arXiv:2302.14194v2 [math.CO] 8 Jan 2024

度量约束下的刚性、张拉整体与多胞体重构

Martin Winter

摘要。我们猜想，在任意维数和任意组合类型下，凸多胞体由其边图、边长以及其顶点到某个任意内点的距离集合唯一确定，且仅差一个等距变换。我们还提出更强的猜想：对于两个具有相同边图的多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$和 $Q \subset \mathbb{R}^e$，不可能出现 Q 的边长比 P 更长，同时其顶点到点的距离却更短的情况。

我们提出了研究这些问题的方法，并在三个相关的特殊情形中验证了这些方法： P和 Q 中心对称， Q 是 P的微小扰动，以及 P和 Q 组合等价。在前两种情形下，如果将 Q 替换为边图 G_P 的某种图嵌入 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^e$，这些结论仍然成立；这可以解释为某些张拉整体框架的局部刚性或全局刚性。我们还证明，多胞体由其边图、边长以及任意内点的 Wachspress 坐标唯一确定，且仅差一个仿射等价变换。

最后，我们将概述相关问题及后续研究问题。

1. 引言

凸多胞体在多大程度上可以根据部分组合数据和几何数据（例如其边图、边长、二面角等）进行重构？重构结果是否可以限定为组合类型、仿射等价，甚至等距变换？这类问题由来已久，并且与刚性的各种概念密切相关。

本文探讨如何根据边图及某些与图相容的距离数据（例如边长）进行重构。众所周知，仅凭边图几乎无法了解多胞体的完整组合结构；而尝试通过补充度量数据来弥补这一点时，会发现其中存在两种相互对立的作用。

首先，也是最重要的，我们需要重构完整的组合结构。一般而言，对于边数相对较少的多胞体（例如 简单多胞体，正如 Blind & Mani [2]以及后来的 Kalai [19]所证明的那样）[1]，从边图进行重构似乎更容易。然而与此同时，这类多胞体的边往往太少，无法提供足够的度量数据来重构其几何形状。多边形的情况最为明显，但在更高维数以及非简单多胞体中，这种现象也会以非平凡的形式出现（见 图1）。

相比之下，单纯多胞体有许多边，根据柯西刚性定理可知，它们由边长确定到等距变换；如果

日期：2024年1月9日。2010年数学主题分类。51M20, 52B11, 52C25。关键词和短语。凸多胞体、从边图重构、Wachspress 坐标、框架的刚性与张拉整体。[1]不过，“边数少”并非一般而言最恰当的表述方式，参见 [8]或 [17]。

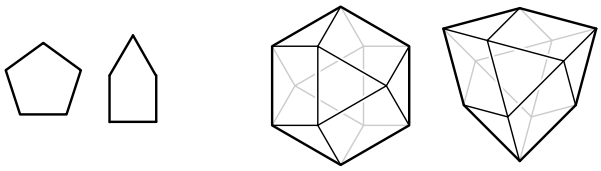


图1. 具有相同边长的非等距实现。

我们假设已知完整的组合结构。然而，对于单纯多胞体，单凭边图通常不足以首先重建其组合结构（邻接多胞体的大量存在便证明了这一点）。

这引出了以下问题：我们需要为边图补充多少、何种数据，才能实现

(*i*) 唯一重构组合结构（对于边数众多的多胞体，如单纯多胞体，也能如此），同时(*ii*) 唯一重构几何（对于边数较少的多胞体，如简单多胞体，也能如此）。

此外，理想情况下，补充的数据应符合边图所提供的结构框架，也就是说，数据量约为 #edges +#vertices。

我们提出如下方案：除边图和边长外，还固定多胞体 P内部的一个点，并记录该点到P (参见 图2)每个顶点的距离。我们认为，这些数据足以在所有维数和所有组合类型下，将多胞体重构至等距变换意义下唯一确定。

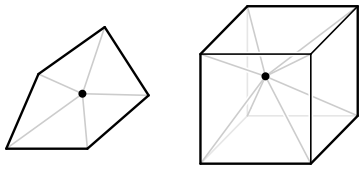


图 2. “有尖点多胞体”，即，一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，其中有一点$x \in$ 位于其内部P。除了边长，我们还记录灰色线段的长度——即“顶点到点的距离”。

此处及下文中，我们可以假设对多胞体作适当的平移，使所选点成为原点 $0 \in$，位于内部P。

猜想 1.1. 设多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$ 的相应内部均包含原点，且 P 和 Q 的边图同构，对应边等长，且对应顶点到原点的距离相等。那么 $P \simeq Q$ （即，P和 Q 可通过正交变换实现等距）。

要求原点位于内部 是避免出现诸如图 3所示反例的必要条件。这一猜想极大地推广了若干已知的重构结果，例如针对拟阵基多胞体或高度对称多胞体的结果（见第5.1节）。

我们还提出以下更强的猜想：

猜想 1.2。 给定两个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$，它们的边图同构，并且满足

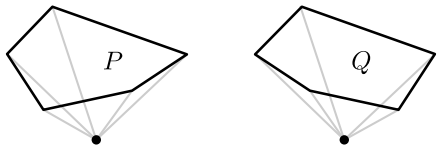


图 3。 一个五边形的两种非等距实现，其边长和顶点到点的距离相同。这是可能的，因为该点不在内部。

(*i*) $0 \in \mathrm{int}(Q)$,(*ii*) Q 中的边长度至多与其在 P中的对应边一样长，并且 (*iii*) Q 中顶点到原点的距离至少与其在 P中的对应距离一样大，那么 $P \simeq Q$（P 和 Q 可通过正交变换实现等距）。

直观地说，猜想 1.2指出，当多胞体的边变短时，它不可能变大（或者说，按顶点到原点的距离衡量时“扩张得更多”）。显然，猜想 1.1 是猜想 1.2的推论，我们将前者称为后者的“唯一重构版本”。在这里，前提条件 $0 \in \mathrm{int}(Q)$ 的必要性甚至更容易看出：只要将多胞体平移到离原点足够远的位置，顶点到原点的距离就可以任意增大（另见图4）。

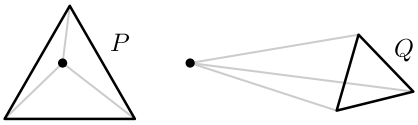


图 4。 如果 $x \notin \mathrm{int}(Q)$，那么 Q 的边可以比 P更短，同时其所有顶点也都可以离 x更远。

本文提出了一些技术方法，我们相信这些方法为解决这些猜想指明了正确方向。随后，我们在以下三个相关的特殊情形中验证这些猜想：

- P 和 Q 是中心对称的（定理 4.4），
- Q 是 P 的微小扰动（定理 4.5），
- P 和 Q 组合等价（定理 4.7）。

最后一个特殊情形尤其阐明了三维多胞体的情形。此外，前两个特殊情形最终的表述实际上会更为一般：我们将 Q 替换为边图 G_P的某个嵌入 q: $V(G_P) \to \mathbb{R}^e$，其中不再假设 q是任何多胞体的骨架。随后，这些结果也可以解释为某些杆—接头框架或张拉整体框架具有刚性（局部刚性或全局刚性）。

1.1. **记号与术语**。 本文中，多胞体均为凸且有界的，尤其是都可以表示为其顶点的凸包：

$$P = \mathrm{conv}\{p_1, \ldots, p_n\} := \Big\{ \sum_i \alpha_i p_i \mid \alpha \in \Delta_n \Big\},$$

其中 $\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ 表示凸系数集合。

除非另有说明，$P \subset \mathbb{R}^d$ 表示 d维空间中的一个多胞体（$d \geq 2$），尽管其仿射包 aff(P) 可能是 $\mathbb{R}^d$的真子空间。若 dim aff(P) $=d$，则称 P 为满维。我们的多胞体通常是尖的，也就是说，它们带有一个特殊点 $x \in$ int(P)（有时也位于 ∂P 上或外部）；但我们通常会平移 P，使 x 成为原点。因此，我们不说顶点到 x的距离，而只说顶点到原点的距离。

我们用 $\mathcal{F}(P)$ 表示 P 的 面格，用 $\mathcal{F}_\delta(P)$ 表示其 δ 维面的子集。我们假设多胞体的顶点有一个固定的编号 $\mathcal{F}_0(P) = \{p_1, ..., p_n\}$（即 我们的多胞体是带标号的），特别地，顶点数记为 n。我们也经常使用一个多胞体 $Q \subset \mathbb{R}^e$，其顶点记为$\mathcal{F}_0(Q) = \{q_1, ..., q_n\}$。

P 的边图是有限简单图 $G_P = (V, E)$，其中 $V = \{1, ..., n\}$ 与顶点标号相容，也就是说，$i \in V$ 对应于 $p_i \in \mathcal{F}_0(P)$，并且$ij \in E$当且仅当 conv$\{p_i, p_j\} \in \mathcal{F}_1(P)$。由 $i \mapsto p_i$ 给出的图嵌入（将边嵌入为线段）称为 P 的 *(1-)*骨架 sk(P)。

在讨论组合等价多胞体 P 和 Q时，我们将默认固定一个与顶点标签相容的面格同构 ϕ: $\mathcal{F}(P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(Q)$，即，$\phi(p_i) = q_i$。这也使我们能够默认将 P的面与 Q的面对应起来。例如，对于一个面 $\sigma \in \mathcal{F}(P)$，我们可以用 σ_Q 表示它在$\mathcal{F}(Q)$中对应的面。同样地，如果说 P和 Q 具有同构的边图，我们便默认存在一个图同构 $G_P \xrightarrow{\sim} G_Q$，将 p_i 映到 q_i。因此，我们常会说 P和 Q 具有共同的边图，例如 G_P。

我们用 $P \simeq Q$ 表示 P和 Q 等距。由于我们的多胞体通常经过适当平移，除非另有说明，这个等距变换可以假定由一个正交变换实现。

我们重述一下猜想 1.2，并使用我们的术语：

猜想 1.2。设多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$ 具有相同的边图$G_P = (V, E)$，且满足

(i) $0 \in \text{int}(Q)$,(ii) Q 中的边长度至多与 P 中的一样长，即

$$\|q_i - q_j\| \leq \|p_i - p_j\|, \quad for\ all\ ij \in E,$$

(iii) Q 中顶点到原点的距离至少与 P中一样大，即

$$\|q_i\| \geq \|p_i\|, \quad for\ all\ i \in V,$$

则 $P \simeq Q$。

1.2. **文章结构**。在第 2 节中，我们证明猜想 1.2 的一个具有启发性的特殊情形 P 和 Q均为单形。尽管证明相对直接，但它有助于我们确定一个量——我们称之为多胞体的扩张 ——它是更一般方法的核心。

第 3 节的目标是证明，多胞体的“扩张”关于其边长是单调的，也就是说，边长缩短时，扩张会减小。事实上，我们在更一般的背景下验证这一点：用一般嵌入 q: $V(G_P) \to \mathbb{R}^d$ 替代 Q 的边图。作为主要工具，我们引入 *Wachspress* 坐标（一类特殊的广义重心坐标），并讨论 Ivan Izmestiev 定理。

在第 4 节中，我们应用这些结果证明猜想 1.2在以下三种特殊情形下成立：中心对称、近邻以及组合等价多胞体。我们

还讨论内接多胞体这一特殊情形。我们详细阐述了如何利用我们的工具来着手解决猜想 1.2。

在第 5 节中，我们将以对研究结果的进一步思考、与文献联系的说明，以及许多问题和未来研究方向，为我们的研究画上句号。尽管这是结论部分，内容却相当丰富，因为我们认为，与其反复打断正文的行文，不如将许多说明集中于此。

