arXiv:2302.14315v2 [math.RT] 4 Feb 2024

变形卡当矩阵与广义预投射代数 II：一般型

Ryo Fujita 和 Kota Murakami

Abstract. 我们提出了一种具有多个变形参数的变形可对称化广义 Cartan 矩阵的定义。这些矩阵可通过 Geiß-Leclerc-Schr¨oer 意义下的广义预投射代数上的分次模获得范畴化解释。利用这一范畴化解释，我们推导出一个关于变形 Cartan 矩阵逆矩阵的组合公式，该公式以辫群作用表示。在某个条件下，我们的定义与 Kimura-Pestun 在研究箭图 $\mathcal{W}$-代数时引入的质量变形 Cartan 矩阵定义一致；这一条件在所有对称情形或所有有限与仿射情形下均成立。

Contents

引言 1
1. 变形卡当矩阵 3 2. 广义预投射代数 10 3. 注记 19 参考文献 26

Introduction

在对变形 $\mathcal{W}$-代数的研究中，Frenkel-Reshetikhin [FR98] 引入了有限型 Cartan 矩阵的一个二参数变形 $C(q,t)$。在先前的工作 [FM23], 中，本文作者利用 Geiß-Leclerc-Schr¨oer [GLS17]意义下广义预投射代数上的双分次模，给出了这一变形卡坦矩阵 $C(q,t)$ 的范畴化解释。更准确地说，我们证明了矩阵 $C(q,t)$ 及其逆矩阵 $C(q,t)$ 的条目~可以由某些双分次模的 Euler-Poincar´e 配对来表示。

日期：2024年2月6日。2020年数学主题分类：16G20、17B37、16W50、17B67、81R50。关键词和短语：变形卡当矩阵；广义预投射代数。R.F. 在修订期间获得了日本学术振兴会海外研究员项目以及日本学术振兴会科学研究费助成事业（项目编号 JP23K12955）的资助。K.M. 获得了京都大学顶尖全球化大学项目、日本学术振兴会特别研究员奖励费（日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 JP21J14653；修订期间项目编号 JP23KJ0337）以及日本学术振兴会双边交流项目（项目编号 JPJSBP120213210）的资助。

广义预投射代数的定义由 [GLS17], 在任意可对称化 Kac-Moody 型的普遍性下给出; 它具有 Weyl 群对称性 [GLS17, AHI+22] 以及晶体基的几何实现 [GLS18]。作为 [FM 23], 的后续, 本文的主要目的在于通过考察广义预投射代数上的多重分次模, 提出对任意可对称化广义 Cartan 矩阵（简称 GCM）的一个多参数变形的范畴化。在理论物理的背景下, Kimura-Pestun [KP18b, KP18a] 在研究（分数）箭图 $\mathcal{W}$-代数时引入了质量变形 Cartan 矩阵, 即具有多个变形参数的 GCM 变形; 该代数是 Frenkel-Reshetikhin 变形 $\mathcal{W}$-代数的推广。在某个条件下, 我们的变形本质上与 Kimura-Pestun 的质量变形 Cartan 矩阵一致; 该条件在所有对称情形或所有有限与仿射情形中均成立（见 §3.1）。

为了更精确地说明我们的结果, 我们先介绍一些术语。设 $C=(c_{ij})_{i,j\in I}$ 是一个带有对称化子 $D=\mathrm{diag}(d_i \mid i\in I)$ 的广义卡坦矩阵。置 $g_{ij}:=\gcd(|c_{ij}|,|c_{ji}|)$, 并令 $f_{ij}:=|c_{ij}|/g_{ij}$ 对于满足 $c_{ij}<0$ 的 $i,j\in I$ 成立。与这些数据相关联的是定义在任意域上的广义预投射代数 Π （精确定义见 [GLS17] , 或参见第 §2.3 节中的约定）。我们引入由下列元素生成的（乘法）阿贝尔群 Γ

$$\{q,t\}\cup\{\mu_{ij}^{(g)} \mid (i,j,g)\in I\times I\times\mathbb{Z}, c_{ij}<0, 1\le g\le g_{ij}\}$$

它们满足以下关系

$$\mu_{ij}^{(g)}\mu_{ji}^{(g)}=1 \quad \text{for all } i,j\in I \text{ with } c_{ij}<0 \text{ and } 1\le g\le g_{ij}.$$

这些元素起到变形参数的作用。在 q 和 t 之外, 我们还受 [KP18b, KP18a], 的启发, 引入了参数 $\mu_{ij}^{(g)}$; 在相关文献中, 与之对应的参数被称为质量参数。我们按照下文的（2.1）式, 在代数 Π 上赋予某种 Γ-分次。我们可以证明, 在合理条件下, Π 上的这一分次是普适的, 见第 §3.2 节。借助这些术语, 我们给出如下定义: GCM C 的 $(q,t,\underline{\mu})$-变形 $C(q,t,\underline{\mu})$, 并提出一个范畴框架, 将相关的组合学组织为关于 Γ-分次 Π-模的形式:

定义与 命题。我们通过下式定义 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 值的 $I\times I$ 矩阵 $C(q,t,\underline{\mu})$:

$$C_{ij}(q,t,\underline{\mu})=\begin{cases} q^{d_i}t^{-1}+q^{-d_i}t & \text{if } i=j;\\ -[f_{ij}]_{q^{d_i}}\sum_{g=1}^{g_{ij}}\mu_{ij}^{(g)} & \text{if } c_{ij}<0;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $[k]_q=(q^k-q^{-k})/(q-q^{-1})$ 是标准的 q 整数。我们证明以下结论:

(1) $C(q,t,\underline{\mu})$及其逆 $C(q,t,\underline{\mu})$的每个条目都可表示为某些 Γ-分次 Π-模的 Euler-Poincar´e 配对。 (§2.5) (2) 此外, 当 C 为无限型时, $\sim C(q,t,\underline{\mu})$的每个条目在 $t=0$ 处的形式展开与某个 Γ-模的 Π-分次维数一致, 因此其系数均为非负。 (推论 2.15)

~(3) 对于一般的 C， $t=0$ 处 $C(q,t,\underline{\mu})$的形式展开可用辫群对称性给出一个组合表达式。 (§§1.5 & 2.6)

注意，如果我们对每一种有限型以及某些特定的约化词考虑上述（3），那么经过一定的特化后，就可以得到由 [HL15] 和 [KO23a] 所得到的组合公式。我们可以将我们的推广视为 Π 关于一般约化表达式的某种 Weyl／辫群对称性（例如 [FG19、Mur22b]）的一个方面。当 C 为有限型时，这些结果与我们先前工作 [FM23] 中的结果基本相同。

当 C 为无限型时，代数 Π 不再是有限维的。在这种情况下，我们发现，研究由 Γ-分次模构成的范畴是合适的；这些分次模相对于 t-分次都是下有界的，并考虑其完备格罗滕迪克群。这样一来，相关讨论便几乎与有限型的情形平行。事实上，我们给出了一种统一的处理方式，同时涵盖有限型和无限型的情形。

在有限型的情形下，变形卡当矩阵的上述组合性质在量子环代数的表示论中发挥着重要作用，参见我们此前的工作 [FM23] 及其中的参考文献。我们可以预期，本文关于变形广义 Cartan 矩阵的结果，未来也有助于研究箭图 $\mathcal{W}$-代数以及 Kac-Moody 代数的量子仿射化的表示论。

本文结构如下。第 1 节中，在确定记号之后，我们讨论变形卡当矩阵的组合性质（即第 1.3 节中的辫群作用，以及第 1.5 节中利用该作用得到的 $C(q,t,\underline{\mu})$ 公式）。若干断言的证明需要借助范畴化解释，因此推迟到下一节。在第 2 节中，我们通过广义预投射代数上的分次模，讨论变形广义 Cartan 矩阵的范畴化解释。最后的第 3 节包含三条评论，它们在逻辑上独立于本文的其他部分。第 3.1 节中，我们将变形广义 Cartan 矩阵与 Kimura-Pestun 意义下的质量变形 Cartan 矩阵进行比较 [KP18a]。第 3.2 节中，我们证明，定义在 Π 上的 Γ-分次在取值于自由阿贝尔群的所有分次中具有普适性。第 3.3 节中，我们简要讨论 $C(q,t,\underline{\mu})$ 在除 t 以外的所有变形参数都取 1 时得到的 t- 变形广义 Cartan 矩阵，以及 Dlab-Ringel [DR80] 意义下通过调制图的经典表示论得到的其范畴化解释。

约定。本文始终采用以下约定。

- 对于命题 P，我们规定：当 P 为真或假时， $\delta(\mathrm{P})$分别取 1 或 0。我们常使用缩写 $\delta_{x,y}:=\delta(x=y)$，称为克罗内克$\delta$。
- 对于群 G，令 $\mathbb{Z}[G]$ 表示群环， $\mathbb{Z}[\![G]\!]$ 表示形式和$\{\sum_{g\in G}a_g g \mid a_g\in\mathbb{Z}\}$的集合。注意，$\mathbb{Z}[\![G]\!]$ 以自然方式成为一个 $\mathbb{Z}[G]$-模。如果 $\mathbb{Z}[G]$是交换整环，则用 $\mathbb{Q}(G)$表示其分式域。

1. Deformed Cartan matrices

1.1. 记号。设 I 是一个有限集合。回顾一下， $\mathbb{Z}$值的 $I\times I$矩阵 $C=(c_{ij})_{i,\ j\in I}$ 称为可对称化广义 Cartan 矩阵，若满足以下条件：(C1) $c_{ii}=2$, $c_{ij}\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ 对所有 $i,j\in I$ 均成立，且 $i\neq j$，当且仅当 $c_{ji}=0$时， $c_{ij}=0$

(C2) 存在一个对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_i \mid i\in I)$，其中 $d_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ 对所有 $i\in I$ 均成立，使得乘积 DC 是对称的。

我们称对角矩阵 D in (C2) 为 C 的对称化子。当 $\gcd(d_i \mid i\in I)=1$ 时，称其为最小的。对于 $i,j\in I$，当 $c_{ij}<0$ 时，我们记作 $i\sim j$。若对于任意 $i,j\in I$，都存在一个满足 $i\sim i_1\sim\cdots\sim i_l\sim j$ 的序列 $i_1,\dots,i_l\in I$，则称可对称化广义 Cartan 矩阵 C 不可约。在这种情况下，C 的最小对称化矩阵是唯一的，且 C 的任意对称化子都是它的数乘。从现在起，我们所说的广义卡坦矩阵，均指不可约可对称化广义 Cartan 矩阵。若 C 正定，则称其为有限型；否则称其为无限型。

在本节中，我们固定一个广义卡坦矩阵 $C=(c_{ij})_{i,j\in I}$，其对称化子为 $D=\mathrm{diag}(d_i \mid i\in I)$。对于任意 $i,j\in I$，若满足 $i\sim j$，我们定义

$$g_{ij}:=\gcd(|c_{ij}|,|c_{ji}|),\quad f_{ij}:=|c_{ij}|/g_{ij},\quad d_{ij}:=\gcd(d_i,d_j).$$

根据定义，我们有 $g_{ij}=g_{ji}, d_{ij}=d_{ji}$ 且 $f_{ij}=d_j/d_{ij}$。令 $r:=\mathrm{lcm}(d_i \mid i\in I)$。注意，转置 ${}^{\mathrm{t}}C=(c_{ji})_{i,j\in I}$ 也是一个广义卡坦矩阵，其最小对称化矩阵为$rD^{-1}=\mathrm{diag}(r/d_i \mid i\in I)$。沿用 [GLS17], 的说法，称子集 $\Omega\subset I\times I$ 为 的一个无环定向 C，如果满足以下条件：

- $\{(i,j),(j,i)\}\cap\Omega\neq\varnothing$ 当且仅当 $i\sim j$,
- 对于 I 中任意满足 $l>1$ 的序列 $(i_1,i_2,\dots,i_l)$，若对所有 $1\le k<l$ 都有 $(i_k,i_{k+1})\in\Omega$，则有 $i_1\neq i_l$。

设 $\mathsf{Q}=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ 为与 C相关联的 Kac-Moody 代数的根格，其中对于每个 $i\in I$，α_i 是第 i 个单根。我们将第 i 个简单反射记为 s_i，它是 Q 的一个自同构，由 $s_i\alpha_j=\alpha_j-c_{ij}\alpha_i$ 对 $j\in I$ 给出。Weyl 群 W 定义为由所有简单反射 $\{s_i\}_{i\in I}$生成的 $\mathrm{Aut}(\mathsf{Q})$ 的子群。$(W,\{s_i\}_{i\in I})$ 构成一个 Coxeter 系统。

1.2. 变形卡当矩阵。设 Γ为引言中定义的（乘法）阿贝尔群。作为阿贝尔群，Γ 是有限秩自由群。令 $\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}$ 表示由 $\{\mu_{ij}^{(g)} \mid i,j\in I, i\sim j, 1\le g\le g_{ij}\}$中的所有元素生成的 Γ 的子群。于是有$\Gamma=q^{\mathbb{Z}}\times t^{\mathbb{Z}}\times\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}$，其中 $x^{\mathbb{Z}}:=\{x^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$。若选取 C的一个无环定向 Ω，则有 $\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}=\prod_{(i,\ j)\in\Omega}\prod_{g=1}^{g_{ij}}(\mu_{ij}^{(g)})^{\mathbb{Z}}$。特别地，$\Gamma$ 的秩为 $2+\sum_{(i,\ j)\in\Omega}g_{ij}$。考虑 Γ的群环 $\mathbb{Z}[\Gamma]$。给定 C的一个无环定向 Ω，它与变量 q、t和 $\mu_{ij}^{(g)}$ 的 Laurent 多项式环相同，其中 $(i,j)\in\Omega$。

