arXiv:2302.14016v1 [math.CV] 27 Feb 2023

CR映射到一致伪凸超曲面的正则性及其在真全纯映射中的应用

JOSEF GREILHUBER 和 BERNHARD LAMEL

Abstract. 我们研究取值于带有非平凡 Levi 叶状结构的伪凸流形中的正余维 CR映射的正则性。我们引入一个不变量，可用于推断：从极小流形映入此类叶状目标中的任何充分正则的 CR映射，要么一般光滑，要么受到严格的几何约束；并可用于证明伪凸超曲面之间充分正则的 CR横截CR映射一般光滑。作为应用，我们讨论映入有界对称域的真全纯映射的边界正则性。

1. Introduction

本文致力于研究映入由复流形叶状分解的光滑 Levi 退化超曲面的 CR映射的正则性，并将这些结果应用于正余维真全纯映射的边界正则性。许多方面，正余维情形比等维情形更具挑战性，但它也有一些独特特征，使得映射正则性问题的自然答案略有不同。请参阅 [19]，中的讨论，作者在那里指出了若干关键问题；我们在此概述与本文方法相关的要点。考虑 CR映射 $h\colon M \to M'$，其中 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个 CR 子流形，$M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ 是一个超曲面（我们将 M 简称为源流形，将 M' 简称为目标）。除非明确说明，本文中的所有结构和流形均假定为光滑；我们的技术和结果也适用于其他范畴，稍后我们将在先陈述并讨论光滑情形下的结果后加以概述。

在本文讨论中，以下观察十分重要。首先，高余维正则性结论的典型结果是：在给定一定先验正则性的条件下，映射具有一般光滑性，也就是说，它在稠密开集上光滑。先验正则性不能低于某个阈值，例如 Low [22] 和 Stensones [26] 就证明了这一点。我们将采用的典型先验界与所考察映射的余维呈线性关系；除一个值得注意的例外外，所有已知结果都有这一特点。这个例外是“小”余维的球面之间的映射，参见 Huang [12]。

如 [20] 所示，若目标是 D'Angelo有限型（即不包含任何形式全纯曲线），则所有具有此类先验正则性的 CR映射都会自动具有一般光滑性。然而，如果排除某些典型的不光滑 CR映射，则 M' 为有限型这一条件并非必要。例如，由于在严格伪凸点附近总存在处处不光滑的 CR函数 φ （实际上，可以预先指定任意有限阶的光滑性），若目标包含一条复曲线 $\gamma(\zeta)$，便可得到一个处处不光滑的 CR映射 $\gamma \circ \varphi$。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32H40,32H02,32M15.

然而，正如 [20] 中针对光锥上的管状域的情形所指出的，在许多具有几何意义的情形下，这种行为是唯一的例外。我们的第一个主定理描述了这样一种情形。为了表述该定理，我们需要引入一个不变量，用来衡量由复流形构成的叶状结构的（非）退化性。

考虑由复流形 η_p 构成的 $M' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ 的叶状结构 η，其中 η_p 表示包含 p 的 η 的叶。对于每个 $p \in M'$，我们关联

$$\nu_p := \max_{0 \neq V_p \in T_p\eta} \dim_{\mathbb{C}} \ker \left(\bar{L}_p \to \mathbb{P}_{T\mathbb{C}^{N'}/T\eta}(\bar{L}_p V) \right) - \dim_{\mathbb{C}} \eta.$$

这里，$L_p V$ 表示在 p 处对 V_p 的（任意）光滑延拓 V 逐分量求导，并将结果投影到商空间 $T\mathbb{C}^N/T\eta$，其中 $T\eta \subset T\mathbb{C}^{N'}|_M$ 表示 η 的切丛，即 $T_p\eta = T_p\eta_p$。结果表明，这给出了一个良定义的不变量 ν_p，因为正如我们将在第 3.1 节所示，将 $\bar{L} \in T^{0,1}M'$ 和 $V \in \Gamma(T\eta)$ 关联到商丛 $T\mathbb{C}^{N'}/T\eta$ 的截面 $\mathbb{P}_{T\mathbb{C}^{N'}/T\eta}(\bar{L}V)$ 的映射具有张量性。

定理1。设 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ 是具有 *Levi* 叶状结构 η 的一致伪凸超曲面，并且对所有 $p' \in M'$ 都满足 $\nu_{p'} = 0$；设 M 是连通的 极小 ***CR***子流形。那么，任何 $C^{N'-1}$ 正则的 ***CR***映射 $h:\ M \to M'$ 要么一般光滑，要么将 M 完全映入该叶状结构中的某一个叶，即对任意 $p \in M$，都有 $h(M) \subseteq \eta_{h(p)}$。

如果 ν 非零，我们的第二个主要定理仍能保证自动正则性，前提是源流形 M 的正Levi特征值数量足够多，并且假设 h 是 CR横截的（这一条件在许多应用中会自动满足）。

定理2。设 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ 是一致伪凸超曲面，且 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是具有至少 n_+ 个正 ***Levi***特征值的 伪凸 超曲面。那么，任何正则性为 $C^{N'-n_+} \cap C^2$ 的 CR横截的 ***CR***映射 $h:\ M \to M'$ 在满足 $\nu_{h(p)} < n_+$ 的任意点 p 附近一般光滑。

我们注意到，在另一组假设下（正如我们稍后将看到的，这些假设与我们的不变量 ν并无直接关系），Xiao 在 [29, 定理 1] 中得到了处处正则性：更确切地说，在他的情形中，他考虑从强伪凸超曲面到具有相同符号差且 2-非退化的一致伪凸超曲面的映射；关键在于，此类映射按照 [16], 的意义自动是 2-非退化的，因此可以应用 [15, 17]中的定理。我们将在第 4.1 节稍后讨论其与我们结果的联系，并在此指出，$\nu = 0$ 尤其蕴含目标的 2-非退化性；然而，我们的假设并不蕴含我们所考虑的映射是 2-非退化的。我们还要指出 Kossovskiy、Xiao 与第二作者的论文 [14]中关于低余维的结果。

作为定理2的一个应用，我们得到以下关于真全纯映射的边界正则性结果：

推论1。设$\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ 和$\Omega' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ 为域，且 $M \subset \partial\Omega$、 $M' \subset \partial\Omega'$是分别包含在相应域的光滑边界部分中的两个超曲面。假设Ω' 在 M'处一致拟凸，而 M 是伪凸的，且至少有 n_+ 个正***Levi***特征值。那么，每个全纯映射 $H : \Omega \to \Omega'$，若可延拓为到 M 的 $C^{N'-n_+} \cap C^2$-正则映射，且将 M 映入 M'，则在满足 $\nu_{H(p)} < n_+$的任意 $p \in M$ 附近都是一般光滑的（在Ω上）。

在第5节中，我们将详细讨论作为定理2应用的映入伪凸域的真全纯映射，并证明一个关于映入经典对称域边界的映射的定理。通过仔细研究光滑边界分支的几何性质，我们可以计算每种情况下的不变量 ν，并得出以下定理；该定理显著推广了Xiao在 [29]中得到的结果：我们所考虑的源流形不再需要是严格伪凸的。为此付出的代价是，我们必须假设更高阶的先验正则性，而且只能得到一般光滑性。

定理3。 设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个 C^∞-光滑伪凸超曲面，并假设其*Levi*形式处处恰有 n_+ 个正特征值。记 M'为经典对称域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{N'}$边界的光滑部分。那么，在以下条件下，每个正则性为 $C^{N'-n_+}$ 的*CR*横截*CR*映射 $h: M \to M'$ 在 M的一个稠密开子集上都是光滑的：
(1) $\Omega = D^{m,n}_I$ 对于 m、$n \geq 2$ 和 $n_+ \subseteq \{m+n-3, m+n-2\}$;
(2) $\Omega = D^m_{II}$ 对于 $m \geq 4$ 和 $n_+ \subseteq \{2m-7, \ldots, 2m-4\}$; (3) $\Omega = D^m_{III}$ 对于 $m \geq 2$ 和 $n_+ = m-1$；或者(4) $\Omega = D^m_{IV}$ 对于 $m \geq 2$、M 是极小的，并且 $n_+ \leq m-2$。

我们指出，定理3尤其适用于经典对称域之间适当映射的边界值这一情形。

定理3中关于正Levi特征值数量的条件是尖锐的，具体来说：对于 $D^{m,n}_I$、D^m_{II} 和 D^m_{III}，分别存在满足 $n_+ = m+n-4$、$n_+ = 2m-8$ 和 $n_+ = m-2$的伪凸超曲面 M，使得存在处处不光滑、但连续可微次数任意高的CR横截CR嵌入 $h: M \to M'$。

另一方面，如果 M 的正Levi特征值数量超过定理3给出的上限（也就是 M' 的正Levi特征值数量），则根本不存在CR横截映射 $h: M \to M'$。

注1。 我们首先指出，在完全相同的假设下，可以在实解析范畴中得到相应结果。在这种情形下，结论是映射h 可延拓为源流形某个开稠密子集的一个完整邻域上的全纯映射。为此，可以使用 Mir [23] 关于实解析正则性的结果。我们还指出，如果源流形和目标流形都是实代数的，则可以利用 Coupet、Meylan 和 Sukhov [6] 关于代数性结果的证明，得出映射 h 是实代数的（这一结论具有全局性质）。

注记2. 代数情形中一个有趣的观察是，定理3和推论1给出了经典对称域对（Ω_1, Ω_2）的完整列表，使得每个真全纯映射 $H: \Omega_1 \to \Omega_2$, ，只要能以足够的初始正则性延拓至 $\partial\Omega_1$，且不将 $\partial\Omega_1$ 完全映入 $\partial\Omega_2$,的非光滑部分，就必然是代数映射。

注记3. 最后指出，我们上述所有结果同样适用于源流形未嵌入的情形，此时它是具有微局部延拓性质的“抽象”CR结构；在这种情况下，我们必须应用[21] 的结果，而非 [20]。本文的阐述尽量避免涉及这一较为技术性的方面；如有需要，读者可自行对表述作显而易见的修改。

本文源自第一作者的硕士论文 [11], , 其中首次证明了定理1、定理2和定理3的（略弱）版本。

2. Preliminaries

2.1. CR流形与Levi叶状结构。本节将回顾一些基本概念并统一记号。我们将研究复欧几里得空间中的光滑CR子流形

，分别记作 $M \subset \mathbb{C}^N$ 或 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$，以及CR映射 $h\colon\ M \to M'$。我们将记 $T^{0,1}M = \mathbb{C}TM \cap T^{0,1}\mathbb{C}^N$，并将标准复结构算子记作 J。

一个连续可微映射 $h\colon M \to M'$ 被称为 CR映射，当且仅当它保持其定义域的 CR结构，即如果 $h_*T^{0,1}_q M \subseteq T^{0,1}_{h(q)} M'$ 对所有 $q \in M$ 均成立。如果我们将 M' 到 $\mathbb{C}^{N'}$ 中的嵌入记为 ι，则一个等价的刻画是：$\iota \circ h\colon M \to \mathbb{C}^{N'}$ 是一个 CR映射，这意味着 h 的每个坐标分量都是 CR函数。

我们回顾一下，超曲面 $M \subset \mathbb{C}^{N'}$ 的 Levi形式定义为 $\mathcal{L}(\bar{L}, \bar{\Gamma}) = \frac{1}{2i}[\bar{L}, \Gamma]$ 模 $T^{0,1}M \oplus T^{1,0}M$；给定 M 的一个定义函数 ρ，我们定义 $\Theta = i(\partial\rho - \bar{\partial}\rho)$，并将 $\mathcal{L}_\Theta(\bar{L}, \bar{\Gamma}) = \frac{1}{2i}\Theta([\bar{L}, \Gamma])$ 称为 M 的标量 Levi形式。

我们的目标流形将是一致伪凸超曲面，也就是说，它们是 $\mathbb{C}^{N'}$ 的实超曲面，其 Levi 形式半正定，且处处具有恒定数目的零特征值和正特征值。事实证明，这些超曲面由复流形构成叶状结构。

本文中，η 的一个叶状结构是指一个 n维（实）流形 M 上由 k维浸入子流形组成的集合 $\{\eta_q\colon\ q \in M\}$，其中 $q \in \eta_q$，并且该集合将 M 划分为若干部分；也就是说，对于任意两个 $p,\ q \in M$，η_p 和 η_q 要么不相交，要么相同；并且对任意 $p \in M$，都存在 p 的一个邻域 O 以及坐标 $\phi\colon O \to \mathbb{R}^n$，使得对任意 $q \in O$，包含 q 的 $\eta_q \cap O$ 的连通分支恰好由坐标平面 $(\phi_1(p), \dots, \phi_{n-k}(p), \cdot, \dots, \cdot) \cap \phi(O)$ 给出。

于是，叶的切空间丛 $T\eta := \bigcup_{q\in M} T_q\eta_q$ 在 TM 上构成一个光滑可积分布。我们还将考虑叶的 CR切空间丛 $T^{0,1}\eta := \bigcup_{q\in M} T^{0,1}_q\eta_q$，为简便起见，始终记作 $T_q\eta := T_q\eta_q$ 和 $T^{0,1}_q\eta := T^{0,1}_q\eta_q$。

若 CR流形 M 的 Levi形式在点 $p \in M$ 的某个邻域 U 内秩为常数，则存在 U 的一个叶状结构 η，其叶为复流形，并且任意 $q \in U$ 处的 Levi 零空间恰好等于 q 处经过 q 的叶的 CR切空间；此叶状结构以下记为 $T^{0,1}_q\eta$。这一叶状结构最初由 Sommer [25] 在超曲面情形下发现，并由 Freeman [10] 证明其在一般 CR子流形情形下存在，因此称为*Levi*叶状结构。

定理4。设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个 *CR*流形，并假设其 *Levi*形式具有常秩。则存在一个 η 的叶状结构 U，其叶为复流形，使得对于 $q \in U$，*Levi* 零空间 $\mathcal{N}_q \subseteq T^{0,1}_q M$ 由 $T^{0,1}_q\eta$ 给出。

证明。设 $N_q = \{\frac{1}{2}(\bar{L}_q + L_q)\ \bar{L}_q \in \mathcal{N}_q\}$。由于 Levi 零空间的秩在 M 上处处为常数，其并集 $N = \bigcup_{q\in M} N_q$ 在 M 上给出了一个光滑实分布。根据 Frobenius定理，该分布的可积性等价于：对于每个 $q \in M$，N 在 q 处的截面的芽所构成的子模 $\Gamma_q(N)$ 在李括号运算下封闭。由于对于任意 $\bar{L},\ \bar{\Gamma} \in \Gamma(T^{0,1}M)$，我们有

$$[\tfrac{1}{2}(\bar{L} + L), \tfrac{1}{2}(\bar{\Gamma} + \Gamma)] = \tfrac{1}{4}[\bar{L}, \bar{\Gamma}] + \tfrac{1}{4}[L, \Gamma] + \tfrac{1}{4}[L, \bar{\Gamma}] + \tfrac{1}{4}[\bar{L}, \Gamma] = -\Im\left(\mathcal{L}(\bar{L}, \bar{\Gamma})\right),$$