2. 热身：单形的一个证明

为了熟悉这一任务，我们讨论一个有启发性的特殊情形：猜想 1.2 其中 P 和 Q 都是单形。证明相当简短，但已经包含一般情形中的核心思想。

定理 2.1。设 $P、Q \subset \mathbb{R}^d$ 是两个单形，使得

（i） $0 \in \operatorname{int}(Q)$，（$ii$） Q 中的边不比 P中的长，且

（iii） Q 中的顶点到原点的距离不小于 P中的相应距离，

则 $P \simeq Q$。

证明。由（i），我们可以选取 Q中原点的重心坐标 $\alpha \in \operatorname{int} \Delta_n$，即 $0 = \sum_i \alpha_i q_i$。考虑以下等式与不等式系统：

$$\begin{array}{ccc} \sum_i \alpha_i \|p_i\|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i p_i \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \|p_i - p_j\|^2 \\ \wedge \mid \qquad \vee \mid \qquad \vee \mid \\ \sum_i \alpha_i \|q_i\|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i q_i \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \|q_i - q_j\|^2 \end{array} \tag{2.1}$$

第一行和第二行中的等式可通过将范数改写为内积，再进行直接计算来验证。从左到右，竖向不等式分别由（iii）、 α的定义以及（ii）得出。

但是，考察这个等式与不等式系统，我们必须得出结论：所有不等式实际上都取等号。特别是，最右侧各项取等号可得，对所有 i， $j \in V(G_P)$，都有 $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$（这里用到了 $\alpha_i > 0$）。两两距离相同的点集是等距的。□

为什么不能将这个证明应用于一般的多胞体？(2.1)中的最右侧求和项遍历所有顶点对，并且可以说，它衡量了 P中顶点对之间距离的加权平均。在单形中，每对顶点都构成一条边，因此，如果所有边的长度都缩短，这个平均值也会随之减小。然而，对于一般多胞体，当边变短时，一些“非边顶点间距离”仍可能增大，因此无法以同样逐项的方式得到最右侧的不等式。事实上，没有理由认为这个不等式一定成立。

接下来会发现，这个不等式实际上确实成立——至少在一些可控的情形下成立，我们将在下一节探讨这些情形。这将使我们能够把定理 2.1推广到单形以外的情形。

3. α-扩张、Wachspress 坐标与 Izmestiev 矩阵

受单形情形的证明（定理 2.1）启发，我们为多胞体（或图嵌入 $p\colon\ V(G_P) \to \mathbb{R}^d$）定义如下大小度量：

定义 3.1. 对于 $\alpha \in \Delta_n$ α-扩张 的 P 为

$$\|P\|_\alpha^2 := \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \|p_i - p_j\|^2.$$

定义中的求和遍历所有顶点对，因此 α-展开衡量的是顶点间距离的加权平均；特别地， $\|P\|_\alpha$ 是平移不变测度。如果所有顶点对之间的距离都减小，那么 α-展开也会减小。

本节令人惊讶的事实及主要结果（定理 3.2）是，对于经过精心选择的 $\alpha \in \Delta_n$， α-展开仅当边长减小时便会减小，而与其他顶点间距离的变化无关。

事实上，这一结论在更一般的情形下也成立，我们在此先行陈述（其中提到了下一节才会定义的 *Wachspress* 坐标；应将其理解为“存在 $\alpha \in \Delta_n$ 使得.....”）：

定理 3.2。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个边图为 $G_P = (V, E)$ 的多胞体，且 $\alpha \in \Delta_n$ 是某个内点 $x \in \operatorname{int}(P)$的 *Wachspress* 坐标。若 $q\colon V \to \mathbb{R}^e$是 G_P 的某个嵌入，其边长均不超过 P中的对应边长，那么

$$\|P\|_\alpha \geq \|q\|_\alpha,$$

当且仅当 q 是骨架 $\operatorname{sk}(P)$ 的一个仿射变换，且其所有边的长度都与 P 中的边长相同时，等式成立。

事实上，定理 3.2 与其说是在比较 P 和另一个多胞体，不如说是在比较骨架 $\operatorname{sk}(P)$ 与另一个图嵌入q；后者可能并非任何多胞体的骨架，甚至可能嵌入在维数更低或更高的欧几里得空间中。从本质上说，定理 3.2 表明：对于给定的边长，多胞体骨架具有最大的扩张度；这里的“扩张”是指用精心选取的权重对顶点间距离取平均。

这个结论显然取决于这些所谓的*Wachspress* 坐标是否存在，我们现在就来介绍它们。

3.1. **Wachspress 坐标**。在单形 $P \subset \mathbb{R}^d$ 中，每个点 $x \in P$ 都可以唯一地表示为该单形各顶点的凸组合：

$$x = \sum_i \alpha_i p_i.$$

系数 $\alpha \in \Delta_n$ 称为 P 中 x 的重心坐标 。

对于一般的多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，通常有多种方式可以将点 $x \in P$ 表示为该多胞体顶点的凸组合。不过，在许多应用中，人们希望有一种规范的选择，也就是所谓的“广义重心坐标”。目前已有多种此类坐标定义（综述见 [9]），其中一种就是所谓的*Wachspress* 坐标。Wachspress 最初为多边形定义了这类坐标 [28], ，之后 Warren 等人将其推广到一般多胞体 [30, 32]。下文第 第 3.3 节给出了一个构造，其几何解释归功于 [18], 。

不过，Wachspress 坐标与我们的研究目的相关之处，并不在于其精确定义，而在于它们与我们接下来引入的一种“更高秩”多胞体不变量之间的关系。

3.2. **Izmestiev 矩阵**。 我们证明 定理 3.2 的核心，是这样一个观察：Wachspress 坐标不过是一个“更高秩”对象的投影，我们称之为 *Izmestiev* 矩阵，对应于 P；它是一个 $(n\times n)$ 矩阵，与一个具有 n 个顶点、且 $0\in\operatorname{int}(P)$ 的多胞体相关。关于该矩阵的存在性及其与图骨架的联系，Lovász 在三维情形下 [21], 、Izmestiev 在一般维数下 [15]均已确立相关结果。我们总结如下：

定理 3.3。 给定一个具有 $P\subset\mathbb{R}^d$ 和 $0\in\operatorname{int}(P)$ 以及边图 $G_P=(V,E)$的多胞体，存在一个对称矩阵 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ （ P的 *Izmestiev* 矩阵），满足以下性质：

(i) 当 $ij\in E$时， $M_{ij}>0$； (ii) 当 $i\neq j$ 且 $ij\notin E$时，$M_{ij}=0$； (iii) $\dim\ker M=d$； (iv) $MX_P=0$，其中 $X_P^\top=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^{d\times n}$；并且($v$) M 具有唯一的正特征值（重数为一）。

Izmestiev 给出了该矩阵的一种显式构造，我们将在下文的 第 3.3 节 中讨论。关于 Izmestiev 矩阵谱性质的另一种简明证明，可见 [22]的附录。

观察 3.4。 Izmestiev 矩阵的每一项性质（i）至（v对于证明 定理 3.2 都至关重要，下面我们将逐一详细说明：

(i) 定理 3.3 (i) 和 (ii) 表明， M是某种广义邻接矩阵：当且仅当多胞体中相应顶点之间有边时，非对角元才非零。不过请注意，该定理并未直接说明 M 的对角元。(ii) 定理 3.3 (iii) 和 (iv) 精确给出了 M 的核，即 ker $M=$ 张成空间 X_P。ker $M\supseteq$张成空间 X_P这一包含关系直接由 (iv) 得出。但由于 P 至少有一个内点（原点），它必定是满维多胞体，也就是说，rank $X_P=d$。比较维数（通过 (iii)）即可得出所述等式。(iii) 令 $\{\theta_1>\theta_2>\cdots>\theta_m\}$为 M 的谱。于是，定理 3.3 (v) 告诉我们，对于所有 $k\geq 3$， $\theta_1>0$、 $\theta_2=0$ 和 $\theta_k<0$。(iv) 若 $\gamma>0$ 足够大，则 $M':=M+\gamma$Id 是一个非负矩阵，因此可应用 Perron-Frobenius定理（见定理 A.1）。由于边图 G_P 是连通的，矩阵 M' 是不可约的。Perron-Frobenius定理给出的关键信息是， M' 有一个对应于其最大特征值（即 $\theta_1+\gamma$）的特征向量 $z\in\mathbb{R}^n$，且其所有分量均为正。通过适当缩放，我们可以假设 $z\in$属于 int(Δ_n)；它是 Izmestiev 矩阵 M 对应于 θ_1 的特征向量，并且实际上张成其 θ_1 特征子空间。

请注意，i 至 v 中的性质在 定理 3.3 中对M 按正 因子缩放时保持不变。正如我们将在下文第 3.3 节 中验证的，$\sum_{i,j}M_{ij}>0$，因此我们可以采用方便的规范化方式$\sum_{i,j}M_{ij}=1$。事实上，在采用这一规范化方式后，我们现在可以揭示，Wachspress 坐标恰好就是 M的行和：

$$\alpha_i:=\sum_j M_{ij},\quad \text{for all } i\in\{1,\ldots,n\}. \tag{3.1}$$

此前已在 [18, 第4节。2] 针对三维多胞体观察到这一联系，我们将在下一节验证一般情形（推论 3.6）。

3.3. **Wachspress 与 Izmestiev 之间的关系**。Wachspress 坐标和 Izmestiev 矩阵可以用一种相当优雅的方式同时定义：给定一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，满足 $d \geq 2$，且 $0 \in$ 位于 int(P) 中，以及一个向量 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$，考虑其广义极对偶

$$P^\circ(\mathbf{c}) := \big\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, p_i\rangle \leq c_i \text{ for all } i \in V(G_P)\big\}.$$

我们有，$P^\circ(\mathbf{1})$ 与 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ 是通常的极对偶。原点的（未归一化）Wachspress 坐标 $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ 和（未归一化）Izmestiev 矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 作为$P^\circ(\mathbf{c})$ 的体积在$\mathbf{c} = \mathbf{1}$处的泰勒展开系数出现：

$$\operatorname{vol}\big(P^\circ(\mathbf{c})\big) = \operatorname{vol}(P^\circ) + \langle \mathbf{c}-\mathbf{1}, \tilde{\alpha}\rangle + \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{1})^\top \tilde{M}(\mathbf{c}-\mathbf{1}) + \cdots. \tag{3.2}$$

换言之，

$$\tilde{\alpha}_i := \frac{\partial \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))}{\partial c_i}\Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{1}} \quad \text{and} \quad \tilde{M}_{ij} := \frac{\partial^2 \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))}{\partial c_i \partial c_j}\Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{1}}. \tag{3.3}$$

采用这种形式，可以看出，P 的（未归一化）Izmestiev 矩阵就是其极对偶 P° 的 *Alexandrov* 矩阵。

对 (3.3) 的几何解释见于 [18, 第 3 节。3]以及 [15, 引理 2 的证明。3]：对于顶点 $p_i \in \mathcal{F}_0(P)$，令 $F_i \in \mathcal{F}_{d-1}(P^\circ)$ 为相应的对偶面。同样，对于边 $e_{ij} \in \mathcal{F}_1(P)$，令 $\sigma_{ij} \in \mathcal{F}_{d-2}(P^\circ)$ 为相应的余维 2 对偶面。那么

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\operatorname{vol}(F_i)}{\|p_i\|} \quad \text{and} \quad \tilde{M}_{ij} = \frac{\operatorname{vol}(\sigma_{ij})}{\|p_i\|\|p_j\| \sin \sphericalangle(p_i, p_j)}, \tag{3.4}$$

其中 $\operatorname{vol}(F_i)$ 和 $\operatorname{vol}(\sigma_{ij})$均应理解为相对体积。对于 $\tilde{\alpha}$ 的表达式（相差一个常数因子）是中 F_i 的 P°中的即以面 F_i 为底、原点为顶点的锥体体积。因此它为正，这再次证实我们可以将其归一化为 $\alpha \in \Delta_n$，并且可以看出 α_i 度量了在 F_i 处的锥体体积占 P°总 volume 的比例。M 可以归一化，这一点可由下面的命题推出；该命题是 (3.1)的前置结果：