我们将形变广义 Cartan 矩阵（简称形变广义 Cartan 矩阵）$C(q,t,\underline{\mu})$定义为取值于 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 的 $I\times I$ 矩阵，其 (i,j)- 项 $C_{ij}(q,t,\underline{\mu})$ 由引言中的公式（ 0.1 ）给出。我们通常将所有参数 $\mu_{ij}^{(g)}$ 取为 1，并将所得的取值于 $\mathbb{Z}[q^{\pm1},t^{\pm1}]$ 的矩阵记作 $C(q,t)$。更明确地说，其 (i,j)-项为

$$C_{ij}(q,t):=\delta_{i,j}(q^{d_i}t^{-1}+q^{-d_i}t)-\delta(i\sim j)g_{ij}[f_{ij}]_{q^{d_i}}.$$

我们将矩阵 $C(q,t)$ 称为 (q,t)-变形广义 Cartan 矩阵。注意，当 $i\neq j$ 时，总有 $[d_i]_qC_{ij}(q,t)=g_{ij}[d_if_{ij}]_q$，因此矩阵 $([d_i]_qC_{ij}(q,t))_{i,\ j\in I}$是对称的。

注 1.1。当广义卡坦矩阵 C 为有限型时，矩阵 $C(q,\ t)$ 与 $q,\ t$)-变形卡当矩阵一致，该矩阵见于 [FR98]。在 [KP18b、KP18a], 中也考虑了一种一般型的变形广义 Cartan 矩阵，称为质量变形卡当矩阵。我们将在[KP18a]与我们的定义之间的差异在§3.1中讨论。

设 $\Gamma_0 := q^{\mathbb{Z}} \times \underline{\mu}^{\mathbb{Z}} \subset \Gamma$。由于 $\Gamma = t^{\mathbb{Z}} \times \Gamma_0$，我们有 $\mathbb{Z}[\Gamma] = \mathbb{Z}[\Gamma_0][t^{\pm 1}]$。令$q^{\pm D} :=$diag$(q^{\pm d_i} \mid i \in I)$，则可写为

$$C(q,t,\underline{\mu}) = (\mathrm{id} - tX)t^{-1}q^{D}, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbb{Z}[\Gamma_0][t]$ 是取值于 X 的矩阵。特别地，矩阵 $C(q,t,\underline{\mu})$ 是一个取值于$\sim$ $\sim$ $\mathbb{Z}[\Gamma_0](\!(t)\!)$的可逆矩阵，其逆矩阵 $C(q,t,\underline{\mu}) = (C_{ij}(q,t,\underline{\mu}))$ 由下式给出

$$\widetilde{C}(q,t,\underline{\mu}) = q^{-D}t\left(\mathrm{id} + \sum_{k>0} X^k t^k\right).$$

例 1.2。即使我们从一个不可逆的广义卡坦矩阵 C 出发，也能得到可逆矩阵 $C(q,t,\underline{\mu})$。例如，若取

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \mathrm{diag}(1,1),$$

则得到

$$C(q,t,\underline{\mu}) = \begin{pmatrix} qt^{-1} + q^{-1}t & -(\mu_{12}^{(1)} + \mu_{12}^{(2)}) \\ -(\mu_{21}^{(1)} + \mu_{21}^{(2)}) & qt^{-1} + q^{-1}t \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

由于 $\det C(q,t,\underline{\mu}) = q^2t^{-2} - (\mu_{12}^{(1)}\mu_{21}^{(2)} + \mu_{21}^{(1)}\mu_{12}^{(2)}) + q^{-2}t^2 \in \mathbb{Z}[\Gamma_0](\!(t)\!)^{\times}$，我们的 $C(q,t,\underline{\mu})$ 是可逆的。

$\widetilde{\ }$定理 1.3。当 C 为无限型时，矩阵 $C(q,t,\underline{\mu})$ 的系数非负，也就是说，对于任意 $i, j \in I$，都有 $C_{ij}(q,t,\underline{\mu}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\Gamma_0][\![t]\!]$。

证明将在下一节给出（见下文推论 2.15 （2））。

注 1.4。 如果在（1.2）中将除 q 之外的所有变形参数都取为 1，我们就得到 q-变形卡当矩阵 C（q），它不同于朴素的 q-变形C'（q），其中

$$C(q) = \begin{pmatrix} [2]_q & -2 \\ -2 & [2]_q \end{pmatrix}, \qquad C'(q) = \begin{pmatrix} [2]_q & [-2]_q \\ [-2]_q & [2]_q \end{pmatrix}.$$

注意， $C(q)$ 可逆，而 $C'(q)$ 不可逆。另请参见下文注释 3.4 ，其中相关讨论涉及 q-变形卡当矩阵。在量子仿射化表示论的背景下，GCM 的 q-变形会影响代数的定义$\widehat{\ }$。对于 $\mathfrak{sl}_2$ 的量子仿射化，中岛采用了矩阵 $C(q)$[Nak11，注释 3，13] Hernandez 在 [Her11] 中也采用了该矩阵。另请参见 [Her11，注释 4。1]。

1.3. 辫群作用。令 $\mathbb{Q}(\Gamma)$ 表示 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 的分式域。令 ϕ 为群 Γ 的自同构，由 $\phi(q) = q$, $\phi(t) = t$，以及 $\phi(\mu_{ij}^{(g)}) = \mu_{ji}^{(g)}$ 给出，其中 i、$j \in I$ 和 g均取所有可能值。它诱导出 $\mathbb{Z}[\![\Gamma]\!]$ 和 $\mathbb{Q}(\Gamma)$ 的自同构，我们仍记作 ϕ。我们常用 a^ϕ 代替 $\phi(a)$。

考虑由下式给出的 $\mathbb{Q}(\Gamma)$-向量空间 Q_Γ

$$\mathsf{Q}_\Gamma := \mathbb{Q}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{Q} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}(\Gamma)\alpha_i.$$

在 Q_Γ 上赋予一个非退化的 ϕ-半线性厄米形式 $(-,-)_\Gamma$，其定义为

$$(\alpha_i, \alpha_j)_\Gamma := [d_i]_q C_{ij}(q, t, \underline{\mu})$$

对于每个 i、$j \in I$。这里，“ϕ-半线性厄米”一词表示其满足

$$(ax, by)_\Gamma = a^\phi b (x, y)_\Gamma, \quad (x, y)_\Gamma = (y, x)_\Gamma^\phi$$

对于任意 x、$y \in \mathsf{Q}_\Gamma$ 和 a、$b \in \mathbb{Q}(\Gamma)$。设 $\{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}$ 是 Q_Γ 的另一个基，由下式定义

$$\alpha_i^\vee := q^{-d_i} t [d_i]_q^{-1} \alpha_i.$$

它被视为简单余根的一种变形。我们有

$$(\alpha_i^\vee, \alpha_j)_\Gamma = q^{-d_i} t C_{ij}(q, t, \underline{\mu})$$

对于任意 $i, j \in I$。令 $\{\varpi_i^\vee\}_{i \in I}$ 表示相对于 $(-,-)_\Gamma$ 的 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 的对偶基。对于每个 $i \in I$，我们还考虑元素 $\varpi_i := [d_i]_q \varpi_i^\vee$。按照这些约定，我们有

$$\alpha_i = \sum_{j \in I} C_{ji}(q, t, \underline{\mu}) \varpi_j, \qquad \alpha_i^\vee = q^{-d_i} t \sum_{j \in I} C_{ij}(q, t, \underline{\mu})^\phi \varpi_j^\vee. \tag{1.3}$$

对于每个 $i \in I$，我们定义一个 $\mathbb{Q}(\Gamma)$-线性自同构 T_i，作用于 Q_Γ，如下：

$$T_i x := x - (\alpha_i^\vee, x)_\Gamma \alpha_i \tag{1.4}$$

对于 $x \in \mathsf{Q}_\Gamma$。用基 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 表示时，我们有

$$T_i \alpha_j = \alpha_j - q^{-d_i} t C_{ij}(q, t, \underline{\mu}) \alpha_i. \tag{1.5}$$

因此，作用（1.4）可以看作是 i阶简单反射 s_i的一种变形。注意，我们的 $\mathbb{Q}(\Gamma)$-线性自同构 $T_i (i \in I)$ 作用于 Q_Γ，在经过某些特化后，会还原为 [Cha02] 和 [BP98] 中针对有限型情形引入的辫群作用（参见[FM23，第 1 节。3]）。

命题 1.5. 算子 $\{T_i\}_{i \in I}$ 定义了与 Coxeter 系统 $(W, \{s_i\}_{i \in I})$ 相关联的辫群作用，即它们满足辫关系：

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i && \text{if } c_{ij} = 0, \\ T_i T_j T_i &= T_j T_i T_j && \text{if } c_{ij} c_{ji} = 1, \\ (T_i T_j)^k &= (T_j T_i)^k && \text{if } c_{ij} c_{ji} = k \text{ with } k \in \{2, 3\}. \end{aligned}$$

证明将在§2.6 中给出（在引理2.18之后）。

给定 $w \in W$，我们选取一个约化表达式 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$并令 $T_w := T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_l}$。根据命题 1.5，$T_w$ 与约化表达式的选取无关。

1.4. 关于有限型的备注。在本小节中，我们假设 C 是有限型。由于在这种情况下总有 $g_{ij}=1$，我们用 μ_{ij} 代替 $\mu_{ij}^{(1)}$。对于任意的 $(i,j)\in I$，我们定义 $\mu_{ij}:=\mu_{i,\,i_1}\mu_{i_1,\,i_2}\cdots\mu_{i_k,\,j}$，其中 $(i_1,\dots,i_k)$ 是 I 中的任意有限序列，满足 $i\sim i_1\sim i_2\sim\cdots\sim i_k\sim j$。注意，元素 $\mu_{ij}\in\Gamma$ 与此类序列的选取无关。令 $[-]_{\underline{\mu}=1}\colon\mathbb{Z}[\Gamma]\to\mathbb{Z}[q^{\pm1},t^{\pm1}]$ 表示由特化 $\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}\to\{1\}$ 诱导的映射。回忆一下，根据定义，$C_{ij}(q,t)=[C_{ij}(q,t,\underline{\mu})]_{\underline{\mu}=1}$。

引理 1.6。 当 C 为有限型时，对于任意的 i、$j\in I$ 和一个序列 $(i_1,\dots,i_k)$，我们有

$$(\varpi_i^\vee,T_{i_1}\cdots T_{i_k}\alpha_j)_\Gamma=\mu_{ij}[(\varpi_i^\vee,T_{i_1}\cdots T_{i_k}\alpha_j)_\Gamma]_{\underline{\mu}=1}.$$

证明。 根据定义，我们有 $C_{ij}(q,t,\underline{\mu})=\mu_{ij}C_{ij}(q,t)$，对于任意的 $i,j\in I$。于是由（1.5）即可得到结论。□

令 $w_0\in W$ 为最长元。它通过 $w_0\alpha_i=-\alpha_{i^*}$ 诱导出 I 的一个对合 $i\mapsto i^*$。我们考虑由 $\nu(\alpha_i)=\mu_{i^*i}\alpha_{i^*}$ 给出的 Q_Γ 上的 $\mathbb{Q}(\Gamma)$-线性自同构 ν，其中每个 $i\in I$ 均如此。容易看出，ν 是对合，且配对 $(-,-)_\Gamma$ 在 ν 作用下保持不变。特别地，对每个 $i\in I$，我们有 $\nu(\varpi_i^\vee)=\mu_{ii^*}\varpi_{i^*}^\vee$。记与 C 相关的 Coxeter 数和对偶 Coxeter 数分别为 h 和 $h^\vee$。

命题1.7. 假设 C 是有限型的。我们有 $T_{w_0}=-q^{-rh^\vee}t^h\nu$.

证明。 我们知道，当 $\underline{\mu}=1$ [FM23，定理1.6]成立时，该断言成立。借助引理1.6，可将其提升为所需公式。□

1.5. 组合反演公式。设 C 是一般型的广义卡坦矩阵。

设 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 和 $(j_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 I 中的两个序列。若存在一个双射 $\sigma\colon\ \mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$，使得对所有 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ 都有 $i_{\sigma(k)}=j_k$，并且当 $k<l$ 且 $\sigma(k)>\sigma(l)$ 时，我们有 $c_{i_k,\,i_l}=0$，则称 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 与 $(j_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 在交换意义下等价。

定理 1.8. 设 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 I 中的一个序列，满足以下条件：

(1) 若 C 为有限型，则 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 与另一序列 $(j_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 交换等价，使得子序列 $(j_1,\dots,j_l)$ 是一个约化词，其中 l 是最长元 $w_0\in W$ 的长度，并且对于所有 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们有 $j_{k+l}=j_k^*$；(2) 若 C 为无限型，则对于所有 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，子序列 $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ 是一个约化词，并且对于每个 $i\in I$，我们有 $|\{k\in\mathbb{Z}_{>0}\mid i_k=i\}|=\infty$。

那么，对于任意 $i,j\in I$，我们有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t,\underline{\mu})=q^{-d_j}t\sum_{k\in\mathbb{Z}_{>0};i_k=j}(\varpi_i^\vee,T_{i_1}\cdots T_{i_{k-1}}\alpha_j)_\Gamma.\tag{1.6}$$

有限型的定理 1.8 的证明。注意，根据命题 1.5，将序列 $(i_1,i_2,\dots)$ 替换为另一个交换等价的序列，(1.6) 右侧保持不变。当 C 为有限型时，由 FM23 的命题 3.16] 可知，等式 (1.6) 在 $\underline{\mu}=1$ 处成立。由于对于任意 $i,j\in I$，都有 $C_{ij}(q,t,\underline{\mu})=\mu_{ij}C_{ij}(q,t)$，因此根据引理 1.6，可将 (1.6) 推广到一般的 $\underline{\mu}$。□

一个证明 w 当 C 为无限型时，将在§2.6 下文中给出（在推论 2.19之后） .