给定的向量场芽 $\frac{1}{2}(\bar{L} + L) \in \Gamma_q(T^cM)$ 是 N 的截面，当且仅当 $[\frac{1}{2}(\bar{L} + L)\ \Gamma_q(T^cM)] \subseteq \Gamma_q(T^cM)$。取两个截面 $V, W \in \Gamma_q(N)$，于是可得 $[V, W] \subseteq [\Gamma_q(N)\ \Gamma_q(T^cM)] \subseteq \Gamma_q(T^cM)$，根据 Jacobi恒等式，

$$\begin{aligned}[[V, W], \Gamma_q(T^cM)] &\subseteq [V, [W, \Gamma_q(T^cM)]] - [W, [V, \Gamma_q(T^cM)]] \\ &\subseteq [V, \Gamma_q(T^cM)] - [W, \Gamma_q(T^cM)] \subseteq \Gamma_q(T^cM),\end{aligned}$$

这表明 $\Gamma_q(N)$ 在取李括号运算下确实是封闭的。因此，Levi叶状结构存在；又因为对于任意 $q \in M$，$N_q \subset T_q\mathbb{C}^N$ 都是一个复子空间，所以该叶状结构的叶都是复流形。□

2.2. **不规则CR映射与形式全纯叶状结构**。 尽管我们关注的是映射的正则性，但我们的结果是以反证的方式得出的：我们证明，不规则映射的存在会迫使某种几何性质成立（即复解析簇的存在，见下文定理5）。因此，我们将以此为指导原则，回顾几种存在不规则映射的自然情形。首先考虑CR函数，并对[4,定理27]稍作调整。

例1。 设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个强伪凸*CR*超曲面，且 $p \in M$。那么存在 p 的一个邻域 $O \subseteq \mathbb{C}^N$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，都存在一个 C^k光滑的*CR*函数 $\phi\colon\ O \cap M \to \mathbb{C}$，它在 $O \cap M$上处处不光滑。

由此立即可得，如果目标流形 M'包含一条复曲线 Γ，那么存在从 M 到M'的处处不光滑CR映射。事实上， Γ 的任意参数化 $t \mapsto \gamma(t)$都是从 $\mathbb{C}$ 到 M'的光滑CR浸入，因此 $\gamma \circ \phi\colon\ M \to M'$给出了一个正则性为 C^k的处处不光滑CR函数。对于形如 $M' = \hat{}M \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ 的目标及CR $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$函数 $h\colon\ M \to M$，我们还能得到另一类更一般的例子。这里，映射$(h,\ \phi)\colon\ M \to M \times \mathbb{C}$ 是一个CR映射，因为它的每个分量都是CR映射；它处处不光滑，因为 ϕ 处处不光滑。在[20], 中，Lamel和Mir证明了一个方向相反的结果，大意是：在一般点附近，任何处处不光滑的CR映射在形式上都呈现出这后一类例子的结构。

2.3. **形式叶状结构定理**。 在陈述我们将要使用的主要技术定理之前，先引入一些必要的概念。点 $p \in \mathbb{C}^{N'}$ 处维数为 r 的形式全纯子流形 Γ，就是一个形式幂级数 $\Gamma \in \mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_r]\!]^{N'}$, $\Gamma = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \gamma_\alpha t^\alpha$，满足 $\gamma_0 = p$ 且 $\operatorname{rk}(\Gamma'(0)) = r$。若集合 $S \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ 满足：对于任意一个在 S 上消失的 C^∞ 光滑函数 ρ 的芽， Γ 与 ρ 在 p 处的泰勒级数的复合都无穷阶消失，则称其无穷阶相切于集合 $S \subseteq \mathbb{C}^{N'}$。若 M 是一个 CR流形，且 $(\Gamma_q)_{q \in M}$ 是这类形式全纯子流形的一个族，那么如果其中每个系数都是 CR映射 $M \to \mathbb{C}^{N'}$，就称该族为一个*CR*族 。

事实证明，迫使 CR 映射具有光滑性的目标结构性质，是定义函数梯度的连续 CR 导数所能指向的不同方向数目。这促使我们引入以下数值不变量。对于 CR 映射 $h\colon M \to \mathbb{C}^{N'}$，令

$$r_0(p) := \dim_{\mathbb{C}} \left\langle \left\{ \rho_w \circ h(p) : \rho \in \mathscr{I}_{h(M)}(h(p)) \right\} \right\rangle,$$
$$r_k(p) := \dim_{\mathbb{C}} \left\langle \left\{ \bar{L}_1 \dots \bar{L}_j (\rho_w \circ h)(p) : \rho \in \mathscr{I}_{h(M)}(h(p)),\ \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_j \in \mathcal{V}_p(M),\ 0 \leq j \leq k \right\} \right\rangle,$$

其中，记 $\mathcal{V}_p(M)$ 为 p 处 CR 向量场芽的集合，记 $\mathscr{I}_S(p)$ 为 p 处光滑函数芽组成的芽理想，这些函数在给定集合 S 上为零。这里将复梯度 $\rho_w = \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial w_{N'}} \right)$ 视为 $\mathbb{C}^{N'}$ 中的一个向量。函数 $q \mapsto r_k(q)$ 取整数值且下半连续，因为它由一组连续变化向量的秩给出。当然，只有当 $h \in C^k$ 时， $r_k(p)$ 才有定义，因为 $\rho_w \circ h$ 的正则性至多与 h 相同。为了提取 h 的一个整体不变量，令 r_k 为满足 $r_k(p)$ 在 M 的一个稠密开子集上 $\geq r_k$ 的最大值。现在我们可以陈述 Lamel 和 Mir 的形式叶状结构定理（ [20] 中的定理 2.2）。

定理5。 设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个 C^∞-光滑极小 *CR* 子流形，给定整数 k、$l \in \mathbb{N}$，满足 $0 \leq k \leq l \leq N'$且 $N' - l + k \geq 1$，并且 $h\colon\ M \to \mathbb{C}^{N'}$是一个 $C^{N'-l+k}$类的 *CR*映射。假设 $r_k \geq l$，且存在一个非空开子集 M_1，它属于 M，在该子集上 h 处处不为 C^∞。那么，存在一个稠密开子集$M_2 \subseteq M_1$，使得对每个 $p \in M_2$，都存在 p的一个邻域 $V \subseteq M_2$，以及一个

整数 $r \geq 1$ 和一个 C^1-光滑 *CR*族，其成员为形式复子流形 $(\Gamma_\xi)_{\xi \in V}$，维数为 r，经过 $h(V)$，且对于每个，在 (ξ)处与 $h(M)$具有无穷阶切触。

定理陈述中的全纯流形族的秩 r 仅仅是为了提醒读者，在具体情形下，我们可以期待其秩大于一。由于没有给出这种情形可能出现的条件，因此在将该定理作为黑箱应用时，我们只能满足于具有非零导数的全纯曲线的 CR 族，而这总可以通过将 $\Gamma_q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \gamma_\alpha(q) t^\alpha$ 限制到 $t = (t_1, 0, \ldots\ldots, 0)$ 来获得。

我们指出，如果 h 在 M 的稠密开子集上不是 C^∞-光滑的，那么存在一个开子集 $O \subseteq M$，使得 h 在 O 上处处都不是 C^∞-光滑的。原因很简单：所有满足 h 在 p 的某个邻域上 C^∞-光滑的点 $p \in M$ 所构成的集合是开集。如果该集合不稠密，那么其闭包的补集便是 M 的一个非空开子集；根据定义，h 在此处处都不是C^∞-光滑的。

另一个值得注意的有趣之处是，尽管由定理5得到的形式复流形与像 $h(M)$ 具有无穷阶切向相切性，但对非光滑集的无穷阶相切性，远没有乍看之下那么强。举个简单示例，取一个处处不光滑、但 C^1 函数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，并考虑它的图像 $S := \{(x, \phi(x)) \; x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$。那么，任何在 S 上消失的函数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，根据以下论证都必然在此处无穷阶消失：若$\rho_x$ 或 ρ_y 在某一点 $(x, \phi(x))$ 不消失，隐函数定理就会给出 S 在该点附近的一个光滑参数化，但这样的参数化并不存在。因此，ρ_x 和 ρ_y 都在 S 上消失，并且这一论证可以无限进行。因此，y-轴在定理5的意义下与 S 具有无穷阶切向相切性，但按通常意义，甚至不具有一阶相切性。然而，若 $h(M) \subseteq M'$对于某个光滑流形 M'成立，那么与 $h(M)$ 具有无穷阶相切性，显然意味着与 M'具有无穷阶相切性。

为应用定理5，我们需要 $0 \leq k \leq l \leq N'$ 使得 $r_k \geq l$。总可以选择 $k = l = 0$，但如果 h 将 M 映入一个CR子流形 $M' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$，则可以稍作改进（ [20]中的引理6.1）。

引理1。设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一个 C^∞-光滑*CR*子流形，且 $h : M \to \mathbb{C}^{N'}$ 是一个连续*CR*映射。若存在一个 C^∞-光滑*CR*子流形 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$，使得 $h(M) \subseteq M'$，则 $r_0 \geq N' - n'$，其中 $n' =$维数$_{CR} M'$。特别地，若 M'是极大实的，则 $r_0 = N'$。

如果可以保证存在足够多与 $h(M)$ 相切的 CR 方向，使得 M' 表现得像一个 Levi 非退化流形，那么我们便可以对梯度的一阶导数作出更多说明，从而得到关于 r_1的一个界。这里记录一个与 [20]中的引理6.2类似的结果，以备后用。

引理 2. 考虑一个 C^∞光滑的 *CR*子流形 $M \subset \mathbb{C}^N$、一个 C^∞光滑的实超曲面 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$以及一个连续可微 *CR* 映射 $h : M \to M'$，它将 $p \in M$映射到 $p' \in M'$。若 h在 p处是浸入的，且 M'的一个标量*Levi*形式 $\mathcal{L}_\Theta$在 $h_* T^0{}_p^{\perp} M$ 限制为非退化*Hermite*形式，那么在 p的某个邻域内有 $r_1 \geq$维数$_{CR} M + 1$。

证明。由于我们处于纯局部的情形，可以假设 $\mathcal{L}_\Theta$ 源自 M'的一个定义函数 ρ，使得对于任意两个 CR向量 $\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{N'} \bar{\Gamma}_j \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}|_{p'}$ —

和 $\bar{L}=\sum_{k=1}^{N'}\bar{L}_k\frac{\partial}{\partial\bar{w}_k}|_{p'}$，我们有

$$\mathcal{L}_\Theta(\bar{\Gamma},\bar{L})=\sum_{j,k=1}^{N'}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_j\partial\bar{w}_k}(p')\Gamma_j\bar{L}_k.$$

根据定义 $\bar{L}\rho_w=\sum_{j=1}^{N'}\bar{L}_k\frac{\partial^2\rho}{\partial w_j\partial\bar{w}_k}(p')$，因此利用$\mathbb{C}^{N'}$上的标准内积，我们可以将 $\mathcal{L}_\Theta(\bar{\Gamma},\bar{L})=\big((\bar{\Gamma}_1,\dots,\bar{\Gamma}_{N'})|\bar{L}\rho_w\big)_{\mathbb{C}^{N'}}$表示为。 h_*T^0上限制的Levi形式的非退化性，$_p{}^1M$恰好意味着映射 $h_*\bar{L}\mapsto\mathcal{L}_\Theta(\cdot,h_*\bar{L})$ 是 $h_*T^0{}_p{}^1M$与 $h_*T^0{}_p{}^1M$上的反线性泛函空间之间的同构。由于 h是浸入的， h_*是 $T^0{}_p{}^1M$与 $h_*T^0{}_p{}^1M$之间的同构。因此，将每个 $\bar{L}\in T^0{}_p{}^1M$映射到反线性泛函 $\mathcal{L}_\Theta(\cdot,h_*\bar{L})=\big(\cdot\,|\bar{L}(\rho_w\circ h)\big)_{\mathbb{C}^{N'}}$的映射是一个同构，特别地，这意味着 $\dim_{\mathbb{C}}\{\bar{L}(\rho_w\circ h):\bar{L}\in T^0{}_p{}^1M\}=\dim_{CR}M$。此外，对于任意非零的 $\bar{L}\in T^0{}_{p'}{}^1M'$，复梯度 $\rho_w(p')$ 本身与 $\bar{L}(\rho_w\circ h)$ 线性无关，理由如下。对于任意$\bar{\Gamma}=\sum_{j=1}^{N'}\bar{\Gamma}_j\frac{\partial}{\partial\bar{w}_j}|_{p'}\in T^0{}_{p'}{}^1M'$，相切性意味着

$$\Gamma\rho=\sum_{j=1}^{N'}\Gamma_j\frac{\partial\rho}{\partial w_j}(p')=\big((\bar{\Gamma}_1,\dots,\bar{\Gamma}_{N'})|\rho_w(p')\big)_{\mathbb{C}^{N'}}=0.$$

因此， $\rho_w(p')$ 位于 $\big\{(\bar{\Gamma}_1,\dots,\bar{\Gamma}_{N'})\text{ 的正交补中：}\ \bar{\Gamma}\in T^0{}_{p'}{}^1M'\big\}$而 $L(\rho_w\circ h)$ 不在其中，这表明它们线性无关。这意味着 $r_1(p)\geq\dim_{CR}M+1$；又由于 r_1是下半连续且取整数值的， $r_1\geq\dim_{CR}M+1$ 在 p 的某个邻域内成立，正如所声称的那样。□

由于我们还需要处理非浸入映射，下面指出前述证明的一个简单但略显繁琐的推论。

推论 2。 若对于一个 C^∞-光滑 ***CR***子流形 $M\subset\mathbb{C}^N$、一个 C^∞-光滑实超曲面 $M'\subset\mathbb{C}^{N'}$以及一个连续可微 ***CR*** 映射 $h:\ M\to M'$，其将 $p\in M$ 映射到 $p'\in M'$，存在一个包含 p的 ***CR***子流形 $S\subset M$，使得限制映射 $h|_S$ 满足引理 *2* 的假设，则 $r_1\geq$维数 $_{CR}S+1$ 在 M 中 p 的某个邻域内成立。

证明。 取 $T^0{}_p{}^1S$ 的一组基 $(\bar{L}_j)_{j=1}^{\dim_{CR}S}$。重述引理 2 的证明可知，对于 M 的任意定义函数 ρ，向量 $\rho_w(p')$ 和 $L_j(\rho_w\circ h)$ $1\leq j\leq\dim_{CR}S$ 线性无关，因此 $r_1(p)\geq\dim_{CR}S+1$。然而， $r_1(q)$ 在 M 上关于 q 下半连续，因此在 p 的某个邻域内 $r_1\geq\dim_{CR}S+1$，如所述。□

3. The invariant ν and the proof of theorem 1

作为由复流形叶状分解而成、且无条件正则性结论必然失效的超曲面的一个例子，Lamel 和 Mir 考虑了光锥上的管状域 $M':=\{(z_1,\dots,z_{N'-1},z_{N'}):\Re(z_1)^2+\cdots+\Re(z_{N'-1})^2=\Re(z_{N'})^2,\ z_{N'}\neq0\}$。他们得到了以下结果（ [20] 中的推论 2.6）。

定理 6。 设 $M\subset\mathbb{C}^N$ 是一个 C^∞ 光滑的极小 ***CR*** 子流形，且 $M'\subseteq\mathbb{C}^{N'}$ 是光锥上的管状域。则每个类为 $C^{N'-1}$、秩为 ≥3 的 ***CR*** 映射 $h:\ M\to M'$，在 M 的一个稠密开子集上都是 C^∞ 光滑的。

