此外，由（2.17）中的第一个方程以及 $b_N = 0$，可得

$$\sum_{j=k}^{N} (a_j - a_{j-1}) r_j^3 = b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.20}$$

将（2.18）与（2.20）结合，可得

$$\boldsymbol{b} = a_0 \Xi^T \Upsilon_N (\mathbb{P}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e}, \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{b} := (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})^T$。提取 $\boldsymbol{b}$ 中的第一项，可得

$$\mathbf{u} - \mathbf{H} = r^{-3} b_0 \mathcal{N}_1^0 = r^{-3} a_0 \boldsymbol{e}^T \Upsilon_N (\mathbb{P}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e} \mathcal{N}_1^0 = r^{-3} \boldsymbol{e}^T \Upsilon_N (\mathbb{P}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e} \mathbf{H}.$$

证明完毕。

3. 极化激元共振的代数框架

本节将建立极化激元共振的代数框架。我们提到，为了分析极化激元共振现象，应考虑弹性材料不规则的情形，即（2.3）不再成立。

3.1. **极化激元共振**。 众所周知，极化激元共振通常与偏微分方程组所产生的某个特征值问题有关。我们还将研究与多层结构的弹性静力学系统相关的特征值问题。根据我们在注2.1中的早先讨论，如果参数ε_j、$j = 1$、2、.....、N均为正实数，则弹性静力系统（2.1）–（2.7）仅有平凡解，当$\mathbf{H} = 0$时。当允许参数取负值，即 $\varepsilon_j < 0$ 对于某个$j = 1$、2、.....、N时，我们寻求（2.1）–（2.7）的非平凡解。为简化分析，在后续研究中，我们始终假设

$$\xi := \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \quad \text{and} \quad t_j^i := (r_j / r_i)^3, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

and

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -\varepsilon^* + \mathrm{i}\delta, & j \quad \text{is odd}, \\ \varepsilon_0, & j \quad \text{is even}, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，ε^* 是待选取的正数，而 $\delta > 0$ 足够小，表示一个损耗参数。$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。定义

$$\beta = \frac{\xi\varepsilon_0 - \varepsilon^* + \mathrm{i}\delta}{\varepsilon_0 + \varepsilon^* - \mathrm{i}\delta}. \tag{3.2}$$

于是可以直接看出

$$\beta_j = \begin{cases} \beta, & j \quad \text{is odd}, \\ \xi - 1 - \beta, & j \quad \text{is even}, \end{cases}$$

对于$j = 1, 2, \ldots\ldots, N$。因此，扰动场（2.15）可改写为

$$\mathbf{u} - \mathbf{H} = r^{-3}\boldsymbol{e}^T \Upsilon_N (\beta I - \mathbb{K}_N^T)^{-1} \tilde{\boldsymbol{e}} \mathbf{H}, \tag{3.3}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{e}} := (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{N-1})^T$，矩阵 $\mathbb{K}_N$ 定义为

$$\mathbb{K}_N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{N-2} & (-1)^{N-1} \\ -\xi t_2^1 & \xi - 1 & 1 & \cdots & (-1)^{N-2} & (-1)^{N-1} \\ -\xi t_3^1 & \xi t_3^2 & 0 & \cdots & (-1)^{N-2} & (-1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\xi t_{N-1}^1 & \xi t_{N-1}^2 & -\xi t_{N-1}^3 & \cdots & (\xi - 1 + (-1)^{N-1}(\xi - 1))/2 & (-1)^{N-1} \\ -\xi t_N^1 & \xi t_N^2 & -\xi t_N^3 & \cdots & (-1)^N \xi t_N^{N-1} & (\xi - 1 + (-1)^N(\xi - 1))/2 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

接下来，我们给出极化激元共振的定义，以便后续研究。

定义 3.1。考虑与N层结构D相关的系统（2.7），其中弹性材料配置由（3.1）描述。若存在某种弹性材料配置，使得在损耗参数 δ 趋于零的极限情况下，相应的偏微分算子 $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\,\tilde{\mu}}$ 具有非平凡核，并由此诱发共振，则称发生了极化激元共振。

定理3.1。设 $\mathbf{u}$ 是 *Lam´e* 系统 (2.1)–(2.7) 在 $\mathbb{R}^3$中的解，参数 ε_c 取值见 (3.1)。若满足

$$\lim_{\delta \to 0} \beta = \beta^*,$$

其中 β^* 是 $\mathbb{K}_N$的一个特征值，则会发生极化激元共振。

证明。根据定义3.1，只需验证相应的偏微分算子$\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}$ 在 $\delta \to 0$时具有非平凡的核。为此，我们考虑以下 Lam´e 系统：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}} \mathbf{u} = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u} = O(|\mathbf{x}|^{1-d}), & |\mathbf{x}| \to \infty. \end{cases} \tag{3.5}$$

我们将寻找以下形式的解：

$$\mathbf{u} = \begin{cases} a_N \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_N, \\ a_j \mathcal{N}_1^0 + r^{-3} b_j \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, \\ r^{-3} b_0 \mathcal{N}_1^0, & \mathbf{x} \in D_0. \end{cases}$$

按照定理 2.1证明中的类似处理，可得

$$\begin{aligned} &\beta_1(a_1) + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \sum_{j=2}^{N} (a_j - a_{j-1}) \Big(\frac{r_j}{r_1}\Big)^3 = 0, \\ &-\sum_{j=1}^{l-1} (a_j - a_{j-1}) + \beta_l (a_l - a_{l-1}) + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \sum_{j=l+1}^{N} (a_j - a_{j-1}) \Big(\frac{r_j}{r_l}\Big)^3 = 0, \quad l = 2, 3, \ldots, N-1, \\ &-\sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j-1}) + \beta_N (a_N - a_{N-1}) = 0. \end{aligned}$$

即

$$(\beta I - \mathbb{K}_N^T) \Sigma^{-1} \boldsymbol{a} = 0, \tag{3.6}$$

其中 Σ 和 $\boldsymbol{a}$ 在定理 2.1的证明中定义。令 $\delta \to 0$，可得 $|\beta I - \mathbb{K}_N^T| = 0$，因此齐次线性方程组（3.6）有非平凡解。注意 $\Sigma^{-1}\boldsymbol{a} = (a_1, a_2 - a_1, \ldots\ldots, a_N - a_{N-1})$，

立即可得 a_j，$j = 1$，……，N均不恒为零，因此方程组（3.5）有非平凡解。□

接下来，我们将通过建立代数框架，找出合适的弹性材料构型，使偏微分算子 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ 具有非平凡的核。

3.2. **共振场与能量爆炸**。对于 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)^3$，，我们引入一个与拉梅参数 ´、μ 相关的双线性型，其定义为

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3} :&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu} \nabla^s \mathbf{v}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\lambda (\nabla\cdot\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{v})(\mathbf{x}) + 2\mu \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \nabla^s \mathbf{v}(\mathbf{x})\right] \mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，以下内容中也采用同样记法，$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \sum^3_{i,\ j=1} a_{ij} b_{ij}$表示两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})^3_{i,\ j=1}$和 $\mathbf{B} = (b_{ij})^3_{i,\ j=1}$。相应的二次型定义为

$$\mathbf{E}^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3}. \tag{3.8}$$

共振场表现出能量爆炸。接下来，类似于 [14,22], 我们给出极化激元共振的形式化定义。

定义 3.2。考虑与 2.7）相关的 N 层结构 D，其中弹性材料构型由（3.1）描述。若满足以下条件，则发生极化激元共振：

$$\lim_{\delta\to+0} \mathbf{E}^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}}(\mathbf{u}-\mathbf{H}) := \lim_{\delta\to+0} \langle \mathbf{u}-\mathbf{H}, \mathbf{u}-\mathbf{H}\rangle^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}} = +\infty.$$

其中，$\mathbf{E}^{\lambda,\mu}_{\mathbb{R}^3\setminus D}(\mathbf{u}-\mathbf{H})$ 由 (3.7)–(3.8给出，其中积分区域替换为 $\mathbb{R}^3 \setminus D$。

根据定义 3.2，极化激元共振模态与使参数 β 成为 $\mathbb{K}_N$ 的特征值的弹性材料构型平行，其中 $\delta \to 0$。因此，我们将重点研究矩阵 $\mathbb{K}_N$的特征值的显式计算，或 $|\mathbb{P}_N|$的根的精确公式。

3.3. 代数框架。本小节将推导极化激元共振与多层结构 D 中参数 ε_c 的选择之间的精确联系。通过观察 $|\mathbb{P}_N(\beta)|$, $4 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 6$ 的显式公式（详情见下文第 4.1 小节），我们在下述定理中给出关于所有 $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ 时 $|\mathbb{P}_N(\beta)|$ 显式公式的精妙结果。为便于表述，我们将多重指标 $(\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots, \mathrm{i}_m)$ 记作 i_m，并将其符号记作 $\tau_{\mathbf{i}_m}$，其定义如下

$$\tau_{\mathbf{i}_m} := (-1)^{\sum_{j=1}^m i_j}.$$

此外，我们用$C^{i,\ m}_{\ n}$表示所有从m 个元素中取n个元素的组合构成的集合，$m \leqslant n$，例如，对于一个组合

$$(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in C^{i,m}_n \quad \text{satisfying} \quad (i+1) \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_m \leqslant (n+i),$$