在本节余下部分，我们讨论上述反演公式 (1.6) 的一个特殊情形，即序列来自一个 Coxeter 元，并由此推导出一种递归~算法来计算 $C(q,t,\underline{\mu})$。固定 C 的一个无环定向 Ω。若全序 $I=\{i_1,\dots,i_n\}$ 满足：$(i_k,i_l)\in\Omega$ 蕴含 $k<l$，则称其与 Ω 相容。取一个相容的全序，我们定义 Coxeter 元 $\tau_\Omega:=s_{i_1}\cdots s_{i_n}$。映射 $\Omega\mapsto\tau_\Omega$ 给出了 C 的无环定向集合与 W 的 Coxeter 元集合之间的良定义双射。下文中，我们将 $T_\Omega:=T_{\tau_\Omega}$ 记作简写。令$I=\{i_1,\dots,i_n\}$为与 Ω 相容的全序，对于每个 $i\in I$，我们定义

$$\beta_i^\Omega:=(1-T_\Omega)\varpi_i=q^{-d_i}tT_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}\alpha_{i_k}\qquad\text{if } i=i_k. \tag{1.7}$$

注意，所得元素 β_i^Ω与所选相容全序的选择无关。

命题 1.9. 设 Ω 是 C的无环定向。对于任意 i、$j\in I$，有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t,\underline{\mu})=\sum_{k=0}^{\infty}(\varpi_i^\vee,T_\Omega^k\beta_j^\Omega)_\Gamma. \tag{1.8}$$

证明。选择一个与 Ω 相容的 $I=\{i_1,\dots,i_n\}$ 全序。于是有 $T_\Omega=T_{i_1}\cdots T_{i_n}$。我们将序列（$i_1$、……、$i_n$）扩展为无限序列（$i_k$）$_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$都有$i_{k+n}=i_k$。当 C 为无限型时，根据 Spe09], ，该序列满足定理 1.8 中的条件，因此得到（1.8）。当 C 为有限型时，我们知道子序列（i_1、……、i_{2l}）$=$（i_1、……、i_n）^{h}与序列（j_1、……、j_{2l}）交换等价，其中（j_1、……、j_l）是最长元 w_0 的一个（适配于 Ω 的）约化词，并且对所有 $1\le k\le l$都有 $j_{k+l}=j_k^*$。事实上，当 C 为单边型时，这由 [B´ed99]可得。当 C 为非单边型时，我们简单地有 $\tau^{h/2}\Omega=w_0$，且（i_1、……、i_n）$^{h/2}$是 w_0的一个约化词。因此，定理 1.8 再次给出（1.8）。□

引理 1.10. 对于每个 $i\in I$ 和 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$q^{d_i}t^{-1}T_\Omega^{k+1}\beta_i^\Omega+q^{-d_i}tT_\Omega^k\beta_i^\Omega+\sum_{j\sim i}C_{ji}(q,t,\underline{\mu})T_\Omega^{k+\delta((j,i)\in\Omega)}\beta_j^\Omega=0. \tag{1.9}$$

证明. 对于任意 i、$j\in I$，我们有

$$T_i\varpi_j=\begin{cases}-q^{-2d_i}t^2\varpi_i-q^{-d_i}t\sum_{i'\sim i}C_{i'i}(q,t,\underline{\mu})\varpi_{i'} & \text{if } i=j,\\ \varpi_j & \text{if } i\ne j\end{cases}$$

根据定义。利用这一恒等式，我们得到

$$q^{d_i}tT_\Omega\varpi_i=-q^{-d_i}t\varpi_i-\sum_{j\sim i}C_{ji}(q,t,\underline{\mu})T_\Omega^{\delta((j,i)\in\Omega)}\varpi_j.$$

应用 $T_\Omega^k(1-T_\Omega)$ 得到 (1.9)。 □

一旦固定一个与 Ω 相容的全序 $I=\{i_1,\dots,i_n\}$，等式 (1.7) 和 (1.9) 就能沿字典序递归地计算所有 (k,i) 对应的元素 $T^k{}_\Omega\beta_i^\Omega$

的全序 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\times I$。因此，结合 (1.8)，我们得到了一个递归算法~来计算 $C_{ij}(q,\ t,\ \underline{\mu})$。

如果存在一个函数 $\epsilon\colon I\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，使得 $\epsilon(i)=\epsilon(j)$ 蕴含 $i\not\sim j$，我们就称广义卡坦矩阵 C 是二分的。当 C 是二分的时，我们可以按照下文所述，将参数 t 分离，从而简化上述递归公式。

~对于每个 $i\in I$，我们考虑一个 $\mathbb{Q}(\Gamma)$-线性自同构 T_i，它由 Q_Γ 中的 T_i 将参数 t 取值为 1 得到。更确切地说，它由下式给出

$$\bar{T}_i\alpha_j=\alpha_j-q^{-d_i}C_{ij}(q,1,\underline{\mu})\alpha_i$$

~对所有 $j\in I$ 均成立。算子 $\{T_i\}_{i\in I}$ 定义了辫群的另一种作用，在此作用下，Q_{Γ_0} 的 $\mathbb{Q}(\Gamma_0)$- 子空间：$=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Q}(\Gamma_0)\alpha_i$ 保持不变。

定义 1.11. 若函数 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$ 满足

$$|\xi(i)-\xi(j)|=1\quad\text{for all } i,j\in I \text{ with } i\sim j.$$

高度函数 ξ 给出 C 的一个无环定向 Ω_ξ，使得若 $i,j\in\Omega_\xi$，则 $i\sim j$，且 $\xi(j)=\xi(i)+1$。当 $i\in I$ 是 Ω_ξ 的一个汇时，换言之，当对所有满足 $j\sim i$ 的 $j\in I$，$\xi(i)<\xi(j)$ 成立时，我们定义另一个高度函数 $s_i\xi$：

$$(s_i\xi)(j):=\xi(j)+2\delta_{i,j}.$$

注 1.12. 当且仅当 C 是二分图时，C 存在高度函数。

给定函数 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$，我们定义 Q_Γ 上的线性自同构 t^ξ 为

$$t^\xi\alpha_i:=t^{\xi(i)}\alpha_i$$

对每个 $i\in I$。当 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$ 是高度函数且 $i\in I$ 是 Ω_ξ 的汇时，直接计算可得 $t^\xi T_i=\bar{T}_i t^{s_i\xi}$，由此我们推得

$$t^\xi T_{\Omega_\xi}=\bar{T}_{\Omega_\xi}t^{\xi+2}.\tag{1.10}$$

定义 1.13. 设 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$ 是高度函数。定义映射 $\Phi_\xi\colon I\times\mathbb{Z}\to\mathsf{Q}_{\Gamma_0}$ 为

$$\Phi_\xi(i,u):=\begin{cases}\bar{T}^k_{\Omega_\xi}(1-\bar{T}_{\Omega_\xi})\varpi_i & \text{if } u=\xi(i)+2k \text{ for some } k\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

下面的命题是命题 1.9 和（1.10）的推论。

命题 1.14。设 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$ 是一个高度函数。对于任意 i、$j\in I$，我们有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t,\underline{\mu})=\sum_{u=\xi(j)}^{\infty}(\varpi_i^\vee,\Phi_\xi(j,u))_\Gamma\, t^{u-\xi(i)+1}.\tag{1.11}$$

现在，引理 1.10 可特化为如下形式。

引理 1.15. 设 $\xi\colon I\to\mathbb{Z}$ 是一个高度函数。对于任意满足 $u>\xi(i)$ 的 $(i,u)\in I\times\mathbb{Z}$，我们有

$$q^{-d_i}\Phi_\xi(i,u-1)+q^{d_i}\Phi_\xi(i,u+1)+\sum_{j\sim i}C_{ji}(q,1,\underline{\mu})\Phi_\xi(j,u)=0.\tag{1.12}$$

特别是 lar，(1.12) 使我们能够递归地计算所有 $\Phi_\xi(i,\ u)$ 从.....开始

$$\Phi_\xi(i,\xi(i)) = (1-\bar{T}_{\Omega_\xi})\varpi_i = q^{-d_i}\bar{T}_{i_1}\cdots\bar{T}_{i_{k-1}}\alpha_i \quad for\ all\ i\in I,$$

其中， $I=\{i_1,\ldots,i_n\}$ 是与 Ω_ξ 和 $i_k=i$相容的全序。

因此，命题 1.14 结合引理 1.15给出了一个更简单的递归算法$\widetilde{\ }$来计算 $C_{ij}(q,\ t,\ \underline{\mu})$，当 C 为二分时。

注 1.16。当 C 为有限型时，公式（1.11）还原了[HL15，命题 2。1]（ADE 型）以及 [KO23a，定理 4。7]（BCFG 型）中的公式（经特化 $\Gamma_0\to\{1\}$）。

注 1.17。当 C 为有限型时，上述算法可用于完整计算

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }C(q,t,\underline{\mu})$（或 $C(q,t)$）。例如，我们给出 type F_4 下 $C(q,t)$ 的显式公式。我们采用约定 $I=\{1,2,3,4\}$，其中 $1\sim2\sim3\sim4$，且 (d_1,d_2,d_3,d_4) =(2, 2, 1, 1)。那么，对于任意 $i\le j$，我们有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t) = \frac{f_{ij}(q,t)+f_{ij}(q^{-1},t^{-1})}{q^9t^{-6}+q^{-9}t^6}$$

其中， $f_{ij}=f_{ij}(q,t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
f_{11} &= q^7t^{-5}+qt^{-1}, & f_{12} &= q^5t^{-4}+q^3t^{-2}+q,\\
f_{13} &= q^4t^{-3}+q^2t^{-1}, & f_{14} &= q^3t^{-2},\\
f_{22} &= q^7t^{-5}+(q^5+q^3)t^{-3}+(q^3+2q)t^{-1}, & f_{23} &= q^6t^{-4}+(q^4+q^2)t^{-2}+1,\\
f_{24} &= q^5t^{-3}+qt^{-1}, & f_{33} &= q^8t^{-5}+(q^6+q^4)t^{-3}+(2q+1)t^{-1},\\
f_{34} &= q^7t^{-4}+q^3t^{-2}+q, & f_{44} &= q^8t^{-5}+q^2t^{-1}.
\end{aligned}$$

Fo $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$r 对于另一种情形 $i>j$，我们可以使用关系式 $[d_i]_qC_{ij}(q,t)=[d_j]_qC_{ji}(q,t)$.

当$C(q,t)$为 ADE 型时，$\widetilde{C}$ 的显式公式 $\widetilde{C}_{ij}$ 为 ADE 型时，我们有 $C(q,t)=C(qt^{-1},1)$，而 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }C(q)=C(q,1)$ 的显式公式见 [GTL17，附录 A]（另见 [KO23a，第 4.4.1、4.4.2] 节）。

2. Generalized preprojective algebras

在本节中，我们固定一个任意域 $\Bbbk$。除非另有说明，向量空间和代数均定义在 $\Bbbk$ 上，且模均为左模。

2.1. 约定。设 Q 为一个有限箭图。我们将其视为四元组 Q =(Q_0,Q_1, s, t)，其中 Q_0 是顶点集， Q_1 是箭集，而 s（分别地，t）是映射 $Q_1\to Q_0$，将每个箭分别映到其源点（分别地，目标点）。对于箭图 Q，我们令 $\Bbbk Q_0 := \bigoplus_{i\in Q_0}\Bbbk e_i$ 且 $\Bbbk Q_1 := \bigoplus_{\alpha\in Q_1}\Bbbk\alpha$。我们赋予 $\Bbbk Q_0$ 一个 $\Bbbk$-代数结构，其中对任意 $i,j\in Q_0$，定义为 $e_i\cdot e_j=\delta_{ij}e_i$；并赋予 $\Bbbk Q_1$ 一个 $(\Bbbk Q_0,\Bbbk Q_0)$-双模结构，其中对任意 $i\in Q_0$ 和 $\alpha\in Q_1$，定义为$e_i\cdot\alpha=\delta_{i,\mathrm{t}(\alpha)}\alpha$ 和 $\alpha\cdot e_i=\delta_{i,\mathrm{s}(\alpha)}\alpha$ 。于是，Q 的路径代数定义为张量代数 $\Bbbk Q := T_{\Bbbk Q_0}(\Bbbk Q_1)$。

设 G 为一个乘法阿贝尔群，其单位元为 1。所谓 G-分次箭图，是指配备了映射 $\deg: Q_1 \to G$ 的箭图 Q。我们以自然方式将其路径代数 $\Bbbk Q$ 视为一个 G-分次代数。

我们称一个 G分次向量空间 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 是局部有限的，如果对于所有 $g \in G$，V_g 都是有限维的。在此情形下，我们将其分次维数 $\dim_G V$ 定义为形式和 $\sum_{g\in G}\dim_{\Bbbk}(V_g)g \in \mathbb{Z}[\![G]\!]$。对于一个 G分次向量空间 V 以及一个元素$x \in G$，我们通过 $(xV)_g = V_{x^{-1}g}$定义分次平移 $xV = \bigoplus_{g\in G}(xV)_g$。更一般地，对于 $a = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\![G]\!]$，我们令 $V^{\oplus a} := \bigoplus_{g\in G}(gV)^{\oplus a_g}$。当 $V^{\oplus a}$ 恰为局部有限时，我们有 $\dim_G V^{\oplus a} = a\dim_G V$。