[20] 和 [19] 中给出的证明巧妙地利用了 M'的简单结构，因此不容易推广到更一般的情形。在本节中，我们将仔细定义引言（5）中提到的不变量 ν，并说明如何将其用于把定理 6 的观察推广到更

一般的情形，即 Levi 形式秩恒定的伪凸超曲面。稍后我们将看到，这类例子不仅涵盖光锥上的管状域，还包括所有经典不可约对称域边界的光滑部分。第6节将讨论映入这类目标的映射。

3.1. 映入一致伪凸超曲面。 鉴于 Levi 叶状结构（定理 4），定理 5 可能允许存在映入一致伪凸超曲面的处处不光滑映射，因为至少存在与目标流形无限阶相切的复流形；这与 D'Angelo有限型流形这一较简单的情形相反。事实上，任何与 M' 无限阶相切的形式复流形都必然与 Levi 叶状结构相切。

引理 3。 设 $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ 是一个带有 *Levi* 叶状结构 η 的一致伪凸超曲面，并设 $p' \in M'$。假设存在一条形式复曲线 $\Gamma = p' + t\gamma_t + \frac{t^2}{2}\gamma_{tt} + \dots$，它在 p' 处与 M' 二阶相切。那么 $\gamma_t \in T_{p'}\eta$。

证明。 形式复曲线 $\Gamma = p' + t\gamma_t + \frac{t^2}{2}\gamma_{tt} + \dots$ 与 M' 二阶相切，当且仅当由截断幂级数得到的曲线 $\tilde{\gamma}(t) = p' + t\gamma_t + \frac{t^2}{2}\gamma_{tt}$ 与其二阶相切。选取由定义函数 ρ 得到的半正定标量Levi形式 $\mathcal{L}_\Theta$，则有 $\mathcal{L}_\Theta(\gamma_t + iJ\gamma_t, \gamma_t + iJ\gamma_t) = \frac{d^2}{dtd\bar{t}}|_{t=0}\rho\circ\tilde{\gamma} = 0$，因为 $\rho\circ\tilde{\gamma}$ 二阶消失。但根据定理4，$\mathcal{L}_\Theta|_{p'}$ 的零空间由 $T^{0,1}_{p'}\eta$ 给出，这意味着 $\gamma_t \in T_{p'}\eta$。□

我们的主要技术工具是一个张量量，用于度量 $T\eta$ 的 CR截面存在性所面临的障碍。我们将 $T^\perp\eta := \bigcup_{p\in M'}(T_p\eta_p)^\perp$ 记为 $T\mathbb{C}^{N'}$ 中叶的切空间的正交补丛。

引理*4.* 设 M' 是一个流形，带有由复流形 η 构成的叶状结构。存在一个张量场 $R \in \mathcal{V}(M')^* \otimes \Gamma(T\eta)^* \otimes \Gamma(T^\perp\eta)$，使得对每个 $\bar{L} \in \mathcal{V}(M')$ 和 $\psi \in \Gamma(T\eta)$，都有 $\mathbb{P}_{T^\perp_p\eta_p}(\bar{L}|_p\psi) = R_p(\bar{L}|_p, \psi|_p)$。对于任意 $V_p \in T_p\eta_p$，$R_p(\cdot, V_p)$ 的核包含 $T^{0,1}_p\eta_p$。

证明。 定义 $R(\bar{L}, \psi) = \mathbb{P}_{T^\perp\eta}(\bar{L}\psi)$。显然，$R$在第一个位置上是 C^1-线性的，因为方向导数总是如此。对于 $T\eta$ 和 $f \in C^1(M)$ 的两个截面 V 和 W，我们有 $\bar{L}|_p(V + fW) = \bar{L}|_pV + f\bar{L}|_pW + (\bar{L}|_pf)W$。最后一项被投影到 $T^\perp_p\eta_p$ 时抵消，因此 R 在第二个位置上也具有 C^1-线性，故 R是一个张量。

现在考虑 $V_p \in T_p\eta_p$。我们可以构造一个截面 $V \in \Gamma(T\eta)$，使其满足$V|_p = V_p$，且在 η_p 上全纯、在 M' 上光滑。首先，我们为 η_p 选取一个全纯参数化 ϕ，将 $\phi_*^{-1}V_p$ 延拓为一个常向量场 $\tilde{V}$，并注意到 ϕ_*V 是全纯的，因为 $D\phi$ 具有全纯分量，且 V 是常量。为了得到一个向量场，我们只需将结果光滑地延拓到M'。但是现在，$\bar{L}|_pV = 0$若 $\bar{L} \in \Gamma(T^{0,1}\eta)$，这是因为 V 在 η_p 上全纯，而 $\bar{L}|_p$ 只沿着 η 求导。因此，$T^{0,1}_p\eta \subseteq \ker R_p(\cdot, V_p)$。□

接下来，我们需要处理这样一个问题：我们关注的CR映射 h 既未假设为浸入的，也未假设为 C^∞-光滑。在仔细验证一切无误后，我们将得到以下关于处处不光滑的CR映射存在性障碍的结果。

命题 1。 设有一个一致伪凸超曲面 M' 及其 *Levi*叶状结构 η、一个 *CR*流形 M 以及一个 C^1光滑的 *CR*映射 $h\colon M \to M'$，将点 $p \in M$ 映射到 $p' \in M'$。假设存在一个在 p 的邻域 $O \subseteq M$ 上定义的 C^1光滑 *CR*族形式复曲线 $(\Gamma_q)_{q\in O}$，使得对于每个 $q \in O$，Γ_q 在 $h(q)$ 处与 M' 二阶相切。则 $\gamma_t(p) \in T_{p'}\eta_{p'}$，并且$h_*T^{0,1}_pM \subseteq$ 核 $R_{p'}(\cdot, \gamma_t(p))$。

证明。 根据引理 3，我们知道在每个点 $q \in O$处， $\gamma_t(q) \in T_{h(q)}\eta_{h(q)}$， 因为$\Gamma_q$ 是在 $h(q)$处与 M' 二阶相切的形式复曲线。

现在考虑满足 $h_*L|_p \neq 0$的 $L \in \mathcal{V}(M)$。选取一个二维实子流形 $S \subseteq O$ ，使得 $L|_p$ 与 S相切，且 $h|_S$的导数在 p处具有满秩，因此 $h|_S$ 在 p附近是局部嵌入。于是，我们可以将定义在 $h(S)$ 上的 $\gamma_t \circ h^{-1}|_{h(S)}$延拓为定义在 p'的一个开邻域上的截面 $\tilde{\gamma}_t \in \Gamma(T\eta)$。由于 γ_t 和 $\tilde{\gamma}_t \circ h$ 在 S 上一致，且 L_p 只取沿 S的导数，因此

$$R_{p'}(h_*\bar{L}|_p, \gamma_t(p)) = \mathbb{P}_{T^{\perp}_{p'}\eta_{p'}}\left(h_*\bar{L}|_p\tilde{\gamma}_t\right) = \mathbb{P}_{T^{\perp}_{p'}\eta_{p'}}\left(\bar{L}|_p(\tilde{\gamma}_t \circ h)\right) = \mathbb{P}_{T^{\perp}_{p'}\eta_{p'}}\left(\bar{L}|_p\gamma_t\right) = 0,$$

这意味着 $h_*L|_p \in \ker R_{p'}(\cdot,\ \gamma_t(p))$。 □

为了在我们的情形中应用定理5，我们将使用引言中已提及的数值量 ν ，它衡量 $\ker R(\cdot,\ V)$ 的大小，以及一种计算该数值量的方法。

引理5. 设 M' 是带有 *Levi*叶状结构η的一致伪凸超曲面。对于 $p' \in M'$，我们定义

$$\nu_{p'} = \max_{0\neq V\in T_{p'}\eta} \dim_{\mathbb{C}} \ker R_{p'}(\cdot, V) - \dim_{\mathbb{C}} \eta.$$

那么 ν 是一个双全纯不变量，而函数 $q \to \nu_q$ 非负、取整数值且上半连续。

证明。 为证明双全纯不变性，设 $H : \mathbb{C}^{N'} \to \mathbb{C}^{N'}$ 是 p'附近的局部双全纯映射，并考虑 $H(M')$。其 Levi叶状结构为 $H(\eta)$。对于所有 $L \in \mathcal{V}(M')$和 $V \in \Gamma(T\eta)$，我们有 $(H_*L)(H_*V) = H_*(LV)$，因为 H 的雅可比矩阵仍是全纯的，因此与取反全纯导数可交换。此外，将 $H_*(T\eta^{\perp})$ 投影到 $TH(\eta)^{\perp}$ 上是一个同构，因为 $H_*(T\eta^{\perp})$ 是 $H_*(T\eta) = TH(\eta)$ 的另一个补空间。因此， R 在双全纯映射下通过与线性同构进行前后复合而变换，所以 ν 是不变量。这里我们选择了 $T\eta^{\perp}$，而不是更自然且与之同构的丛 $T\mathbb{C}^{N'}/T\eta$，因为这样可以简化后续计算。

显然， ν_q是整数值的；又因为 $T^0{}_q{}^1\eta \subseteq \ker R(\cdot, V)$，所以它非负。令 $\dim_{\mathbb{C}} \eta =: K$。为证明上半连续性，我们需要证明：对于所有 p'in M' 和 $l \in \mathbb{N}$， $\nu_{p'} \leq l$ ，都有 $\nu_q \leq l$ ，且对 p'的某个邻域内所有 q 均成立。首先注意，对于 $l \in \mathbb{N}$， $\dim_{\mathbb{C}} \ker R_{p'}(\cdot, V) \leq K + l$ 当且仅当 $\mathrm{rk} R(\cdot, V) \geq N' - 1 - K - l$。这一条件等价于：相对于 $T^0{}_{\cdot}{}^1M'$ 和 $T^{\perp}\eta$ 的一组光滑局部标架， $R(\cdot, V)$ 的矩阵表示中某个 $(N'-1-K-l)$ 阶子式非零。由齐次性可知， $\nu_{p'} \leq l$ 当且仅当对每个 $V \in \mathbb{S}^{2K-1} \subseteq T_{p'}$， $R(\cdot, V)$ 的某个（可能各不相同的）此类子式不为零。因此， $\nu_{p'} \leq K+l$ 当且仅当所有此类子式的平方和 $\sum_j |m_j|^2$ 在 $\{p'\}\times\mathbb{S}^{2K-1}$上不为零。由球面的紧致性，存在 p'的一个邻域O ，使得 $\sum_j |m_j|^2$ 在 $O\times\mathbb{S}^{2K-1}$上不为零，这说明 $\nu_q \leq l$ 在O上成立，从而推出上半连续性。□

为了计算 $\nu_{p'}$，下面的设置将会有所帮助。

引理6。 设 M' 是一个由维数为 K 的复流形叶状分解的伪凸超曲面。考虑一个点 $p' \in M'$ 以及一个经过 p' 的 $N'-K$ 维复流形 Σ，使得 $T_{p'}\eta \oplus T_{p'}\Sigma = T_{p'}\mathbb{C}^N$。如果 $S := M' \cap \Sigma$是强伪凸的，那么在 p'的某个开邻域上， M' 的 ***Levi*** 形式恰有 K 个零特征值，因此 M' 是一致伪凸超曲面，而 η 是其 ***Levi*** 叶状结构。

此外，与引理*4*中一样，由 $R^S(\bar{L}, V) = \mathbb{P}_{T^{\perp}\eta}(\bar{L}V)$给出的映射 $R^S \in \mathcal{V}(S)^* \otimes \Gamma(T\eta|_S)^* \otimes \Gamma(T^{\perp}\eta|_S)$是一个张量，并且 $\max^{0\neq V\in T_{p'}\eta}\dim_{\mathbb{C}}\ker R^S_{p'}(\cdot, V) = \nu_{p'}$。

证明。 设 Θ 是 M' 上的特征形式，使得相应的标量Levi形式 $\mathcal{L}_\Theta(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \frac{1}{2i}\Theta([L_1, \bar{L}_2])$ 为半正定。若 S在 p'处强伪凸，则 $\mathcal{L}_\Theta|_{T^{0,1}_{p'}S}$ 是严格正定的，因此根据初等线性代数， $\mathcal{L}_\Theta$ 至少有 $N'-1-K$ 个正特征值。由于经过 p' 的 K维叶 $\eta_{p'}$ 是一个复流形，因而是 Levi 平坦的，其余 K^- 个特征值必为零。现在考虑 $L \in \mathcal{V}(M)$和$V \in T_{p'}\eta_{p'}$时的$R_{p'}(L, V)$。对 $U \in T^{0,1}_{p'}S_{p'}$ 以及 $W \in T^{0,1}_{p'}\eta_{p'}$分解 $\bar{L}|_{p'} = U + W$。如引理4所证明的，$R_{p'}(W, V) = 0$，因此，当且仅当$R_{p'}(U, V) = R^S_{p'}(U, V) = 0$时，$R_{p'}(\bar{L}, V) = 0$。这意味着 $\ker R_{p'}(\cdot, V) = \ker R^S_{p'}(\cdot, V) \oplus T^{0,1}_{p'}\eta_{p'}$，从而证明了第二个断言。□

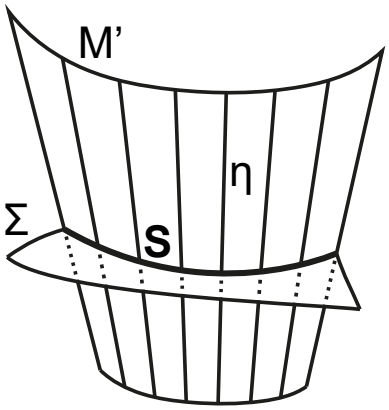

FIGURE 1. 引理6中的设定。

3.2. 情形 $\nu = 0$。 如果 R 的核即使在单个点处也具有极小维数，那么命题 1便推出定理1，从而完全推广了关于光锥上的管状域的结果；在给出证明之前，我们先证明光锥上的管状域满足 $\nu = 0$。

例 2。 设 $M' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ 为光锥上的管状域。它由复直线叶状分解；在任意满足 $\Re(p') \neq 0$ 的点 $p' \in M'$处， M'的*Levi*形式恰有一个零特征值，并且 $\nu_{p'} = 0$。

证明。 回忆一下，光锥上的管状域定义为满足 $\Re(z_1)^2 + \ldots \Re(z_{N'-1})^2 = \Re(z_{N'})^2$ 的点 $z \in \mathbb{C}^{N'}$所组成的集合。它是一个光滑的实超曲面，其中 $\Re(z_{N'}) \neq 0$，并由复直线 $q + t(\Re(q_1).....,\ \Re(q_{N'-1})\ \Re(q_{N'}))$叶状分解，$q \in M'$。事实上，我们来验证

$$\begin{aligned}
&\Re\left(q_1 + t\Re(q_1)\right)^2 + \cdots + \Re\left(q_{N'-1} + t\Re(q_{N'-1})\right)^2 \\
&= (1 + \Re(t))^2\left(\Re(q_1)^2 + \cdots + \Re(q_{N'-1})^2\right) \\
&= (1 + \Re(t))^2\Re(q_{N'})^2 = \Re\left(q_{N'} + t\Re(q_{N'})\right)^2.
\end{aligned}$$