我们按升序排列它们，即$i_1 < i_2 < \cdots < i_m$。

定理 3.2。定义

$$q(\beta) := \beta^2 - (\xi - 1)\beta.$$

那么对于 $N \in \mathbb{N}$，有

$$|\mathbb{P}_N(\beta)| = \begin{cases} (-1)^L \left(\sum_{k=0}^{L} \xi^k q(\beta)^{L-k} \left(\sum_{\mathbf{i}_{2k} \in C^{0,2k}_N} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t^{i_{2l-1}}_{i_{2l}} \right) \right), & N = 2L, \\ \beta(-1)^L \left(\sum_{k=0}^{L} \xi^k q(\beta)^{L-k} \left(\sum_{\mathbf{i}_{2k} \in C^{0,2k}_N} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t^{i_{2l-1}}_{i_{2l}} \right) \right), & N = 2L+1. \end{cases} \tag{3.9}$$

注 3.1。定理 3.2 表明，若层数 N 为奇数，则方程 $|\mathbb{P}_N(\beta)| = 0$ 存在一个零根 $\beta = 0$。其余根包含在一个二次多项式中，该多项式的常数项是一个阶数为 ⌊N/2⌋ 的多项式方程的根。这里我们用 ⌊t⌋ 表示 t 的整数部分 $\in \mathbb{R}$。换言之，要解方程 $|\mathbb{P}_N(\beta)| = 0$，我们首先求解关于 q 的方程 $|\mathbb{P}_N(q)| = 0$，这是一个阶数为 ⌊N/2⌋ 的多项式方程。然后求解以下二次方程

$$\beta^2 - (\xi - 1)\beta - q = 0$$

以求出 $|\mathbb{P}_N(\beta)| = 0$ 的根。

我们将分析多项式方程 $|\mathbb{P}_N(\beta)| = 0$ 的所有根。注意，3.9 式中 $|\mathbb{P}_N(\beta)|$ 的显式公式也可以写成以下紧凑形式：

$$|\mathbb{P}_N(\beta)| = (-1)^{\lfloor N/2\rfloor}\beta^{N-2\lfloor N/2\rfloor}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor}\xi^k q(\beta)^{\lfloor N/2\rfloor-k}\left(\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_N^{0,2k}}\tau_{\mathbf{i}_{2k}}\prod_{l=1}^{k}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right)\right). \tag{3.10}$$

如前所述，为确保极化激元共振发生，必须求出多项式的根

$$f_N(q) := \sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor}\xi^k q^{\lfloor N/2\rfloor-k}\left(\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_N^{0,2k}}\tau_{\mathbf{i}_{2k}}\prod_{l=1}^{k}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right). \tag{3.11}$$

为此，我们给出关于 $f_N(q)$ 的根的以下基本结果：

定理 3.3. 设 $f_N(q)$ 由 (3.11) 定义，且 q^* 是 $f_N(q)$ 的根。那么，存在 $\lfloor N/2\rfloor$ 个实根，属于 $f_N(q)$。此外，有

$$q^* \in \left[-\frac{(\xi-1)^2}{4}, \xi\right] = \left[-\frac{(3\lambda-2\mu)^2}{4(3\lambda+2\mu)^2}, \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}\right]. \tag{3.12}$$

注 3.2。

(i) 根据定理3.3 可知，$|\mathbb{P}_N(\beta)|$ 的根均为实数值。事实上，对于方程q^* (3.11) 的任意实数解，可以推得多项式方程 $|\mathbb{P}_N(\beta)| = 0$ 有两个根，

$$\beta = \frac{\xi - 1 \pm \sqrt{(\xi-1)^2 + 4q^*}}{2},$$

结合这一点与 (3.12)，可得

$$\beta \in [-1, \xi] = \left[-1, \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}\right].$$

(ii) 我们还指出，若发生极化激元共振，则 (ε_{2j-1}、$j = 1$、2、.....、N中定义的参数3.1) 应具有负实部，即 $\varepsilon^* > 0$。事实上，若 $\varepsilon^* < 0$，根据 (β3.2) 中 的定义，可得

$$\Re\beta \in (-\infty, -1) \cup (\xi, +\infty).$$

因此，在这种情况下，由于矩阵 $\mathbb{K}_N$ 的谱位于 $[-1, \xi]$ 中，极化激元共振不可能发生。

接下来，我们将考虑层的半径极大时的情形。

定理 3.4. 设 $r_i = R + c_i$，其中 $R \gg 1$ 和 c_i 均为正则常数，$i = 1, 2, ..., N$。则多项式 (3.11) 可改写为

$$f_N(q) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor}(-1)^k\xi^k q^{\lfloor N/2\rfloor-k}C^k_{\lfloor N/2\rfloor} + O(1/R) = (q-\xi)^{\lfloor N/2\rfloor} + O(1/R). \tag{3.13}$$

备注 3.3。这表明，对于这样一组多层结构，当层数 N 为偶数时，可能的极化激元模式只有$\beta = -1, \xi$；当N为奇数时，则为 $\beta = 0, -1, \xi$。

4. 定理4. 的证明3.2–3.4

本节研究弹性静力系统的极化激元共振，这也有助于推导定理 3.2中的显式公式，进而简化定理 3.2–3.4的证明。

4.1. **特征值问题**。 如上所述，极化激元模态与弹性材料构型平行，这使参数 β 成为 $\mathbb{K}_N$ 在 $\delta \to 0$下的特征值。因此，本小节将重点研究矩阵 $\mathbb{K}_N$的特征值，或式（2.14）中定义的 $|\mathbb{P}_N|$的显式公式。为此，我们首先定义

$$P_M^i := \begin{bmatrix} \beta_i & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{i+1}/r_i)^3 & \beta_{i+1} & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{M-1}/r_i)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{M-1}/r_{i+1})^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_{M-1}/r_{i+2})^3 & \cdots & -1 \\ \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_M/r_i)^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_M/r_{i+1})^3 & \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu}(r_M/r_{i+2})^3 & \cdots & \beta_M \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

并令 $P_2^3 = 1$。

接下来，我们在以下引理中给出 $|\mathbb{P}_N|$的递推公式。

引理 4.1。 设 $N \geqslant 4$。则有以下递推公式：

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_N| = &\left(\beta_1 + (\beta_2 - \xi + 1)t_2^1\right)\left(\beta_N + (\beta_{N-1} - \xi + 1)t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^2| \\ &- \left(\beta_1 + (\beta_2 - \xi + 1)t_2^1\right)(\beta_{N-1} + 1)(\beta_{N-1} - \xi)t_N^{N-1}|P_{N-2}^2| \\ &- (\beta_2 - \xi)t_2^1(\beta_2 + 1)\left(\beta_N + (\beta_{N-1} - \xi + 1)t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^3| \\ &+ (\beta_2 - \xi)t_2^1(\beta_2 + 1)(\beta_{N-1} + 1)(\beta_{N-1} - \xi)t_N^{N-1}|P_{N-2}^3|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

证明。 记$\mathbf{E}_{i,\ j*k}$ 为将单位矩阵第j行的每个元素乘以k，再将所得结果加到第i行后得到的初等矩阵。因此，通过一些初等变换，我们可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_N| &= \left|\mathbf{E}_{N,(N-1)*(-t_N^{N-1})}\mathbf{E}_{1,2*(-1)}\mathbb{P}_N\mathbf{E}_{1,2*(-t_2^1)}^T\mathbf{E}_{N,(N-1)*(-1)}^T\right| \\ &= \begin{vmatrix} \beta_1 + (\beta_2 - \xi + 1)t_2^1 & -\beta_2 - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ (\xi - \beta_2)t_2^1 & \beta_2 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \xi t_{N-1}^2 & \cdots & \beta_{N-1} & -\beta_{N-1} - 1 \\ 0 & 0 & \cdots & (\xi - \beta_{N-1})t_N^{N-1} & \beta_N + (\beta_{N-1} - \xi + 1)t_N^{N-1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中我们只改变了第一行和第一列，以及最后一行和最后一列。根据记号（4.1）以及行列式的拉普拉斯展开定理，便有

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_N| = &\left(\beta_1 + (\beta_2 - \xi + 1)t_2^1\right)\left(\beta_N + (\beta_{N-1} - \xi + 1)t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^2| \\ &- \left(\beta_1 + (\beta_2 - \xi + 1)t_2^1\right)(\beta_{N-1} + 1)(\beta_{N-1} - \xi)t_N^{N-1}|P_{N-2}^2| \\ &- (\beta_2 - \xi)t_2^1(\beta_2 + 1)\left(\beta_N + (\beta_{N-1} - \xi + 1)t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^3| \\ &+ (\beta_2 - \xi)t_2^1(\beta_2 + 1)(\beta_{N-1} + 1)(\beta_{N-1} - \xi)t_N^{N-1}|P_{N-2}^3| \end{aligned} \tag{4.4}$$

对所有$N \geqslant 4$、$N \in \mathbb{N}$均成立。 □

接下来，我们将研究式（*4.1*）中定义的 P_m^i 的行列式对 $i \leqslant m$以及 β的依赖关系。通过直接计算，首先可得，当 $m \geqslant 1$时，

$$\begin{aligned} |P_{m+1}^m(\beta)| &= -\left(\beta^2 - (\xi - 1)\beta\right) + \xi t_{m+1}^m, \\ |P_{2m+1}^{2m-1}(\beta)| &= \left(-\left(\beta^2 - (\xi - 1)\beta\right) + \left(\xi t_{2m}^{2m-1} + \xi t_{2m+1}^{2m} - \xi t_{2m+1}^{2m-1}\right)\right)\beta, \\ |P_{2m+2}^{2m}(\beta)| &= (\xi - 1 - \beta)^2\beta + (\xi - 1 - \beta)\left(\xi t_{2m+1}^{2m} + \xi t_{2m+2}^{2m+1} - \xi t_{2m+2}^{2m}\right) \\ &= \left(-\left(\beta^2 - (\xi - 1)\beta\right) + \left(\xi t_{2m+1}^{2m} + \xi t_{2m+2}^{2m+1} - \xi t_{2m+2}^{2m}\right)\right)(\xi - 1 - \beta). \end{aligned} \tag{4.5}$$