命题 3.5。$\sum_j M_{ij} = (d-1)\tilde{\alpha}_i$。

证明。首先注意到，vol($P^\circ(\mathbf{c})$) 是次数为 d 的齐次函数，即

$$\operatorname{vol}(P^\circ(t\mathbf{c})) = \operatorname{vol}(tP^\circ(\mathbf{c})) = t^d \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))$$

对于所有 $t \geq 0$。每个导数 $\partial \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))/\partial c_i$ 因此是次数为 $d-1$ 的齐次函数。由欧拉齐次函数定理 (定理 E.1) 可得

$$\sum_j c_j \frac{\partial^2 \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))}{\partial c_i \partial c_j} = (d-1)\frac{\partial \operatorname{vol}(P^\circ(\mathbf{c}))}{\partial c_i}.$$

代入 $\mathbf{c} = 1$ 并利用 (3.3) 即可得到所要结论。 □

我们立即看到 $\sum_{i,j} M_{ij} > 0$ 并且可以将其归一化为 $\sum_{i,j} M_{ij} = 1$。对于归一化量，确实有 (3.1)：

推论 3.6。$\sum_i M_{ij} = \alpha_j$ 对于所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$。

最后，Wachspress 坐标和 Izmestiev 矩阵的以下性质将与此相关，并可由上述内容推得。

注 3.7。

(i) 原点的 Wachspress 坐标和 Izmestiev 矩阵随 P 的平移连续变化，其归一化形式可以连续延拓到 $0 \in \partial P$。若原点位于面 $\sigma \in \mathcal{F}(P)$ 的相对内部，则 $\alpha_i > 0$ 当且仅当 $p_i \in \sigma$。特别地，若 $0 \in \mathrm{int}(P)$，则 $\alpha \in \mathrm{int}\ \Delta_n$。 ($ii$) 原点的 Wachspress 坐标和 Izmestiev 矩阵在对 P 进行线性变换后保持不变。这可由 (3.4)通过简单计算得出，正如在 [35,命题 4.6]中对 Izmestiev 矩阵所做的那样。

3.4. **定理 定理 3.2 的证明**。回顾主定理。

定理 3.2。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个多胞体，其边图为 $G_P = (V, E)$，并设 $\alpha \in \Delta_n$ 是某个内点 $x \in \mathrm{int}(P)$的 *Wachspress* 坐标。若 $q\colon V \to \mathbb{R}^e$是 G_P 的一个嵌入，且其边长均不超过 P 中的对应边长，则

$$\|P\|_\alpha \geq \|q\|_\alpha,$$

当且仅当 q 是骨架 $\mathrm{sk}(P)$ 的仿射变换，且其所有边的长度均与 P 中的对应边相等时，等式成立。

下面给出的证明完全是初等的，几乎只用到线性代数。在附录 F 中，读者可以找到另一个更简短的证明，该证明基于半定规划的对偶理论。

证明。 证明的核心是将 α-展开式 $\|P\|_\alpha$ 和 $\|q\|_\alpha$ 改写为若干项之和，其中每一项在从 P 过渡到 q 时都不增：

$$\begin{aligned}\|P\|_\alpha^2 &= \sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 - \Big\|\sum_i \alpha_i p_i\Big\|^2 + \mathrm{tr}(MX_PX_P^\top) \\ &\quad\ \vee\!| \qquad\qquad\qquad\quad \vee\!| \qquad\qquad\qquad\quad \vee\!| \\ &\sum_{ij\in E} M_{ij}\|q_i - q_j\|^2 - \Big\|\sum_i \alpha_i q_i\Big\|^2 + \mathrm{tr}(MX_qX_q^\top) = \|q\|_\alpha^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

当然，这种分解以及各项的单调性都并非显而易见；不过，证明它们几乎只需用到线性代数。下面详细说明。

为进行设定，我们回顾一下， α-展开式是一种平移不变的大小度量。因此，我们可以平移 P 和 q，使其满足我们的需要：

(i) 平移 P，使得 $x = 0$，也就是说， $\sum_i \alpha_i p_i = 0$。(ii) 由于此时 $0 \in \mathrm{int}(P)$，定理 3.3 保证 Izmestiev 矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 存在。(iii) 设 $\theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_m$ 为 M 的特征值，其中 $\theta_1 > 0$ 和 $\theta_2 = 0$。由观察 3.4 可知，(iv) 存在唯一的 θ_1-特征向量 $z \in \mathrm{int}(\Delta_n)$。(iv) 平移 q，使得 $\sum_i z_i q_i = 0$。

我们现在可以推导(3.5)中所示的分解：以下等式 y 只需将平方范数改写为内积，即可直接验证：

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 = \sum_i \Big(\sum_j M_{ij}\Big)\|p_i\|^2 - \sum_{i,j} M_{ij}\langle p_i, p_j\rangle,$$

我们继续改写这三项：

- 左侧： $M_{ij}\|p_i - p_j\|^2$ 仅在 $ij \in E$ 时非零（根据 定理 3.3 (ii) ）。因此，求和可以改写为遍历 G_P 的边（其中我们认为 $ij,\ ji \in E$ 相同，因此可以省去因子 $1/2$）

- 中间：Izmestiev 矩阵的行和恰好是原点的 Wachspress 坐标，即 $\sum_j M_{ij} = \alpha_i$。 - 右侧：回顾矩阵 $X_P \in \mathbb{R}^{d\times n}$，其各行是 P 的顶点坐标。相应的格拉姆矩阵 $X_P X_P^\top$ 的元素为 $(X_P X_P^\top)_{ij} = \langle p_i,\ p_j\rangle$。

由此可得以下等价恒等式：

$$\sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 = \sum_i \alpha_i \|p_i\|^2 - \sum_{i,j} M_{ij}(X_P X_P^\top)_{ij},$$

我们继续改写等式右侧的各项：

- 中间：此前在单纯形情形中已使用过以下变换（定理 2.1），通过直接展开平方范数即可验证：

$$\sum_i \alpha_i \|p_i\|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j \|p_i - p_j\|^2 + \Big\|\sum_i \alpha_i p_i\Big\|^2.$$

  请注意，中间项恰好是 α-展开式 $\|P\|_\alpha^2$。
- 右侧：求和遍历两个矩阵M和 $X_P X_P^\top$的逐项乘积，这可以改写为 $\operatorname{tr}(MX_P X_P^\top)$。

因此，我们得到

$$\sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 = \|P\|_\alpha^2 + \Big\|\sum_i \alpha_i p_i\Big\|^2 - \operatorname{tr}(MX_P X_P^\top).$$

这显然可以整理为(3.5)的第一行。对 q 也可以进行类似的一系列变换（我们用 p_i 替换 q_i，并用 X_P 替换 X_q，但保留 P的 Izmestiev 矩阵）。由此得到(3.5)的第二行。接下来需要验证逐项不等式。

对于第一项，我们有

$$\sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 \geq \sum_{ij\in E} M_{ij}\|q_i - q_j\|^2$$

根据逐项比较可得：求和仅遍历边，且 $M_{ij} > 0$ 对于$ij \in E$成立（根据定理 3.3 (i)），并且 q中的边不比 P 中的边长。

接下来，由于在设定中明智地选择了平移（i），我们有 $\sum_i \alpha_i p_i = 0$，因此

$$-\Big\|\sum_i \alpha_i p_i\Big\|^2 = 0 \geq -\Big\|\sum_i \alpha_i q_i\Big\|^2.$$

最后一项需要作最详细的阐述。根据 定理 3.3 (iv) Izmestiev 矩阵满足 $MX_P = 0$。因此，只需证明 $\operatorname{tr}(MX_q X_q^\top)$ 非正，因为由此即可推出

$$\operatorname{tr}(MX_P X_P^\top) = 0 \overset{?}{\geq} \operatorname{tr}(MX_q X_q^\top). \tag{3.6}$$

为证明 $\operatorname{tr}(MX_q X_q^\top) \leq 0$，考虑分解 $X_q = X_q^1 + \cdots + X_q^m$，其中 $MX_q^k = \theta_k X_q^k$（由于 M是对称的，其特征子空间彼此正交，且 X_q^k是

将 X_q 按列正交投影到 θ_k-特征子空间上的结果）。我们计算

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(MX_qX_q^\top) &= \sum_{k,\ell} \operatorname{tr}(MX_q^k(X_q^\ell)^\top) \\ &= \sum_{k,\ell} \theta_k \operatorname{tr}(X_q^k(X_q^\ell)^\top) && \mid \text{by } MX_q^k = \theta_k X_q^k \\ &= \sum_{k,\ell} \theta_k \operatorname{tr}((X_q^\ell)^\top X_q^k) && \mid \text{by } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \\ &= \sum_{k} \theta_k \operatorname{tr}((X_q^k)^\top X_q^k). && \mid \text{since } (X_q^\ell)^\top X_q^k = 0 \text{ when } k \neq \ell\end{aligned}$$

再次，在设定（iv）中，我们明智地选择了 q 的平移：$\sum_i z_i q_i = 0$ 可写为 $z^\top X_q = 0$。由于 z 张成 θ_1-特征子空间，故 X_q 的列向量与该 θ_1-特征子空间正交，因而 $X_q^1 = 0$。我们得出

$$\operatorname{tr}(MX_qX_q^\top) = \sum_{k\geq 2} \theta_k \operatorname{tr}((X_q^k)^\top X_q^k) \leq 0, \tag{3.7}$$

其中，最后一个不等式源于两个观察：第一，Izmestiev 矩阵M 具有唯一的正特征值 θ_1，因此对所有 $\theta_k \leq 0 \quad k \geq 2$ （定理 3.3 （v））；第二，$(X_q^k)^\top X_q^k$ 是一个格拉姆矩阵，因此是半正定的，且其迹非负。

这完成了逐项比较，并确立了不等式(3.5)。余下的是讨论等号情形。至此我们看到，等式 $\|P\|_\alpha = \|q\|_\alpha$ 等价于 (3.5) 中的逐项等式；因此我们逐项进行讨论。

要使第一项中的等式成立

$$\sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 \stackrel{!}{=} \sum_{ij\in E} M_{ij}\|q_i - q_j\|^2$$

我们再次回顾，$M_{ij} > 0$ 每当 $ij \in E$ 根据定理 3.3 (i)，因此，我们要求对所有边 $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ 都满足等式 $ij \in E$。因此，q中的边必须与 P中的边等长。

我们暂且略过第二项，并使最后一项中的等式成立：

$$0 = \operatorname{tr}(MX_PX_P^\top) \stackrel{!}{=} \operatorname{tr}(MX_qX_q^\top) \stackrel{(3.7)}{=} \sum_{k\geq 2} \theta_k \operatorname{tr}((X_q^k)^\top X_q^k).$$

由于 $\theta_k < 0$ 对所有 $k \geq 3$ （参见观察 3.4 （iii）），要使右侧的和为零，我们必然有

$$\operatorname{tr}((X_q^k)^\top X_q^k) = 0 \ \text{ for all } k \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad X_q^k = 0 \ \text{ for all } k \geq 3.$$

由于我们也已经知道 $X_q^1 = 0$，因此只剩下 $X_q = X_q^2$，也就是说，X_q 的列属于 θ_2-特征子空间（也称为核）M。特别地，span $X_q \subseteq$ ker $M=$ span X_P，其中最后一个等式由观察 3.4 (ii) 得出。众所周知，如果两个矩阵满足 span $X_q \subseteq$ span X_P，那么 X_q 的行是 X_P 的行的线性变换，也就是说，对于某个线性映射 $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$，有 $TX_P^\top = X_q^\top$；等价地，对于所有 $i \in V$，都有 $q_i = Tp_i$ （证明简述见附录中的定理 C.1）。因此，q （连同其在构造之前原有的平移）必定是 sk(P) 的一个仿射变换。

最后我们注意到，(3.5) 中间项的等式不会带来新的约束。事实上，由于 span $X_q \subseteq \ker M$，我们有 $MX_q = 0$ 并且

$$\sum_i \alpha_i q_i = \sum_i \Big(\sum_j M_{ij}\Big) q_i = \sum_j \Big(\sum_i M_{ij} q_i\Big) = 0 = \sum_i \alpha_i p_i.$$