2.2. 正分次代数的预备知识。令 $t^{\mathbb{Z}}$ 表示由一个非平凡元素 t生成的自由阿贝尔群。在下文中，我们考虑 G 为直积 $G = G_0 \times t^{\mathbb{Z}}$的情形，其中 G_0 是另一个阿贝尔群。我们的主要例子是 §1.2 中的群 $\Gamma = t^{\mathbb{Z}} \times \Gamma_0$。对于 G分次向量空间 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，我们通过 $V_n := \bigoplus_{g\in G_0} V_{t^n g}$定义 G_0分次子空间 $V_n \subset V$。根据定义，我们有 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$。我们使用记号 $V_{\geq n} := \bigoplus_{m\geq n} V_m$ 和 $V_{>n} := \bigoplus_{m>n} V_m$。

我们考虑一个满足以下条件的 G-分次代数 Λ：

(A) $\Lambda = \Lambda_{\geq 0}$ 且对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\dim_{\Bbbk} \Lambda_n < \infty$。

特别地，Λ_0 是一个 G_0-分次有限维代数。设 $\{S_j\}_{j\in J}$ 是 Λ_0 的 G_0-分次简单模的一个完备代表系，模同构和分次平移等价。它也给出了 Λ 的 G-分次简单模的一个完备代表系。对于一个 G-分次 Λ-模 M，对每个 $n \in \mathbb{Z}$，子空间 $M_{\geq n} \subset M$ 是一个 Λ-子模。令 $\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}$ 表示由满足 $M = M_{\geq n}$ 且对所有 $m \geq n$ 均有 $\dim_{\Bbbk} M_m < \infty$ 的 G-分次 Λ-模 M 构成的范畴，其态射为 G-齐次 Λ-同态。这是一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴。令$\Lambda\text{-mod}_G^{+} := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}$。注意，$\Lambda\text{-mod}_G^{+}$ 包含所有有限生成的 G-分次 Λ-模，因为根据条件 (A)，它包含这些模的投射覆盖。

引理 2.1. 给定 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $M \in \Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}$，存在一个满射 $P \twoheadrightarrow M$，其源自一个投射 Λ-模 P，且属于 $\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}$。

证明. 对每个 $m \geq n$，令 $P_m \twoheadrightarrow M_m$ 为将 M_m 视为 G_0-分次Λ_0-模时的一个投射覆盖。接着考虑 G-分次投射 Λ-模 $P := \Lambda \otimes_{\Lambda_0} \bigoplus_{m\geq n} t^m P_m$，它带有一个自然的满射 $P \twoheadrightarrow M$。由于 $\dim_G P$ 不大于 $\dim_G \Lambda \cdot \sum_{m\geq n} t^m \dim_{G_0} P_m$，而后者属于 $\mathbb{Z}[G_0][\![t]\!]t^n$，故此 P属于 $\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}$。□

对于阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $K(\mathcal{C})$ 表示其格罗滕迪克群。我们通过对任意 $n \in \mathbb{Z}$的包含映射，将$K(\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n})$视为 $K(\Lambda\text{-mod}_G^{+})$的一个子群。于是，子群族 $\{K(\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出了 $K(\Lambda\text{-mod}_G^{+})$的一个滤过。我们将完备格罗滕迪克群 $\hat{K}(\Lambda\text{-mod}_G^{+})$ 定义为射影极限

$$\hat{K}(\Lambda\text{-mod}_G^{+}) := \varprojlim_n K(\Lambda\text{-mod}_G^{+})/K(\Lambda\text{-mod}_G^{\geq n}).$$

注意，$\hat{K}(\Lambda\text{-模}_G^{+})$ 带有一个自然的 $\mathbb{Z}[G_0](\!(t)\!)$-模结构，由 $a[M] = [M^{\oplus a_+}] - [M^{\oplus a_-}]$ 给出，其中我们选择 $a_+, a_- \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[G_0](\!(t)\!)$ 使得 $a = a_+ - a_-$。

Lem命题 2.2。 $\mathbb{Z}[G_0]((t))$-模 $\hat{}K(\Lambda\text{-模}_G^+)$ 是自由的，其一组基为 $\{[S_j]\}_{j\in J}$。

证明。对于任意 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $M\in\Lambda\text{-模}_G^{\geq n}$，我们有唯一的表达式

$$[M]=\sum_{j\in J}\left(\sum_{m\geq n}[M_m:S_j]_{G_0}t^m\right)[S_j]$$

在 $\hat{}K(\Lambda\text{-模}_G^+)$ 中，其中 $[M_m:S_j]_{G_0}\in\mathbb{Z}[G_0]$ 表示有限长度 G_0-分次 Λ_0-模 M_m 中 S_j 的 G_0-分次 Jordan-H¨older 重数。由此证明了断言。□

2.3. 广义预投射代数。 我们固定一个广义卡坦矩阵 $C=(c_{ij})_{i,j\in I}$ 及其对称化矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_i\mid i\in I)$，如 §1.1 中所述。回顾 Γ，见 §1.2。我们~ ~ ~考虑如下给出的箭图 $Q=(Q_0,Q_1,\mathrm{s},\mathrm{t})$:

$$\widetilde{Q}_0=I,\quad \widetilde{Q}_1=\{\alpha_{ij}^{(g)}\mid(i,j,g)\in I\times I\times\mathbb{Z},i\sim j,1\leq g\leq g_{ij}\}\cup\{\varepsilon_i\mid i\in I\},$$
$$\mathrm{s}(\alpha_{ij}^{(g)})=j,\quad \mathrm{t}(\alpha_{ij}^{(g)})=i,\quad \mathrm{s}(\varepsilon_i)=\mathrm{t}(\varepsilon_i)=i.$$

~我们为箭图 Q 赋予一个 Γ-分次，定义如下:

$$\deg(\alpha_{ij}^{(g)})=q^{-d_if_{ij}}t\mu_{ij}^{(g)},\qquad \deg(\varepsilon_i)=q^{2d_i}. \tag{2.1}$$

~设 Ω 是 C 的一个无环定向。我们定义相应的势 $W_\Omega\in\Bbbk Q$ 为

$$W_\Omega=\sum_{i,j\in I;i\sim j}\sum_{g=1}^{g_{ij}}\mathrm{sgn}_\Omega(i,j)\alpha_{ij}^{(g)}\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ij}}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{sgn}_\Omega(i,j):=(-1)^{\delta((j,i)\in\Omega)}$。注意，$W_\Omega$ 是次数为 t^2 的齐次元素。我们定义

~ ~带 Γ-分次的 $\Bbbk$-代数 Π，它是 $\Bbbk Q$ 对由 W_Ω 的所有循环

~ ~导数生成的理想取商所得。换言之，代数 Π 是 $\Bbbk Q$ 对以下两类关系取商所得:

(R1) $\varepsilon_i^{f_{ij}}\alpha_{ij}^{(g)}=\alpha_{ij}^{(g)}\varepsilon_j^{f_{ji}}$ for any $i,j\in I$ with $i\sim j$ and $1\leq g\leq g_{ij}$;

(R2) $\displaystyle\sum_{j\in I:j\sim i}\sum_{g=1}^{g_{ij}}\sum_{k=0}^{f_{ij}-1}\mathrm{sgn}_\Omega(i,j)\varepsilon_i^k\alpha_{ij}^{(g)}\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ij}-1-k}=0$ for each $i\in I$.

~注 2.3. 虽然代数 Π 的定义~Γ取决于无环定向 Ω 的选择，但这并无影响。事实上，选择不同的 Ω 会得到一个同构的~Γ-分次代数。此外，也可以用更一般的定向来定义 Π（即不要求无环条件，如下文的 §3.1 所示）。即使这样做，所得的 Γ-分次代数仍然~与我们的 Π同构。

对于正整数 $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们将 Γ-分次代数 $\Pi(\ell)$ 定义为商模

$$\Pi(\ell)=\widetilde{\Pi}/(\varepsilon^\ell),$$

其中 $\varepsilon:=\sum_{i\in I}\varepsilon_i^{r/d_i}$。注意，$\varepsilon$ 在 ~$\widetilde{\Pi}$ 中是齐次且中心的。换言之，它是~ $\Bbbk Q$ 关于以下三类关系的商模：(R1)、(R2) 和

(R3) $\varepsilon_i^{r\ell/d_i}=0$ 对每个 $i\in I$ 都成立。

注记 2.4. 代数 $\Pi(\ell)$ 与广义预投射代数 $\Pi({}^{\mathsf{t}}C,\ell rD^{-1},\Omega)$ 在 [GLS17] 的意义下相同。

引理 2.5. 对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$，代数 $\Pi(\ell)$ 满足 (A) §2.2 中的条件。

证明。 由定义（ $\Pi(\ell)_{\geq 0}=\Pi(\ell)$ 可知（2.1）。对于任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，根据关系 (R3)，向量空间 $\Pi(\ell)_n$ 由有限个向量张成

$$\{\varepsilon_{i_0}^{m_0}\alpha_{i_0,i_1}^{(g_1)}\varepsilon_{i_1}^{m_1}\alpha_{i_1,i_2}^{(g_2)}\cdots\varepsilon_{i_{n-1}}^{m_{n-1}}\alpha_{i_{n-1},i_n}^{(g_n)}\varepsilon_{i_n}^{m_n}\mid i_k\in I,0\leq m_k<r\ell/d_{i_k},1\leq g_k\leq g_{i_{k-1},i_k}\}.$$

因此，我们有 $\dim_{\Bbbk}\Pi(\ell)_n<\infty$。 □

下文中，为简洁起见，我们固定 $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$，并用 Π 表示 $\Pi(\ell)$。

根据定义，我们有

$$\Pi_0\cong\prod_{i\in I}H_i,\qquad\text{where } H_i:=\Bbbk[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^{r\ell/d_i}).$$

特别地，对于每个 $M\in\Pi$-模$_\Gamma^+$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，子空间 e_iM_n 对于每个 $i\in I$都是有限维的H_i-模。若对于任意 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $i\in I$， e_iM_n 都是自由的 H_i-模，或者等价地，对于任意 $n\in\mathbb{Z}$， M_n 都是投射的 Π_0-模，我们称 M 为局部自由。在这种情况下，我们定义秩$_i\,M:=\dim_\Gamma e_i(M/\varepsilon_iM)\in\mathbb{Z}[\Gamma_0]((t))$。

定理 2.6 ([GLS17,§11])。 作为一个（左） Π-模， Π 自身是局部自由的。

对于每个 $i\in I$，令 $P_i:=\Pi e_i$ 为与顶点 i 相关联的不可分解投射 Π-模， S_i 为其简单商。考虑双边理想 $J_i:=\Pi(1-e_i)\Pi$。我们有 $\Pi/J_i\cong H_i$ 作为 Γ-分次代数。将其视为分次的左 Π-Γ模时，我们用 E_i 表示 Π/J_i 。这是一个局部自由的 Π-模，其特征由秩$_j\,E_i=\delta_{i,\ j}$给出。在 $\hat{}K(\Pi$-模$_\Gamma^+)$ 中，我们有

$$[E_i]=\frac{1-q^{2r\ell}}{1-q^{2d_i}}[S_i].\tag{2.3}$$

存在如下反对合 $\phi\colon\Pi\to\Pi^{\mathrm{op}}$：

$$\phi(e_i):=e_i,\qquad\phi(\alpha_{ij}^{(g)}):=\alpha_{ji}^{(g)},\qquad\phi(\varepsilon_i):=\varepsilon_i.$$

回顾第 1.3 节中群 Γ 的自同构，记作 ϕ 。根据定义，若$x\in\Pi$ 是次数为 $\gamma\in\Gamma$的齐次元素，则 $\phi(x)$是次数为 $\phi(\gamma)$的齐次元素。对于左 Π-模 M，令 M^ϕ 为通过对立 ϕ 扭曲原左Π-模结构得到的右 Π-模。若 M 是 Γ-分次的，则通过设定 $(M^\phi)_\gamma:=M_{\phi(\gamma)}$，$M^\phi$ 仍是 Γ-分次的。特别地，对于 $M\in\Pi$-模$_\Gamma^+$，有 $\dim_\Gamma(M^\phi)=(\dim_\Gamma M)^\phi$。

2.4. 投射分解。 根据 [GLS17，§5.1], 对每个 i， $j\in I$ 满足 $i\sim j$，我们定义双分次（H_i，H_j）-双模 $_iH_j$ 如下

$$_iH_j:=\sum_{g=1}^{g_{ij}}H_i\alpha_{ij}^{(g)}H_j\subset\Pi.$$

它作为左 H_i-模是自由的，作为右 H_j-模也是自由的。此外，关系式（$R1$）给出如下结果：

$$ {}_iH_j = \bigoplus_{k=0}^{f_{ji}-1} \bigoplus_{g=1}^{g_{ij}} H_i(\alpha_{ij}^{(g)}\varepsilon_j^k) = \bigoplus_{k=0}^{f_{ij}-1} \bigoplus_{g=1}^{g_{ij}} (\varepsilon_i^k \alpha_{ij}^{(g)}) H_j. $$

特别地，我们得到以下引理。

引理 2.7。对于 i, $j \in I$ 且满足 $i \sim j$，我们有两个同构

$$ {}_{H_i}({}_iH_j) \cong H_i^{\oplus(-q^{-d_j}tC_{ji}(q,t,\underline{\mu})^{\phi})}, \qquad ({}_iH_j)_{H_j} \cong H_j^{\oplus(-q^{-d_i}tC_{ij}(q,t,\underline{\mu}))} $$

分别作为 Γ-分次左 H_i-模和 Γ-分次右 H_j-模。

考虑以下由 Γ 分次的（Π, Π）-双模序列：

$$ \bigoplus_{i\in I} q^{-2d_i}t^2 \Pi e_i \otimes_i e_i\Pi \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i,j\in I: i\sim j} \Pi e_j \otimes_j {}_jH_i \otimes_i e_i\Pi \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i\in I} \Pi e_i \otimes_i e_i\Pi \to \Pi \to 0, \tag{2.4} $$

其中 $\otimes_i := \otimes_{H_i}$，且态射 ψ 和 φ 定义如下

$$ \psi(e_i \otimes e_i) := \sum_{j\sim i} \sum_{k=0}^{f_{ij}-1} \sum_{g=1}^{g_{ij}} \mathrm{sgn}_{\Omega}(i,j) \left(\varepsilon_i^k \alpha_{ij}^{(g)} \otimes \alpha_{ji}^{(g)} \varepsilon_i^{f_{ij}-1-k} \otimes e_i + e_i \otimes \varepsilon_i^k \alpha_{ij}^{(g)} \otimes \alpha_{ji}^{(g)} \varepsilon_i^{f_{ij}-1-k} \right), $$

$\varphi(e_j \otimes x \otimes e_i) := x \otimes e_i + e_j \otimes x$.