将递推公式（4.2）与（4.5）结合，可得

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}_4(\beta)| &= \beta\left(1-t_2^1\right)(\xi-1-\beta)\left(1-t_4^3\right)\left(\beta(\xi-1-\beta)+\xi t_3^2\right)\\ &\quad -\beta\left(1-t_2^1\right)(\beta+1)(\beta-\xi)t_4^3(\xi-1-\beta)-(\beta+1)t_2^1(\beta-\xi)(\xi-1-\beta)\left(1-t_4^3\right)\beta\\ &\quad +(\beta+1)t_2^1(\beta-\xi)(\beta+1)(\beta-\xi)t_4^3\\ &= (\beta^2-(\xi-1)\beta)^2+\xi(\beta^2-(\xi-1)\beta)\sum_{(i,j)\in C_4^{0,2}}(-1)^{i+j}t_j^i+\xi^2t_2^1t_4^3.\end{aligned}\tag{4.6}$$

类似地，通过直接计算（但过程冗长且繁琐），我们得到

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}_5(\beta)| &= \beta\left(1-t_2^1\right)\beta\left(1-t_5^4\right)\left(-\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)+\left(\xi t_3^2+\xi t_4^3-\xi t_4^2\right)\right)(\xi-1-\beta)\\ &\quad -\beta\left(1-t_2^1\right)(\beta-\xi)(\beta+1)t_5^4\left(\beta(\xi-1-\beta)+\xi t_3^2\right)\\ &\quad -(\beta+1)t_2^1(\beta-\xi)\beta\left(1-t_5^4\right)\left(\beta(\xi-1-\beta)+\xi t_4^3\right)\\ &\quad +(\beta+1)t_2^1(\beta-\xi)(\beta-\xi)(\beta+1)t_5^4\beta\\ &= \beta\left(\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)^2+\xi\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)\sum_{(i,j)\in C_5^{0,2}}(-1)^{i+j}t_j^i+\xi^2\sum_{(i,j,k,l)\in C_5^{0,4}}\tau_{(i,j,k,l)}t_j^it_l^k\right).\end{aligned}\tag{4.7}$$

同理，

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}_6(\beta)| &= -\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)^3-\xi\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)^2\sum_{(i,j)\in C_6^{0,2}}(-1)^{i+j}t_j^i\\ &\quad -\xi^2\left(\beta^2-(\xi-1)\beta\right)\sum_{(i,j,k,l)\in C_6^{0,4}}\tau_{(i,j,k,l)}t_j^it_l^k+\xi^3t_2^1t_4^3t_6^5.\end{aligned}\tag{4.8}$$

观察上述结果（4.6）–（4.8，可得到推导定理3.2中精确公式的线索。接下来，我们用数学归纳法证明这一点。

定理 3.2 的证明。我们将用归纳法证明定理 3.2。根据 (3.9)，我们可以应用 (4.5) 推得 (3.9) 对 $1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 3$ 成立。假设 (3.9) 对所有 $\mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}_0, \mathrm{N}_0 \geqslant 4$ 均成立，我们证明它对 $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0+1$ 也成立。注意，$\mathfrak{q}(\xi-1-\beta) = \mathfrak{q}(\beta)$，下文中，为简便起见，我们用 $\mathfrak{q}$ 表示 $\mathfrak{q}(\beta)$。

情况 i： N_0 为偶数。由于（3.9）和（4.2）对所有 $N \leqslant N_0$ 均成立，且 $N = N_0+1$ 为奇数这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}_N(\beta)| &= \beta^2\left(1-t_2^1\right)\left(1-t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^2(\xi-1-\beta)|+\beta\left(1-t_2^1\right)(\xi-\beta)(\beta+1)t_N^{N-1}|P_{N-2}^2(\xi-1-\beta)|\\ &\quad +(\beta+1)t_2^1(\xi-\beta)\beta\left(1-t_N^{N-1}\right)|P_{N-1}^3(\beta)|+(\beta+1)^2t_2^1(\xi-\beta)^2t_N^{N-1}|P_{N-2}^3(\beta)|\\ &= \sum_{j=1}^4 d_j\mathcal{D}_j,\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中我们采用如下记号

$$d_1 = \beta^2\left(1-t_2^1\right)\left(1-t_N^{N-1}\right)(-1)^{N_0/2-1}(\xi-1-\beta),\quad d_2 = \beta\left(1-t_2^1\right)(\xi-\beta)(\beta+1)t_N^{N-1}(-1)^{N_0/2-1},$$
$$d_3 = (\beta+1)t_2^1(\xi-\beta)\beta\left(1-t_N^{N-1}\right)(-1)^{N_0/2-1},\qquad d_4 = (\xi-\beta)^2(\beta+1)^2t_2^1t_N^{N-1}(-1)^{N_0/2}\beta,$$

and

$$\mathcal{D}_j = \left(\sum_{k=0}^{N_0/2-1-\lfloor j/4\rfloor}\xi^k q^{N_0/2-k-1-\lfloor j/4\rfloor}\left(\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_{N-2-\lfloor j/2\rfloor}^{\lfloor (j+1)/2\rfloor,2k}}\tau_{\mathbf{i}_{2k}}\prod_{l=1}^k t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right)\right).\tag{4.10}$$

由（4.10），我们令

$$\mathfrak{A}_k := \sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_{N-2}^{1,2k}} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}, \quad \mathfrak{B}_k := \sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_{N-3}^{1,2k}} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}},$$
$$\mathfrak{C}_k := \sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_{N-3}^{2,2k}} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}, \quad \mathfrak{D}_k := \sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_{N-4}^{2,2k}} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}.$$

通过直接计算，我们推导出

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}_N(\beta)| = (-1)^{N_0/2}\beta\Bigg(& q\left(1-t_2^1\right)\left(1-t_N^{N-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{N_0/2-1}\xi^k q^{N_0/2-k-1}\mathfrak{A}_k\right)\\
&+(q-\xi)\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N_0/2-1}\xi^k q^{N_0/2-k-1}\mathfrak{B}_k\right)\\
&+(q-\xi)t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{N_0/2-1}\xi^k q^{N_0/2-k-1}\mathfrak{C}_k\right)\\
&+(q-\xi)^2 t_2^1 t_N^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N_0/2-2}\xi^k q^{N_0/2-k-2}\mathfrak{D}_k\right)\Bigg)\\
=:\ (-1)^{N_0/2}\beta&\left(\sum_{k=0}^{N_0/2}\xi^k q^{N_0/2-k}\mathrm{G}_k\right),
\end{aligned}$$

由此可见

$$\mathrm{G}_0 = \left(1+t_2^1 t_N^{N-1}-t_2^1-t_N^{N-1}\right)+\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}+t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)+t_2^1 t_N^{N-1} = 1, \tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_1 &= \left(1+t_2^1 t_N^{N-1}-t_2^1-t_N^{N-1}\right)\mathfrak{A}_1+\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}\mathfrak{B}_1+t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)\mathfrak{C}_1+t_2^1 t_N^{N-1}\mathfrak{D}_1\\
&\quad-\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}-t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)-2t_2^1 t_N^{N-1}\\
&= \sum_{\mathbf{i}_2\in C_N^{0,2}}\tau_{\mathbf{i}_2}t_{i_2}^{i_1},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中，最后一个等式是利用以下关系得出的

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1+\sum_{j=2}^{N-2}(-1)^{j+N-1}t_{N-1}^j, \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{C}_1+\sum_{j=3}^{N-1}(-1)^{2+j}t_j^2,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{D}_1+\sum_{j=3}^{N-2}(-1)^{2+j}t_j^2, \qquad \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{D}_1+\sum_{j=3}^{N-2}(-1)^{j+N-1}t_{N-1}^j.$$

我们还可以推导出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}_{N_0/2} &= -\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}\mathfrak{B}_{N_0/2-1} - t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)\mathfrak{C}_{N_0/2-1} + t_2^1 t_N^{N-1}\mathfrak{D}_{N_0/2-2} \\
&= -\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}\left(\sum_{\mathbf{i}_{N_0-2}\in C_{N-3}^{1,N_0-2}}\tau_{\mathbf{i}_{N_0-2}}\prod_{l=1}^{N_0/2-1}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right) \\
&\quad - t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)\left(\sum_{\mathbf{i}_{N_0-2}\in C_{N-3}^{2,N_0-2}}\tau_{\mathbf{i}_{N_0-2}}\prod_{l=1}^{N_0/2-1}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right) \\
&\quad + t_2^1 t_N^{N-1}\left(\sum_{\mathbf{i}_{N_0-4}\in C_{N-4}^{2,N_0-4}}\tau_{\mathbf{i}_{N_0-4}}\prod_{l=1}^{N_0/2-2}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right) \\
&= \left(t_2^1 t_N^{N-1}-t_N^{N-1}\right)(-1)^{N_0/2-1}t_3^2t_5^4\cdots t_{N-2}^{N-3} + \left(t_2^1 t_N^{N-1}-t_2^1\right)(-1)^{N_0/2-1}t_4^3t_6^5\cdots t_{N-1}^{N-2} \\
&\quad + t_2^1 t_N^{N-1}\left(\sum_{\mathbf{i}_{N_0-4}\in C_{N-4}^{2,N_0-4}}\tau_{\mathbf{i}_{N_0-4}}\prod_{l=1}^{N_0/2-2}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}\right) \\
&= \sum_{\mathbf{i}_{N_0}\in C_N^{0,N_0}}\tau_{\mathbf{i}_{N_0}}\prod_{l=1}^{N_0/2}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