因此，中间项中的恒等映射已可由最后一项中的恒等映射推出。

对于恒等映射情形的另一方向，假设 q 是 $\mathrm{sk}(P)$ 的一个仿射变换，且边长相同。我们不采用设定 (*iv*，而是考虑 q 的一个平移，使其成为 线性变换 $\mathrm{sk}(P)$，即 $X_q^\top = TX_P^\top$ 其中某个线性映射 $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$。因此 $\sum_i \alpha_i p_i = \sum_i \alpha_i q_i = 0$ 且 $MX_P = MX_q = 0$，于是 (3.5) 化简为

$$\|P\|_\alpha^2 = \sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 - 0 + 0 = \sum_{ij\in E} M_{ij}\|q_i - q_j\|^2 - 0 + 0 = \|q\|_\alpha^2.$$

□

由此立即得到以下结论：

推论 3.8。 一个多胞体由其边图、边长以及某个内点的 *Wachspress* 坐标唯一确定（至仿射等价）。

证明。 设多胞体 P_1 和 P_2 具有相同的边图和边长，且点 $x_i \in \mathrm{int}(P_i)$ 具有相同的 Wachspress 坐标 $\alpha \in \Delta_n$。根据 定理 3.2 可得 $\|P_1\|_\alpha \geq \|P_2\|_\alpha \geq \|P_1\|_\alpha$，因此 $\|P_1\|_\alpha = \|P_2\|_\alpha$。于是 P_1 和 P_2 由 定理 3.2 的等号情形可知仿射等价。 □

值得注意的是，这种重构适用于所有组合类型和维数。重构所得结果仅在仿射等价意义下唯一，而非在等距意义下唯一，这是由菱形和图 5 中的分段线性像等例子所致。一般而言，只有当“边方向位于无穷远圆锥曲线上”时，才会出现这种由仿射变换带来的灵活性（见 [3, 命题 4。2] 或 [5,命题 1。4]）。

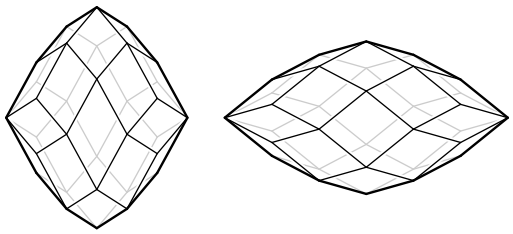


图 5。 两个仿射等价（但不等距）的多胞体，具有相同的边长。边方向在“无穷远平面”上描绘出一个圆。

最后，推论 3.8 所允许的重构在实践中是可行的。这源于将定理 3.2 重新表述为一个半定规划，该规划可以在多项式时间内求解。附录 附录 F 中给出的另一种证明对此作了详细说明。

4. 刚性、张拉整体与重构

我们在定理 3.2 中第 3 节探讨定理 2.1）的单形情形证明推广到一般多胞体，最终目标是验证主要猜想及其相应的“唯一重构版本”：

猜想 1.2。 给定多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$，它们具有相同的边图。若
（i） $0 \in$ 内部(Q)，（ii） Q 中的边长不大于 P中的边长，
且（iii） Q 中顶点到原点的距离不小于 P中的对应距离，那么
$P \simeq Q$。

猜想 1.1。 一个多胞体 P 具有 $0 \in$ 内部(P) 可由其边图、边长和顶点到原点的距离唯一确定（在等距意义下）。

与我们对定理 3.2的表述不同，上述两个猜想在针对一般图嵌入 $q\colon\ V(G_P) \to \mathbb{R}^e$ 而非 Q进行陈述时，均为错误的，即使我们要求 $0 \in \operatorname{intconv}(q)$。下面的反例由 Joseph Doolittle 提供 [7]:

例 4.1。 三维立方体 $P := [-1,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ 内接于半径为 $\sqrt{3}$的球面中。图 6 展示了一个内接嵌入 $q\colon\ V(G_P) \to \mathbb{R}^2$ 具有相同的外接半径和边长，并塌缩 G_P 到一条路径上。在外接圆中，每条边跨越一段长度为

$$2\sin^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 70.5287^\circ > 60^\circ.$$

因此，这三条边足以绕圆周超过一半。换言之， q 的凸包包含外心，且外心位于其内部。

通过将 q 解释为嵌入 $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$，再进行微小扰动，即可获得一个 $\mathbb{R}^3$ 中的满维反例。

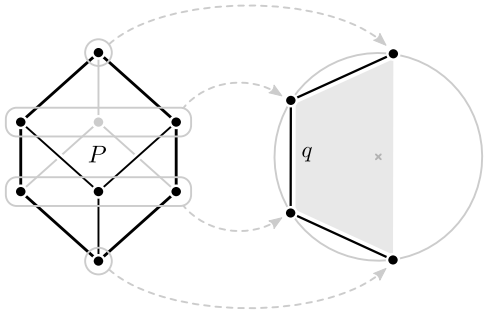


图 6. 三维立方体的边图的一种二维嵌入，其外接半径和边长与单位立方体相同，且原点也位于其凸包内。

关于猜想 1.1和猜想 1.2 的“图嵌入版本”的可能修正方案将在第 5.2 节中讨论。

尽管一般性的猜想 1.2仍未解决，但我们相信，我们的方法指明了正确的方向，并突出了其中的关键困难。在三个重要的特殊情形下，我们克服了这些困难，其中一些情形实际上可以将 Q 替换为图嵌入 $q\colon\ V(G_P) \to \mathbb{R}^e$。它们是

(i) P 和 q 是中心对称的（定理 4.4）。(ii) q 是$\mathrm{sk}(P)$ 的充分小扰动（定理 4.5）。(iii) P 和 Q 是组合等价的（定理 4.7）。

4.1. **剩余的困难**。 尝试利用 定理 2.1借助 定理 3.2 推广到单形以外时，我们面临以下困难： 定理 3.2要求 $\alpha \in \Delta_n$ 是某个内点的 Wachspress 坐标 $x \in \mathrm{int}(P)$，而在 定理 2.1的证明中，我们使用了 α 是 $0 \in \mathrm{int}(Q)$的一组重心坐标这一事实。虽然我们可以自由选择 $x \in \mathrm{int}(P)$，从而$\alpha \in \Delta_n$，但不清楚这样的选择是否都能得到 $0 \in$int(Q)的重心坐标。事实上，这是阻碍我们立即证明 猜想 1.2的唯一障碍。为方便起见，我们引入以下映射：

定义 4.2。 给定多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$，*Wachspress* 映射 $\phi\colon P \to Q$ 定义如下：对于具有 Wachspress 坐标 $\alpha(x)$ 的 $x \in P$， $\in \Delta_n$ 令

$$\phi(x) := \sum_i \alpha_i(x) q_i.$$

在处理图嵌入 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^e$ 而非 Q 的情形时，我们有一个类似的映射 $\phi\colon P \to \mathrm{conv}(q)$。

我们之前的讨论归结为检查原点是否位于 int(P) 相对于 ϕ的像中。如果 dim $P \geq$ dim Q，这或许确实有可能；但如果 dim $P <$ dim Q，那就绝无可能：ϕ(int(P)) $\subset Q$ 的像维数小于 Q，很容易就会“错过”原点。幸运的是，我们可以降低要求，现将在下面引理的（i）中将其形式化：

引理 4.3. 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个多胞体，且 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^e$ 是某个嵌入。若

(i) 存在一个 $x \in \mathrm{int}(P)$ 满足 $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ （例如 $\phi(x) = 0$），(ii) q 中的边长度至多与 P中一样长，并且(iii) q 中的顶点到原点的距离至少与 P中一样大，

于是 $q \simeq \mathrm{sk}(P)$ （通过正交变换）。

证明。 取 $x \in \mathrm{int}\, P$ 使得 $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$，并注意到其 Wachspress 坐标 $\alpha \in \mathrm{int}\, \Delta_n$ 严格为正。接下来我们将紧密沿用定理 2.1的证明：考虑以下等式与不等式系统：

$$\begin{array}{lllll} \sum_i \alpha_i \|p_i\|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i p_i \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \|p_i - p_j\|^2 = & \|x\|^2 & + \|P\|_\alpha^2 \\ \wedge| & \vee| & \vee| \\ \sum_i \alpha_i \|q_i\|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i q_i \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \|q_i - q_j\|^2 & = \|\phi(x)\|^2 & + \|q\|_\alpha^2, \end{array}$$

其中，两行等式可通过简单计算得出，而竖直方向的不等式（从左到右）分别由（iii）、（i）和（ii） $+$定理 3.2 推出。因此，所有不等式实际上都是等式。特别地，由于 $\alpha_i > 0$ 我们得到，对所有 $\|p_i\| = \|q_i\|$ 均有 $i \in V$且对所有 $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ 均有 $i, j \in V(G_P)$从而证明了q 和 $\mathrm{sk}(P)$ 确实可通过正交变换实现等距。 □

要使引理 4.3 (i)不成立，唯一的可能是 $\|\phi(x)\| > \|x\|$ 对所有 $x \in \mathrm{int}(P)$都成立。由 (ii) 和 (iii) 可知，当 x是 P的一个顶点或位于一条边上时，都有 $\|\phi(x)\| = \|x\|$，这使得 (i) 看起来不应当不成立，但似乎很难在一般情况下排除这种可能。

在下文讨论的猜想 1.2的三个特殊情形中，我们实际上都成功验证了 $0 \in \phi(\mathrm{int}(P))$，以便应用引理 4.3。

4.2. **中心对称**。令 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为中心对称（更准确地说，是关于原点对称）的，即 $P = -P$。这将诱导一个对合 $\iota\colon V(G_P) \to V(G_P)$，且对于所有 $i \in V(G_P)$，都有 $p_{\iota(i)} = -p_i$。若边图的嵌入 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^d$ 满足对于所有 $i \in V(G_P)$，都有 $q_{\iota(i)} = -q_i$，则称该嵌入为中心对称的。

定理 4.4（中心对称版本）。给定一个中心对称多胞体$P \subset \mathbb{R}^d$和一个中心对称图嵌入 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^e$，使得

（*i*） q中的边长度至多与 P中的一样长，并且（*ii*） q中的顶点到原点的距离至少与 P中的一样大，

则 $q \simeq \mathrm{sk}(P)$。

证明。由于 P是中心对称的，因此有 $0 \in \mathrm{relint}(P)$，并且我们可以找到原点在 P中的 Wachspress 坐标 $\alpha \in \mathrm{int}(\Delta_n)$。由于 Wachspress 坐标在线性变换下保持不变（如 注 3.7 (*ii*)中所述），因此有$\alpha_i = \alpha_{\iota(i)}$。对于 Wachspress 映射 ϕ，有

$$\phi(0) = \tfrac{1}{2}\sum_{i\in V} \alpha_i q_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i\in V} \alpha_{\iota(i)} q_{\iota(i)} = \tfrac{1}{2}\sum_{i\in V} \alpha_i q_i - \tfrac{1}{2}\sum_{i\in V} \alpha_i q_i = 0,$$

由此，结合引理 4.3即可得出结论 □

显然，定理 4.4可以推广到其他能够唯一固定原点的对称类型，例如不可约对称群。

定理 4.4 在经典刚性理论的框架下有一种自然的解释：它断言某个张拉整体框架具有全局刚性。Connelly 已证明这一形式在三维及以下维数成立 [4, 定理 5。1]。我们将在第 5.3 节对此作进一步阐述。

现在很容易想到，可以得出定理 4.4的唯一重构版本，从而回答猜想 1.1中关于中心对称多胞体的问题。然而，这里有一个细微之处：我们在定理 4.4 中所用的图嵌入 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^e$的“中心对称”概念是相对于 P而言的，也就是说，它要求 q 与 P具有相同的对跖顶点对。但实际上，并非任意两个具有相同边图的中心对称多胞体都满足这一关系。David E. Speyer [25]构造了一个有 12 个顶点的四维多胞体，其边图存在一个不保持顶点对跖关系的自同构。