其他箭 $\bigoplus_{i\in I} \Pi e_i \otimes_i e_i\Pi \to \Pi \to 0$ 是典范的。关系式 (R2) 保证序列 (2.4) 构成一个复形。

对于每个 $i \in I$，将 $(-) \otimes_\Pi E_i$ 应用于 (2.4)，得到如下 Γ-分次（左） Π-模复形：

$$ q^{-2d_i}t^2 P_i \xrightarrow{\psi^{(i)}} \bigoplus_{j\sim i} P_j^{\oplus(-q^{-d_i}tC_{ij}(q,t,\underline{\mu})^{\phi})} \xrightarrow{\varphi^{(i)}} P_i \to E_i \to 0. \tag{2.5} $$

这里使用了引理 2.7。

定理 2.8 ([GLS17，命题 12.1 和推论 12.2], [FM23，定理 3.3])。 复形 (2.4) 和 (2.5) 都是正合的。此外，以下结论成立。

(1) 当 C 为无限型时，对于所有 $i \in I$，有 $\mathrm{Ker}\,\psi = 0$ 和 $\mathrm{Ker}\ \psi^{(i)} = 0$。 (2) 当 C 为有限型时，对于每个 $i \in I$，有 $\mathrm{Ker}\,\psi^{(i)} \cong q^{-rh^\vee}t^h \mu_{i^*i} E_{i^*}$。

2.5. 欧拉-庞加莱配对。对于一个 Γ分次右 Π-模 M 以及一个 Γ分次左 Π-模 N，向量空间 $M \otimes_\Pi N$自然带有 Γ分次。令 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M,N)$ 表示 $M \mapsto M \otimes_\Pi N$ 的第k个左导出函子（等价地，也可表示 $N \mapsto M \otimes_\Pi N$ 的第k个左导出函子）。

引理 2.9. 若 $M \in \Pi^{\mathrm{op}}\text{-}\mathrm{mod}_\Gamma^{\geq m}$ 且 $N \in \Pi\text{-}\mathrm{mod}_\Gamma^{\geq n}$，则有

$$ \mathrm{tor}_k^\Pi(M,N) \in \Bbbk\text{-}\mathrm{mod}_\Gamma^{\geq m+n} \quad \textit{for any } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. $$

证明。 我们看到，$\dim_\Gamma(M \otimes_\Pi N)$ 不大于 $\dim_\Gamma M \cdot \dim_\Gamma N$，它在$\mathbb{Z}[\Gamma_0][\![t]\!]t^{m+n}$ 的假设下成立。这就证明了 $k = 0$的断言。另一种情形，即 $k > 0$，可由此情形和引理 2.1 得出。 □

我们考虑 对象对（M, N）在 Π-mod$_\Gamma^+$ 中满足的以下有限性条件 :

(B) 对于每个 $\gamma \in \Gamma$，空间 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi, N)_\gamma$ 对 $k \gg 0$ 消失。若 (M, N) 满足条件 (B)，则其 Euler–Poincar´e（EP）配对

$$\langle M, N\rangle_\Gamma := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim_\Gamma \mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi, N).$$

是良定义的 作为 $\mathbb{Z}[\![\Gamma]\!]$ 的一个元素。下一个引理直接由定义得到。

引理 2.10。设 $M, N \in \Pi$-模$_\Gamma^+$。

(1) 若 (M, N) 满足 (B)，则其对偶对 (N, M) 也满足 (B)，并且有$\langle N, M\rangle_\Gamma = \langle M, N\rangle_\Gamma^\phi$。

(2) 若 (M, N) 满足 (B)，则对任意 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\Gamma]$，$(M^{\oplus a}, N^{\oplus b})$ 也满足 (B)，并且有 $\langle M^{\oplus a}, N^{\oplus b}\rangle_\Gamma = a^\phi b\langle M, N\rangle_\Gamma$。(3) 假设在 Π-mod$_\Gamma^+$ 中存在一个正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$，且 (M', N) 和 (M'', N) 均满足 (B)。那么 (M, N) 也满足 (B)，并且有 $\langle M, N\rangle_\Gamma = \langle M', N\rangle_\Gamma + \langle M'', N\rangle_\Gamma$.

命题 2.11. 对任意的 $i, j \in I$，(S_i, S_j) 满足条件 (B)，并且我们有

$$\langle E_i, S_j\rangle_\Gamma = \begin{cases} \dfrac{q^{-d_i}t\left(C_{ij}(q,t,\underline{\mu}) - q^{-rh^\vee}t^h\mu_{ii^*}C_{i^*j}(q,t,\underline{\mu})\right)}{1-q^{-2rh^\vee}t^{2h}} & \textit{if } C \textit{ is of finite type,} \\ q^{-d_i}tC_{ij}(q,t,\underline{\mu}) & \textit{otherwise,} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\langle S_i, S_j\rangle_\Gamma = \frac{1-q^{2d_i}}{1-q^{2r\ell}}\langle E_i, S_j\rangle_\Gamma. \tag{2.7}$$

这里，对于 $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$，我们将 $(1-\gamma)^{-1} = \sum_{k\geq 0}\gamma^k \in \mathbb{Z}[\![\Gamma]\!]$ 理解为。

证明。 前一个公式（2.6）直接由定理 2.8 得出。后一个公式（2.7）由定理 2.8 以及以下事实得出：S_i 有一个形如以下形式的 E_i- 分解：

$$\cdots \to q^{2r\ell+2d_i}E_i \to q^{2r\ell}E_i \to q^{2d_i}E_i \to E_i \to S_i \to 0.$$

有关更多细节，请参见 [FM23命题 3 的证明。11] 。 □

推论 2.12. 对任意 $M, N \in \Pi$-模$_\Gamma^+$，(M, N) 满足条件 (B)。此外，EP 配对在 $\mathbb{Z}[\Gamma_0](\!(t)\!)$-模 $\hat{}K(\Pi$-模$_\Gamma^+)$ 上诱导出一个 ϕ-半线性厄米形式，其取值于 $\mathbb{Z}[\Gamma_0][(1-q^{2r\ell})^{-1}](\!(t)\!)$。

证明。给定 $M, N \in \Pi$-模$_\Gamma^+$，我们将证明 (M, N) 满足条件 (B)。不失一般性，不妨设 M, $N \in \Pi$-模$_\Gamma^{\geq 0}$。对于固定的 $\gamma \in \Gamma$，取 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\gamma \notin \Gamma_0 t^{\mathbb{Z}_{>n}}$。由引理 2.9，有 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi_{>n}, N)_\gamma = 0$，因此对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，有 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi, N)_\gamma \simeq \mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi/M^\phi_{>n}, N)_\gamma$。类似地，我们有 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi/M^\phi_{>n}, N)_\gamma \simeq \mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi/M^\phi_{>n}, N/N_{>n})_\gamma$，从而对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，有 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi, N)_\gamma \simeq \mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi/M^\phi_{>n}, N/N_{>n})_\gamma$。由引理 2.10 和命题 2.11 可知，对于任意有限维模，条件 (B) 均成立。因此，当 k 足够大时，有 $\mathrm{tor}_k^\Pi(M^\phi/M^\phi_{>n}, N/N_{>n})_\gamma =$

0。因此，(M, N) 满足条件 (B)。现在，根据引理 2.10 (3) 和命题 2.11，EP 配对在格罗滕迪克群 $K(\Pi\text{-模}_G^+)$ 上诱导出一个取值于 $\mathbb{Z}[\Gamma_0][(1-q^{2r\ell})^{-1}]((t))$ 的配对。引理 2.9 告诉我们，相对于由滤过 $\{K(\Pi\text{-模}_G^{\geq n})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出的拓扑，该配对是连续的。因此，它下降为完备化 $\hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+)$ 上的一个配对，并满足所需性质。□

令 $\mathbb{F}$ 为域 $\mathbb{Q}(\Gamma_0)((t))$ 的代数闭包。我们将 $\mathbb{Q}(\Gamma)$ 视为 $\mathbb{F}$ 的子域，方法是考虑在 $t=0$处的劳朗展开。根据上文推论 2.12，EP 配对可线性扩张为一个 ϕ-半线性厄米形式，仍记作 $\langle -,\ -\rangle_\Gamma$定义在

$$\hat{K}(\Pi\text{-mod}_\Gamma^+)_\mathbb{F} := \hat{K}(\Pi\text{-mod}_\Gamma^+) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_0]((t))} \mathbb{F}$$

在 $\mathbb{F}$处取值。注意，集合 $\{[E_i]\}_{i\in I}$ 构成了 $\hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+)_\mathbb{F}$-基，由引理 2.2和（2.3）可知；并且，如果 $M \in \Pi\text{-模}_\Gamma^+$是局部自由的，则有 $[M] = \sum_{i\in I}(\text{秩}_i M)[E_i]$。

引入模 $\bar{P}_i := P_i/P_i\varepsilon_i = (\Pi/\Pi\varepsilon_i)e_i$ 很有用：对每个 $i \in I$。我们可以轻易证明以下结论（参见 [FM23，引理 2.5]）。

引理 2.13. 若 $M \in \Pi\text{-模}_\Gamma^+$是局部自由的，则有 $\langle \bar{P}_i, M\rangle_\Gamma = \text{秩}_i M$。特别地，对于任意 $i, j \in I$，有 $\langle \bar{P}_i, E_j\rangle_\Gamma = \delta_{i,\ j}$且$\text{秩}_i P_j = (\text{维数}_\Gamma e_j\bar{P}_i)^\phi$。

另一方面，我们考虑 $\mathbb{F}$-向量空间 $\mathsf{Q}_\Gamma \otimes_{\mathbb{Q}(\Gamma)} \mathbb{F}$，其上的配对 $(-,-)_\Gamma$ 线性延拓。令 Ψ 为 $\mathsf{Q}_\Gamma \otimes_{\mathbb{Q}(\Gamma)} \mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{F}$-线性自同构，定义如下：

$$\Psi := \begin{cases} (1+q^{-rh^\vee}t^h\nu)^{-1} = \dfrac{\mathrm{id}-q^{-rh^\vee}t^h\nu}{1-q^{-2rh^\vee}t^{2h}} & \text{if } C \text{ is of finite type,} \\ \mathrm{id} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里 ν 是 $\mathsf{Q}\mathsf{Q}_\Gamma$ 上的线性算子，定义为 $\nu(\alpha_i) = \mu_{i^*i}\alpha_{i^*}$，我们已在§1.3中定义过。取一个元素 $\kappa_\ell \in \mathbb{F}$ 使得 $\kappa_\ell^2 = q^{r\ell}[r\ell]_q t^{-1}$。

定理 2.14. 赋值 $[E_i] \mapsto \kappa_\ell\alpha_i^\vee (i \in I)$ 给出一个 $\mathbb{F}$-线性同构

$$\chi_\ell \colon \hat{K}(\Pi\text{-mod}_\Gamma^+)_\mathbb{F} \to \mathsf{Q}_\Gamma \otimes_{\mathbb{Q}(\Gamma)} \mathbb{F}$$

满足以下性质：

(1) 对任意 $i \in I$，都有 $\chi_\ell[S_i] = \kappa_\ell^{-1}\alpha_i$。(2) 对任意 $x, y \in \hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+)_\mathbb{F}$，都有 $\langle x, y\rangle_\Gamma = (\Psi\chi_\ell(x)\ \chi_\ell(y))_\Gamma$.(3) 对任意 $i \in I$，都有 $\varpi_i^\vee = \kappa_\ell^{-1}\Psi\chi_\ell[P_i]$ 和 $\varpi_i = q^{-d_i}t\kappa_\ell\Psi\chi_\ell[\bar{P}_i]$。

证明。由于集合 $\{[E_i]\}_{i\in I}$ 构成 $\hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+)_\mathbb{F}$ 的 $\mathbb{F}$-基，线性映射 χ_ℓ 是一个同构。性质 (1) 和 (2) 由恒等式 (2.3)、(2.6) 和 (2.7) 得出。由于基 $\{[P_i]\}_{i\in I}$（分别地，$\{[P_i]\}_{i\in I}$）与基 $\{[S_i]\}_{i\in I}$（分别地，$\{[E_i]\}_{i\in I}$）对偶（由引理 2.13），性质 (3) 由性质 (2) 得出。□

推论 2.15。设 $i, j \in I$。

（1）当 C 为有限型时，我们有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t,\underline{\mu}) = \frac{q^{-d_i}t}{1-q^{-2rh^\vee}t^{2h}}\left(\dim_\Gamma(e_i\bar{P}_j) - q^{-rh^\vee}t^h\mu_{ii^*}\dim_\Gamma(e_{i^*}\bar{P}_j)\right).$$