此外，可以很容易地得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}_k &= \left(1+t_2^1t_N^{N-1}-t_2^1-t_N^{N-1}\right)\mathfrak{A}_k + \left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}(\mathfrak{B}_k-\mathfrak{B}_{k-1}) \\
&\quad + t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)(\mathfrak{C}_k-\mathfrak{C}_{k-1}) + t_2^1t_N^{N-1}(\mathfrak{D}_k-2\mathfrak{D}_{k-1}+\mathfrak{D}_{k-2}),
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

对所有 $k=2$，3，……，$N_0/2-1$。通过对方程（4.14）进行适当整理，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}_k &= \mathfrak{D}_k + \left(1+t_2^1t_N^{N-1}-t_2^1-t_N^{N-1}\right)(\mathfrak{A}_k-\mathfrak{C}_k-\mathfrak{B}_k+\mathfrak{D}_k) \\
&\quad + \left(1-t_2^1\right)(\mathfrak{B}_k-\mathfrak{D}_k) + \left(1-t_N^{N-1}\right)(\mathfrak{C}_k-\mathfrak{D}_k) \\
&\quad + \left(t_2^1t_N^{N-1}-t_N^{N-1}\right)(\mathfrak{B}_{k-1}-\mathfrak{D}_{k-1}) + \left(t_2^1t_N^{N-1}-t_2^1\right)(\mathfrak{C}_{k-1}-\mathfrak{D}_{k-1}) \\
&\quad - \left(t_2^1+t_N^{N-1}\right)\mathfrak{D}_{k-1} + t_2^1t_N^{N-1}\mathfrak{D}_{k-2},
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

对于 $k=2$、3、……、$N_0/2-1$。通过直接计算，可得以下关系：

$$
\mathfrak{B}_k-\mathfrak{D}_k = \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}}(-1)^2\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}}t_{i_1}^2\prod_{l=1}^{k-1}t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}}, \quad \mathfrak{C}_k-\mathfrak{D}_k = \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}}(-1)^{N-1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}}\prod_{l=1}^{k-1}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}}t_{N-1}^{i_{2k-1}},
\tag{4.16}
$$

and

$$
\mathfrak{A}_k-\mathfrak{C}_k-\mathfrak{B}_k+\mathfrak{D}_k = \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}}(-1)^{N+1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}}t_{i_1}^2\prod_{l=1}^{k-2}t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}}t_{N-1}^{i_{2k-2}}.
\tag{4.17}
$$

将 (4.16)–(4.17) 代入 (4.15)，并进行简单计算，可推得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}_k = \mathfrak{D}_k &+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} (-1)^{N+1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} t_{i_1}^2 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_{N-1}^{i_{2k-2}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} (-1)^{N+1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} t_{i_1}^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_N^{i_{2k-2}} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} (-1)^{N}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} t_{i_1}^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_{N-1}^{i_{2k-2}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} \tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} (-1)^{N+2} t_{i_1}^2 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_N^{i_{2k-2}} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}} (-1)^{2}\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}} t_{i_1}^2 \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}} (-1)\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}} t_{i_1}^1 \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}} (-1)^{N-1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}} \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_{N-1}^{i_{2k-1}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-1}\in C_{N-4}^{2,2k-1}} (-1)^{N}\tau_{\mathbf{i}_{2k-1}} \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_N^{i_{2k-1}} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-3}\in C_{N-4}^{2,2k-3}} (-1)^{2N}\tau_{\mathbf{i}_{2k-3}} t_{i_1}^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_N^{N-1} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-3}\in C_{N-4}^{2,2k-3}} (-1)^{2N+1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-3}} t_{i_1}^2 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l+1}}^{i_{2l}} t_N^{N-1} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-3}\in C_{N-4}^{2,2k-3}} (-1)^{N+3}\tau_{\mathbf{i}_{2k-3}} t_2^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_N^{i_{2k-1}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-3}\in C_{N-4}^{2,2k-3}} (-1)^{N+2}\tau_{\mathbf{i}_{2k-3}} t_2^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_{N-1}^{i_{2k-1}} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} (-1)^{3}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} t_2^1 \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} + \sum_{\mathbf{i}_{2k-2}\in C_{N-4}^{2,2k-2}} (-1)^{2N-1}\tau_{\mathbf{i}_{2k-2}} \prod_{l=1}^{k-1} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_N^{N-1} \\
&+ \sum_{\mathbf{i}_{2k-4}\in C_{N-4}^{2,2k-4}} (-1)^{2N+2}\tau_{\mathbf{i}_{2k-4}} t_2^1 \prod_{l=1}^{k-2} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}} t_N^{N-1} \\
= &\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_N^{0,2k}} \tau_{\mathbf{i}_{2k}} \prod_{l=1}^{k} t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}},
\end{aligned}
$$

这补全了N_0 为偶数时的证明。

情形 ii N_0 为奇数。证明沿用N_0 为偶数时的类似论证。我们仅作简要概述。首先，可以推导出

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{P}_N(\beta)| =&(-1)^{N/2}\Bigg(q\left(1-t_2^1\right)\left(1-t_N^{N-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{N/2-1}\xi^k q^{N/2-k-1}\mathfrak{A}_k\right) \\
&+q(q-\xi)\left(1-t_2^1\right)t_N^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N/2-2}\xi^k q^{N/2-k-2}\mathfrak{B}_k\right) \\
&+q(q-\xi)t_2^1\left(1-t_N^{N-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{N/2-2}\xi^k q^{N/2-k-2}\mathfrak{C}_k\right) \\
&+(q-\xi)^2 t_2^1 t_N^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N/2-2}\xi^k q^{N/2-k-2}\mathfrak{D}_k\right)\Bigg) \\
=&(-1)^{N/2}\left(\sum_{k=0}^{N/2}\xi^k q^{N/2-k}\mathrm{F}_k\right).
\end{aligned}
$$

与（4.11）–（4.13）类似，我们可以得到 $\mathrm{F}_0 = 1$ 和

$$
\mathrm{F}_1 = \sum_{\mathbf{i}_2\in C_N^{0,2}} \tau_{\mathbf{i}_2} t_{i_2}^{i_1}, \quad \mathrm{F}_{N/2} = t_2^1 t_4^3 \ldots t_N^{N-1}.
$$

我们还可以推导出，F_k，$k=2$，3，.....，$N/2-1$与（4.15）具有相同的形式，因此有 s

$$\mathrm{F}_k=\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_N^{0,2k}}\tau_{\mathbf{i}_{2k}}\prod_{l=1}^{k}t_{i_{2l}}^{i_{2l-1}},\quad k=2,3,\ldots,N/2-1.$$

证明完毕。 □

接下来，我们证明定理3.3。

定理 *3.3* 的证明。 反证法，假设

$$q^*\notin\left[-\frac{(\xi-1)^2}{4},\xi\right],\quad \text{or}\quad \Im q^*\neq 0. \tag{4.18}$$

结合（4.18）以及 $\beta^2-(\xi-1)\beta=q^*$，可得

$$\beta\notin[-1,\xi],\quad \text{or}\quad \Im\beta\neq 0.$$

由于 β 满足多项式方程 $|\mathbb{P}_N(\beta)|=0$，我们可以得到以下线性方程组存在非平凡解

$$\mathbb{P}_N(\beta)^T\mathbf{y}=\mathbf{0}, \tag{4.19}$$

其中 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$。接下来，对于 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)\in\mathbb{R}^3$，我们定义

$$\mathbf{u}=\begin{cases}a_N\mathbf{x}, & \mathbf{x}\in D_N,\\ a_j\mathbf{x}+b_j\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, & \mathbf{x}\in D_j,\quad j=N-1,N-2,\ldots,1\\ b_0\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, & \mathbf{x}\in D_0,\end{cases} \tag{4.20}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_N)^T$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,\ldots,b_{N-1})^T$ 由以下内容确定

$$\boldsymbol{a}=\Xi\mathbf{y},\quad \boldsymbol{b}=\Xi^T\Upsilon_N\mathbf{y},$$

其中 Υ_N 由（2.16）定义，且 Ξ 由（2.19）定义。然后可以验证，u 由（4.20）定义，是下式的解

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{\tilde\lambda,\tilde\mu}\mathbf{u}=0, & \text{in}\quad \mathbb{R}^3,\\ \mathbf{u}=O(|\mathbf{x}|^{-1}), & |\mathbf{x}|\to\infty,\end{cases} \tag{4.21}$$

其中

$$(\tilde\lambda,\tilde\mu)=\varepsilon(\mathbf{x})(\lambda,\mu)\quad\text{and}\quad \varepsilon(\mathbf{x})=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j\chi(D_j) \tag{4.22}$$

参数 ε_j 由下式给出

$$\varepsilon_j=\begin{cases}\frac{\beta-\xi}{\beta+1}\varepsilon_0, & \text{in}\quad D_j,\quad j\quad\text{is odd},\\ \varepsilon_0, & \text{in}\quad D_j,\quad j\quad\text{is even}.\end{cases} \tag{4.23}$$

No我们声称，$\mathbf{u}$ 在 $\mathbb{R}^3$中并非恒等于零向量。事实上，若 $\mathbf{u}\equiv\mathbf{0}$，则由（4.20）可得 at

$$\boldsymbol{a}+\Upsilon_N^{-1}M\boldsymbol{b}=0,\quad b_0=0, \tag{4.24}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