超曲面 M' 是伪凸的，因为光锥内部上的管域是凸的。超曲面 $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^{N'} :$ 穿过 $p' \in M'$的 $z_{N'} = p'_{N'}\}$ 与 $\eta_{p'}$ 横截，并在 $S = \{z \in \mathbb{C}^{N'}$ 处与 M' 相交： $z_{N'} = p'_{N'}$, $\Re(z_1)^2 + \cdots + \Re(z_{N'-1})^2 = \Re(p'_{N'})^2\}$，这是$\Sigma$ 的一个强伪凸CR子流形，因为它是以一个强凸实流形为底的管域。为得到引理6的设定，现在只需对$T\eta$的一个截面 V计算 $R^S_{p'}(\bar{L}|_{p'},\ V|_{p'})$（因为 $T\eta$是一维的）。取 $V(q) = (\Re(q_1).....,\ \Re(q_{N'-1})\ \Re(q_{N'}))$，其中$q \in S$，并考虑一个CR向量 $\bar{L}|_{p'} \in T^{0,1}_{p'}S$。由于$\bar{L}|_{p'}\Re(q_{N'}) = 0$， $L|_{p'}V \in T_{p'}\Sigma$,

并且由于 $T_{p'}\Sigma$ 和 $T_{p'}\eta$ 处于一般位置， $R_{p'}^{S}(\bar{L}|_{p'},\ V|_{p'}) = 0$ 当且仅当 $\bar{L}|_{p'}V = 0$，即对于 $j = 1,$ ....., N'，$L|_{p'}(\Re(q_j)) = 0$。但由于 $L_{p'}q_j = 0$，这也当且仅当 $\bar{L}_{p'}\bar{q}_j = 0$ 成立，因此 $\bar{L}|_{p'} \in T^{0,}_{\ p'}{}^{1}S \cap T^{1,}_{\ p'}{}^{0}S = \{0\}$，从而证明了 $\nu_{p'} = 0$。□

定理*1*的证明。 若 h 不是一般光滑的，则存在一个开集 $U_0 \subseteq M$，使得 h 处处不光滑。引理1总能推出 $r_0 \geq 1$，因此我们可以应用定理5，取 $k = 0$ 和 $l = 1$，得到一点 $p \in M$、 p 的一个邻域 $U \subseteq U_0$ ，以及形式复曲线 $(\Gamma_\xi)_{\xi\in U}$ 的一个连续可微CR族，使得 Γ_ξ 在 $h(\xi)$ 处与 M' 切向接触至无穷阶。对于任意 $q \in U$，我们有 $\nu_{h(q)} = 0$，即 $\ker R(\cdot,\ \gamma_t(q)) = T^{0,}_{\ h}{}^{1}_{(q)}\eta$，因此由命题 1可得 $h_*T^{0,}_{\ q}{}^{1}M \subseteq T^{0,}_{\ h}{}^{1}_{(q)}\eta$。

在 $q \in U$ 附近且 h 足够光滑的点处，这意味着 $h^{-1}(\eta_{h(q)})$ 积分复切丛，因此，根据 M的极小性，它必须包含 q的一个开邻域。首先，取一个小开集 $O' \subseteq h(U)$，在其中可以选取适配于叶状结构的坐标，因此限制后的叶状结构 $\eta|_{O'}$ 带有流形结构。令 $\pi : O' \to \eta|_{O'}$ 表示到该叶状结构的投影，由 $\pi(q) = \eta_q \cap O'$给出。由于连续可微映射的秩是下半连续的，我们可以找到一个开子集 $\tilde{U} \subseteq h^{-1}(O')$，使得 $\pi \circ h$ 具有常秩。根据秩定理， $h^{-1} \circ \pi^{-1}(\eta_{h(q)}) = h^{-1}(\eta_{h(q)}) =: E_q$ 是 U 的一个子流形，并且 $V \in T_qM$ 满足 $(\pi \circ h)_*V = 0$ 当且仅当 $V \in T_qE_q$。然而，由于 $h_*T^{0}_{,\ q}{}^{1}M \subseteq T^{0,}_{h}{}^{1}_{(q)}\eta$，我们推知，对于任意 $q \in \tilde{U}$，都有 $T^{0}_{,\ q}{}^{1}M \subseteq \mathbb{C}T_qE_q$；这根据 E_q 的极小性意味着， E_q 已经是 U 中 q 的一个开邻域。

由此我们证明了， U 的一个非空开子集被映射到 M'的叶状结构中的单个叶 $\eta_{h(q)}$ 上。接下来只需证明， M 实际上都会被映射到$\eta_{h(q)}$中。令 $\mathcal{K}$ 表示所有点 $q \in M$的集合的闭包，其中每个点都具有一个被完全映射到$\eta_{h(q)}$中的开邻域。我们将证明 $\mathcal{K}$ 是开集。对于 $p \in \mathcal{K}$，取 $h(p)$的一个邻域$O' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ ，使得的连通分支（包含 $h(p)$）可表示为全纯映射 $\pi\colon\ O' \to \mathbb{C}^K$的零点集。于是， $\pi \circ h\colon\ h^{-1}(O') \to \mathbb{C}^K$ 是一个CR映射，并且由于 $p \in \mathcal{K}$， $\pi \circ h$ 必须在任意接近 p的开集上为零。然而，正如 [3, 定理III.3.13]的推论所示，任何在连通极小子流形上于一个开子集上消失的CR函数都必然恒等于零，因此 $h^{-1}(O')$的全部都必须被完全映射到 $\eta_{h(q)}$ 中，从而 p 位于 $\mathcal{K}$的内部。现在， $\mathcal{K}$ 既是开集又是闭集，因此 M 的连通性意味着 $\mathcal{K} = M$。□

4. CR transversal maps and proof of Theorem 2

如果我们要处理正 $\nu_{p'}$，就必须对映射和源流形作出更多假设；例如，若 $M' = M \times \mathbb{C}$ 对于某个严格伪凸 $M \subset \mathbb{C}^N$成立，那么 $\nu = N - 1$ 处处成立，而我们通常使用的例子 $z \mapsto (z,\ \varphi(z))$对于某个有限阶光滑但不光滑的CR函数 φ ，将会产生不光滑的CR映射。

我们在此采用的方法基于这样一个事实：若 $h_*T^{0,}_{\ p}{}^{1}M$ 与 $T_{p'}\eta_{p'}$的交集仅含零元素，那么只要$h_*T^{0,}_{\ p}{}^{1}M$ 具有足够的维数，我们就可以允许 $\nu_{p'}$ 大于零。特别地，当 M 是一致伪凸超曲面且具有足够多个正Levi特征值，并且 h满足一种常见的非退化条件，即*CR*横截性时，便是如此。

定义 1 （CR横截性）。若 CR 映射 $h\colon\ M \to M'$（定义在超曲面M上）到超曲面 M'，则称其在 $p \in M$处 CR横截，若 $T^{0,}_{\ h}{}^{1}_{(p)}M' + T^{1,}_{\ h}{}^{0}_{(p)}M' + h_*\mathbb{C}T_pM = \mathbb{C}T_{h(p)}M'$。

若 M 实际上是强伪凸的，且 $h\colon M \to M'$ 是 CR横截的，则 $h_*T^{0,1}_p M$ 具有最大维数，并与 $T^{0,1}_{p'}\eta_{p'}$ 交集为空。这是众所周知的事实，也是许多正则性结果证明中的关键组成部分（例如参见 [29]）。我们总结以下结论，以供后续使用：

引理 7. 考虑一个伪凸超曲面 M'、一个强伪凸超曲面 M 以及一个 C^2-光滑的 CR横截的 ***CR***映射 $h\colon M \to M'$，它将 $p \in M$ 映射到 $p' \in M'$。那么 h 是浸入，维数 $h_*T^{0,1}_p M$ =维数 $_{CR} M$，并且 $h_*T^{0,1}_p M \cap \mathcal{N}_{p'} = \{0\}$，其中 $\mathcal{N}_{p'} \subseteq T^{0,1}_{p'} M'$ 表示 M' 在 p' 处 ***Levi***形式的零空间。

鉴于这一事实，很明显，M 的严格伪凸性与 h 的CR横截性结合起来，意味着沿着 $h(M)$ 有许多可用的CR 方向；在这些方向上，编码于 R中的、关于存在无限阶相切形式复曲线的CR 族的一些障碍可能会出现。如果 M 仅仅是伪凸的，则可以通过考虑 M 的一个最大维数的强伪凸切片来获得这些CR 方向；这一观察构成了定理2的基础。

定理2的证明。 取 $U \subseteq M'$ 的一个开邻域 p'，使得对于所有 $q' \in U$ 都有 $\nu_{q'} < n_+$。设 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}^N$ 是一个维数为 $1+n_+$ 的复流形，使得 $T_p\Sigma + T^c_p M = T_p\mathbb{C}^N$，并且当限制在 $T^{0,1}_p M \cap T^{0,1}_p \Sigma$ 上时，M 的 Levi形式是正定的。由于横截性和正定性都是开条件，在必要时缩小 U 后，交集 $S := \Sigma \cap M \cap h^{-1}(U)$ 是 M 的一个强伪凸CR子流形，且其 $n_+ = \dim_{CR} S$。注意，对于 $q \in S$，$T_q S$ 始终包含一个横截切向量，因此限制映射 $h|_S$ 是 CR横截的，当且仅当 h 是 CR横截的。

根据引理 7，$h|_S$ 是一个浸入，$\dim h_*T^{0,1}_q S = n_+$ 且 $h_*T^{0,1}_q S \cap T^{0,1}_{h(q)}\eta = \{0\}$ 对任意 $q \in S$ 都成立，其中 η 表示 M' 的 Levi叶状结构，因此 $T^{0,1}\eta$ 是 Levi 零空间。这恰好是推论 2 的情形，因此在必要时再次限制 U 后，有 $r_1 \geq 1 + \dim_{CR} S = 1 + n_+$。

现在假设 h 在开集 $\tilde{O} \subset h^{-1}(U)$ 上处处不光滑。那么，由定理5（其中 $k=1$、$l = 1+n_+$），可得 $q \in O$（映到 $q' \in M'$）以及一个定义在 q 的邻域 $\tilde{O}_1 \subseteq \tilde{O}$ 上的连续可微CR族形式复曲线（Γ_ξ）。但此时命题 1 蕴含 $h_*T^{0,1}_q M \subseteq \ker R_{q'}(\cdot, \gamma_t(q))$，因此我们发现

$$\begin{aligned} K + \nu_{q'} &\geq \dim_{\mathbb{C}} \ker R_{q'}(\cdot, \gamma_t(q)) \geq \dim_{\mathbb{C}} \left(T^{0,1}_{q'}\eta + h_* T^{0,1}_q M \right) \\ &\geq \dim_{\mathbb{C}} \left(T^{0,1}_{q'}\eta + h_* T^{0,1}_q S \right) = K + n_+, \end{aligned}$$

这与假设 $\nu_{q'} < n_+$ 矛盾。因此，h 必须在 $O := h^{-1}(U)$ 的一个稠密开子集上是 C^∞-光滑的。□

4.1. 与 2-非退化性的联系。 本节讨论不变量 ν 与有限非退化性之间的关系。

我们首先回顾一下，CR子流形 $M \in \mathbb{C}^N$ 在点 $p \in M$ 处被称为 k-非退化的，如果 $k \in \mathbb{N}$

$$T^{0,1}_p \mathbb{C}^N = \left\langle \{ \bar{L}_1 \bar{L}_j \rho_w : \rho \in \mathscr{I}_M(p), \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_j \in \mathcal{V}_p(M), 0 \leq j \leq k \in \} \right\rangle;$$

等价地，其恒等映射满足 $r_k(p) = N$，其中 r_k 在第 2.3 节中定义。

事实证明，1-非退化性等价于Levi非退化性，其论证本质上与第3.1节引理 2的证明相同。

对于不是严格伪凸的伪凸超曲面，下一步是2-非退化性。

命题2。 设 $M \subset \mathbb{C}^N$ 是一致*Levi*退化超曲面，其具有$N-K-1$ 个非零*Levi*特征值，且具有*Levi*叶状结构 η。对于 $p \in M$，考虑引理*5*中的ν_p 。则下列条件等价:

- M 在 p处是2-非退化的，
- 不存在 截面的芽 $V \in \Gamma_p\left(T^{1,0}\eta\right)$ ，使得对所有 $\bar{L}_1, \bar{L}_2 \in \Gamma_p\left(T^{0,1}M\right)$ ，都有 $[\bar{L}_1,[\bar{L}_2,V]]|_p \in T^{1,0}_pM \oplus T^{0,1}_pM$，
- $\nu_p < N-K-1$，即 ν_p 不是极大的。

证明。 首先注意到，根据乘积法则以及超曲面的两个光滑定义函数相差一个光滑非零因子这一事实，只需考虑一个定义函数 ρ。为了在协变框架下进行讨论，我们考虑$T'M = \langle dz_1|_M, \ldots, dz_N|_M\rangle \subset \mathbb{C}T^*M$，即 M上的(1，0)-形式空间。

设相对于 CR向量场 L 的 (1,0)-形式 ω 的李导数记为 $\mathcal{T}_{\bar{L}}\omega$。通过将 $\bar{L}$ 和 ω 适当地延拓到 $\mathbb{C}^N$中 p 的一个邻域内，我们计算得

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{\bar{L}}\omega)_j &= \mathcal{T}_{\bar{L}}\omega(\frac{\partial}{\partial z_j}) = d\omega(\bar{L}, \frac{\partial}{\partial z_j}) + \frac{\partial}{\partial z_j}\omega(\bar{L}) = d\omega(\bar{L}, \frac{\partial}{\partial z_j})\\ &= \bar{L}\omega(\frac{\partial}{\partial z_j}) - \frac{\partial}{\partial z_j}\omega(\bar{L}) - \omega([\bar{L}, \frac{\partial}{\partial z_j}]) = \bar{L}\omega_j,\end{aligned}$$

利用 Cartan魔术公式，以及 ω 消灭 0,1-向量场$\bar{L}$ 和 $[\bar{L}, \frac{\partial}{\partial z_j}]$这一事实。因此，在此情形下，取李导数就意味着逐分量求导。

对于定义函数 ρ，现在考虑 $i\partial\rho = i\sum_j \rho_{z_j}dz_j$。这个形式与实接触形式 $\Theta = i(\partial\rho - \partial\rho)$ 仅相差 $d\rho$的一个倍数，而它在M上为零。根据前面的计算， M 是 2-非退化的，当且仅当 $\partial\rho$、 $\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\rho$ 和 $\mathcal{T}_{\bar{L}_2}\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\rho$共同张成整个 T'_pM，其中 L_1和 L_2遍历 p处所有芽的 CR向量场。