（2）当 C 为无限型时，我们有

$$\widetilde{C}_{ij}(q,t,\underline{\mu}) = q^{-d_j} t \dim_\Gamma(e_i \bar{P}_j).$$

证明。 由定理 2.14 以及对（1.3）的求逆可得。 □

特别地，推论 2.15 （2）证明了定理 1.3。

注 2.16。 由于 $\langle P_i, P_j\rangle_\Gamma =$ 维数$_\Gamma(e_i P_j)$，推论 2.15 根据基 $\{[P_i]\}_{i\in I}$ 与 $\{[\bar{P}_i]\}_{i\in I}$之间的 EP 配对，对矩阵 $C(q, t, \underline{\mu})$ 作出了解释。从这个意义上说，推论 2.15是命题 2.11中（2.6）的对偶。

注 2.17。在之前的论文 [FM23], 中，我们研究了有限型广义 Cartan 矩阵以及有限维(q,t)-分次 Π-模。在该文中，我们使用了模 $\bar{I}_i := \mathbb{D}(\bar{P}_i^\phi)$ 和分次扩张群 ext^k_Π，其中 $\mathbb{D}$ 是分次 $\Bbbk$-对偶函子，而非模 $\bar{P}_i$ 和分次挠群 tor^Π_k。注意，借助通常的伴随关系，这两种讨论彼此等价（参见 [ASS06, §A.4 命题 4.11]），即对于 $M, N \in \Pi\text{-mod}^+_\Gamma$，有$\mathbb{D}(\mathrm{tor}^\Pi_k(\mathbb{D}(M)\ N)) \simeq \mathrm{ext}^k_\Pi(N, M)$。从这个意义上说，我们在此的讨论是对 [FM23] 中讨论的略微推广，并额外引入了 $\underline{\mu}$-分次。

2.6. 辫群作用。回忆双边理想 $J_i = \Pi(1-e_i)\Pi$。对于任意 $M \in \Pi\text{-模}^+_\Gamma$和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们看到 $\mathrm{tor}^\Pi_k(J_i, M)$ 也属于 $\Pi\text{-模}^+_\Gamma$。当 C为无限型时， $J_i^\phi = J_i$ 的投射维数至多为 1。特别地，对每个 $M \in \Pi\text{-模}^+_\Gamma$，导出张量积 $J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M$ 都是有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)$中的一个对象。由自然同一 $K(\mathcal{D}^b(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)) \cong K(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)$以及典范映射 $K(\Pi\text{-模}^+_\Gamma) \to \hat{K}(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)$，它给出元素

$$[J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\mathrm{tor}^\Pi_k(J_i, M)] = \sum_{j\in I}\langle J_i e_j, M\rangle_\Gamma [S_j] \tag{2.8}$$

$\hat{K}(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)$中的元素，其中第二个等式由 $J_i^\phi = J_i$ 得出。当 C为有限型时，我们通过（2.8）定义 $\hat{K}(\Pi\text{-模}^+_\Gamma)$中的元素 $[J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M]$。回想关系 $E_i = \Pi/J_i$，对每个 $j \in I$，我们有 $[J_i e_j] = [P_j] - \delta_{i,j}[E_i]$，因此

$$[J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M] = [M] - \langle E_i, M\rangle_\Gamma [S_i].$$

将此等式通过 χ_ℓ 定理 2.14中的同构映射，我们得到

$$\chi_\ell[J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M] = \chi_\ell[M] - (\Psi\alpha_i^\vee, \chi_\ell[M])_\Gamma \alpha_i. \tag{2.9}$$

特别地，我们得到以下与[AIRT12，命题 210]类似的结果。

引理 2.18。当 C 为无限型时，我们有

$$\chi_\ell[J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi M] = T_i \chi_\ell[M] \qquad \textit{for any } M \in \Pi\text{-mod}^+_\Gamma \textit{ and } i \in I.$$

证明。 当 C 为无限型时，根据定义有 $\Psi = \mathrm{id}$。因此，方程（2.9）在这种情况下与 T_i 的定义方程（1.5）一致。 □

命题 *1.5*的证明。 当 C 为有限型时，由于集合 $\{T_i\}_{i\in I}$ 可以扩展为相应非扭仿射型的集合 $\{T_i\}_{i\in I\cup\{0\}}$ ，因此我们可以将证明归约到仿射型的情形。因此，只需考虑 C 为无限型的情形。在这种情况下， $\{T_i\}_{i\in I}$ 的辫关系可由引理 2.18 以及理想 $\{J_i\}_{i\in I}$ 在乘法下满足辫关系这一事实推出，而这归功于 [FG19，定理 4。7]例如，当 $c_{ij}c_{ji}=1$时，我们有

$$J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi J_j \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi J_i \simeq J_i \otimes_\Pi J_j \otimes_\Pi J_i \simeq J_iJ_jJ_i = J_jJ_iJ_j \simeq J_j \otimes_\Pi J_i \otimes_\Pi J_j \simeq J_j \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi J_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Pi J_j,$$

这就推出了所需的辫关系 $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$。 □

C推论 2.19. 设 $M \in \Pi\text{-mod}^+_\Gamma$ ，且对 $i \in I$ 有 $\mathrm{tor}^\Pi_1(J_i, M) = 0$。我们有

$$\chi_\ell[J_i \otimes_\Pi M] = T_i\chi_\ell[M].$$

此外，若我们假设 M 是局部自由的，那么 $J_i \otimes_\Pi M$ 也是。

证明. 第一个断言直接由引理 2.18 得出。对于无限型的 C ，由于根据定理 2.8， J_i 的投射维数至多为 1，我们的对合 ϕ 表明，对于 $k \geq 2$，$\mathrm{tor}^\Pi_k(J_i, M) = 0$ 也成立。这表明当 C 为无限型时， $[J_i \otimes_\Pi M] = [J_i \mathbf{L}\otimes_\Pi M]$。当 C 为有限型时，我们的断言可由嵌入到相应非扭仿射型的正合 ˆ 嵌入轻易推出。也就是说，我们有同构 ˆ ˆ ˆ ˆ $J_i \otimes_\Pi M \simeq J_i \otimes_{\hat{\Pi}} M$，其中 $J_i := \Pi(1 - e_i)\Pi$。最后一个断言类似于 GLS17 中命题 9.4] 的证明。□

当 C 为无限型时定理 1.8 的证明。假设 C 为无限型。设 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 I 中满足定理 1.8 中条件 (2) 的一个序列。我们有如下由 $F_k := J_{i_1}J_{i_2}\cdots J_{i_k}$ 给出的 (Π,Π)-双模的滤过 $\Pi = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$。此滤过 $\{F_k\}_{k\geq 0}$ 是穷尽的，即 $\bigcap_{k\geq 0} F_k = 0$。事实上，由于代数 Π 满足条件 (A)，其作为右 Π-模的根滤过 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ 是穷尽的。注意，对任意右 Π-模 M 和 $i \in I$，右模 M/MJ_i 是 M 的最大商模，使得对 $j \neq i$ 有 $(M/MJ_i)e_j \neq 0$ 。由此以及我们对序列 $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 的假设，对于每个 $k > 0$ ，我们都能找到一个足够大的整数 K ，使得 $F_K \subset R_k$。因此，我们有 $\bigcap_k F_k = \bigcap_k R_k = 0$。此外，由 [Mur22a 的命题 3.8]，，我们有

$$F_{k-1}/F_k \simeq J_{i_1}J_{i_2}\cdots J_{i_{k-1}} \otimes_\Pi E_{i_k} \qquad \text{as } \Gamma\text{-graded left } \Pi\text{-modules}$$

对每个 $k \geq 1$。注意，我们有等式 $\mathrm{tor}^\Pi_1(J_{i_1}, J_{i_2}\cdots J_{i_{k-1}} \otimes_\Pi E_{i_k}) = 0$，由 [Mur22a，命题 3 的证明。8]。由此得到 $\chi_\ell[J_{i_1}J_{i_2}\cdots J_{i_{k-1}} \otimes_\Pi E_{i_k}] = \kappa_\ell T_{i_1}$， $T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}\alpha^\vee_{i_k}$通过推论2.19归纳得到。

滤过 $\{F_k\}_{k\geq 0}$ 在投射模P_i 上诱导出完备滤过 $\{F_ke_i\}_{k\geq 0}$ ，使得

$$F_{k-1}e_i/F_ke_i \simeq \begin{cases} J_{i_1}\cdots J_{i_{k-1}} \otimes_\Pi E_i & \text{if } i_k = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对每个 $k \geq 1$，因此，在 $\hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+)$ 中，我们有

$$[P_i] = \sum_{k=1}^{\infty} [F_{k-1}e_i / F_k e_i] = \sum_{k:\, i_k = i} [J_{i_1} \cdots J_{i_{k-1}} \otimes_\Pi E_i].$$

应用定理 χ_ℓ 中的同构 2.14于此等式，可得

$$\varpi_i^\vee = \sum_{k:\, i_k = i} T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_i^\vee.$$

可将其改写为

$$\varpi_i = q^{-d_i} t \sum_{k:\, i_k = i} T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_i.$$

$\tilde{}$由于 $C_{ij}(q,t,\underline{\mu}) = (\varpi_i^\vee, \varpi_j)_\Gamma$ 由式（1.3），由此可得所需等式（1.6）。 □

注 2.20。 在 [IR08], 中，他们证明，理想半群 $\langle J_i \mid i \in I \rangle$ 给出了任意对称仿射型 Π的经典倾斜模的同构类，其中 C 的 $D =$ 维数为 1。在我们的情形中，双边理想是 Γ分次倾斜对象，其 Γ分次自同态代数与 Π 同构，当 C 为无限型时，这可由 [BIRS11、FG19]中的论证得出。特别地，我们在 $\hat{K}(\Pi\text{-模}_\Gamma^+$ 上的辫群对称性由导出范畴上的自等价诱导（参见 [MP19，§2]）。

3. Remarks

3.1. 与 Kimura-Pestun 的变形进行比较。 在对 （分数）箭图 $\mathcal{W}$-代数 的研究中，Kimura-Pestun [KP18a] 引入了一种称为 质量变形 Cartan 矩阵 的 GCM 变形。在本小节中，我们将他们的质量变形 Cartan 矩阵与我们的变形 GCM C（q， t， $\underline{\mu}$）进行比较。

设 Q 是一个无环箭图，且 $d\colon\ Q_0 \to \mathbb{Z}_{>0}$ 是一个函数。按照 [KP18a 第 2 节，1],我们将这样的二元组（Q， d）称为分数箭图。对于 $d_i \colon = d\ (i)$ 以及 $d_{ij} \colon = \mathsf{gcd}\ (d_i,\ d_j)$，我们分别记为 i， $j \in Q_0$。设 $C = (c_{ij})_{i,\ j \in I}$ 是一个 GCM。若分数箭图（Q， d）为 C 型，且满足 $Q_0 = I$ 以及以下条件，则称其为该类型:

$$c_{ij} = 2\delta_{i,j} - (d_j/d_{ij})|\{e \in Q_1 \mid \{\mathrm{s}(e), \mathrm{t}(e)\} = \{i,j\}\}| \quad \text{for any } i,j \in I. \tag{3.1}$$

在此情形下， $D = \mathsf{diag}\ (d_i \mid i \in I)$ 是 C 的对称化子，并且有

$$g_{ij} = |\{e \in Q_1 \mid \{\mathrm{s}(e), \mathrm{t}(e)\} = \{i,j\}\}|, \quad f_{ij} = d_j/d_{ij} \quad \text{when } i \sim j.$$

定义见 §1.1 。对于一个类型为 C 的分数箭图 (Q,d)，Kimura-Pestun 引入了矩阵 $C^{\mathrm{KP}} = (C_{ij}^{\mathrm{KP}})_{i,\ j \in I}$，其 (i,j) 项 C_{ij}^{KP}是形式参数 q_1、q_2 和 μ_e 的劳朗多项式，其中每个 $e \in Q_1$ 由下式给出

$$C_{ij}^{\mathrm{KP}} := \delta_{i,j}(1 + q_1^{-d_i} q_2^{-1}) - \frac{1 - q_1^{-d_j}}{1 - q_1^{-d_{ij}}} \left(\sum_{e:\, i \to j} \mu_e^{-1} + \sum_{e:\, j \to i} \mu_e q_1^{-d_{ij}} q_2^{-1} \right). \tag{3.2}$$

这些参数 μ_e 称为质量参数。如果将所有参数都取为 1，则矩阵 C^{KP} 与广义卡坦矩阵 C 根据（3.1）相同。

现在我们固定一个函数 $g\colon\ Q_1 \to \mathbb{Z}_{>0}$ 其限制在 $\{e \in Q_1 \mid \{\mathsf{s}(e), \mathsf{t}(e)\} = \{i, j\}\}$ 与 $\{g \in \mathbb{Z} \mid 1 \le g \le g_{ij}\}$ 之间诱导出一个双射，对每个满足 $i \sim j$ 的 i、$j \in I$ 都成立。然后考虑由下式给出的单项式变换 $\mathbb{Z}[q_1^{\pm 1}, q_2^{\pm 1}, \mu_e^{\pm 1} \mid e \in Q_1] \to \mathbb{Z}[\Gamma]$：

$$q_1 \mapsto q^2, \qquad q_2 \mapsto t^{-2}, \qquad \mu_e \mapsto q^{d_{ij}} t^{-1} \mu_{ij}^{(g(e))}, \tag{3.3}$$