4.3. **局部唯一性**。给定一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，考虑其

$$\mathcal{E}_P := \{q : V(G_P) \to \mathbb{R}^d\}$$

d 维嵌入空间。于是有 $\mathrm{sk}(P) \in \mathcal{E}_P$。由于 $\mathcal{E}_P \cong \mathbb{R}^{n\times d}$（在某种合理意义下），我们可以拉回一个度量 $\mu\colon \mathcal{E}_P \times \mathcal{E}_P \to \mathbb{R}_+$。

定理 4.5（局部版本）。给定一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，满足 $0 \in \mathrm{int}(P)$，则存在一个 $\epsilon > 0$，具有以下性质：如果 $q\colon V(G_P) \to \mathbb{R}^d$是一个嵌入，且

（*i*） q与 $\mathrm{sk}(P)$ 的距离不超过 ϵ，即 $\mu(q, \mathrm{sk}(P)) < \epsilon$，（*ii*） q中的边长度至多与 P中的一样长，并且（*iii*） q中的顶点到原点的距离至少与 P中的一样大，

则 $q \simeq \mathrm{sk}(P)$。

定理 4.5 同样可以自然地用刚性理论的语言来诠释（参见 第 5.3 节）。下文的证明并未用到这一语言。

为了证明 定理 4.5，我们再次证明 $0 \in \phi(\mathrm{int}(P))$，这次需要更多工作：由于 $0 \in \mathrm{int}(P)$，存在一个 ϵ-邻域 $B_\epsilon(0) \subset P$，它包含原点。我们希望，对 P 的顶点进行足够小的扰动后，其在 $B_\epsilon(0)$ 经 ϕ 映射后的像仍是原点的一个邻域。

以下引理将这一希望形式化并加以验证。我们将其从 定理 4.5 的证明中单独列出，以便在 第 4.4 节中再次使用。其证明是标准的，现列于附录 D：

引理 D.1. 设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧凸集，且 $0 \in \mathrm{int}(K)$ 并且 $f\colon K \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一个同伦，满足 $f(\cdot, 0) = \mathrm{id}_K$。若限制映射 $f|_{\partial K}\colon \partial K \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 中给出 ∂K 的一个同伦，则 $0 \in \mathrm{int}\ f(K, 1)$。

换言之：如果一个“性质良好”的集合 K 将原点包含在其内部，并且对其进行变形，使得其边界始终不穿过原点，那么原点仍会留在其内部。

证明定理 4.5。 由于 $0 \in \mathrm{int}(P)$ 存在一个 $\delta > 0$ 满足 $B_\delta(0) \subset P$。

固定 $N \subset \mathcal{E}_P$ 的一个紧邻域。于是 $N \times P$ 在 $\mathcal{E}_P \times \mathbb{R}^d$ 中是紧的，并且映射

$$N \times P \to \mathbb{R}^d, \quad (q, x) \mapsto \phi_q(x) := \sum_i \alpha_i(x) q_i$$

是一致连续的：存在一个 $\epsilon > 0$，使得每当 $\mu(q, q') + \|x - x'\| < \epsilon$ 时，都有 $\|\phi_q(x) - \phi_{q'}(x')\| < \delta/2$。我们可以假设 ϵ 足够小，从而 $B_\epsilon(\mathrm{sk}(P)) \subset N$。我们证明这个 ϵ 满足定理的陈述。

假设 q 与 $\mathrm{sk}(P)$ 相差不超过 ϵ，那么

$$\mu(\mathrm{sk}(P), q) + \|x - x\| < \epsilon \implies \|x - \phi_q(x)\| = \|\phi_{\mathrm{sk}(P)}(x) - \phi_q(x)\| < \delta/2.$$

将 q 替换为任意线性插值 $q(t) := (1-t)\,\mathrm{sk}(P) + tq$，且满足 $t \in [0,1]$ 时，结论同样成立。定义如下同伦：

$$f\colon B_\delta(0) \times [0,1] \to \mathbb{R}^d, \quad (x, t) \mapsto \phi_{q(t)}(x).$$

我们有 $f(\cdot, 0) = \mathrm{id}$。也就是说，如果 $x \in \partial B_\delta(0)$，那么 $\|f(x, 0)\| = \delta$，并且

$$\|f(x,t)\| \geq \|f(x,0)\| - \|f(x,0) - f(x,t)\| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2,$$

并且对所有 $t \in [0,1]$，$f(x,t) \neq 0$。由于 $B_\delta(0)$ 是紧致且凸的，同伦 f 满足引理 D.1 的条件，因此我们得出 $0 \in f(B_\delta(0), 1) = \phi_q(B_\delta(0)) \subseteq \phi_q(\mathrm{int}(P))$。接着，根据引理 4.3 可得 $q \simeq \mathrm{sk}(P)$。□



图 7。如果 q 在定理 4.5 中不受限于 $\mathrm{aff}(P)$，则可以通过移出仿射包来增大从顶点出发的距离。

多胞体 P 在定理 4.5 中被假定为满维。这是必要的，因为允许 $\mathrm{sk}(P)$ 变形到其初始仿射包之外，就已经可以产生

诸如此处所示的反例图 7。即使将变形限制为满足$0 \in \mathrm{intconv}(q)$ 的情形也不够，以下示例便说明了这一点：

例 4.6. 考虑嵌入于 $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^5$中的三维立方体。设$p_1$，……，$p_8 \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ 为其顶点，并设 q_1，……，$q_8 \in \{0\} \times \mathbb{R}^2$ 为嵌入于 图 6（右侧）中的顶点。由于两者具有相同的边长和顶点到原点的距离，因此只要 $tp+sq$，嵌入 $t^2+s^2=1$也具有相同的性质。进一步观察，对于 p_i 和 q_i，原点都可以用相同的系数 $\alpha \in \Delta_n$ 表示为凸组合（当 α 时使用一个 $\alpha_i = \alpha_j$，只要 $p_i = -p_j$即可）。由此可得 $0 \in \mathrm{intconv}(tp+sq)$。

4.4. **组合等价多胞体**。本节考虑组合等价多胞体 P，$Q \subset \mathbb{R}^d$ 并证明以下结论：

定理 4.7（组合结构等价版本）。设 P、$Q \subset \mathbb{R}^d$ 是组合结构等价的多胞体，满足

（*i*） $0 \in \mathrm{int}(Q)$（*ii*） Q 中的边长度至多与 P 中的一样长，
并且（*iii*） Q 中的顶点到原点的距离至少与 P 中的一样大。

于是 $P \cong Q$。

特别地，由于维数不超过三的多胞体的组合结构由边图决定，这证明了 猜想 1.2 对于 d、$e \le 3$。

再次强调，证明使用了 引理 4.3。由于 $0 \in \mathrm{int}(Q)$，我们可以通过证明 $0 \in \phi(\mathrm{int}(P))$ 来验证 Wachspress 映射 $\phi\colon\ P \to Q$ 是满射。这一陈述本身也很有意义，因为关于 ϕ 是否为 双射 的问题，是 $d \ge 3$ 中一个众所周知的公开问题（见 猜想 5.11）。我们的满射性证明使用了 引理 D.1以及以下结果：

引理 4.8。给定一个面 $\sigma \in \mathcal{F}(P)$，*Wachspress* 映射 ϕ 将 σ 映射到对应的面 $\sigma_Q \in \mathcal{F}(Q)$。特别地，$\phi$ 将 ∂P 映射到 ∂Q。

证明。给定一点 $x \in \mathrm{relint}(\sigma)$，其 Wachspress 坐标为 $\alpha \in \Delta_n$，系数 α_i 非零，当且仅当顶点 p_i 属于 σ (注 3.7 (*i*))。结论$\phi(x) \in \sigma_Q$ 立即得出。□

引理 4.9。*Wachspress* 映射 $\phi\colon\ P \to Q$ 是满射。

证明。我们对 d 的维数 P进行归纳。当 $d=1$ 时，Wachspress 映射是线性的，结论显然成立。当 $d>1$ 时，回忆 ϕ 将 ∂P 映射到 ∂Q（根据 引理 4.8）。根据归纳假设，ϕ在每个真面上都是满射，因此在整个 ∂P上也是满射。

为证明内部的满射性，我们固定 $x \in \mathrm{int}(Q)$；我们证明 $x \in \mathrm{im}\,\phi$。令$\psi\colon$ $Q \to P$为另一个方向的 Wachspress 映射（通常 不是 的逆映射 ϕ），并定义 $\rho := \phi \circ \psi\colon\ Q \to Q$。注意，根据 引理 4。8 ρ 将 Q 的每个面映到其自身，因此通过以下线性同伦与其上的恒等映射同伦：Q：

$$f\colon Q \times [0,1] \to Q,\ (y,t) \mapsto (1-t)x + t\rho(x).$$

由于 Q 的面在凸组合下封闭，$f(\cdot,t)$ 将 ∂Q 映射到其自身，对所有 $t \in [0,1]$均成立。因此，f 满足引理 D.1 (其中 K 取为Q)，故 $x \in f(Q,1) = \mathrm{im}\ \rho \subset \mathrm{im}\ \phi$。□

定理 定理 4.7的证明立即得出：

定理 4.7 的证明。由于 $0 \in \text{int}(Q)$，且 Wachspress 映射 $\phi\colon P \to Q$ 是满射（由引理 4.9 可知），因此存在 $x \in P$，使得 $\phi(x) = 0$。由于 $\phi(\partial P) = \partial Q$ （由引理 4.8 可知），我们必有 $x \in \text{int}(P)$。 $P \simeq Q$ 随即由引理 4.3 得出。□

推论 4.10。 一个原点位于其内部的多胞体，由其面格、边长和顶点到原点的距离唯一确定。

如果原点不在 P 中，则不能保证唯一重构（回想一下图 3）。然而，如果 $0 \in \partial P$，则我们可以进一步说明。回顾一下切锥 P在面 $\sigma \in \mathcal{F}(P)$：

$$T_P(\sigma) := \text{cone}\{x - y \mid x \in P,\, y \in \sigma\}.$$

定理 4.11。 设 P、$Q \subset \mathbb{R}^d$ 是组合等价多胞体，且具有以下性质：

(i) $0 \in \text{relint}(\sigma_Q)$ 对于某个面 $\sigma_Q \in \mathcal{F}(Q)$， σ_P 是 P 中对应的面，且 P 和 Q 在 σ_P 和 σ_Q 处具有等距切锥。(ii) Q 中的边长不超过 P 中的边长。(iii) Q 中顶点到原点的距离不小于 P 中的顶点到原点的距离。

于是 $P \cong Q$。

例如，当 σ_Q 是 Q 的一个面，或者当 σ_Q 是余维二的一个面且在该面处 P 与 Q 的二面角相等时，性质（i）总是成立。

证明。 证明采用关于多胞体维数 d 的归纳法。归纳基础 $d = 1$ 显然成立。以下假设 $d \geq 2$。

首先注意到，我们可以将定理 4.7 应用于 σ_P 和 σ_Q，从而通过正交变换 T 得到 $\sigma_P \simeq \sigma_Q$： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，特别是 $0 \in \text{relint}(\sigma_P) \subseteq P$。根据（i），该变换可延拓到这些面的切锥。设 $F_{1,Q}$、……、$F_{m,Q} \in \mathcal{F}_{d-1}(Q)$ 是包含 σ_Q 的 Q 的各个面，并设 $F_{1,P}$、……、$F_{m,P} \in \mathcal{F}_{d-1}(P)$ 是 P 中相应的面。于是，$F_{i,P}$ 以及 $F_{i,Q}$ 在 σ_P 和 σ_Q 处也具有等距切锥，而 $F_{i,P} \simeq F_{i,Q}$ 则由归纳假设得出。