超曲面 M 在 p 处是 2-退化 的，当且仅当存在一个非零向量 $V \in \mathbb{C}T_pM$，使得 $\partial\rho(V) = 0$、$(\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\partial\rho)(V) = 0$ 且 $(\mathcal{T}_{\bar{L}_2}\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\partial\rho)(V) = 0$。第一个条件保证 $V \in T^{1,0}_pM + T^{0,1}_pM$，并且由于 $T'M$ 湮灭了 $T^{0,1}M$，不失一般性，我们可以假设 $V \in T^{1,0}_pM$。接下来，我们计算

$$0 = (\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\partial\rho)(V) = \tfrac{1}{i}(\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\Theta)(V) = \tfrac{1}{i}d\Theta(\bar{L}_1, V) = 2\mathcal{L}_\Theta(\bar{L}_1, \bar{V}),$$

对所有 $\bar{L}_1 \in T^{0,1}M$，因此 $V \in T^{1,0}\eta$。我们将 V 延拓为 $T^{1,0}\eta$ 的一个局部截面。于是，第三个条件给出

$$\begin{aligned}0 &= i(\mathcal{T}_{\bar{L}_2}\mathcal{T}_{\bar{L}_1}\partial\rho)(V) = \left(\mathcal{T}_{\bar{L}_2}d\Theta(\bar{L}_1, \cdot)\right) = d\left(d\Theta(\bar{L}_1, \cdot)\right)(\bar{L}_2, V)\\ &= \bar{L}_2 d\Theta(\bar{L}_1, V) - V d\Theta(\bar{L}_1, \bar{L}_2) - d\Theta(\bar{L}_1, [\bar{L}_2, V])\\ &= -\bar{L}_1\Theta([\bar{L}_2, V]) + [\bar{L}_2, V]\Theta(\bar{L}_1) + \Theta([\bar{L}_1, [\bar{L}_2, V]]) = \Theta([\bar{L}_1, [\bar{L}_2, V]]).\end{aligned}$$

因此， M 在 p 处是 2-退化的，当且仅当存在一个截面 $V \in \Gamma_p(T^{1,0}\eta)$，使得 $[\bar{L}_1,[\bar{L}_2,V]]|_p \in T^{1,0}_pM \oplus T^{0,1}_pM$，对所有 $\bar{L}_1, \bar{L}_2 \in \Gamma_p(T^{0,1}M)$ 均成立。

写出 $V = \sum_j V^j \frac{\partial}{\partial z_j}$ 和 $\bar{L}_2 = \sum_j \bar{L}_2^j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$，我们得到 $[\bar{L}_2, V] = \sum_j(\bar{L}_2V^j)\frac{\partial}{\partial z_j} - \sum_j(V\bar{L}_2^j)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$。由于 $[\bar{L}_1,[\bar{L}_2,V]] \in T^{1,0}_pM \oplus T^{0,1}_pM$对任意 $\bar{L}_1 \in \mathcal{V}_p$， $[\bar{L}_2, V]$ 的 (1,0) 部分必定位于 M 的 Levi 零空间中，即 $\sum_j(\bar{L}_2V^j)\frac{\partial}{\partial z_j}|_p \in T^{1,0}_p\eta$。近乎不言自明的是，当且仅当 $V_r := (V^1, \ldots, V^j) \in T\eta \subseteq T\mathbb{C}^N$ 满足 $L_2\overline{V_r} \in T\eta$ 对所有 CR向量场 L_2 均成立时，情况才是如此；也就是说，当且仅当 $\nu_p = N-K-1$。□

因此，第6节中对经典对称域边界的 ν 的计算，也提供了一种得出这些超曲面是 2-非退化的方法。在 [29], 中，Xiao 证明，从具有 n_+ 个正Levi特征值的强伪凸超曲面到恰好具有 n_+ 个正Levi特征值的 2-非退化、均匀伪凸超曲面的一个仅为 C^2 光滑的 CR映射，必定处处 C^∞ 光滑。关键在于，在这些 Levi 特征值条件下，源流形的像已经包含了所有相关向量场，因此可以得出该映射本身在 Lamel [18], 的意义下是 2-非退化的，因而与源流形和目标流形本身一样光滑。

不变量 ν_p 包含的信息比目标流形仅仅具有2-非退化性更为微妙，这一点从定理3中关于源流形Levi特征值数量所得到的锐界可见一斑。我们或许可以期待，定理2中的条件 $\nu_{p'} < n_+$ 已足以推出CR映射h 本身是2-非退化的（至少在一个稠密开子集上），但这很可能只在Xiao的特殊情形下成立。要找到这种行为的有趣例子绝非易事，因为处处有限非退化且Levi数大于2的伪凸超曲面极其罕见，也以难以构造而闻名；有关讨论请参阅Baouendi、Ebenfelt和Zaitsev的论文 [2]。

5. 全纯映射的应用

本节中，我们证明推论1。在该推论中，我们将关于复欧几里得空间中光滑超曲面之间CR横截CR映射的结果，应用于全纯映射；这类全纯映射可延拓为源域与目标域边界的光滑部分之间的CR映射。在给出证明之前，我们先汇集一些预备结果。众所周知，只要目标域满足适当的凸性条件，这类全纯映射便会诱导出CR横截边界映射（强伪凸情形见 [9] ，凸目标域情形见 [29]）。事实上，仅有目标域的伪凸性，就足以保证边界映射具有CR横截性。

命题3。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$、$\Omega' \subseteq \mathbb{C}^{N'}$ 是域，且 $M \subseteq \partial\Omega$、 $M' \subseteq \partial\Omega'$ 是分别包含在 $\partial\Omega$ 和 $\partial\Omega'$的光滑部分中的光滑实超曲面。假设 Ω' 在 M'处是伪凸的。

那么，任何全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$ ，只要它可延拓为一个在$^{\epsilon}\Omega \cup M$上正则性为$_{C^1}$的映射，并将 M映入 M'，就沿 M 是 *CR*横截的。

本命题及其证明与 [1], 中的命题 9.10.5. 类似；但由于后者仅针对具有光滑边界延拓的等维映射陈述，因此仍将给出命题3的证明。该证明基于 Diederich & Fornaess 在 [7, 第133页注释b]中的如下观察。

引理 8. 设$\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ 是一个伪凸域，且 $p \in \partial\Omega$ 是其边界光滑部分上的一点。任取 $\eta \in (0,1)$。则存在 U 的一个邻域以及Ω 在 U 上的一个定义函数 ρ ，使得 $-(-\rho)^\eta$ 在$\Omega \cap U$上严格多重次调和。

由于本文 [7]主要关注伪凸域的整体性质，引理 8 的证明仅在一条注释中略作提示。完整证明请参见 [1, 定理 2.2.17]。

命题*3*的证明。 假设 $F : \Omega \to \Omega'$ 可延拓为一个在点 $p \in M$处不满足 CR横截条件的CR映射。取 $0 < \delta < \epsilon$，并令 $\eta = \frac{1+\delta}{1+\epsilon}$。由引理 8，存在 $F(p)$ 的一个邻域 U以及 M' 的一个定义函数 $\rho \in C^\infty(U, \mathbb{R})$，使得 $U \cap \Omega' = \rho^{-1}(-\infty, 0)$，且 $-(-\rho)^\eta$ 在 $U\cap\Omega'$ 上严格多重次调和。根据假设， $\rho\circ F$ 的法向导数在 p 处为零，因此 $\rho\circ F$ 有

一个临界点位于 p。由导数的 Hölder 连续性， $\rho\circ F(z) = \mathcal{O}(|z-p|^{1+\epsilon})$ 在 p 附近成立。但这意味着 $-(-\rho)^\eta \circ F(z) = \mathcal{O}(|z-p|^{1+\delta})$ 在 $F^{-1}(U\cap\Omega')$ 上成立，因此 $-(-\rho)^\eta \circ F$ 在 p 处的法向导数也为零。由于 $-(-\rho)^\eta \circ F$ 是次调和函数沿全纯映射的拉回，因此也是次调和函数；又因为 $-(-\rho)^\eta \circ F$ 显然在 p 处取得局部极大值，根据 Hopf引理， $\rho^\eta \circ F$ 在 p 处的法向导数非零，矛盾。□

全纯映射继承其诱导边界映射的正则性，从而可以立即将定理2推广到全纯映射。

推论*1*的证明。 由于 Ω' 在 M'处是伪凸的，命题3给出了边界映射 $h := H|_{M'}$的 CR 横截性。因此，定理2的假设得到满足，并且 h 在邻域 $O \subseteq M$ 的稠密开子集上是 C^∞-光滑的，其中该邻域是 p 在 M中的一个邻域。根据 [1]中的定理7.5.1., H 随后延拓为 Ω $O\cup$上的 C^∞-光滑映射。□

注4。 特别地，如果 $H:\Omega\to\Omega'$ 是一个真 全纯映射，并延拓为 Ω ¯上的 $C^{N'-n_+}$-光滑映射，则它将 M 映入 Ω'的拓扑边界。如果已知某个点 $p\in M$ 被映到某个 $p'\in M'$，那么 p 的一个开邻域$U \subseteq M$ 也会被映入 M'，于是推论1的假设得到满足。

6. Maps into boundaries of classical symmetric domains

在讨论我们需要应用结果的经典对称域边界的CR几何之前，先回顾一些基本事实。若有界域 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 对每个点 $p\in\Omega$ 都存在一个双全纯对合 $h_p:\Omega\to\Omega$，使得该点是其孤立不动点，并且满足 $Dh(p) = -\mathbb{I}_N$ （参见 [27]），则称有界域 Ω 为有界对称域。

有界域 Ω 可以赋予伯格曼度量，这是一种厄米度量，具有 Ω 上每个双全纯映射都是等距变换的性质。配备这一度量后，有界对称域 Ω 成为厄米对称空间的特例，即配备厄米度量的流形，其中每个点都是某个对合等距变换的孤立不动点。可以证明，这类流形的等距变换群具有传递性，因此它们可以表示为 Ω 的稳定子群（定义为保持选定点不动的等距变换群）在 Ω 的全等距变换群中的陪集空间（参见 [8]）。这使得我们能够利用李群方法对有界对称域进行分类。

根据 [27], ，任意有界对称域都双全纯等价于若干不可约有界对称域的直积。不可约有界对称域分为经典对称域的四个系列，以及两个例外情形（分类见 Cartan，参见 [5]）。Xiao 在 [29]中研究了映入经典对称域的真全纯映射的正则性，以及由此涉及的映入其边界的 CR映射；关于经典对称域之间映射的重要应用，读者可参阅 Kim 和 Zaitsev 关于这类映射刚性的论文 [13]。我们将采用 Xiao 对经典对称域的命名惯例；与 Cartan 最初的编号相比，该惯例仅交换了第三类和第四类域的编号。

最后，我们简要回顾线性代数中的奇异值分解。矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$、 $m\le n$ 总可以分解为 $A = U\Sigma V^*$，其中

(1) $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个酉矩阵，构成 AA^*的特征向量基；(2) $\Sigma\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 是一个对角线元素非负的对角矩阵；(3) $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是另一个酉矩阵，构成A^*A的特征向量基。

Σ, $0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_m$ 的对角线元素称为 A的奇异值。它们等于矩阵 AA^*（厄米、半正定）的特征值的平方根，或者等价地，等于 A^*A的 m 个最大特征值的平方根。 A 的最大奇异值给出 A关于 $\mathbb{C}^m$ 和 $\mathbb{C}^n$上的标准内积的算子范数。由右奇异向量构成的矩阵 V 可以从A^*A的正交归一特征向量基中任意选取；选定后，$\Sigma U = AV$也随之确定，因此也确定了 U 中与非零奇异值对应的那些列，即左奇异向量。

6.0.1. 第一类经典域。 我们将第一系列中的例子记为 $D^{m,\ I}{}^{\ n}$ 其中 $1 \leq m \leq n$。根据 Cartan [5], ，它们可以表示为

$$D_I^{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^{m\times n} : \mathbb{I}_m - ZZ^* \text{ is strictly positive definite.}\}$$

条件 $\mathbb{I}_m - ZZ^* > 0$ 等价于 Z的最大奇异值严格小于 1，即 $\|Z\| < 1$，其中 $\|\cdot\|$ 始终表示通常的欧几里得矩阵范数（或向量范数）。因此， $D^{m,\ I}{}^{\ n}$ 的边界由范数为 1 的矩阵构成，等价地说，是最大奇异值为 1 的矩阵所构成的集合。该集合是一个光滑流形，其中恰有一个奇异值为 1。为此，考虑 ZZ^*的特征多项式$P(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{I}_m - ZZ^*)$；根据假设，它在 1 处有一个简单零点。现在，$\rho(Z) := \det(\mathbb{I}_m - ZZ^*)$ 的梯度处处非零，因为

$$\rho(Z + \mu Z) = \det(\mathbb{I}_m - |1+\mu|^2 ZZ^*) = |1+\mu|^{2m} P(|1+\mu|^{-2})$$

具有非零导数，从而为我们提供一个定义方程。

我们用 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 表示边界的这块光滑部分。由于 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 围成凸区域 $D^{m,\ I}{}^{\ n}$，它是一个拟凸实超曲面。奇异值分解将对应于 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 的一个由复流形（事实上是复线性流形）构成的叶状结构，从而使 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 成为应用定理2的一个有趣例子。以下结果应与 [29], 中的命题1.2进行比较；该命题仅考虑 $\mathbb{C}^{m+n-1}$ 中的强伪凸超曲面。

命题4。 设 $m \geq n \geq 2$ 和 M 是一个至少具有 $n_+ \geq m+n-3$ 个正*Levi*特征值的伪凸超曲面。那么，从 M 到 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 的每个正则性为 C^{mn-n_+} 的 *CR*横截*CR*映射 h 都一般光滑。

在证明过程中，我们将使用边界轨道定理，该定理指出， $D^{m,\ I}{}^{\ n}$ 的双全纯自同构李群也通过环境双全纯映射传递地作用于 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$（例如参见 [28] ，或 [24, 中引理2.2.3] 的证明）。这使我们能够研究 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 在一些仅从矩阵模型来看就特别容易理解的点附近的情形，即 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 中的秩一矩阵。

事实上，假设 $h\colon M \to M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 在点 $p \in M$的某个邻域 $O \subset M$内处处不光滑。由单位范数向量 $a \in \mathbb{C}^m$、 $b \in \mathbb{C}^n$ 构成的任意矩阵 ab^* 都属于 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$，因为它只有一个奇异值 1。根据边界轨道定理，存在一个在 $h(p)$˜的某个邻域上定义的双全纯映射 $F_{h(p)}$，将 $h(p)$映射到 $ab^* \in M^{m,\ I}{}^{\ n}$，并将 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 映射到自身。于是， $h := F_{h(p)} \circ h$ 是一个横截 CR映射，将 p 映射到 ab^*，且它在 O 上也处处不光滑。在ab^*处，我们直接验证应用定理2的前提条件均已满足。

引理9。 设 $a \in \mathbb{C}^n$、$b \in \mathbb{C}^m$ 为单位向量。在 ab^*附近，伪凸超曲面 $M^{m,\ I}{}^{\ n}$ 被叶状分解为 $(n-1)\times(m-1)$维复（线性）流形。其 *Levi*形式恰有 $m+n-2$ 个正特征值，且 $\nu_{ab^*} = m+n-4$。