其中 $i = \mathsf{t}(e)$ 且 $j = \mathsf{s}(e)$。注意，如果形式上添加 q_1 和 q_2 的平方根，则它诱导出一个同构。在此单项式变换下，对于任意 i、$j \in I$，有

$$C_{ij}^{\mathrm{KP}} \mapsto q^{-d_j} t \left(\delta_{i,j} (q^{d_i} t^{-1} + q^{-d_i} t) - \delta(i \sim j) [f_{ij}]_{q^{d_{ij}}} \sum_{g=1}^{g_{ij}} \mu_{ij}^{(g)} \right). \tag{3.4}$$

命题 3.1。在单项式变换 (3.3)下，矩阵 C^{KP} 对应于矩阵 $C(q, t, \underline{\mu}) q^{-D} t$ 当且仅当满足以下条件时：

$$\textit{For any } i, j \in I \textit{ with } i \sim j, \textit{ we have } f_{ij} = 1 \textit{ or } f_{ji} = 1. \tag{3.5}$$

证明。比较（3.4）与（0.1），并注意到对于任意 $[f_{ij}]_{q^{d_{ij}}} = [f_{ij}]_{q^{d_i}}$，都有 i, $j \in I$其中 $i \sim j$ 当且仅当条件（3.5）得到满足时成立。□

例 3.2。如果取我们的广义卡坦矩阵 C 及其对称化子 D 为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \mathrm{diag}(3, 2),$$

不满足（3.5）时，则 C^{KP} 在（3.3）下的像为

$$\begin{pmatrix} 1 + q^{-6} t^2 & -(q^{-1} + q^{-3}) t (\mu_{12}^{(1)} + \mu_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(3)}) \\ -(q^{-1} + q^{-3} + q^{-5}) t (\mu_{21}^{(1)} + \mu_{21}^{(2)} + \mu_{21}^{(3)}) & 1 + q^{-4} t^2 \end{pmatrix},$$

这不同于

$$C(q, t, \underline{\mu}) q^{-D} t = \begin{pmatrix} 1 + q^{-6} t^2 & -(q + q^{-5}) t (\mu_{12}^{(1)} + \mu_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(3)}) \\ -(q + q^{-3} + q^{-7}) t (\mu_{21}^{(1)} + \mu_{21}^{(2)} + \mu_{21}^{(3)}) & 1 + q^{-4} t^2 \end{pmatrix}.$$

注 3.3。条件（3.5）对所有有限型和仿射型均成立。当 C 为对称的（即 ${}^{\mathrm{t}}C = C$）时，该条件也成立。该条件（3.5）也出现在 [NW23，§C(iv)] 中，作为带对称化子的箭图规范理论的库仑分支的两种可能数学定义在概形意义下彼此一致的条件。

注 3.4. 当 (3.5) 成立时，我们可以确认反演公式中的赋值 $t = 1$ 是有意义的。更准确地说，假设 (3.5) 成立，我们看到 (1.1) 中的矩阵 X 可写成 $X = q^{-1} X'$ 的形式，其中 X' 是一个取值于 $\mathbb{Z}[\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}][q^{-1}, t]$ 的矩阵 $\widetilde{\ }$（参见 [FO21, 引理 4.3] 的证明），因此对于任意 i、$j \in I$，我们有 $C_{ij}(q, t, \underline{\mu}) \in \mathbb{Z}[\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}][q^{-1}, t][\![(q^{-1} t)]\!]$。因此，在 (3.5) 成立的条件下，对 $t = 1$ 的赋值给出了 $\mathbb{Z}[\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}][\![q^{-1}]\!]$ 中一个定义良好的元素 $\sim C_{ij}(q, 1, \underline{\mu})$。

3.2. 分次的普适性。 在本小节中，我们简要说明如何~认为代数 2.1上的分次 Π是普适的。表述如下。

我们沿用§2.3中的记号。令 $\widetilde{G}$ 为由有限个形式符号 $\{[a] \mid a \in Q_1\}$ 生成的（乘法）阿贝尔群，并满足以下关系

$$[\alpha_{i_1 j_1}^{(g_1)}][\alpha_{j_1 i_1}^{(g_1)}][\varepsilon_{i_1}]^{f_{i_1 j_1}} = [\alpha_{i_2 j_2}^{(g_2)}][\alpha_{j_2 i_2}^{(g_2)}][\varepsilon_{i_2}]^{f_{i_2 j_2}} \tag{3.6}$$

~ ~对任意 i_k、$j_k \in I$，若 $i_k \sim j_k$且 $1 \le g_k \le g_{i_k j_k}$ $(k = 1, 2)$。令 $G \twoheadrightarrow G_f$为其模挠子群所得的商模。根据构造，对于任意自由阿贝尔群 G，给出

~ ~一个同态 deg: $G_f \to G$，等价于赋予 Q 一个 G分次箭图~ deg : $Q_1 \to G$ 的结构，使得势 W_Ω 是齐次的。从这个意义上说，我们可以说，

~ ~典范映射 $Q_1 \to G_f$ 在代数 Π上给出了普适分次。

现在回顾我们固定的对称化子 $D = \mathsf{diag}(d_i \mid i \in I)$，并设 $d := \gcd(d_i \mid i \in I)$。令~ $\Gamma' \subset \Gamma$ 为由 $\{\deg(a) \mid a \in Q_1\}$生成的子群。注意， Γ' 是一个自由阿贝尔群，其基为 $\{q^{2d}, t^2\} \cup \{q^{-d_i f_{ij}} t \mu_{ij}^{(g)} \mid (i, j) \in \Omega \ 1 \le g \le g_{ij}\}$。

~命题 3.5。 度映射 (2.1) 给出一个同构 deg: $G_f \simeq \Gamma'$。

证明。取满足 $\sum_{i \in I} a_i d_i = d$ 的整数 $\{a_i\}_{i \in I}$。令 e 和 w 分别为由 $e := \prod_{i \in I} [\varepsilon_i]^{a_i}$ 和 $w = [\alpha_{ij}^{(g)}][\alpha_{ji}^{(g)}][\varepsilon_i]^{f_{ij}}$ 给出的 $\widetilde{G}_f$ 的元素。注意，根据 (3.6)， w 不依赖于满足 $i \sim j$ 和 $1 \le g \le g_{ij}$ 的 i、$j \in I$ 的选取。我们定义群同态 ι: $\Gamma' \to \widetilde{G}_f$，其满足 $\iota(q^{2d}) := e$、$\iota(t^2) := w$ 以及 $\iota(q^{-d_i f_{ij}} t \mu_{ij}^{(g)}) := [\alpha_{ij}^{(g)}]$，其中 $(i, j) \in \Omega$， $1 \le g \le g_{ij}$。容易看出 $\deg \circ \iota = \mathsf{id}$。现在我们将证明 $\iota \circ \deg = \mathsf{id}$。首先，根据 (3.6)，当 $i \sim j$ 时，我们注意到 $[\varepsilon_i]^{f_{ij}} = [\varepsilon_j]^{f_{ji}}$。由于 $f_{ij} = d_j / d_{ij}$，我们有

$$[\varepsilon_i]^{r/d_i} = ([\varepsilon_i]^{f_{ij}})^{r d_{ij}/d_i d_j} = ([\varepsilon_j]^{f_{ji}})^{r d_{ij}/d_i d_j} = [\varepsilon_j]^{r/d_j}$$

对任意 $i, j \in I$，其中 $i \sim j$。由于假设 C 是不可约的，因此对于任意 $i, j \in I$，有 $[\varepsilon_i]^{r/d_i} = [\varepsilon_j]^{r/d_j}$。此外，由于 $\widetilde{G}_f$ 是无挠的，我们得到

$$[\varepsilon_i]^{d_j/d} = [\varepsilon_j]^{d_i/d} \qquad \text{for any } i, j \in I. \tag{3.7}$$

利用（3.7），对每个 $i \in I$，我们得到

$$\iota(\deg[\varepsilon_i]) = e^{d_i/d} = \prod_{j \in I} [\varepsilon_j]^{a_j d_i/d} = \prod_{j \in I} [\varepsilon_i]^{a_j d_j/d} = [\varepsilon_i].$$

等式 $\iota(\deg[\alpha_{ij}^{(g)}]) = [\alpha_{ij}^{(g)}]$ 显然成立。因此我们得出 $\iota \circ \deg = \mathsf{id}$ 成立。 □

~特别地，我们有群环的同构 $\mathbb{Z}[G_f] \simeq \mathbb{Z}[\Gamma']$。使用上述证明中的记号，我们考虑形式根 $e^{1/d}$ 和 $w^{1/2}$。于是得到同构 $\mathbb{Z}[\widetilde{G}_f][e^{1/d}, w^{1/2}] \simeq \mathbb{Z}[\Gamma].$。这意味着，我们的变形广义 Cartan 矩阵 $C(q, t, \underline{\mu})$ 可以~特化为由尊重势 W_Ω 的箭图 Q的某种分次所产生的任意其他 C 变形（如有必要，可形式地添加变形参数的根）。

3.3. t-卡当矩阵与调制图的表示。 在本小节中，我们讨论 t-卡当矩阵 $C(1,t)$，它由我们的 (q,t)-变形广义 Cartan 矩阵 $C(q,t)$ 将参数 q 特化为 1 得到。请注意，Kashiwara-Oh [KO23a] 最近也在有限型情形下研究了这种特化。这里，我们从某种由 F- 拟种所产生的分次代数的角度，对 t- 卡当矩阵作出解释。

首先，我们简要回顾基域上的无环 F-拟种子 F [Gab73, Rin76]。设 $I=\{1,\dots,n\}$。按定义，一个 F-拟种子$(F_i,\ {}_iF_j)$ 上的 F由以下部分构成：

- 一个有限维斜域 F_i，其上为 F，对每个 $i\in I$；
- 一个 (F_i,F_j)-双模 ${}_iF_j$，对每个 $i,j\in I$，使得 F在 ${}_iF_j$上中心作用，且 $\dim_F {}_iF_j$ 有限；
- 不存在任何序列 $i_1,\dots,i_l,i_{l+1}=i_1$，使得对每个$k=1,\dots,l$，都有 ${}_{i_k}F_{i_{k+1}}\neq 0$。

对于 ${}_iF_j\neq 0$，记 ${}_{F_i}({}_iF_j)\simeq F_i^{\oplus -c_{ij}}$和 $({}_iF_j)_{F_j}\simeq F_j^{\oplus -c_{ji}}$。若对 ${}_iF_j=0={}_jF_i$，令 $c_{ii}=2$且 $c_{ij}=0$，则矩阵 $C:=(c_{ij})_{i,j\in I}$ 显然是一个广义卡坦矩阵，其左对称化子为$D=\mathrm{diag}(\dim {}_FF_i\mid i\in I)$。由条件 ${}_iF_j\neq 0$确定了该广义卡坦矩阵的一个无环定向 Ω。遵循 §1.1 中的约定，记 $\dim_F F_i=d_i$。对于我们的 F-拟种子 $(F_i,{}_iF_j)$，定义 $S:=\prod_{i\in I}F_i$以及 $B:=\bigoplus_{(i,j)\in\Omega}{}_iF_j$。注意，$B$是一个 (S,S)-双模。我们将有限维遗传代数 $T=T(C,D,\Omega)$ 定义为张量代数 $T:=T_S(B)$。注意，对于 $T(C,D,\Omega)$，我们采用与 Geiß-Leclerc-Schr¨oer [GLS16], 相同的约定，这与我们对代数 $\Pi(\ell)$ 所采用的对偶约定不同。

我们还可以定义预投射代数（详情见 [DR80] ）。对于 $(i,j)\in\Omega$，存在 F_j-基 $\{x_1,\dots,x_{|c_{ji}|}\}$of ${}_iF_j$以及 $\mathrm{Hom}_{F_j}({}_iF_j,F_j)$ 的 F_j-基 $\{y_1,\dots,y_{|c_{ji}|}\}$，使得对每个 $x\in {}_iF_j$ 都有 $x=\sum_{i=1}^{|c_{ji}|}y_i(x)x_i$. 我们有典范元$\mathsf{c}_{ij}=\sum_{i=1}^{|c_{ji}|}x_i\otimes_{F_i}y_i\in {}_iF_j\otimes_{F_j}\mathrm{Hom}_{F_i}({}_iF_j,F_i)$，它不依赖于基 $\{x_i\}$和 $\{y_j\}$的选取。令 ${}_jF_i:=\mathrm{Hom}_{F_j}({}_iF_j,F_j)$，其中 $(i,j)\in\Omega$，我们也可以定义类似的典范元 $\mathsf{c}_{ji}\in {}_jF_i\otimes_{F_i}{}_iF_j$。设 $\overline{B}:=\bigoplus_{(i,j)\in\Omega}({}_iF_j\oplus {}_jF_i)$，并将代数 T 的预投射代数 $\Pi_T=\Pi_T(\ell)$ 定义为

$$T_S(\overline{B})/\langle\sum_{(i,j)\in\Omega}\mathrm{sgn}_\Omega(i,j)\mathsf{c}_{ij}\rangle.$$

令 P_i^T（分别地，$P_i^{\Pi_T}$）表示与 i 相关联的不可分解射影 T-模（分别地，Π_T-模），并令 τ_T 为（左）T-模的 Auslander-Reiten 平移。注意，类似于 [S¨od21，命题 4.7]，通过考察 T 的 Auslander-Reiten 箭图的预投射分支，可以得出该代数 Π_T 满足 $P_i^{\Pi_T}=\bigoplus_{k\geq 0}\tau_T^{-k}P_i^T$。还要注意，我们的 F-拟遗传代数（$F_i,{}_iF_j$）不过是 Dlab-Ringel [DR80], 意义下与（C,D,Ω）相关联的调制图，尽管我们将在 C 的变形背景下研究这些代数。