现在选择一点 $x_Q \in \mathbb{R}^d$，使其位于面 σ_Q 之外（即高于所有包含 σ_Q 的定义面超平面，且低于其余超平面），从而 $x_P := Tx_Q$ 位于面 σ_P之外。考虑多胞体 $Q' := \text{conv}(Q \cup \{x_Q\})$ 和 $P' := \text{conv}(P \cup \{x_P\})$。由于 x_Q 位于 σ_Q之外， Q' 的每条边要么是 Q的一条边，要么是连接 x_Q 与某个面 $F_{i,Q}$ 的一个顶点的边；对于 P'，情况类似。与 x_Q 相接的边的长度仅取决于切锥的形状以及面 $F_{i,Q}$ 的形状，因此， P'中对应边的长度相同。因此， P' 和Q' 满足定理 4.7 的前提条件，于是得到 $P' \simeq Q'$。

最后，由于 $x_Q \to 0$，我们有 $Q' \to Q$ 和 $P' \to P$ （在豪斯多夫度量下），这表明 $P \simeq Q$。 □

因此，如果原点位于 P 的内部或一个面 P 上，那么定理 4.7 适用。如果原点位于余维为三的面上，则存在反例。

例 4.12. 考虑图 3 中的五边形，图 3 将其视为位于平面 $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$内，其原先的原点现位于 (0,0,1)。考虑这些棱锥

$$P^* := \text{conv}(P \cup \{0\}) \quad \text{and} \quad Q^* := \text{conv}(Q \cup \{0\}).$$

这些多胞体的原点位于一个顶点（一个余维为三的面）上，具有相同的边图、边长和顶点到原点的距离，但彼此并不等距。通过考虑 P^* 和 Q^* 上的棱柱，可以构造原点位于一个高维余维为三的面上的例子。

我们不知道定理 4.7 在原点位于余维为二的面上时是否成立（参见问题 5.13）。

4.5. **内接多胞体**。值得为定理 4.7给出适用于内接多胞体的版本，也就是说，所有顶点都位于同一个球面（即外接球面）上的多胞体。对于内接多胞体，我们可以写出边长与外接半径之间的直接单调关系。

推论 4.13（内接版本）。给定两个组合等价的多胞体$P, Q \subset \mathbb{R}^d$，使得

（i） P 和 Q 分别内接于半径为 r_P 和 r_Q 的球面，（ii） Q 的内部包含其外心，并且（iii） Q 中的边长不大于 P中的边长，

于是 $r_P \geq r_Q$，当且仅当 $P \simeq Q$ 时等式成立。

证明。 平移 P和 Q，使两个外心都位于原点。假设$r_P \leq r_Q$。那么，定理 4.7 的所有前提条件均已满足，因此可得 $P \simeq Q$，从而 $r_P = r_Q$。□

这一变体尤其已被用于证明所谓“紧球堆积”的有限性，其中球体仅有有限种不同半径 [20]。

有趣的是，相应的“唯一重构版本”不需要对原点的位置作任何假设，也不需要给出外心半径的明确数值。事实上，我们甚至不需要应用我们的结果，因为这已经可以由柯西刚性定理（定理 B.1）直接推出。

推论 4.14。 给定组合类型的内接多胞体由其边长唯一确定，且仅差一个等距变换。

证明。 $d = 2$ 的情形很简单：给定任意一个圆，按指定的边长放置各边，除等距变换外只有一种方式。此外，只有一个圆半径能使这些边恰好绕圆一周并完美闭合。这就证明了多边形的唯一性。

如果 P 的维数更高，那么它的二维面仍然是内接的，具有指定的边长；根据上面的二维情形， P和 Q 中的对应二维面因此等距。于是 $P \simeq Q$ 由柯西刚性定理（定理 B.1）□即可得出。

5. 结论、补充说明与诸多悬而未决的问题

我们猜想，在所有维数和组合类型中，凸多胞体由其边图、边长以及其顶点到某个内点的距离集合唯一确定（在等距变换意义下）（猜想 1.1）。我们还提出了一个更一般的猜想，以表达这样一种观点：给定边长后，多胞体骨架已达到最大扩张（猜想 1.2）。我们基于 Wachspress 坐标和所谓的 Izmestiev 矩阵，发展了一些技术

这些技术使我们得以解决三个相关的特殊情形：中心对称多胞体（定理 4.4）、小扰动（定理 4.5）以及组合等价多胞体（定理 4.7）。我们相信，我们的方法已经揭示了验证一般情形时的核心难点。

本节汇集了我们对研究结果的进一步思考、关于与文献联系的注记，以及许多问题和未来的研究方向。

5.1. **猜想的推论**。猜想 1.1 大大推广了若干已知的“从边图重构”结果。以下是猜想 1.1的一个特殊情形：所有边等长的内接多胞体由其边图唯一确定。这包括以下特殊情形：

- 从基交换图重构拟阵：一个拟阵可由其拟阵基多胞体确定；该多胞体是一个 0-1 多胞体（因而是内接的），且所有边的长度均为 $\sqrt{2}$。这一重构最初在 [14] 中得到证明，最近又在 [24]中被重新发现。
- 从边图重构顶点和边同时传递的多胞体：这一结果在 [34,36], 中得到了证明，其基本上使用了本文的工具。

这将意味着，对于均匀多胞体或高维内接约翰逊立体[16]等类别的多胞体，也可以从边图进行类似的重构。

其次，若猜想 1.1得到肯定回答，也将解决[35] 中的问题 6.6，即度量着色能否捕捉多胞体的欧几里得对称性。

5.2. **关于图嵌入的猜想 1.2** 。**在**例 4.1 中，我们展示了猜想 1.2 在将 Q 替换为某个更一般的图嵌入q时并不成立： $V(G_P) \to \mathbb{R}^e$ 属于 G_P，即使 $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}(q)$。

我们对其为何失效的直觉，以及它与我们的猜想所处情形和已证实的特殊情形有何不同，在于例 4.1的嵌入并未恰当地“绕原点一周”。对于图的嵌入而言，这究竟意味着什么并不十分清楚；不过，我们觉得，赋予多胞体骨架、与其接近的嵌入以及中心对称嵌入这一性质是合理的。

这一思想的一种可能形式化表述如下方猜想所示，它甚至强于 猜想 1.2 （这一思想源于 Joseph Doolittle）：

猜想 5.1。给定一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 及其边图 q： $V(G_P) \to \mathbb{R}^e$的图嵌入 G_P，使得

(*i*) 对于每个顶点 $i \in V(G_P)$，圆锥

$$C_i := q_i + \operatorname{cone}\{q_j - q_i \mid ij \in E(G_P)\}$$

包含原点于其内部，

(*ii*) q中的边长度至多与 P中的一样长，并且

(*iii*) q中的顶点到原点的距离至少与 P中的一样大，

那么 $\operatorname{sk}(P) \simeq q$。

注意，由于 $\bigcap_i C_i \subseteq \operatorname{conv}(q)$，(*i*) 已经蕴含 $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}(q)$。

5.3. **框架的经典刚性**。 我们此前已经评论过定理 4.4 和 定理 4.5 在经典刚性理论语言中的一种自然解读（下文使用的任何刚性相关术语，均参见 [6] 。）

将 P 的边视为索，它们可以收缩但不能伸长；并使用压杆将 P 的所有顶点连接到原点，这些压杆可以伸长但不能收缩。这被称为一个张拉整体框架，我们将其称为张拉整体的 P。定理 4.5随后断言，这些张拉整体总是（局部）刚性的。

使用刚性的语言，会产生若干自然的后续问题。事实证明，互换索和压杆并不一定保持刚性；示例见图 8。因此，一个多胞体的张拉整体不一定是无穷小刚性的，因为无穷小刚性框架在互换索和压杆后仍保持刚性。

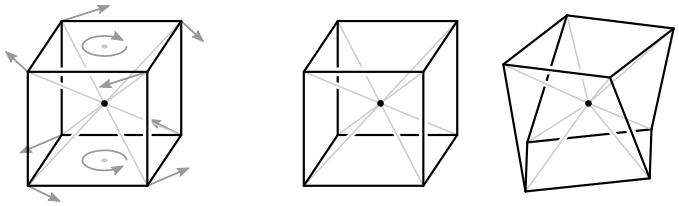


图 8。即使是立方体骨架，若将边视为压杆、将中心缆索视为索而作为张拉整体框架考虑，也并不刚性。扭转顶部和底部面会使边杆变长，但保持中心缆索的长度不变。这对应于左侧所示的无穷小弯曲。

由于缺乏一阶刚性，我们或许可以转而探讨高阶刚性：

问题 5.2. 多胞体的张拉整体是否总是二阶刚性，甚至可能预应力稳定？

若要将 定理 4.4 解释为张拉整体框架，可像之前那样在每条边上设置一根索，但现在每根中心支杆连接一个顶点 p_i 与其关于原点对称的顶点 $-p_i$，并将其中心固定在原点。 定理 4.4 进而断言，这个张拉整体框架是 普适刚性，也就是说，它在所有维数下都只有唯一的实现。

这里，交换索和压杆也无法保持普遍刚性，甚至无法保持全局刚性（见图 9）。它也无法保持局部刚性（见例 5.3）。

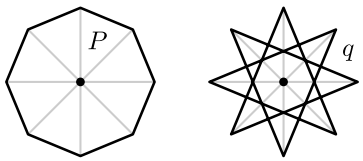


图 9. 一个八边形及其边图的一种嵌入：边更长，但中心缆索长度相同。这表明，在强制中心对称的条件下，相应的张拉整体框架并非全局刚性。

例 5.3。 考虑一个四维超立方体，其“顶面”和“底面”（均为三维立方体）分别嵌入超平面 $\mathbb{R}^3 \times \{\pm 1\}$ 中。我们按如下方式弯曲其骨架：如图 8所示使顶面变形，并使底面变形以保持框架中心对称，同时让两者始终位于各自的超平面内。各面内部的边杆会变长；而各面之间的边杆此前长度已是两超平面间的最小距离，因此其长度也只能增加。中心缆索的长度则保持不变。

因此，中心对称张拉整体框架也不一定是无穷小刚性的。

5.4. **施莱格尔图**。 对第 5.3 节中讨论的框架，还有另一种解读方式： 它们可以视为特殊施莱格尔图的骨架，具体来说，是以多胞体 P为底面多胞形的棱锥的施莱格尔图。因此，自然会产生这样的问题：一般的施莱格尔图是否也具有刚性？（Raman Sanyal 曾提出这个问题。）

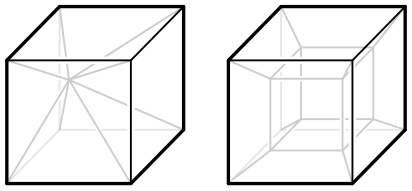


图 10。 两个四维多面体的施莱格尔图：底面为三维立方体的棱锥（左）和四维超立方体（右）。

施莱格尔图的刚性问题在二维情形下就已经很有趣了，也就是说，对于三维多胞体的施莱格尔图而言。许多三维多胞体的边图过于稀疏，无法在 $\mathbb{R}^2$中具有一般刚性，因此人们可能会认为，它们的大多数施莱格尔图都是柔性的。事实上，柔性施莱格尔图确实存在（见图 11，左图）。

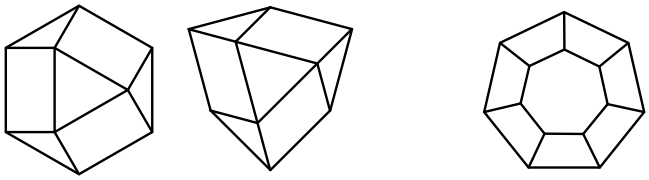


图 11. 一个可弯曲的施莱格尔图（左）和一个刚性的施莱格尔图（右）。

然而，令人惊讶的是，这似乎是例外而非常态。例如，我们认为 $(2n+1)$边形棱柱的施莱格尔图总是刚性的（见图 11，右图）。由于施莱格尔图是非常特殊的实现（它们是凸体的投影），其中的一般情形很可能是刚性的。迄今为止，这一点尚不明确。

问题 5.4. 一般施莱格尔图是否刚性?