˜如果 h 在 p附近处处不光滑，这将与定理2矛盾，因为 $\nu_{ab^*} = m+n-4 < n_+$。这就证明了命题4。

引理9的证明。令 $\Sigma \subset \mathbb{C}^{m\times n}$ 为秩（恰好）为 1 的 $m\times n$ 矩阵所构成的集合，它是一个包含 ab^* 的 $(m+n-1)$ 维全纯流形。在满足 $a=(1,0,\ldots\ldots,0)^T\in\mathbb{C}^n$ 且 $b=(1,0,\ldots\ldots,0)^T\in\mathbb{C}^m$ 的线性坐标中，Σ 可全纯参数化为

$$(z_1,\ldots,z_m,w_2,\ldots,w_n)\mapsto(z_1,\ldots,z_m)^T(1,w_2\ldots,w_n)$$

在 $ab^*=(1,0,\ldots\ldots,0)^T(1,0,\ldots\ldots,0)$ 附近。要明确看出此映射在 ab^* 附近是一一映射，对于矩阵 $Z\in\Sigma$，令 w 为 $(\ker Z)^\perp$ 与 $b+\langle b\rangle^\perp$ 的（唯一）交点。则 $w^*=(1,w_2,\ldots\ldots,w_n)$ 且 $Z(w)/\|w\|^2=(z_1,\ldots\ldots,z_m)^T$。

秩一矩阵的超曲面 $S:=\Sigma\cap M^{m,n}_I$ 范数为 1，是强伪凸的。事实上，由于 $\|uv^*\|=\|u\|\|v\|$，S 的定义方程为

$$\rho(z_1,\ldots,z_m,w_2,\ldots,w_n)=(|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2)(1+|w_2|^2+\cdots+|w_n|^2)-1=0,$$

在 ab^*处具有（实）海森矩阵 $2\mathbb{I}_{2(m+n-1)}$，这表明 S 实际上是强凸的。

奇异值分解将任意矩阵 $A\in M^{m,n}_I$ 表示为 uv^*+B，其中 u 和 v 是对应于唯一奇异值 1 的单位奇异向量（除同时乘以 $\lambda\in\mathbb{S}^1$外唯一），而唯一确定的矩阵 $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 满足 $Bv=0$、$u^*B=0$和 $\|B\|<1$。反过来，每个这种类型的矩阵 uv^*+B 都属于 $M^{m,n}_I$。所有满足 $u^*B=0$和 $Bv=0$ 的 $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 构成一个（$m-1$）$n-1$维向量空间 $\times$，因此仿射平面

$$\eta_{uv^*}:=\{uv^*+B:B\in\mathbb{C}^{m\times n},u^*B=0,Bv=0\}$$

对于 $uv^*\in S$，它们在 ab^*附近为 $M^{m,n}_I$ 提供所需的叶状结构 η。S处的切丛$T\eta$由 $T_{uv^*}\eta=\{B\in\mathbb{C}^{m\times n}$给出：$Bv=0,\ u^*B=0\}$。

在根据引理6建立上述设置后，剩下要做的只是计算 R^S 在 ab^*处的张量。取 $B_0\in T_{ab^*}\eta$、$B_0\neq 0$。若对 $Z\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 定义 $B(Z)$ 如下：

$$B(Z)=(\mathbb{I}_m-ZZ^*)B_0(\mathbb{I}_n-Z^*Z),$$

则 $B(uv^*)$ 给出了沿 S 的 $T\eta$ 的一个截面，满足 $B(ab^*)=B_0$，因为

$$\begin{aligned}u^*B(uv^*)&=u^*(\mathbb{I}_m-uu^*)B_0(\mathbb{I}_n-vv^*)=0,\\ B(uv^*)v&=(\mathbb{I}_m-uu^*)B_0(\mathbb{I}_n-vv^*)v=0\text{ and}\\ B(ab^*)&=(\mathbb{I}_m-aa^*)B_0(\mathbb{I}_n-bb^*)=\mathbb{I}_mB_0\mathbb{I}_n=B_0.\end{aligned}$$

回到 S，我们计算得 $\mathfrak{V}:=\{a\beta^*+\alpha b^*:\alpha\in\langle a\rangle^\perp\subset\mathbb{C}^m,\ \beta\in\langle b\rangle^\perp\subset\mathbb{C}^n\}$ 是 S 在 ab^* 处的复切空间。为证明 $\mathfrak{V}$ 是切向的，我们分别取经过 a 和 b 的两条曲线 $\gamma_1:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{S}^{2m-1}$及 $\gamma_2:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{S}^{2n-1}$，满足 $\dot\gamma_1(0)=\alpha$ 且 $\dot\gamma_2(0)=\beta$。现在，$\gamma_1\gamma_2^*$ 定义了 S中的一条曲线，并且 $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma_1(t)\gamma_2(t)^*)=a\beta^*+\alpha b^*$。空间 $\mathfrak{V}$ 可由 $(\alpha,\bar\beta)\overline{\ }\mapsto a\bar\beta^T+\alpha b^*$以复线性的方式参数化，其中 $(\alpha,\bar\beta)$ 位于由 $a^*\alpha=0$、$\bar\beta^Tb=\beta^*b=0$定义的 $\mathbb{C}^{m+n}$ 的 $(m+n-2)$ 维复子空间中。为检验该映射确实是单射，分别用 b 和 a^*、$\bar{}$从右侧和左侧作用于 $\alpha b^*+a\beta^*$，即可再次得到 α 和 β。由于 S 的复切空间仅有 $\dim_{\mathbb{C}}\Sigma-1=m+n-2$ 个维数，故可得 $T^c_{ab^*}S=\mathfrak{V}$。

考虑一个CR向量 $\frac{1}{2}(X-iJX)$ 对于 $X\in T^c_{ab^*}S$，并写作 $X=a\beta^*+\alpha b^*$。那么全纯曲线 $\gamma(t)=(a+t\alpha)(b+\bar t\beta)^*$ 在 $t=0$ 处与$\bar L|_{ab^*}$ 相切。注意到 $\|a+t\alpha\|^2=1+|t|^2\|\alpha\|^2$ 和 $\|b+\bar t\beta\|^2$ 均为

一阶常数，因此我们得到

$$\begin{aligned}\bar{L}|_{ab^*}B &= \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0} B\circ\gamma(t) = \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0}\left(\mathbb{I}_m-\gamma(t)\gamma(t)^*\right)B_0\left(\mathbb{I}_n-\gamma(t)^*\gamma(t)\right)\\ &= \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0}\left(\mathbb{I}_m-\|b+\bar{t}\beta\|^2(a+t\alpha)(a+t\alpha)^*\right)B_0\left(\mathbb{I}_n-\|a+t\alpha\|^2(b+\bar{t}\beta)(b+\bar{t}\beta)^*\right)\\ &= -a\alpha^*B_0-B_0\beta b^*.\end{aligned}$$

回顾一下， $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中的标量积可写为 $(A|B) = \mathrm{tr}(A^*B)$。通过交换迹中的矩阵可知，对于任意 $Z\in T_{ab^*}\eta$,

$$\mathrm{tr}\left((\bar{L}|_{ab^*}B)^*Z\right) = -\mathrm{tr}(B_0^*\alpha a^*Z+b\beta^*B_0^*Z) = -\mathrm{tr}(B_0^*\alpha a^*Z)-\mathrm{tr}(B_0^*Zb\beta^*) = 0,$$

因为 $a^*Z = Zb = 0$。这意味着 $R^S_{ab^*}(\bar{L}|_{ab^*}, B_0) = -a\alpha^*B_0-B_0\beta b^*$，因为到 $T^\perp\eta$ 上的投影已处理完毕，并且 $\bar{L}|_{ab^*}\in\ker R^S_{ab^*}(\cdot,B_0)$ 当且仅当 $a\alpha^*B_0+B_0\beta b^* = 0$。分别从左侧和右侧用 a^* 和 b 检验，得到 $\alpha\in\ker B_0^*$ 和 $\beta\in\ker B_0$。由于 $B_0^*a = 0$ 和 $B_0b = 0$ 已经成立，这两个核在 $\langle a\rangle^\perp$ 和 $\langle b\rangle^\perp$中的余维均至少为一，因此 $\dim_{\mathbb{C}}\ker R^S_{ab^*}(\cdot,B_0)\le m+n-4$，这意味着 $\nu_{ab^*} = m+n-4$。□

命题4给出了这种简单陈述有意义且可能成立的所有维数。如果 M 的正Levi特征值多于 $m+n-2$ 个，那么不存在从 M 到 $M^{m,\ n}_{\ I}$ 的CR横截映射，因为根据引理 7，目标流形的正Levi特征值数必须不少于源流形。如果M 的正Levi特征值少于 $m+n-3$ 个，则存在正则性任意高、处处不光滑的CR横截CR映射映入 $M^{m,\ n}_{\ I}$。

例3。 令$\hat{}S$ 为由秩为一且范数为1的$(m-\hat{}1)\times(n-1)$ 矩阵构成的强伪凸超曲面。则 S 有 $m+n-4$ 个正*Levi*特征值。取一个 C^k，但处处不 C^∞-光滑的*CR*函数 ϕ，定义在$\hat{}S$ 上，且满足$|\phi|<1$。则 $h(Z) = \begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & \phi\end{pmatrix}$ 给出一个处处不光滑的*CR*横截*CR*映射$h:\hat{}S\to M^{m,\ n}_{\ I}$，其正则性为 C^k。

证明。 从逐分量的定义可直接看出其正则性。CR函数的图映射总是CR横截的，即 $h:\ M\to M\times\mathbb{C}$, $h(p) = (p, \phi(p))$, 因为 $T^c(M\times\mathbb{C})\cong T^cM\times\mathbb{C}$, $T(M\times\mathbb{C})\cong TM\times\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{P}_{TM}\circ h_*\cong\mathrm{id}$ 合在一起意味着，任意横截向量 $v\in TM\setminus T^cM$ 都会再次映射为横截向量。由引理9中证明的奇异值计算可得 $h(Z)$ {v23$^{m,\ n}_{\ I}$。□

6.0.2. 第二类经典域。 这些经典对称域记为 D^m_{II}, $m\ge 2$，由范数小于1的复反对称 $m\times m$矩阵构成。等价地，

$$D^m_{II} = \left\{Z\in\mathbb{C}^{m\times m}: Z^T = -Z, \mathbb{I}_m-Z^*Z>0\right\}.$$

反对称矩阵的每个非零奇异值 Z 都以偶重数出现。设 u 是对应于奇异值 σ 的右奇异向量，这等价于 $Z^*Zu = \sigma^2u$。那么 $v := \sigma^{-1}Zu$是对应于 σ的另一个右奇异向量，因为由 $Z^* = \bar{Z}^T = -\bar{Z}$可得 $Z^*Zv = -\sigma^{-1}\bar{Z}Z\bar{Z}\bar{u} = -\sigma^{-1}\bar{Z}\bar{Z}Z\overline{u} = \sigma^{-1}\bar{Z}Z^*Z\overline{u} = \sigma\bar{Z}\bar{u} = \sigma^2v$，且 $v^*v = \sigma^{-2}u^TZ^T\bar{Z}\bar{u} = \sigma^{-2}\overline{u^*Z^*Zu} = 1$。此外， v与 u正交，并且 $u = -\sigma^{-1}Zv$:

$$\begin{aligned}\sigma u^*v = u^*\bar{Z}\bar{u} = (u^*\bar{Z}\bar{u})^T = u^*\bar{Z}^T\bar{u} = -u^*\bar{Z}\bar{u}\Rightarrow u^*v = 0,\\ -\sigma^{-1}\overline{Zv} = -\sigma^{-2}\overline{Z\bar{Z}\bar{u}} = -\sigma^{-2}\bar{Z}Zu = \sigma^{-2}Z^*Zu = u.\end{aligned}$$

D_{II}^m 的边界由范数为 1 的反对称矩阵构成。这是一个光滑流形，其中恰有最大的两个奇异值为 1。我们将把边界的这一光滑部分记为 M_{II}^m。关于M_{II}^m 是一个流形这一点，我们留待引理10的证明中再验证。

命题5。设 $m \geq 4$ 和 M 是至少有$n_+ \geq 2m-7$ 个正*Levi*特征值的伪凸超曲面。那么，任意正则性为 $C^{m_{(m-1)^2}-n_+}$、从 M 映入 M_{II}^m 的*CR*横截*CR*映射 h 都是一般光滑的。

与命题4的情形完全类似，这可由 D_{II}^m的边界轨道定理推出。该定理允许我们通过 M_{II}^m的自同构，将 M_{II}^m中的每个点映到$p' := ab^T - ba^T$，其中 $a, b \in \mathbb{C}^m$ 为标准正交向量；此外还可由以下结构性质推出。

引理10。设 a、$b \in \mathbb{C}^m$ 为标准正交向量。在 $p' := ab^T - ba^T \in M_{II}^m$附近，伪凸超曲面 M_{II}^m 被叶状分解为$(m-2)(m-3)\ 2$ 维复（线性）~~流形。其~~*Levi*形式恰有 $2m-4$ 个正特征值，且$\nu_{p'} = 2m-8$。

证明。由于反对称矩阵线性子空间与凸矩阵范数单位球的交集，D_{II}^m 是凸的，且 M_{II}^m 是伪凸超曲面。

秩为二的反对称矩阵集合 Σ 在 p'附近是一个（$2m-3$）维复流形。在 $a = (1, 0, \ldots, 0)^T$和 $b = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$的坐标下，它在 p'附近可参数化为

$$(z_3, ..., z_m, w_2, ..., w_m) \mapsto (1, 0, z_3, ..., z_m)^T (0, w_2, ..., w_m) - (0, w_2, ..., w_m)^T (1, 0, z_3, ..., z_m).$$

为验证满射性，设 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 是对应于唯一非零奇异值 σ的两个右奇异向量，并选取它们使得 $Z\bar{u} = -\sigma v$和 $Z\bar{v} = \sigma u$。于是$Z = u(\sigma v)^T - (\sigma v)u^T$。由于 $a^*(ab^T - ba^T)\bar{b} = 1$，在 p'附近有 $a^* Z \bar{b} \neq 0$，这意味着 $a^* u$ 或 $a^* v$ 至少有一个非零。必要时，将(u, v)替换为$(-v, u)$，即可令 $a^* u \neq 0$。设 $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = \sigma(v - \frac{a^* v}{a^* u} u)$，则 $a^* \tilde{v} = 0$ 且$Z = \tilde{u}\tilde{v}^T - \tilde{v}\tilde{u}^T$。注意，$a^* Z \bar{b} \neq 0$现在意味着 $b^* \tilde{v} \neq 0$。令 $z = \frac{1}{a^* \tilde{u}} \tilde{u} - \frac{b^* \tilde{u}}{a^* \tilde{u}} (b^* \tilde{v})\, \tilde{v}$且 $w = (a^* \tilde{u})\tilde{v}$。于是我们有 $a^* z = 1$, $b^* z = 0$, $a^* w = 0$ 和 $Z = zw^T - wz^T$，从而证明 Z 属于我们的参数化的值域。为验证其为浸入，只需计算 $\frac{\partial}{\partial z_j}(zw^T - wz^T) = e_j e_2^T - e_2 e_j^T$, $3 \leq j \leq m$ 和$\frac{\partial}{\partial w_k}(zw^T - wz^T) = e_1 e_k^T - e_k e_1^T$, $2 \leq k \leq m$，因为显然这些矩阵是 $\mathbb{C}$线性无关的。