此外，通过使用跨越每一层边界的传输条件，我们得到

$$(I-M)\boldsymbol{b}=\Upsilon_N(I-M^T)\boldsymbol{a}. \tag{4.26}$$

将（4.24）与（4.26）合并，可得

$$(\Upsilon_N-M\Upsilon_NM^T)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}, \tag{4.27}$$

这意味着 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$。这是矛盾的，因为 $\boldsymbol{a} = \Xi\mathbf{y}$ 且 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$。因此，该命题得证。另一方面，利用格林公式 [2]，对于 Lam´é 算子，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon\nabla^s\mathbf{u} : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \sum_{j=0}^{N}\int_{D_j} \varepsilon_j\nabla^s\mathbf{u} : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= -\varepsilon_0\int_{S_1}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_+\cdot\mathbf{u}|_+\,d\sigma(\mathbf{x}) + \varepsilon_N\int_{S_N}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_-\cdot\mathbf{u}|_-\,d\sigma(\mathbf{x})\\ &\quad+\sum_{j=2}^{N}\varepsilon_{j-1}\left(\int_{S_{j-1}}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_-\cdot\mathbf{u}|_-\,d\sigma(\mathbf{x}) - \int_{S_j}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_+\cdot\mathbf{u}|_+\,d\sigma(\mathbf{x})\right)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(-\varepsilon_{j-1}\int_{S_j}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_+\cdot\mathbf{u}|_+\,d\sigma(\mathbf{x}) + \varepsilon_j\int_{S_j}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_-\cdot\mathbf{u}|_-\,d\sigma(\mathbf{x})\right)\\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.28}$$

其中，最后一个等式是利用界面 $S_j, j = 1, 2, \ldots, N.$ 另一方面，利用（4.23）还可得到

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon\nabla^s\mathbf{u} : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= \varepsilon_0\sum_{j=0}^{\lfloor N/2\rfloor}\int_{D_{2j}}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\beta-\xi}{\beta+1}\varepsilon_0\sum_{j=1}^{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\int_{D_{2j-1}}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

接下来，我们将证明分为两种情况。

情况 i $\beta \notin [-1, \xi]$。于是很容易看出

$$\frac{\beta-\xi}{\beta+1} > 0,$$

这意味着弹性材料参数 ε_j, j = 1, 2, . . . , N 均为正值。由弹性静力系统（4.21）的适定性可知，必有 u ≡ **0** in $\mathbb{R}^3$。事实上，根据（4.29），并利用 ∇^su(x) : C$_{\lambda,\mu}\nabla^s$u(x) ⩾ 0，可得 ∇^s u(x) : C$_{\lambda,\mu}\nabla^s$u(x) = 0 in $\mathbb{R}^3$。因此，由 [2], 可得

$$\mathbf{u} \in \boldsymbol{\Psi} = \mathrm{span}\left\{(1,0,0)^T,\ (0,1,0)^T,\ (0,0,1)^T,\ (\mathbf{x}_2,-\mathbf{x}_1,0)^T,\ (\mathbf{x}_3,0,-\mathbf{x}_1)^T,\ (0,\mathbf{x}_3,-\mathbf{x}_2)^T\right\},$$

这与**u** 在无穷远处的衰减行为一起，意味着**u** ≡ **0** in $\mathbb{R}^3$。

情形 ii $\Im\beta \neq 0$。它 t hen follows f由（4.29）可知hat

$$\Im\left(\frac{\beta-\xi}{\beta+1}\right)\sum_{j=1}^{\lfloor (N+1)/2\rfloor}\int_{D_{2j-1}}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \tag{4.30}$$

因此我们有

$$\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } D_{2j-1},\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor (N+1)/2\rfloor. \tag{4.31}$$

利用 [2] D´ 中的 Lam´e 算子所对应的D^{2j-1}上的格林公式，其中$j = 1, 2, \ldots, \lfloor (N+1)/2\rfloor$，以及跨越界面$S_{2j}$的传输条件，其中$j = 1, 2, \ldots, \lfloor N/2\rfloor$，可以推得

$$\sum_{j=0}^{\lfloor N/2\rfloor}\int_{D_{2j}}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

因此，我们还有

$$\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } D_{2j},\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor N/2\rfloor. \tag{4.32}$$

结合（4.31）与（4.32），可得 $\nabla^s\mathbf{u}$（x） : C$_{\lambda,\mu}\nabla^s\mathbf{u}$（x） = 0 属于 $\mathbb{R}^3$。因此，**u** ≡ **0** 属于 $\mathbb{R}^3$。我们已经证明，对于 $\beta \notin [-1, \xi]$ 或 $\Im\beta \neq 0$，**u** ≡ **0** 均成立，这与我们的假设矛盾。证明完毕。

□

4.2. 极端情形。在本小节中，我们考虑层的半径极大的情况。值得一提的是，在这种情况下，地球或其他天体的结构也可以用该模型描述。为在数学上描述这种情形，我们设$r_i = R + c_i$，其中$R \gg 1$和c_i为正常数，$i = 1$、2、.....、N。于是我们有

$$t_j^i = (r_j/r_i)^3 = 1 + O(1/R). \tag{4.33}$$

Let

$$h_{N,k} := \sum_{\mathbf{i}_k \in C_N^{0,k}} \tau_{\mathbf{i}_k}. \tag{4.34}$$

通过直接计算，我们得到

$$h_{N,1} = \sum_{\mathbf{i}_1 \in C_N^{0,1}} \tau_{\mathbf{i}_1} = ((-1)^N - 1)/2, \quad h_{N,2} = \sum_{\mathbf{i}_2 \in C_N^{0,2}} \tau_{\mathbf{i}_2} = -\lfloor N/2 \rfloor,$$

and

$$h_{N,N} = \sum_{\mathbf{i}_{2N+1} \in C_{2N+1}^{0,2N+1}} \tau_{\mathbf{i}_{2N+1}} = (-1)^{N(N+1)/2}, \quad h_{N,2\lfloor N/2 \rfloor} = \sum_{\mathbf{i}_{2\lfloor N/2 \rfloor} \in C_N^{0,2\lfloor N/2 \rfloor}} \tau_{\mathbf{i}_{2\lfloor N/2 \rfloor}} = (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor}.$$

此外，我们还可以观察到

$$h_{N,k} = h_{N-1,k} + (-1)^N h_{N-1,k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1, \tag{4.35}$$

and

$$h_{2N,2k-1} = \sum_{\mathbf{i}_{2k-1} \in C_{2N}^{0,2k-1}} \tau_{\mathbf{i}_{2k-1}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.36}$$

接下来，我们在以下引理中给出关于$h_{N,k}$的一些递推公式。

引理 4.2. 设 $h_{N,k}$ 由(4.34)给出。则有

$$h_{2N+1,2k} = h_{2N,2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.37}$$

and

$$\begin{aligned} h_{2N+2,2k} &= h_{2N+1,2k} - h_{2N+1,2k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, N, \\ h_{2N+1,2k-1} &= h_{2N-1,2k-1} - h_{2N-1,2k-3}, \quad k = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned} \tag{4.38}$$

证明。 首先，利用 (4.35) 和 (4.36)，我们得到

$$h_{2N+1,2k} = h_{2N,2k} - h_{2N,2k-1} = h_{2N,2k},$$

这验证了（4.37）。接下来，再次利用（4.35）和（4.36），我们得到

$$\begin{aligned} h_{2N+1,2k-1} &= h_{2N,2k-1} - h_{2N,2k-2} \\ &= -h_{2N,2k-2} \\ &= -h_{2N-1,2k-2} - h_{2N-1,2k-3} \\ &= h_{2N-1,2k-1} - h_{2N-1,2k-3}, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由以下事实得出

$$0 = h_{2N,2k-1} = h_{2N-1,2k-1} + h_{2N-1,2k-2}.$$

于是，式（4.38）中的第二个等式成立。为了证明式（4.38）中的第一个等式，我们将使用归纳法。容易验证，式（4.38）中的第一个等式在 $N \leqslant 4$ 时成立。假设它对$N \leqslant N_0 - 1$，$N_0 \geqslant 5$ 成立，我们来证明它对 $N = N_0$ 也成立。结合式（4.35）–（4.37）与式（4.38）中的第一个等式，最终得到

$$\begin{aligned} h_{2N_0+2,2k} &= h_{2N_0+1,2k} + h_{2N_0+1,2k-1} \\ &= h_{2N_0+1,2k} + h_{2N_0-1,2k-1} - h_{2N_0-1,2k-3} \\ &= h_{2N_0+1,2k} - h_{2N_0-2,2k-2} + h_{2N_0-2,2k-4} \\ &= h_{2N_0+1,2k} - h_{2N_0-1,2k-2} + h_{2N_0-1,2k-4} \\ &= h_{2N_0+1,2k} - h_{2N_0,2k-2} \\ &= h_{2N_0+1,2k} - h_{2N_0+1,2k-2}, \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

接下来，我们先证明定理3.4。

定理 *3.4*的证明。 利用（3.11）和（4.33），相应的多项式f_N（q）由下式给出 y

$$f_N(q) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor} \xi^k q^{\lfloor N/2\rfloor - k} h_{N,2k} + O(1/R), \tag{4.39}$$

其中$h_{N,2k}$可利用引理 4.2递归计算。利用初等组合理论，我们可以推可得

$$h_{N,2k} = (-1)^k C^k_{\lfloor N/2\rfloor}, \tag{4.40}$$

其中$C^k_{\lfloor N/2\rfloor}$表示从N 个元素中选取 $\lfloor N/2\rfloor$个元素的组合数。由（4.39）和（4.40）可得

$$f_N(q) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor} (-1)^k \xi^k q^{\lfloor N/2\rfloor - k} C^k_{\lfloor N/2\rfloor} + O(1/R) = (q-\xi)^{\lfloor N/2\rfloor} + O(1/R). \tag{4.41}$$