上文将施莱格尔图视为杆-铰框架。若将其视为张拉整体框架，则很容易找到一般情况下可变形的例子（见 图12）。施莱格尔图也不一定是全局刚性的（见图13）。

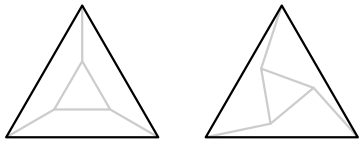


图12。 一个三棱柱的施莱格尔图骨架，外侧设置索、内侧设置压杆，并非刚性。扭转内三角形会增加压杆的长度，同时保持其他所有长度不变。

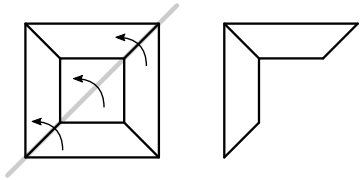


图13。 沿对角线折叠三维立方体的施莱格尔图，可保持所有边长不变。

5.5. **Stoker猜想**。 Stoker猜想探讨多胞体的二面角能否确定其面角，从而在某种程度上确定其整体形状。回顾一下，二面角 是面在余维二的面处相交时形成的角，而面角 则是各个面的二面角。Stoker猜想提出于 1968 [26], ，Wang和Xie最近声称证明了该猜想 [29]:

定理5.5 (Wang-Xie，2022年)。 设 P_1 和 P_2 是两个组合等价多胞体，且对应的二面角相等。那么所有对应的面角也都相等。

我们的结果使我们能够表述一个语义相近的结论。以下结论是推论 4.10 应用于极对偶多胞体时的直接推论:

推论5.6。 设 P_1 和 P_2 是两个组合等价多胞体，且对应的二面角和面到原点的距离相等。那么 $P_1 \simeq P_2$。

虽然与 Stoker猜想相比，推论5.6 的假设更强（我们要求面到原点的距离），但我们得到的结论是等距变换，而不仅仅是面角相同。尽管两者相关，但据我们所知，定理5.5 与推论5.6 中任一结论都难以由另一个轻易推出。

5.6. **纯边长约束**。 许多多胞体无法仅凭其边图和边长重建至等距变换（回想一下图1）。然而，据我们所知，以下问题仍未解决:

问题5.7。 多胞体的组合类型是否能由其边图和边长唯一确定?

仅此便足以证明猜想 1.1 （根据 推论 4.10）。这也将意味着以下问题的答案是肯定的：

问题 5.8. 一个多胞体是否由其二维骨架（即 截至并包含二维的面格）以及每个二维面的形状唯一确定，且仅相差一个等距变换?

请注意，这是对柯西刚性定理的一种特殊强化。柯西刚性定理要求完整给定面格，而非仅给定某些较低维度的层级。

现在固定组合类型。我们知道有三类多胞体，无法由其面格和边长唯一确定（相差一个等距变换）：

（i） n边形，具有 $n \geq 4$。（ii）闵可夫斯基和：若 $P = Q + R$和 Q以及 R彼此处于一般位置 相对于彼此，那么对各个加数稍作重新定向，就会改变 P 的形状，但其边长保持不变（见图 14）。（iii）所有边方向均位于“无穷远圆锥曲线”上的多胞体：这意味着存在仿射屈曲（见 [5]）。这一方法最容易应用于带状多胞体（回顾图5），但其他多胞体也会出现这种情况，例如边方向至多有五种的三维多胞体（见图 15）。

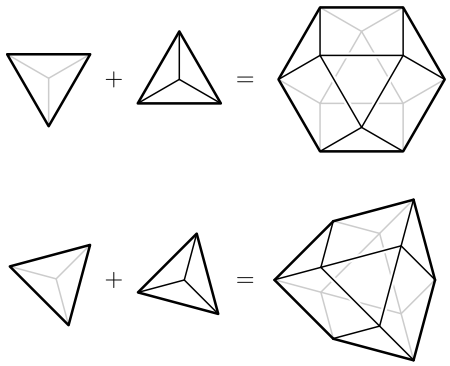


图 14. 立方八面体可以写成两个单形的闵可夫斯基和；扭转这两个单形，就能使立方八面体发生保持边长不变的屈曲。

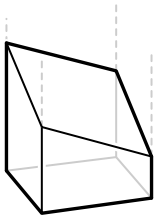


图 15. 以适当方式斜切长方体后，它只有五种边方向，并且存在一种保持边长的仿射屈曲。这种屈曲会将底面变形成菱形，同时使竖直边保持竖直。

我们尚未发现其他能够以这种方式屈曲的多胞体实例，因此想知道这是否已经构成了完整的刻画。

问题 5.9。 如果一个多胞体不能 仅凭其组合类型和边长便在等距变换意义下确定，那么它是否必然是一个多边形、一个非平凡的闵可夫斯基和，或者其所有边方向都位于某条无穷远圆锥曲线上？这个结论至少在三维及以下维数成立吗？

据称，在奥伯沃尔法赫的一次提问环节中，有人讨论了一个三维多胞体在多大程度上由其边上的局部度量数据确定（Ivan Izmestiev 在 MathOverflow 上转述了这一讨论 [33]），当时提出了以下更一般的问题：

问题 5.10。 给定一个单纯三维多胞体，并在每条边上指定其长度或二面角，那么这些数据在多大程度上能够确定该多胞体？

根据柯西刚性定理（定理 B.1），为每条边施加长度约束，就足以在等距变换意义下确定一个单纯多胞体。仅给出角度的情形，恰好就是三维 Stoker猜想（第 5.5 节）。据我们所知，除这两个极端情形外，文献中尚未讨论过这个问题。

另请注意，问题 5.10 针对的是单纯三维多胞体，但实际上借助一个技巧也涵盖了一般的三维多胞体：若 P 不是单纯的，就对每个二维面进行三角剖分，并为由此产生的每条新边指定一个 180° 二面角，以防各面沿该边折叠。

5.7. **Wachspress 映射的单射性 ϕ**。在引理 4.9中，我们证明了 Wachspress 映射 $\phi\colon\ P \to Q$ (参见定义 4.2）在组合等价多胞体之间是满射。相比之下，Wachspress 映射的单射性目前仅在二维情形下由 Floater 和 Kosinka 证明 [10]，并且有猜想认为它对所有 $d \geq 3$都成立。

猜想 5.11。*Wachspress* 映射 $\phi\colon\ P \to Q$ 是单射。

如果该猜想成立，Wachspress 映射将为任意两个组合等价多胞体提供一种有趣且在某种程度上典范的同胚（事实上是一种有理映射，见 [31]）。

5.8. **如果 $\mathbf{0 \notin \operatorname{int}(Q)}$？** 如果 $0 \notin Q$ 那么 图3和4表明我们的猜想不成立。不过，我们并不知道在“唯一重构”的情况下，解的数量是否有限。

问题 5.12。给定边图、边长和顶点到原点的距离，是否存在 e
具有这些参数的多胞体只有有限多个？

这与将 Q 替换为图嵌入 $q\colon\ V(G_P) \to \mathbb{R}^e$的情形形成对比；这种替换可能产生连续统多个实现（见 图16）。

在 第4.4节 中，我们证明了即使原点仅位于 P的某个面的内部，从面格、边长和顶点到原点的距离进行重构仍然可行；但如果原点位于余维三的面内，则重构可能失败。对于余维二的面，我们尚不清楚情况如何。

问题 5.13。 如果允许原点位于余维为 0、1 和 2 的面的内部，一个多胞体是否由其面格、边长和顶点到原点的距离唯一确定？

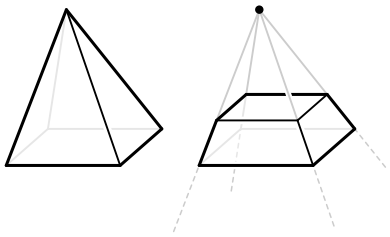


图16。 方底棱锥（左）作为框架是可变形的（因为此时底面不必保持平坦）。同样，采用这一特定原点的方底棱台框架（右）也会发生变形。然而，作为多胞体，它是（局部）刚性的。

附录A. Perron-Frobenius理论

Perron-Frobenius定理的以下片段与本文相关。回顾一下，如果不存在同时进行的行列置换能将矩阵化为包含多个分块的分块对角形式，则称该矩阵是 不可约的；等价地说，如果它不是某个非连通图的（带权）邻接矩阵。另见 [11]。

定理 A.1 (Perron-Frobenius)。 设 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个非负不可约对称矩阵，则

(i) M 的最大特征值 θ 为正，且其重数为一。(ii) 存在一个 θ-特征向量 $z \in \mathbb{R}^n$，其各项均严格为正。

附录B. 柯西刚性定理

柯西著名的刚性定理最初是在三维情形下表述的，通常简要地引述如下：

3-polytopes with isometric faces are themselves isometric.

Alexandrov 已将其推广到更高维度 [1]：假设各面等距，即可得出全局等距（另见 [23]中的证明）。我们给出一个严谨版本，它只要求二维面等距，并且可通过按维数归纳法从面版本轻松推出：

定理 B.1 （柯西刚性定理，二维面版本）。 给定两个组合等价的多胞体 P、$Q \subset \mathbb{R}^d$ 以及一个面格同构 ϕ: $\mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(Q)$。若 ϕ 在每个二维面 $\sigma \in \mathcal{F}_2(P)$ 上都可扩展为等距变换，则 ϕ 可扩展为 P上的等距变换，即 $P \simeq Q$。

附录 C. 一些线性代数

定理 C.1. 给定两个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{d\times m}$，其张成空间为$\operatorname{span} B \subseteq \operatorname{span} A$，则存在一个线性变换 T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，满足 $TA^\top = B^\top$。

证明。 设 $U_A := $为$A$的张成空间，且 $d_A := $为$U_A =$的秩。相应地，设 $U_B :=$为$B \subset U_A$的张成空间，且 $d_B := $为$U_B =$的秩。我们可以假设 A和 B的列已排序，使得 $a_1, ..., a_{d_A} \in U_A$构成一个基，同样，$b_1, ..., b_{d_B} \in U_B$也构成一个基。令 T: $U_A \to U_B$ 为唯一确定的线性映射，它将 $Ta_i = b_i$（对 $i \in \{1, ..., d_B\}$）以及 $Ta_i = 0$（对 $i \in \{d_B + 1, ..., d_A\}$）映射到相应对象。于是 $TA = B$。

A 的摩尔－彭若斯伪逆 $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 满足 $AA^\dagger = \pi_{U_A}$，其中π_{U_A} 是到 U_A上的正交投影。我们设 $T := (A^\dagger \tilde{T} A)^\top$，并验证

$$TA^\top = (AT^\top)^\top = (AA^\dagger \tilde{T} A)^\top = (\pi_{U_A}\tilde{T}A)^\top = (\pi_{U_A}B)^\top = B^\top,$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 B 的所有列都已属于 U_A，且投影的作用是恒等映射这一事实。□

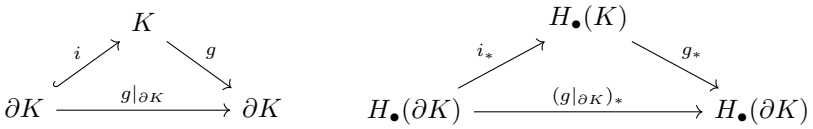
附录 D. 拓扑论证

引理 D.1. 设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧凸集，$x \in \operatorname{int}(K)$ 是一个点，且 $f\colon K\times[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一个满足 $f(\cdot, 0) =$恒等映射$_K$ 的同伦。如果限制 $f|_{\partial K}\colon \partial K\times[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 给出了 ∂K 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ 中的一个同伦，那么 $x \in$内部 $f(K, 1)$。

证明。设 $x \notin \operatorname{int} f(K, 1)$。由于 ∂f是 $\mathbb{R}^d\setminus\{x\}$中的同伦，我们实际上有 $x \notin f(K, 1)$。我们推导出矛盾。