范数为 1 的秩二斜对称矩阵集合 $S = \Sigma \cap M_{II}^m$ 是 Σ 中的严格伪凸超曲面。为证明这一点，首先注意，对于正交向量 α，$\beta \in \mathbb{C}^m$，有

$$\|\alpha\beta^T - \beta\alpha^T\|^2 = \|\left(\alpha\beta^T - \beta\alpha^T\right)^* \left(\alpha\beta^T - \beta\alpha^T\right)\| = \|\|\alpha\|^2 \bar{\beta}\beta^T + \|\beta\|^2 \bar{\alpha}\alpha^T\|$$
$$= \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 \|\mathrm{diag}(1, 1, 0, \ldots, 0)\| = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2.$$

$\mathbb{C}^{m\times m}$ 上的标准欧几里得内积与弗罗贝尼乌斯内积一致（$A|B$）$= \mathrm{tr}(A^* B)$。对于一个具有正交 α，$\beta \in \mathbb{C}^m$ 的矩阵 $Z = \alpha\beta^T - \beta\alpha^T$，其弗罗贝尼乌斯范数可计算为

$$\sqrt{\mathrm{tr}(Z^* Z)} = \sqrt{\mathrm{tr}(\|\alpha\|^2 \bar{\beta}\beta^T + \|\beta\|^2 \bar{\alpha}\alpha^T)} = \sqrt{2}\|\alpha\|\|\beta\|.$$

因此，在 Σ 上，弗罗贝尼乌斯范数与矩阵范数相差一个常数因子；而 $S = \Sigma \cap M_{II}^m = \Sigma \cap \sqrt{2}\mathbb{S}^{2m^2-1}$是强伪凸的，因为它是一个复流形与一个强凸超曲面的交集。

奇异值分解将 $Z \in M_{II}^m$ 表示为 $uv^T - vu^T + B$，其中$\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 是对应于二重奇异值 1 的右奇异向量

满足 $Z\bar{u} = -v$和 $Z\bar{v} = u$，且 B满足 $B\bar{u} = B\bar{v} = 0$、 $u^*B = v^*B = 0$和 $\|B\| < 1$。由线性性可得 $B^T = -B$，这意味着 $B\bar{u} = B\bar{v} = 0$和 $u^*B = v^*B = 0$等价。在满足 $u = (1, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$且$v = (0, 1, 0, \ldots\ldots, 0)$的坐标下，条件 $B = -B^T$和 $B\bar{u} = B\bar{v} = 0$ 仅表示 B 是一个前两行和前两列均为空的反对称矩阵。由此得出，仿射平面 $\eta_{uv^T - vu^T} = uv^T - vu^T + \{B \in \mathbb{C}^{m\times m} : B = -B^T, \ B\bar{u} = B\bar{v} = 0\}$（$uv^T - vu^T \in S$）构成了 M_{II}^m的一个叶状结构，其叶为$(m-2)(m-3)\,2$维复流形；而 M_{II}^m作为 S上的一个向量丛的嵌入子空间，确实是一个流形。

在 $p' = ab^T - ba^T$ 处的复切空间 $T_{p'}^c S$ 由复向量空间 $\mathfrak{V}$ 给出：$= \{a\beta^T - \beta a^T + \alpha b^T - b\alpha^T : \ \alpha, \ \beta \in \langle a, b\rangle^\perp \subset \mathbb{C}^m\}$。为证明相切性，考虑复曲线 $\gamma(t) = (a+t\alpha)(b+t\beta)^T - (b+t\beta)(a+t\alpha)^T$，其切向量为 $\gamma_t(0) = a\beta^T - \beta a^T + \alpha b^T - b\alpha^T$。它包含在 Σ 中，并与 M_{II}^m 相切；后者是因为 $\|\gamma(t)\|^2 = \|a + t\alpha\|^2\|b + t\beta\|^2 - |(a + t\alpha)^*(b + t\beta)|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 + \mathcal{O}(|t|^2)$，故 $\gamma_t(0) \in T_{p'}^c S$。由于 $\mathfrak{V}$ 通过映射 $\gamma_t(0) \mapsto \big(\gamma_t(0)\bar{b}, -\gamma_t(0)\bar{a}\big)$与 $\langle a, b\rangle^\perp$ 同构，因此其维数为 $2m - 4 = \dim_{CR} S$，且 $T_{p'}^c S = \mathfrak{V}$。

给定 $B_0 \in T_{p'}\eta$，映射 $B(Z) = (\mathbb{I}_m - ZZ^*)B_0(\mathbb{I}_m - Z^*Z)$ 再次给出沿 S 的 $T\eta$ 截面，因为对于正交归一的 $u, \ v \in \mathbb{C}^m$，

$$B(uv^T - vu^T) = (\mathbb{I}_m - uu^* - vv^*)B_0(\mathbb{I}_m - \bar{u}u^T - \bar{v}v^T) = -B(uv^T - vu^T)^T$$
$$B(uv^T - vu^T)\bar{u} = (\mathbb{I}_m - uu^* - vv^*)B_0(\bar{u} - \bar{u}) = 0, \text{ and } B(uv^T - vu^T)\bar{v} = 0.$$

取一个 CR向量 $\bar{L}|_{p'} \in T^{0,1}_{p'}S$，其实部为 $\frac{1}{2}\left(a\beta^T - \beta a^T + \alpha b^T - b\alpha^T\right)$，并取曲线 $\gamma(t) = (a + t\alpha)(b + t\beta)^T - (b + t\beta)(a + t\alpha)^T$，我们首先得到

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\gamma(t)^* &= \|a + t\alpha\|^2(b + t\beta)(b + t\beta)^* + \|b + t\beta\|^2(a + t\alpha)(a + t\alpha)^* \\
&\quad - t\bar{t}(\beta^T\bar{\alpha})(a + t\alpha)(b + t\beta)^* - t\bar{t}(\alpha^T\bar{\beta})(b + t\beta)(a + t\alpha)^* \\
&= (b + t\beta)(b + t\beta)^* + (a + t\alpha)(a + t\alpha)^* + \mathcal{O}(|t|^2), \\
\gamma(t)^*\gamma(t) &= \overline{(b + t\beta)}(b + t\beta)^T + \overline{(a + t\alpha)}(a + t\alpha)^T + \mathcal{O}(|t|^2),
\end{aligned}$$

这大大简化了 $R_{p'}^S$ 的计算。我们得到

$$\begin{aligned}
\bar{L}|_{p'}B = \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0} B \circ \gamma(t) &= \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0} \left(\mathbb{I}_m - \gamma(t)\gamma(t)^*\right) B_0 \left(\mathbb{I}_m - \gamma(t)^*\gamma(t)\right) \\
&= \frac{d}{d\bar{t}}\Big|_{t=0} \Big(\big(\mathbb{I}_m - (b + t\beta)(b + t\beta)^* - (a + t\alpha)(a + t\alpha)^*\big) B_0 \\
&\quad \cdot \big(\mathbb{I}_m - \overline{(b + t\beta)}(b + t\beta)^T - \overline{(a + t\alpha)}(a + t\alpha)^T\big) + \mathcal{O}(|t|^2)\Big) \\
&= -b\beta^*B_0 - a\alpha^*B_0 - B_0\bar{\beta}b^T - B_0\bar{\alpha}a^T.
\end{aligned}$$

通过与引理9的证明中相同的计算，我们发现这已经给出了$R_p^S(\bar{L}|_{p'}, \ B_0) = -b\beta^*B_0 - a\alpha^*B_0 - B_0\bar{\beta}b^T - B_0\bar{\alpha}a^T$，并且 $\bar{L}|_{p'} \in \ker \ R_p^S(\cdot, \ B_0)$ 当且仅当 $\alpha, \ \beta \in \ker \ B_0$。作为一个非零反对称矩阵，$B_0$至少有两个非零奇异值，因此 $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \ker B_0 \geq 2$。由于 $B_0 a = B_0 b = 0$，且$\alpha, \ \beta \in \langle a, b\rangle^\perp$，我们得到 $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \ker \ R_p^S(\cdot, \ B_0) \geq 4$，从而 $\nu_{p'} = 2m - 8$。□

如命题4所示，如果 M 恰好有$2m - 8$ 个正Levi特征值，则存在正则性的反例。

例 4. 设$\hat{} S \subset M_{II}^{m-2}$ 为秩二且范数为1的反对称$(m - 2) \times (m - 2)$ 矩阵的强拟凸超曲面。它具有 $2m - 8$ 个正*Levi*特征值。给定一个a C^k-光滑但处处非 C^∞-光滑的*CR*函数 ϕ 于

$\hat{S \to M_{II}^m}$ $\hat{S}$ 严格小于 1，由下式给出的映射 h：

$$h(Z) = \begin{pmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi \\ 0 & \phi & 0 \end{pmatrix}$$

是一个 C^k光滑、但处处不 C^∞光滑的*CR*横截*CR*函数。

6.0.3. 第三类经典域。第三类域 D_{III}^m 由范数小于1的对称复 $m \times m$ 矩阵构成。等价地，

$$D_{III}^m = \left\{ Z \in \mathbb{C}^{m \times m} : Z^T = Z, \mathbb{I}_m - Z^* Z > 0 \right\}.$$

这里，从定理2得到的正则性结果仅对 $M \subset \mathbb{C}^m$成立。

命题6。设 $m \geq 2$和 M是具有至少$n_+ \geq m-1$ 个正*Levi*特征值的伪凸超曲面。那么，从 M到 M_{III}^m的每个正则性为 $C^{m_{(m+1)\,2} \quad -n_+}$的*CR*横截*CR*映射 h 一般光滑。

顺便指出，只有当 M 的正Levi特征值个数不超过$m-1$时，才可能存在从 M到M_{III}^m 的非平凡CR横截CR映射，因此这一结果实际上只涉及一致伪凸超曲面。

命题6是关于 D_{III}^m的边界轨道定理的一个推论；该定理告诉我们，任意点 $Z \in M_{III}^m$ 都可通过一个将 M_{III}^m 映入自身的环境双全纯映射，映至单位向量 $a \in \mathbb{C}^m$ 所对应的 aa^T。与 $M^{m,\ I\ \ n}$ 的情形几乎完全类似，以下结构性质成立。

引理11. 设 $a \in \mathbb{C}^m$为单位向量。在 $aa^T \in M_{III}^m$附近，伪凸超曲面 M_{III}^m 由 $^{m_{(m-1)\ 2}}$ 维复（线性）流形叶状分解。其*Levi*形式恰有 $m-1$ 个正特征值，并且 $\nu_{aa^T} = m-2$。

证明. 作为范数小于1的矩阵凸集与对称矩阵线性子空间的交集， D_{III}^m 是凸的，因此 M_{III}^m 是伪凸的。

设 Σ 为秩1对称矩阵构成的 m维复流形。在 aa^T附近，它可由 $z \mapsto zz^T$ 参数化，其中 $z \in \mathbb{C}^m$ 满足 $\Re(a^* z) > 0$。为检验双射性，记 $Z = \sigma u v^*$ 为 u， $v \in \mathbb{C}^m$ 的奇异向量，并记 σ为非零奇异值。由于 u 和 v 分别位于 $ZZ^* - \sigma^2 \mathbb{I}_m = Z\bar{Z} - \sigma^2 \mathbb{I}_m$ 和 $Z^* Z - \sigma^2 \mathbb{I}_m = \bar{Z} Z - \sigma^2 \mathbb{I}_m$的一维核中，根据克拉默法则可推得，对某个 $\lambda \in \mathbb{S}^1$，有 $\lambda u = \bar{v}$。令 $z := \sigma^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \bar{v} = \sigma^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \bar{u}$，可得 $Z = zz^T$。此处唯一的不确定性——根 $\lambda^{\frac{1}{2}}$ 的符号选择——可通过要求$\Re(z^* a) > 0$加以确定。

范数为 1 的秩一矩阵实超曲面 $S \subset \Sigma$ 是强伪凸的。事实上，由于 $\|zz^T\| = \|z\|^2$，我们有 $z \in \mathbb{S}^{2m-1}$ 当且仅当 $zz^T \in S$，而映射 $z \mapsto zz^T$ 提供了从 S 到 $\mathbb{S}^{2m-1}$ 的全纯二重覆盖，这表明 $S \cong \mathbb{R}P^{2m-1}$。

复仿射平面 $\eta_{ww^T} := \{ww^T + B\colon\ B\bar{w} = 0,\ B^T = B\}$ 对 $w \in \mathbb{S}^{2m-1}$构成了 M_{III}^m 在 aa^T附近的叶状结构。与引理9的证明中一样，奇异值分解将 $Z \in M_{III}^m$ 表示为 $uv^* + B$，其中 u、 v是单位向量（除同时乘以 $\lambda \in \mathbb{S}^1$外唯一），且 B 满足 $B^* u = Bv = 0$ 和$\|B\| < 1$。与之前一样，由于 u 和 v 分别属于 $ZZ - \mathbb{I}_m$和 $\bar{Z}Z - \mathbb{I}_m$的一维核，我们可以将 $Z = ww^T + B$表示为 $w \in \mathbb{S}^{2m-1}$，由线性性可得 $B^T = B$。条件 $Bv = B^* u = 0$ 可简化为 $B\bar{w} = 0$。在 $w = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)^T \in \mathbb{C}^m$的坐标下， $B\bar{w} = 0$仅表示第一列为空，这一条件显然与 $B^T = B$线性无关。

因此，由 $B^T = B$, $B\bar{w} = 0$ 定义的空间是一个复向量空间，其维数为 $m(m-1)$ 2，适用于 w 在 a附近的情形。

给定 $B_0 \in T_{aa^T}\eta$，我们证明 $B(Z) = (\mathbb{I}_m - ZZ^*)B_0(\mathbb{I}_m - Z^*Z)$ 在 S 上提供了一个 $T\eta$ 截面。对于 $ww^T \in S$,

$$B(ww^T)\bar{w} = (\mathbb{I}_m - ww^*)B_0(\mathbb{I}_m - \bar{w}w^T)\bar{w} = (\mathbb{I}_m - ww^*)B_0(\bar{w} - \bar{w}) = 0,$$
$$B(ww^T)^T = (\mathbb{I}_m - (\bar{w}w^T)^T)B_0^T(\mathbb{I}_m - (ww^*)^T) = B(ww^T) \text{ and}$$
$$B(aa^T) = (\mathbb{I}_m - aa^*)B_0(\mathbb{I}_m - \bar{a}a^T) = B_0.$$

考虑一个 CR向量 $\bar{L}|_{aa^T} \in T^0_{aa^T}{}^1 S$。复切向量 $\alpha \in T^c_a\mathbb{S}^{2m-1}$由 $\alpha^* a = 0$刻画。由于 $z \mapsto zz^T$ 是全纯且满射的，我们只需将一个适当的复切向量 $t \mapsto a + t\alpha$ 代入此映射，便可得到一条曲线$\gamma(t) = (a + t\alpha)(a + t\alpha)^T$，使得 $\bar{L}|_{aa^T} = \gamma_* \frac{d}{d\bar{t}}|_{t=0}$。接着，将 $\gamma(t) = (a + t\alpha)(\bar{a} + \bar{t}\bar{\alpha})^*$改写后，完全按照引理9中的计算可得$R^S_{aa^T}(\bar{L}|_{aa^T}, B_0) = -a\alpha^* B_0 - B_0\bar{\alpha}a^T$。右乘 $\bar{a}$后，我们发现 $\bar{L}|_{aa^T} \in$核 $R^S_{aa^T}(\cdot, B_0)$ 当且仅当 $B_0\bar{\alpha} = 0$。由于 $\bar{a} \in$核 B_0， B_0 在 $\langle\bar{a}\rangle^\perp$ 中的核的余维等于 B_0的整个核的余维，因此 $\dim_{\mathbb{C}}$核 $R^S_{aa^T}(\cdot, B_0) = m - 1 -$余维$_{\mathbb{C}}$核 $B_0 \leq m - 2$，这意味着$\nu_{aa^T} = m - 2$。□