证明完毕。 □

5. Two dimensional case

本节为完整起见，考虑二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中的弹性静力学散射问题。

5.1. 扰动场的表示。设多层结构 D 的记号保持不变。假设背景场$\mathbf{H}$ 可表示为

$$\mathbf{H} = \tilde{a}_0 \mathbf{x}. \tag{5.1}$$

则位移场 $\mathbf{u}$ 具有如下形式

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \tilde{a}_N \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in D_N, \\ \tilde{a}_j \mathbf{x} + r^{-2}\tilde{b}_j \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in D_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, \\ \tilde{a}_0 \mathbf{x} + r^{-2}\tilde{b}_0 \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in D_0. \end{cases} \tag{5.2}$$

利用界面 $\{|x| = r_j\}$，$j = 1, 2, \ldots\ldots, N$两侧的传输条件，可推得

$$\begin{cases} \tilde{a}_j + \tilde{b}_j r_j^{-2} = \tilde{a}_{j-1} + \tilde{b}_{j-1} r_j^{-2}, \\ \varepsilon_j \left((2\lambda + 2\mu)\tilde{a}_j - 2\mu \tilde{b}_j r_j^{-2} \right) = \varepsilon_{j-1} \left((2\lambda + 2\mu)\tilde{a}_{j-1} - 2\mu \tilde{b}_{j-1} r_j^{-2} \right) \end{cases} \tag{5.3}$$

˜其中令$b_N = 0$。仿照定理 2.1证明中的类似论证，可得到以下结果：

定理 5.1。 设$\mathbf{u}$ 是 *Lam´e* 系统的解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}} \mathbf{u} = 0, & in \quad \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{u} - \mathbf{H} = O(|\mathbf{x}|^{-1}), & |\mathbf{x}| \to \infty, \end{cases} \tag{5.4}$$

˜其中 *Lam´e* 参数 λ 和 ˜μ 定义为

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \varepsilon(\mathbf{x})(\lambda, \mu) \quad and \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j \chi(D_j). \tag{5.5}$$

设 $\mathbf{H}$ 定义为(5.1) 且

$$\tilde{\beta}_j = \frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j}{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.6}$$

于是我们有

$$\mathbf{u} - \mathbf{H} = r^{-2} \boldsymbol{e}^T \tilde{\Upsilon}_N (\tilde{\mathbb{P}}_N^T)^{-1} \boldsymbol{e} \mathbf{H}, \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{e} := (1, 1, \ldots, 1)^T$，矩阵 $\tilde{\mathbb{P}}_N$ 和 $\tilde{\Upsilon}_N$ 定义为

$$\tilde{\mathbb{P}}_N := \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_2/r_1)^2 & \tilde{\beta}_2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_{N-1}/r_1)^2 & \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_{N-1}/r_2)^2 & \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_{N-1}/r_3)^2 & \cdots & -1 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_N/r_1)^2 & \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_N/r_2)^2 & \frac{\mu}{\lambda+\mu}(r_N/r_3)^2 & \cdots & \tilde{\beta}_N \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

and

$$\tilde{\Upsilon}_N := \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_N^2 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

5.2. **极化激元共振模态**。本小节中，我们研究 $\mathbb{R}^2$中的弹性静力系统的极化激元共振。与三维情形一样，我们将引入类似的结构设计，即假设ε_j，~j = 1，2，.....，N由（3.1）给出。于是容易看出，矩阵P_N在（3.6）中化简为

$$\tilde{\mathbb{P}}_N(\tilde{\beta}) := \begin{bmatrix} \tilde{\beta} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \zeta(r_2/r_1)^2 & \zeta - 1 - \tilde{\beta} & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta(r_{N-1}/r_1)^2 & \zeta(r_{N-1}/r_2)^2 & \zeta(r_{N-1}/r_3)^2 & \cdots & -1 \\ \zeta(r_N/r_1)^2 & \zeta(r_N/r_2)^2 & \zeta(r_N/r_3)^2 & \cdots & \left(\zeta - 1 + (-1)^N(\zeta - 1)\right)/2 + (-1)^{N-1}\tilde{\beta} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

其中

$$\zeta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{and} \quad \tilde{\beta} = \frac{\zeta\varepsilon_0 - \varepsilon^* + \mathrm{i}\delta}{\varepsilon_0 + \varepsilon^* - \mathrm{i}\delta}.$$

对于这样的设置，所有可能的极化激元共振模态都包含在以下方程的解中

$$|\tilde{\mathbb{P}}_N(\tilde{\beta})| = 0, \tag{5.11}$$

这等价于

$$\tilde{\beta}^{N-2\lfloor N/2\rfloor}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor}\zeta^k\left(\tilde{\beta}^2 - (\zeta-1)\tilde{\beta}\right)^{\lfloor N/2\rfloor - k}\left(\sum_{\mathbf{i}_{2k}\in C_N^{0,2k}}\tau_{\mathbf{i}_{2k}}\prod_{l=1}^{k}\left(\frac{r_{2l-1}}{r_{2l}}\right)^2\right)\right) = 0.$$

通过与定理3.3证明中类似的论证，我们可以得到

定理 ~5.2 **定理**。令 $\tilde{\mathbb{P}}_N(\tilde{\beta})$ 定义于(5.10)，并令 $\tilde{\beta}^*$ 为(5.11)的根。那么，存在 N 个实数值根 (5.11)。此外，我们有

$$\tilde{\beta}^* \in [-1, \zeta] = \left[-1, \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right]. \tag{5.12}$$

6. 数值算例

本节将给出一些数值算例，以验证前几节的理论结果。从理论角度来看（参见定理3.2），要找出任意多层结构的极化激元模态，只需找到特征多项式的根（3.9）。此外，根据定义 3.2，要展示极化激元共振现象，只需观察结构外部的弹性能，该能量由以下项决定

$$r^{-3}\boldsymbol{e}^T\Upsilon_N(\beta I - \mathbb{K}_N^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{e}}\mathbf{H}.$$

接下来，我们通过数值方法研究这两种情形。

6.1. 特征多项式的根。 首先，我们考虑各层半径等间距的情况。令$\varepsilon_0 = 1$。对于N层结构，设

$$r_i = N - i + 1, \quad i = 1, 2, \ldots N. \tag{6.1}$$

表1展示了特征多项式 $f_{19}(q)$ 在 $\xi = 3$ 和 $\xi = 0.8$ 条件下的根。在图2中，我们绘制了特征多项式 $f_{19}(q)$ 在 $\xi = 3$ 条件下、区间 [2.59 至 3.0] （大致为第四特征值与最后特征值之间的区间）内的取值，以及特征多项式 $f_{19}(q)$ 在$\xi = 0.8$ 条件下、区间 [0.13 至 0.8] （大致为第一特征值与最后特征值之间的区间）内的取值。有趣的是，区间内特征多项式的取值都非常接近于零（数量级为10^{-5}）。这些区间可能具有重要的应用潜力，例如用作地震波波导。

图表1. 由式（6.1）选取层时特征多项式的根。

	$N = 19$和 $\xi = 3$						
q		2.9691		2.9496		2.9185	
β	0	2.9923	-0.9923	2.9874	-0.9874	2.9795	-0.9795
ε_i	-3.0000	-0.0019	-517.0116	-0.0032	-315.5802	-0.0051	-194.3029
q		2.8668		2.7735		2.5941	
β		2.9664	-0.9664	2.9425	-0.9425	2.8958	-0.8958
ε_i		-0.0085	-118.0785	-0.0146	-68.6177	-0.0267	-37.3961
q		2.2295		1.5099		0.4949	
β		2.7971	-0.7971	2.5843	-0.5843	2.2227	-0.2227
ε_i		-0.0534	-18.7110	-0.1160	-8.6217	-0.2412	-4.1458
	$N = 19$和 $\xi = 0.8$						
q		0.7918		0.7866		0.7783	
β	0	0.7954	-0.9954	0.7925	-0.9925	0.7878	-0.9878
ε_i	-0.8000	-0.0026	-392.1546	-0.0042	-239.1326	-0.0068	-147.0737
q		0.7645		0.7396		0.6918	
β		0.7800	-0.9800	0.7658	-0.9658	0.7377	-0.9377
ε_i		-0.0112	-89.1786	-0.0194	-51.6170	-0.0358	-27.9008
q		0.5945		0.4026		0.1320	
β		0.6775	-0.8775	0.5424	-0.7424	0.2768	-0.4768
ε_i		-0.0730	-13.6950	-0.1670	-5.9869	-0.4098	-2.4404