按如下方式构造映射 $g\colon K \to \partial K$：对于 $y \in K$，考虑从 x出发并经过 $f(y, 1)$ 的唯一射线。令 $g(x)$ 为该射线与 ∂K 的唯一交点。同样地，构造映射 $h\colon \partial K \times [0,1] \to \partial K$：对于 $y \in \partial K$和$t \in [0,1]$，令 $h(y, t)$ 为 ∂K与从x出发并经过 $f(y, t)$ 的唯一射线的交点。注意，$h(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{\partial K}$，且 $h(\cdot, 1) = g|_{\partial K}$。换言之，$g|_{\partial K}$ 在 ∂K 上同伦于恒等映射。

这样的映射 $g\colon K \to \partial K$ 不可能存在，这是众所周知的。考虑以下交换图（左图）以及它在 $\mathbb{Z}$-同调群上诱导的图（右图），即可迅速证明这一点：



由于 $g|_{\partial K}$ 与恒等映射同伦，箭头 $(g|_{\partial K})_*$ 是同构，因此它上方的箭头也必须是同构。这是不可能的，因为

$$H_{d-1}(\partial K) = \mathbb{Z} \neq 0 = H_{d-1}(K).$$

□

附录 E. 欧拉齐次函数定理

定理 E.1 (欧拉齐次函数定理**)。** 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个次数为 $d \geq 1$ 的齐次函数，即对所有 $t \geq 0$，都有 $f(t\mathbf{x}) = t^d f(\mathbf{x})$。那么

$$\sum_i x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = d \cdot f(\mathbf{x}).$$

证明。对 $f(t\mathbf{x}) = t^d f(\mathbf{x})$ 关于 t 求导

$$dt^{d-1} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}(t^d f(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial t} f(t\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial (tx_i)} \frac{\partial (tx_i)}{\partial t} = \sum_i x_i \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial (tx_i)}$$

并在 $t = 1$ 处求值。 □

附录 F. 使用半正定优化对 定理 3.2 给出另一种证明

以下对定理 3.2 的证明未涉及等号情形。

证明。 定理 3.2可以等价地表述为：若选择 q_i 为 P的骨架，则以下规划可达到其最优值：

$$\begin{aligned} \max \quad & \|q\|_\alpha \\ \text{s.t.} \quad & \|q_i - q_j\| \le \|p_i - p_j\|, \quad \text{for all } ij \in E \\ & q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

由于 $\|q\|_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,\ j} \alpha_i\alpha_j\|q_i - q_j\|^2 = \sum_i \alpha_i\|q_i\|^2 - \|\sum_i \alpha_i q_i\|^2$，我们得到以下等价规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & \textstyle\sum_i \alpha_i\|q_i\|^2 =: e(q) \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_i \alpha_i q_i = 0 \\ & \|q_i - q_j\| \le \|p_i - p_j\|, \quad \text{for all } ij \in E \\ & q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

这一特定规划已得到广泛研究（参见 例如 [12,13,27]）。它可以改写为一个半定规划（此处不再重复），其对偶如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{ij\in E} w_{ij}\|p_i - p_j\|^2 =: d(w) \\ \text{s.t.} \quad & L_w - \operatorname{diag}(\alpha) + \mu\alpha\alpha^\top \succeq 0 \\ & w \ge 0, \mu \text{ free} \end{aligned}$$

其中 L_w 是 G_P的拉普拉斯矩阵，其边权重为 w （即 $L_{ij} = -w_{ij}$ 和$L_{ii} = \sum_{j\neq i} w_{ij}$），$\operatorname{diag}(\alpha)$ 是以 α 为对角元素的对角矩阵，而 $X \succeq 0$表示 X 是一个半正定矩阵。

回顾对偶规划的如下性质：若存在 $q_i \in \mathbb{R}^n$、 $w \ge 0$ 和$\mu \in \mathbb{R}$ ，使原始规划与对偶规划达到相同的目标值，那么我们就知道不存在对偶间隙，并且为两个规划都找到了最优解。现在我们声称，可以利用 q_i 作出这样的选择：$= p_i$、 w_{ij} （其中 M 是 P的 Izmestiev 矩阵），并令 μ 取一个稍后确定的值。我们首先验证目标值相同：

$$\begin{aligned} d(M) &= \sum_{ij\in E} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\|p_i - p_j\|^2 \\ &= \sum_i \Big(\sum_j M_{ij}\Big)\|p_i\|^2 - \sum_{i,j} M_{ij}\langle p_i, p_j\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i\|p_i\|^2 - \operatorname{tr}(\underbrace{MX_P}_{=0} X_P^\top) \\ &= \sum_i \alpha_i\|p_i\|^2 = e(p), \end{aligned}$$

其中 $X_P^\top := (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n\times d}$， $MX_P = 0$根据 定理 3.3 （iv），以及 $\sum_i M_{ij} = \alpha_j$ 根据 推论 3.6。

只需验证存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 $L_M - \operatorname{diag}(\alpha) + \mu\alpha\alpha^\top \succeq 0$。令 $D := \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1/2}, \dots, \alpha_n^{-1/2})$，并注意到矩阵 X和 DXD具有相同的惯性指数。因此，只需验证

$$0 \preceq D(L_M - \operatorname{diag}(\alpha) + \mu\alpha\alpha^\top)D = DL_MD - \mathrm{Id} + \mu(D^{-1}\mathbf{1})(D^{-1}\mathbf{1})^\top.$$

首先，我们断言 $L_M - \mathrm{diag}(\alpha) = -M$。由于两边的非对角项相同，只需比较它们的行和。事实上，由于 $L_M\mathbf{1} = 0$，我们有 $(L_M - \mathrm{diag}(\alpha))\mathbf{1} = -\alpha = -M\mathbf{1}$。因此，$DL_MD - \mathrm{Id}$ 与 $-M$具有相同的惯性指数，也就是说，有一个唯一的负特征值，并且可以验证相应的特征向量为$D^{-1}\mathbf{1}$。我们看到，项 $\mu(D^{-1}\mathbf{1})(D^{-1}\mathbf{1})^\top$ 只会使 $DL_MD - \mathrm{Id}$ 的这个最小特征值增大或减小，而不会改变其他特征值，因此我们可以将 μ 取得足够大，使这个特征值为正。□

将定理 3.2 表述为半定规划后，便可仅根据边图、边长以及某个内点的 Wachspress 坐标，同时重构多胞体及其 Izmestiev 矩阵（参见推论 3.8）。由于半定规划可以在多项式时间内求解，这种方法在实践中确实可行。

经费支持。 本研究得到工程与物理科学研究理事会的资助 [EP/V009044/1]

致谢。 感谢 Raman Sanyal、Joseph Doolittle、Miek Messerschmidt、Bernd Schulze、James Cruickshank、Robert Connelly 和 Albert Zhang 就本文主题进行了许多富有成果的讨论；其中许多讨论为研究结果带来了全新的视角，也引出了许多后续问题。

参考文献

[1] A. D. Alexandrov。《凸多面体》，第109卷。施普林格，2005年。[2] R. Blind 和 P. Mani-Levitska。谜题与多胞体同构。《Aequationes mathematicae》，34：287–297，1987年。[3] R. Connelly。一般全局刚性。《离散与计算几何》，33：549–563，2005年。[4] R. Connelly。应力矩阵与 M 矩阵。《奥伯沃尔法赫报告》，3：678–680，2006年。[5] R. Connelly、S. J. Gortler 和 L. Theran。仿射刚性与无穷远圆锥曲线。《International Mathematics Research Notices》，2018(13)：4084–4102，2018年。[6] R. Connelly 和 W. Whiteley。张拉整体框架的二阶刚性与预应力稳定性。SIAM离散数学杂志，9(3)：453–491，1996年。[7] J. Doolittle。对“给定内接多胞体的骨架。如果我移动顶点，使得没有边变长，外接半径仍可能变大吗？”的回答。https://mathoverflow.net/a/419107/108884。版本：2022年3月28日。[8] J. Doolittle。根据图重构近乎简单多胞体。arXiv 预印本 arXiv:1701.08334，2017年。[9] M. S. Floater。广义重心坐标及其应用。《数值学报》，24：161–214，2015年。[10] M. S. Floater 和 J. Kosinka。关于凸多边形之间 Wachspress 映射和平均值映射的单射性。计算数学进展，32(2)：163–174，2010年。[11] G. Frobenius、F. G. Frobenius、F. G. Frobenius、F. G. Frobenius 和 G. Mathematician。关于由非负元素构成的矩阵。1912年。[12] F. Göring、C. Helmberg 和 M. Wappler。嵌入分隔子的影子中。SIAM优化杂志，19(1)：472–501，2008年。[13] F. Göring、C. Helmberg 和 M. Wappler。图的旋转维数。《图论杂志》，66(4)：283–302，2011年。[14] C. A. Holzmann、P. Norton 和 M. Tobey。拟阵的图形表示。SIAM应用数学杂志，25(4)：618–627，1973年。[15] I. Izmestiev。科兰·德·韦尔迪埃数与多胞体图。《以色列数学杂志》，178(1)：427–444，2010年。[16] N. W. Johnson。具有正则面的凸多面体。《加拿大数学杂志》，18：169–200，1966年。[17] M. Joswig 和 G. M. Ziegler。邻接立方多胞体。《离散与计算几何》，24：325–344，2000年。

[18] T. Ju、S. Schaefer、J. D. Warren 和 M. Desbrun。利用极对偶为凸多面体构造坐标的几何方法。载于《几何处理研讨会》，第181–186页，2005年。[19] G. Kalai。根据图识别简单多胞体的一个简单方法。组合理论杂志 A辑，49(2)：381–383，1988年。[20] E. Kikianty 和 M. Messerschmidt。关于有限多种尺寸球体在欧几里得空间中的紧密堆积。arXiv预印本 arXiv:2305.00758，2023年。[21] L. Lovász。多面体的 Steinitz 表示与科兰·德·韦尔迪埃数。组合理论杂志 B辑，82(2)：223–236，2001年。[22] H. Narayanan、R. Shah 和 N. Srivastava。多胞体直径的谱方法。arXiv预印本 arXiv:2101.12198，2021年。[23] I. Pak。《离散与多面体几何讲义》。手稿（http://www. math. ucla. edu/ ˜pak/book. htm），2010年。[24] G. Pineda-Villavicencio 和 B. Schröter。拟阵多胞体的可重构性。SIAM离散数学杂志，36(1)：490–508，2022年。[25] D. E. Speyer。中心对称多胞体的边图能否确定哪些顶点互为对踵点？https://mathoverflow.net/q/440534/108884。版本：2023年2月27日。[26] J. J. Stoker。关于整体多面体的几何问题。纯粹与应用数学通讯，21(2)：119–168，1968年。[27] J. Sun、S. Boyd、L. Xiao 和 P. Diaconis。图上混合速度最快的马尔可夫过程及其与最大方差展开问题的联系。SIAM评论，48(4)：681–699，2006年。[28] E. L. Wachspress。一种有理有限元基。1975年。[29] J. Wang 和 Z. Xie。关于 Gromov 二面角刚性猜想与 Stoker猜想。arXiv预印本 arXiv:2203.09511，2022年。[30] J. Warren。凸多胞体的重心坐标。计算数学进展，6(1)：97–108，1996年。[31] J. Warren。关于重心坐标的唯一性。《当代数学》，334：93–100，2003年。[32] J. Warren、S. Schaefer、A. N. Hirani 和 M. Desbrun。凸集的重心坐标。计算数学进展，27(3)：319–338，2007年。[33] M. Winter。正十二面体是否可弯曲（作为边长固定的多胞体）？ https: // mathoverflow.net/q/434771。版本：2022年11月17日。[34] M. Winter。高度对称图的对称与谱实现，2020年。[35] M. Winter。通过边图着色捕捉多胞体对称性。arXiv预印本 arXiv:2108.13483，2021年。[36] M. Winter。《对称图的谱实现、谱多胞体与边传递性》。博士论文，开姆尼茨工业大学，2021年。

英国考文垂 CV4 7AL，华威大学数学研究所电子邮件地址：martin.h.winter@warwick.ac.uk