对于正Levi特征值少于 $m-1$ 个的源流形上的 CR横截映射，其正则性的一个反例可以完全照搬 $M^{m}{}_{,I}{}^{n}$ 中的情形来构造。这里我们改为考察一个映入 M^m_{III} 的稍有不同的例子。

例5。设 ϕ 是 $\mathbb{S}^{2m-3}$ 上一个正则性为 C^k 、处处不光滑的 *CR*函数，且其绝对值严格小于 1。那么映射 $h\colon \mathbb{S}^{2m-3} \to M^m_{III}$ 定义如下：

$$h(z) = \frac{1}{2}(z_1, \dots, z_{m-1}, 1)^T(z_1, \dots, z_{m-1}, 1) + \frac{\phi(z)}{2}(z_1, \dots, z_{m-1}, -1)^T(z_1, \dots, z_{m-1}, -1)$$

是一个正则性为 C^k、处处不光滑的 *CR*横截 *CR*嵌入。

证明。我们首先考虑映射 $H\colon \mathbb{C}^{m-1}_z \times \mathbb{C}_w$，其定义如下：

$$H(z, w) = \frac{1}{2}(z_1, \dots, z_{m-1}, 1)^T(z_1, \dots, z_{m-1}, 1) + \frac{w}{2}(z_1, \dots, z_{m-1}, -1)^T(z_1, \dots, z_{m-1}, -1).$$

它在 $\mathbb{C}^{m-1} \times \mathbb{B}^1 \subset \mathbb{C}^{m-1} \times \mathbb{C}$ 上是一个全纯浸入，因为

$$\frac{\partial}{\partial z_j}H(z, w) = \frac{1 + w}{2}\left(e_j\big(z_1, \dots, z_{m-1}, \frac{1 - w}{1 + w}\big) + \big(z_1, \dots, z_{m-1}, \frac{1 - w}{1 + w}\big)e_j^T\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial w}H(z, w) = \frac{1}{2}(z_1, \dots, z_{m-1}, -1)^T(z_1, \dots, z_{m-1}, -1),$$

其中， e_j 表示 j^{th} 标准单位向量。对于 $1 \leq j \leq m - 1$，矩阵$\frac{\partial}{\partial z_j}H(z, w)$是线性无关的，因为它们的最后一列——由 $\frac{1-w}{2}e_j$ 给出——是线性无关的。注意到 $\frac{\partial}{\partial z_j}H(z, w)_{m,m} = 0$，而 $\frac{\partial}{\partial w}H(z, w)_{m,m} = \frac{1}{2} \neq 0$，我们得出 H 的所有偏导数都是线性无关的，因此 H 是浸入的。由证明引理11时所使用的适配奇异值分解可知， H将 $\mathbb{S}^{2m-3} \times \mathbb{B}^1$单射地映入 M^m_{III}。考虑图映射$\Phi\colon \mathbb{S}^{2m-3} \to \mathbb{S}^{2m-3} \times \mathbb{C}$, $\Phi(z) = (z, \phi(z))$，它显然是 C^k，但却是 $\mathbb{S}^{2m-3}$的处处非C^∞-光滑CR嵌入，于是可写为 $h = H \circ \Phi$，这表明 h 是 $\mathbb{S}^{2m-3}$到 M^m_{III}的 C^k，但处处非 C^∞-光滑CR浸入。注意，它是CR横截的，因为 H横截于 M^m_{III}，且 Φ是CR横截的。由于h 是紧球面的单射浸入，因此它是一个嵌入。□

6.0.4. 第四类经典域。与前三类经典对称域的模型有所不同，这些域的模型记为 D_{IV}^m（$m \geq 2$），由简单的四次不等式定义，最早见于 [5]。

$$D_{IV}^m = \left\{ z \in \mathbb{C}^m : z^* z < 1, 1 + |z^T z|^2 - 2z^* z > 0 \right\}.$$

起决定作用的不等式是第二个。事实上，由柯西不等式，满足 $z \in \partial D_{IV}^m$ satisfying$z^* z = 1$ 的点也满足 $|z^T z| \leq 1$，因此有 $1 + |z^T z|^2 - 2z^* z \leq 0$。可以设想的一个低维模型是由 $y^2 - \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^2 < 0$ 定义的透镜形区域，其中通过要求 $x^2 + y^2 < 1$ 来舍弃无界区域。 D_{IV}^m 的边界的光滑部分——我们将其记为 M_{IV}^m——由满足 $1 + |z^T z|^2 - 2z^* z = 0$ 和 $z^* z < 1$ 的那些 $z \in \mathbb{C}^m$ 给出。

事实上， D_{IV}^m 与例 2 中的光锥上的管状域双全纯。未来光锥上的管状域由 $\{(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m) \in \mathbb{C}^m : \Re(z_1)^2 + \cdots + \Re(z_{m-1})^2 < \Re(z_m)^2, \Re(z_m) > 0\}$给出。未来光锥上的管状域与 D_{IV}^m 之间的一个显式双全纯映射在 [29] 中给出，形式如下：

$$(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m) \mapsto \sqrt{2}i \left(2\frac{z_1}{\mathcal{F}(z + \mathbf{i})}, \ldots, 2\frac{z_{m-1}}{\mathcal{F}(z + \mathbf{i})}, \frac{1 + \mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}(z + \mathbf{i})} \right),$$

其中，$\mathbf{i}$ 表示向量 $(0, \ldots, 0, i) \in \mathbb{C}^m$，且对任意 $z \in \mathbb{C}^m$， $\mathcal{F}(z) := z_m^2 - z_1^2 - \cdots - z_{m-1}^2$。

不过，我们仍通过直接从嘉当表示计算所需量，重新证明 D_{IV}^m 的正则性结果。作为计算所依据的 M_{IV}^m 中的一个示例点，取 $a := (1, \frac{i}{2}, 0, \ldots, 0)^T$。这里， $a^T a = 0$ 和 $a^* a = \frac{1}{2}$。与前三类经典域不同， M_{IV}^m 必然会表现得与光锥上的管域完全相同。

命题 7。 设 $m \geq 2$ 和 M 是极小*CR*流形。那么，任何从 M 映入 M_{IV}^m、正则性为 C^{m-1} 且（实）秩为 ≥ 3 的*CR*映射h，在 M的一个稠密开子集上都是 C^∞-光滑的。若 h 是*CR*横截的，且对于某个 $n_+ \geq 1$， M 几乎处处至少有 n_+ 个正*Levi*特征值，则可以将初始正则性降至C^{m-n_+}。

这是 M_{IV}^m 的边界轨道定理的直接推论。该定理允许我们通过环境双全纯映射，将 M_{IV}^m 中的任意一点映到（1, $\frac{i}{2}$, 0, ..., 0），再结合定理1（对于CR横截的 h 和 $n_+ \geq 1$，则用定理2）即可得出结论。当然， M_{IV}^m 的相关结构性质与光锥上的管状域（例 2）的结构性质并无任何区别。

引理12. 设 $a \in \mathbb{C}^m$ 满足 $a^T a = 0$ 和 $a^* a = \frac{1}{2}$。在 $a \in M_{IV}^m$ 附近，伪凸超曲面 M_{IV}^m 由复直线叶状分解。其 *Levi* 形式恰有 $m - 2$ 个正特征值，且 $\nu_a = 0$。

证明. 由 $z^T z = 0$ 定义的复二次曲面 Σ 是一个满足 $z \neq 0$的流形。它与 M_{IV}^m的交集 S由$S = \{w \in \mathbb{C}^m, w^T w = 0, w^* w = \frac{1}{2}\}$给出。由于它是复流形与由 $\bar{w}^* w = \frac{1}{2}$ 给出的强伪凸球面的交集，因此其本身也是强伪凸的。

在点 $w \in S$ 附近，由 $\eta_w(t) = w + t\bar{w}$ 给出的复直线包含于 S 中。这可通过直接计算证明。由于 $w^* w = \frac{1}{2}$ 和 $w^T w = 0$，我们观察到 $(w^* + \bar{t} w^T)(\bar{w} + \bar{t} w) = \bar{t}$ 以及类似的抵消项，从而得到

$$\begin{aligned}
&1 + |\eta_w^T(t)\eta_w(t)|^2 - 2\eta_w(t)^* \eta_w(t) \\
&= 1 + (w + t\bar{w})^* \overline{(w + t\bar{w})} (w + t\bar{w})^T (w + t\bar{w}) - 2(w + t\bar{w})^* (w + t\bar{w}) \\
&= 1 + (w^* + \bar{t} w^T)(\bar{w} + \bar{t} w)(w^T + t\bar{w}^T)(w + t\bar{w}) - 2(w^* + \bar{t} w^T)(w + t\bar{w}) \\
&= 1 + \bar{t} t - (1 + \bar{t} t) = 0.
\end{aligned}$$

由于截面 $\bar{w}$ 已经沿着 S 张成了 $T\eta$，因此只需计算 $R^S(\cdot,\bar{w})$ 在 $a\in S$ 处的张量。向量 $v\in T^c_aS$ 的特征是 $(a+tv)^T(a+tv) = \mathcal{O}(|t|^2)$ 和 $(a+tv)^*(a+tv) = \frac{1}{2}+\mathcal{O}(|t|^2)$，这等价于 $\bar{}a^Tv = a^*v = 0$。取一个 CR向量 $\bar{L}|_a \in T^0_{,a}{}^1S$，其实部为 $\frac{1}{2}v$，并考虑全纯曲线$\gamma(t) = \cancel{a+tv}$。于是 $\bar{L}|_a\bar{w} = \frac{d}{d\bar{t}}|_{t=0}(a+tv) = \bar{v}$，我们发现 $\bar{v}\in T^{\perp}_a\eta_a = \langle\bar{a}\rangle^{\perp}$ 已成立，因为 $a^*v = 0$。因此，$R^S_a(\bar{L}|_a,\bar{a}) = \bar{v}$ 仅当 v 时才消失，于是 $\bar{L}|_a$ 消失，这意味着 $\nu_a = 0$。□

References

[1] M. S. Baouendi、P. Ebenfelt 和 L. Preiss-Rothschild。*Real submanifolds in complex space and their mappings* 47 1999 。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，。[2] M. S. Baouendi、P. Ebenfelt 和 D. Zaitsev。关于非线性偏微分方程超定系统的柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理及其几何应用。 *Comm. Partial Differential Equations*，34(10-12)：1180–1207，2009。[3] S. Berhanu、P. D. Cordaro 和 J. Hounie。 *An introduction to involutive structures*，第6卷， *New Mathematical Monographs*。剑桥大学出版社，剑桥，2008。[4] S. Berhanu 和 M. Xiao。关于超曲面型CR流形之间CR映射的正则性。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，369，2014年11月。[5] E. Cartan。关于复变量空间中的有界齐性域。, ()：–。

´ ` n *Abh.* B. *Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 1 116 162, 1935

Coupet、F. Meylan 和 A. Sukhov。代数CR流形的全纯映射。[6] , ()：–29，1999。 *Internat. Math. Res. Notices* 1 1 K. Diederich 和 J. Fornaess。伪凸域：有界严格多重次调和耗尽函数。[7] , 39：129–141，1977年6月。 *Invent. Math.* A. Fedenko (始创者)。反米对称空间。[8]。网址： *Encyclopedia of Mathematics*。http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hermitian_symmetric_space&oldid=33416 31 在线；访问日期为- [月-2020]。[9] J. E. Fornaess。将严格伪凸域嵌入凸域。 *Amer. J. Math.*，98 2 529()：–569，1976。[10] M. Freeman。实子流形的局部复叶状结构。 *Math. Ann.*，209：1–30，1974。[11] J. E. Greilhuber。映入经典对称域边界的CR映射的光滑正则性。硕士论文，维也纳大学，2020年。 http://othes.univie.ac.at/63169/。[12] X. Huang。关于复空间不同维数的球之间真全纯映射的线性化问题。 *J. Differential Geom.*，51(1)：13–33，1999。[13] S.-Y. Kim 和 D. Zaitsev。有界对称域之间真全纯映射的刚性。 *Math. Ann.*，362(1-2)：639–677，2015。[14] I. Kossovskiy、B. Lamel 和 M. Xiao。余维一CR映射映入Levi退化超曲面的正则性。 *Comm. Anal. Geom.*，29(1)：151–181，2021。[15] B. Lamel。复空间中实解析子流形的反射原理。 *J. Geom. Anal.* 11 4 627 ()：–633，2001。[16] B. Lamel。复空间中不同维数实子流形的全纯映射。*Pacific J. Math.*，201(2)：357–387，2001年12月。[17] B. Lamel。非退化CR映射的光滑正则性定理。 *Monatsh. Math.*，142 4 315 326，2004()：–。[18] B. Lamel。非退化CR映射的 C^∞-正则性定理。 *Monatsh. Math.*，142 315 326，2004：–。[19] B. Lamel 和 N. Mir。映入强伪凸柯西-黎曼流形的形式CR映射的收敛性。 *Invent. Math.*，210(3)：963–985，2017年11月。[20] B. Lamel 和 N. Mir。正余维CR映射的 C^∞ *Adv.* 正则 *Math.* 335 696 734, 9 2018 性。 , ：–。[21] B. Lamel 和 N. Mir。抽象CR结构的CR映射的正则性。 *Internat. J. Math.* 31 1 ()：2050009，38，2020。[22] E. Løw。严格伪凸域到多圆盘和球的嵌入及真全纯映射。 *Math. Z.*，190(3)：401–410，1985。[23] N. Mir。实解析CR映射的全纯变形与CR映射的解析正则性。 *J. Geom. Anal.*，27(3)：1920–1939，2017。[24] N. Mok 和 S. C. Ng。从有界对称域到其笛卡尔积的保测全纯映射的芽。 *J. Reine Angew. Math.*，2012(669)：47–73，2012。[25] F. Sommer。复解析的实超曲面叶状结构。¨，137 392 411，1959：–。

[26] B. Stensones。延拓至 α 边界仍为Lipschitz的正规映射。 *J. Geom. Anal.*，6 2 317（）：–339，1996。[27] E. Vinberg（始创者）。对称域。

Encyclopedia of Mathematics http:，网址：。//encyclopediaofmath.org/index.php?title=Symmetric_domain&oldid=16315 [在线；访问日期为27-May-2020]。[28] J. A. Wolf。 *Fine structure of hermitian symmetric spaces*。《对称空间》：维也纳大学短期课程讲义。Boothby & Weiss 编，Marcel Dekker Inc.，1972。[29] M. Xiao。映入经典域的映射的正则性。 *Math. Ann.*，2019。

Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Austria
Email address: josef.greilhuber@univie.ac.at

Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Austria
Email address: bernhard.lamel@univie.ac.at