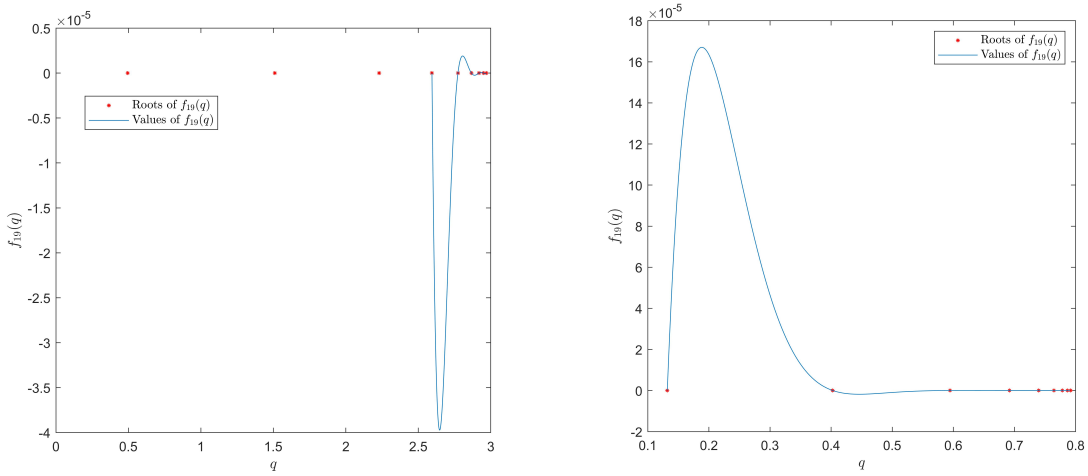


图2. 左图显示了当 $\xi = 3$ 位于区间 [2.59,3.0] 时 $f_{19}(q)$ 的值，右图显示了当 $\xi = 0.8$ 位于区间 [0.13, 0.8] 时 $f_{19}(q)$ 的值。

接下来，我们考虑半径以相同的尺度 s 递减的层，即

$$r_{i+1} = sr_i, \quad i = 1, 2, \ldots N-1. \tag{6.2}$$

令 $r_1 = 1$ 和 $s = 0.7$。表2列出了特征多项式 $f_{19}(q)$ 在 $\xi = 3$和 $\xi = 0.8$ 时的所有根。同样，在图3中也可以发现，多项式 $f_{19}(q)$ 在 $\xi = 3$ 取值范围 $[1.53, 2.27]$（约为第四特征值与最后特征值之间的范围）内的值，以及多项式 $f_{19}(q)$ 在 $\xi = 0.8$ 取值范围 $[0.05, 0.61]$（约为第一特征值与最后特征值之间的范围）内的值，都非常接近零。此外，值得一提的是，在这两种结构设置中，根 q 均为正值。对于 $N = 13$和 $N = 16$，也可以分别在图4和图5中观察到类似结果。

表 2. 由（6.2）选取层时，特征多项式的根。

	$N = 19$和 $\xi = 3$						
q		2.2677		2.2227		2.1412	
β	0	2.8077	-0.8077	2.7952	-0.7952	2.7724	-0.7724
ε_i	-3.0000	-0.0505	-19.7986	-0.0540	-18.5314	-0.0603	-16.5712
q		2.0119		1.8171		1.5334	
β		2.7355	-0.7355	2.6784	-0.6784	2.5917	-0.5917
ε_i		-0.0708	-14.1215	-0.0874	-11.4391	-0.1137	-8.7959
q		1.1403		0.6549		0.1979	
β		2.4630	-0.4630	2.2864	-0.2864	2.0945	-0.0945
ε_i		-0.1551	-6.4484	-0.2171	-4.6057	-0.2926	-3.4174
	$N = 19$和 $\xi = 0.8$						
q		0.6047		0.5927		0.5710	
β	0	0.6840	-0.8840	0.6764	-0.8764	0.6622	-0.8622
ε_i	-0.8000	-0.0689	-14.5228	-0.0738	-13.5583	-0.0829	-12.0654
q		0.5365		0.4846		0.4089	
β		0.6393	-0.8393	0.6033	-0.8033	0.5472	-0.7472
ε_i		-0.0981	-10.1980	-0.1227	-8.1490	-0.1634	-6.1211
q		0.3041		0.1746		0.0527	
β		0.4604	-0.6604	0.3297	-0.5297	0.1505	-0.3505
ε_i		-0.2325	-4.3008	-0.3537	-2.8274	-0.5645	-1.7715

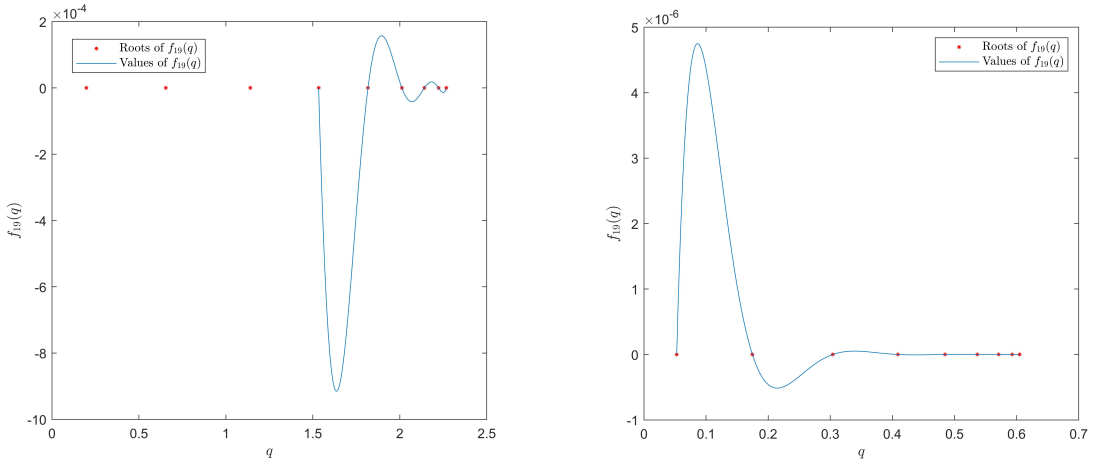


图3. 左图显示了当 $\xi = 3$ 位于区间 $[1.53,2.27]$ 时 $f_{19}(q)$ 的取值，右图显示了当 $\xi = 0.8$ 位于区间 $[0.05, 0.61]$ 时 $f_{19}(q)$ 的取值。

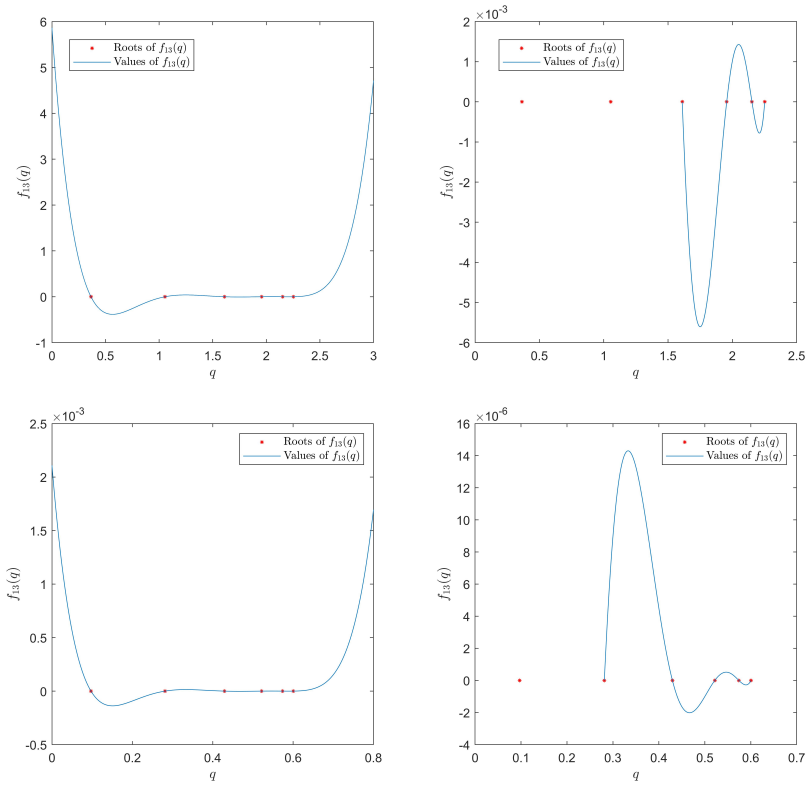


图4. 第一行的图显示了 $\xi = 3$ 条件下$f_{13}(q)$的取值，第二行的图显示了$\xi = 0.8$条件下$f_{13}(q)$的取值。

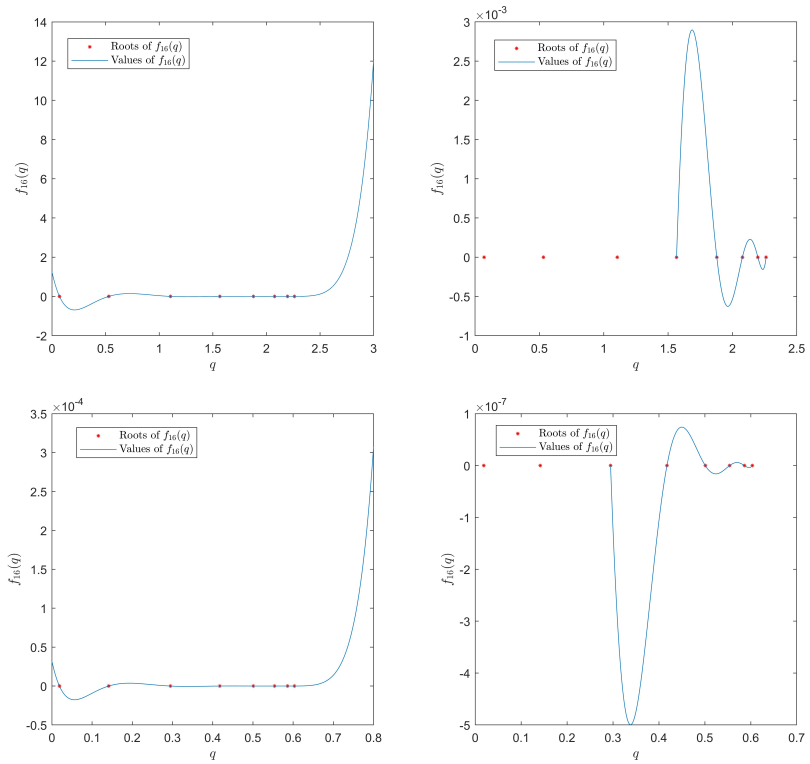


图5. 第一行的图显示了 $\xi = 3$ 条件下$f_{16}(q)$的取值，第二行的图显示了$\xi = 0.8$条件下$f_{16}(q)$的取值。

6.2. **极化激元共振示例**。在（3.1）中， ε_i 被替换为

$$\varepsilon_i = 9 \cdot 10^{-12}\left(1 - \frac{4 \cdot 10^{30}\delta^2}{1 + 10^{14}\delta \mathrm{i}}\right), \quad i \quad \text{is odd.} \tag{6.3}$$

我们在此将弹性矩张量定义为

$$\mathbf{M} := r_1^{-3}\Upsilon_N(\beta I - \mathbb{K}_N^T)^{-1}. \tag{6.4}$$

r_1^{-3} 在（6.4）中出现，其作用是缩小结构的尺度。在图6中，我们展示了由（6.4）定义的弹性矩张量的范数，该多层结构由（6.1）设计，其中$\xi = 3$ 且$N = 14$。可以看出，弹性矩张量范数的峰值与设置（6.3）中的极化激元模态相吻合。

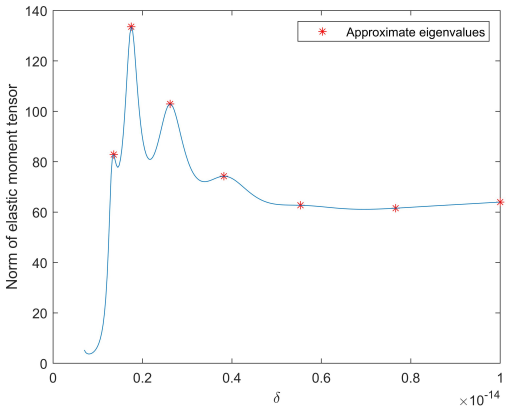


图 6. 由（6.1）选定各层时的弹性矩张量范数。

7. 结语

本文研究了相当一般的多层超材料结构的弹性静力散射，并利用弹性动量矩阵推导出精确的散射场。通过对动量矩阵进行高度复杂而细致的分析，我们建立了一个便于分析这类材料结构相关极化激元共振的代数框架，并得出了极化激元共振与结构几何及材料构型之间的明确关系。这为设计能够产生定制共振的超材料结构提供了便利。我们的研究开辟了一个引人入胜的后续发展方向，具有许多可能的拓展和应用。在实践中，多层结构可作为各种材料器件的构建模块。例如，通过采用更多层超材料，它可用于构建具有更宽SPR类（表面极化激元共振）频带的弹性波／地震波导。正如引言中所讨论的，它还可用于定量设计弹性散射系数消失结构，从而以严谨的理论依据实现具有增强隐身效应的弹性隐身斗篷器件。此外，我们的研究还可拓展至其他物理系统，包括电磁学和声学。我们将在后续工作中研究这些及其他拓展方向。

致谢

Y. Deng 的工作得到 NSFC-RGC 联合研究资助（编号：12161160314）和中国国家自然科学基金（编号：11971487）的支持。H. Liu 的工作得到 NSFC/RGC 联合研究计划（N CityU101/21）、ANR/RGC 联合研究计划（A-CityU203/19）以及香港研究资助局普通研究基金（项目编号：12302919、12301420 和 11300821）的支持。

数据可用性声明

这是一篇包含所有必要理论证明的数学论文。本研究没有需要报告的数据。

参考文献

[1] T. Abbas、H. Ammari、G. Hu、A. Wahab 和 J.C. Ye, 《二维弹性散射系数及近弹性隐身的增强》, 《弹性》, 128（2017）, 203–243。[2] H. Ammari、E. Bretin、J. Garnier、H. Kang、H. Lee 和 A. Wahab, 《弹性成像数学方法》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2015。[3] H. Ammari、G. Ciraolo、H. Kang、H. Lee 和 G. Milton, 《Neumann-Poincar´e 型算子的谱理论及异常局域共振导致的隐身分析》, 《理性力学与分析档案》, 208（2013）, 667–692。[4] H. Ammari、Y. Deng 和 P. Millien, 《纳米颗粒的表面等离激元共振及其在成像中的应用》, 《理性力学与分析档案》, 220（2016）, 109–153。[5] H. Ammari、H. Kang、H. Lee 和 M. Lim, 《利用广义极化张量消失结构增强近隐身。第一部分：电导率问题》, 《数学物理通讯》, 317（2013）, 253–266。[6] H. Ammari、H. Kang、H. Lee 和 M. Lim, 《近隐身的增强。第二部分：亥姆霍兹方程》, 《数学物理通讯》, 317（2013）, 485–502。[7] H. Ammari、H. Kang、H. H. Lee、M. Lim 和 S. Yu, 《完整麦克斯韦方程组的近隐身增强》, 《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 73（2013）, 2055–2076。[8] K. Ando、Y. Ji、H. Kang、K. Kim 和 S. Yu, 《环域上 Neumann-Poincar´e 算子的谱及线性弹性中由异常局域共振实现的隐身》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 49（2017）, 4232–4250。[9] K. Ando、Y. Ji、H. Kang、K. Kim 和 S. Yu, 《Neumann-Poincar´e 算子的谱性质及弹性静力系统中由异常局域共振实现的隐身》, 《欧洲应用数学杂志》, 29（2018）, 189–225。[10] G. Bouchitt´e 和 B. Schweizer, 《利用异常局域共振实现小物体隐身》, 《力学与应用数学季刊》, 63（2010）, 437–463。[11] Y. Deng、H. Li 和 H. Liu, 《弹性系统中纳米颗粒表面极化激元共振的分析》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 52（2020）, 1786–1805。[12] Y. Deng、H. Li 和 H. Liu, 《Neuman-Poincar´e 算子的谱性质及三维弹性静力学中的等离激元共振》, 《谱理论杂志》, 9（2019）, 767–789。[13] Y. Deng、H. Li 和 H. Liu, 《Neumann-Poincar´e 算子的谱性质及超越准静态极限的弹性力学异常局域共振》, 《弹性》, 140（2020）, 213–242。[14] Y. Deng、H. Liu 和 G. Zheng, 《弯曲纳米棒等离激元共振的数学分析》, 《纯粹与应用数学杂志》, 153（2021）, 248–280。[15] Y. Deng、H. Liu 和 G. Zheng, 《横向电磁散射中纳米棒的等离激元共振》, 《微分方程杂志》, 318（2022）, 502–536。[16] X. Fang 和 Y. Deng, 《多层结构中的等离激元模态》, arXiv:2201.12492。[17] X. Fang、Y. Deng 和 X. Chen, 《亥姆霍兹系统中 Neumann-Poincar´e 算子谱的渐近行为》, 《数学方法与应用科学》, 42（2019）, 942–953。[18] X. Fang、Y. Deng 和 J. Li, 《纳米结构中的等离激元共振与热生成》, 《数学方法与应用科学》, 38（2015）, 4663–4672。[19] D.M. Kochmann 和 G.W. Milton, 《负刚度相复合材料及非均质体有效模量的严格界》, 《力学与固体物理杂志》, 71（2014）, 46–63。[20] R.S. Lakes、T. Lee、A. Bersie 和 Y. Wang, 《含负刚度夹杂的复合材料中的极端阻尼》, 《自然》, 410（2001）, 565–567。[21] H. Li、S. Li、H. Liu 和 X. Wang, 《准静态近似之外等离激元夹杂的电磁散射分析及其应用》, 《ESAIM 数学建模与数值分析》, 53（2019）, 1351–1371。[22] H. Li 和 H. Liu, 《弹性静力系统中的异常局域共振》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 48（2016）, 3322–3344。[23] H. Li 和 H. Liu, 《超越准静态极限的异常局域共振与等离激元隐身》, 《英国皇家学会会刊 A 辑》, 474（2018）, 20180165。[24] H. Li、H. Liu 和 J. Zou, 《超越准静态近似的弹性动力学共振与负材料结构的隐身》, https://doi.org/10 1111 12555 。/sapm。[25] H. Li、J. Li 和 H. Liu, 《$\mathbb{R}^3$中由异常局域共振导致的准静态隐身》, 《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 75（2015）, 1245–1260。[26] H. Li、J. Li 和 H. Liu, 《诱发有限频率极化激元共振并通过异常局域共振实现隐身的新型弹性结构》, 《纯粹与应用数学杂志》, 120（2018）, 195–219。[27] H. Liu、W.-Y. Tsui、A. Wahab 和 X. Wang, 《三维弹性散射系数及弹性近隐身的增强》, 《弹性》, 143（2021）, 111–146。[28] M. Ruiz 和 O. Schnitzer, 《等离激元共振的细长体理论》, 《英国皇家学会会刊 A 辑》, 475（2019）, 20190294。[29] G. Milton 和 N. Nicorovici, 《与异常局域共振相关的隐身效应》, 《英国皇家学会会刊 A 辑》, 462（2006）, 3027–3059。

中南大学数学与统计学院，中国长沙 410083电子邮箱：youjundeng@csu.edu.cn, dengyijun 001@163.com -

中南大学数学与统计学院，中国长沙 410083电子邮箱：math klz@csu.edu.cn, math klz@163.com - -

香港特别行政区香港城市大学数学系，中国。电子邮箱：hongyu.liuip@gmail.com

中国湖南长沙中南大学数学与统计学院。电子邮箱：mtah zly@163.com -