尽管由于 F_i 是有限维斜域，显然 S 上不存在非平凡的 $\mathbb{Z}$ 分次，但我们仍可根据 T 和 Π_T 的张量代数描述，为它们赋予一个由此诱导的 $t^{\mathbb{Z}}$ 分次。${}_iF_j$ 中的每个元素的次数都是 t。我们指出，

˜如果我们具体地为每个 ${}_iF_j$ （例如 $F((\varepsilon))$-物种 H 中的 [GLS20, §4。1]）选取一个分解，并定义其预投射代数，那么我们也可以利用 $\underline{\mu}^{\mathbb{Z}}$，通过 [DR80，引理 1。1]，为这些代数赋予自然的 $t^{\mathbb{Z}}$分次和齐次关系。不过，我们在此只考虑 t分次，因为我们的目的是诠释 $t^{\mathbb{Z}}$-卡当矩阵。根据我们的 Π_T 分次，我们的代数满足 §2.2 中的条件 (A)（其中 $\Bbbk = F$）。

We h对每个简单模 F_i，都有如下 t-分次模复形 :

引理 3.6. 复形

$$t^2 P_i^{\Pi_T} \xrightarrow{\psi^{(i)}} \bigoplus_{j\sim i} (P_j^{\Pi_T})^{\oplus(-tC_{ji}(1,t))} \to P_i^{\Pi_T} \to F_i \to 0. \tag{3.8}$$

是正合的。此外，以下结论成立。

(1) 当 C 为无限型时，对所有 $i \in I$，$\operatorname{Ker}\psi^{(i)} = 0$。特别地，$\Pi_T$-$\mathsf{mod}^+_{t^{\mathbb{Z}}}$ 中的每个对象的投射维数至多为 2。(2) 当 C 为有限型时，对每个 $i \in I$，有 $\operatorname{Ker}\psi^{(i)} \cong t^h F_{i^*}$。

证明。结论（1）可由 T 的 Auslander-Reiten 理论推出（例如，[AHI+22，命题 7。8]）。结论（2）由 [S¨od21，§6] 得出。注意，C 为有限型，当且仅当 Π_T 是自内射有限维代数；其中山置换也可仿照 定理 2.8，通过类似于 [Miz14，§3] 的方法计算（见备注 3.8）。□

推论 3.7. 对任意的 i、$j \in I$，以下结论成立。

(1) 当 C 为有限型时，我们有

$$d_i\widetilde{C}_{ij}(1,t) = \frac{t}{1-t^{2h}}\left(\dim_{t^{\mathbb{Z}}}(e_i P_j^{\Pi_T}) - t^h \dim_{t^{\mathbb{Z}}}(e_{i^*} P_j^{\Pi_T})\right).$$

(2) 当 C 为无限型时，我们有

$$d_i\widetilde{C}_{ij}(1,t) = t\dim_{t^{\mathbb{Z}}}(e_i P_j^{\Pi_T}).$$

这里 $\dim_{t^{\mathbb{Z}}}$ 表示 $t^{\mathbb{Z}}$-分次 F-向量空间的分次维数。

证明。等式 $[P_j^{\Pi_T}] = \sum_{i\in I}(\dim_{t^{\mathbb{Z}}}(e_i P_j^{\Pi_T})/\dim_F F_i)[F_i]$ 在 $\hat{}K(\Pi_T\text{-模}_{t^{\mathbb{Z}}})$ 以及等式 $\dim_{t^{\mathbb{Z}}} e_i\Pi_T \otimes_{\Pi_T} F_j = \delta_{ij}d_i$，结合引理 3.6 中与 §2.5 中广义预投射代数情形类似的论证，立即得出我们的断言。§2.5。□

注 3.8. 对于我们的代数 Π_T，双边理想 $J_i := \Pi_T(1-e_i)\Pi_T$ 和理想半群 $\langle J_1, \ldots, J_n\rangle$ 也类似于 [IR08,BIRS11,Miz14]（参见 [AHI+22, §7.1]），在其模范畴上给出魏尔群对称性。即使考虑代数 Π_T 和 $t^{\mathbb{Z}}$-齐次理想 J_i，我们也可以像 §2.6 那样，在特化 $q \to 1$ 和 $\underline{\mu} \to 1$ 后，利用引理 3.6 建立类似的辫群对称性。

注 3.9. 代数 Π_T 在非有限型中是 Koszul 代数，而在有限型中是 $(h-2, h)$-近似 Koszul 代数，这符合 [BBK02] 的定义，并采用我们的 $t^{\mathbb{Z}}$-分次。因此，推论 3.7 可在 [BBK02,§3.3]的背景下加以理解。

作为这一描述的副产品，我们得到了[HL15，命题 21] 以及 [Fuj22，命题 38] 中公式的以下推广，该推广适用于任意二分可对称化 Kac-Moody 型。对于一个 t-级数 $f(t) = \sum_k f_k t^k \in \mathbb{Z}[\![t, t^{-1}]\!]$，我们记 $[f(t)]_k := f_k$ 当 $k \in \mathbb{Z}$ 时。

命题 3.10. 假设 C 是二分图，并取一个高度函数 ξ，对于 C 满足$\Omega^\xi = \Omega$ （参见 *§1.5*）。设 $(F_i, {}_iF_j)$ 为如上所述与 (C, D, Ω) 相关联的调制图。设 $M \simeq \tau_T^{-k} P_i^T$ 和 $N \simeq \tau_T^{-l} P_j^T$ 为任意两个不可分解的预投射 T-模。当 C 为无限型时，我们有

$$\dim_F \operatorname{Ext}^1_T(M, N) = \left[d_i \widetilde{C}_{ij}(1, t) \right]_{(\xi(i)+2k)-(\xi(j)+2l)-1}. \tag{3.9}$$

当 C 为有限型时，只要 (3.9)就仍然成立

$$1 \le (\xi(i) + 2k) - (\xi(j) + 2l) - 1 \le h - 1. \tag{3.10}$$

否则，我们有 $\operatorname{Ext}^1_T(M, N) = 0$。

证明。 我们可以像 [HL15] 或 [Fuj22]中那样，利用公式 (1.11) 进行组合论证，从而推导出该断言。不过，这里我们将给出另一种利用代数 Π_T 的证明。

对于任意 $t^{\mathbb{Z}}$-分次 T-模 M，我们有一个分解 $M = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}} M^{[u]}$，其中$M^{[u]} := \bigoplus_{i \in I} e_i M_{u-\xi(i)}$。注意，每个 $M^{[u]}$都是 M 的一个 T-子模，因为 ξ是满足 $\Omega^\xi = \Omega$ 的高度函数。我们有以下同构

$$T(P_i^{\Pi_T})^{[u]} \cong \begin{cases} \tau_T^{-k} P_i^T & \text{if } u = \xi(i) + 2k \text{ for } k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.11}$$

作为 分次） T-模。现在，对于每个 $M \simeq \tau_T^{-k} P_i^T$ 和 $N \simeq \tau_T^{-l} P_j^T$，我们有

（未

$$\begin{aligned} \dim_F \operatorname{Ext}^1_T(M, N) &= \dim_F \operatorname{Ext}^1_T(\tau_T^{-k} P_i^T, \tau_T^{-l} P_j^T) \\ &= \dim_F e_j \tau_T^{(k-l-1)} P_i^T && \text{（参见 [ASS06，§IV 2。13]）} \\ &= \dim_F e_j (P_i^{\Pi_T})^{[\xi(i)+2(k-l-1)]} && (3.11) \\ &= \dim_F (e_j P_i^{\Pi_T})_{(\xi(i)+2k)-(\xi(j)+2l)-2}. \end{aligned}$$

当 C 属于无限型时，我们由推论3.7 （2）推出所需的等式（3.9）。当 C属于有限型时，通过类比$e_j P_i^{\Pi_T}$FM23，推论 3。9]，我们可以发现，只有满足条件（3.10）时，）$_{(\xi(i)+2k)-(\xi(j)+2l)-2}$。当满足（3.9），由推论3.7 （1）即可得到（3.10 [□

备注 3.11。 在 [GLS17], 中，他们还引入了 H 任意域 $\Bbbk$ 上与一个广义卡坦矩阵 C、其对称化子 D以及一个定向 Ω 相关联的 1-岩永-戈伦斯坦代数。该代数 H 具有与我们的代数 T相当相似的特征，并且我们也可以用类似的方式，为代数 3.10 中的命题 H 建立一个版本，其中带有相应广义预投射代数的 $t^{\mathbb{Z}}$-分次结构。这些代数 H 和 T 具有以下由 [GLS16命题 55]给出的扩张群的共同维数性质：

我们沿用命题 3.10中的约定。设 $X \simeq \tau_H^{-k} P_i^H$和 $Y \simeq \tau_H^{-l} P_j^H$是任意两个不可分解的预投射 H-模。则有

$$\dim_{\Bbbk} \operatorname{Ext}_H^1(X,Y) = \dim_F \operatorname{Ext}_T^1(M,N).$$

得益于代数 H 与 T具有这一共同的维数性质，推论 2.15在特化 $q \to 1$ 和 $\underline{\mu} \to 1$ 后，结合注记 2.4，可特化为推论 3.7。

注记 3.12。 作者几乎完成本文写作时，Kashiwara-Oh 的一篇预印本 [KO23b]出现在 arXiv 上，其中表明有限型的 t-卡当矩阵与箭图 Hecke 代数的表示论密切相关。结合他们的主定理与上面的命题 3.10，我们发现调制图的表示论与箭图 Hecke 代数的表示论之间存在如下关系。

设 C 是一个有限型卡当矩阵，并令 $\mathfrak{g}$ 表示与 C关联的单李代数。设 R 是与 C 及其最小对称化矩阵D关联的箭图 Hecke 代数，它将量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$范畴化。我们关注由 R 矩阵定义的$\mathbb{Z}_{\geq 0}$值不变量 $\mathrm{d}(S,S')$，它衡量两个“仿实” R模 S 和 S' 关于卷积积（或抛物诱导）彼此不交换的程度。给定 C的一个（无环）定向 Ω，对于 $\mathfrak{g}$的每个正根 α，都有一个仿实 R模 $S_\Omega(\alpha)$，称为尖点模。详情见 [KO23b] 。

另一方面，对于 F-物种，我们有 Gabriel 定理的一个推广（见[DR75、DR76、Rin 76]）。特别地，对于 α的每个正根，存在一个不可分解模 $M_\Omega(\alpha)$，其属于代数 $T = T(C, D, \Omega)$，满足$\sum_{i\in I}(\dim_{F_i} e_i M_\Omega(\alpha))\alpha_i = \alpha$，且在同构意义下唯一。注意，当 C 为有限型时，每个不可分解 T-模都是预射影模。

于是，[KO23b、主定理] 和命题3.10 告诉我们，等式

$$\mathfrak{d}(S_{\Omega^*}(\alpha), S_{\Omega^*}(\beta)) = \dim_F \operatorname{Ext}_T^1(M_\Omega(\alpha), M_\Omega(\beta)) + \dim_F \operatorname{Ext}_T^1(M_\Omega(\beta), M_\Omega(\alpha)) \qquad (3.12)$$

对任意正根 α 和 β成立，其中 Ω^* 表示与 Ω 相反的 C 定向。特别地，(3.12)意味着对于任意正根 α 和 β，以下三个条件彼此等价:

- 卷积积 $S_{\Omega^*}(\alpha) \circ S_{\Omega^*}(\beta)$ 是单的;
- 我们有一个 $S_{\Omega^*}(\alpha) \circ S_{\Omega^*}(\beta) \simeq S_{\Omega^*}(\beta) \circ S_{\Omega^*}(\alpha)$ 的 R-模同构;
- 我们有 $\operatorname{Ext}_T^1(M_\Omega(\alpha)\ M_\Omega(\beta)) = \operatorname{Ext}_T^1(M_\Omega(\beta)\ M_\Omega(\alpha)) = 0.$

注意，在 ADE 型量子环代数上的基本模情形中，相应的结论见 [Fuj22]。

致谢。作者谨向 Christof Geiß、Naoki Genra、David Hernandez、Yuya Ikeda、Osamu Iyama、Bernhard Keller、Taro Kimura、Yoshiyuki Kimura、Bernard Leclerc 和 Hironori Oya 致以诚挚谢意，感谢他们所作的有益讨论和评论。作者的这一系列研究部分受到了[Kel] Bernhard Keller 所作报告的启发。作者感谢他分享自己的想法并解答了一些问题。在 2021 年秋季访问期间，卡昂诺曼底大学数学实验室热情接待了作者，他们对此深表感激。本研究部分得到了大阪市立大学

高级数学研究所：文部科学省数学与理论物理联合使用／研究中心 [JPMXP0619217849]。

References

[AHI+22] T. Aoki、A. Higashitani、O. Iyama、R. Kase 和 Y. Mizuno，《倾斜理论中的扇与多面体 I：基础》，2022年。预印本，arXiv:2203.15213v2。[AIRT12] C. Amiot、O. Iyama、I. Reiten 和 G. Todorov，预投射代数与 c-可排序词，《伦敦数学会会刊》(3) 104 (2012)，第 3 期，513–539。MR2900235[ASS06] I. Assem、D. Simson 和 A. Skowro´nski，《结合代数表示论基础》第 1 卷，伦敦数学会学生教材，第 65 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。表示论方法。MR2197389[B´ed99] R. B´edard，关于魏尔群中约化词的交换类，《欧洲组合学杂志》20 (1999)，第 6 期，483–505。MR1703595[BBK02] S. Brenner、M. C. R. Butler 和 A. D. King，几乎为 Koszul 的周期代数，《代数与表示论》5 (2002)，第 4 期，331–367。MR1930968[BIRS11] A. B. Buan、O. Iyama、I. Reiten 和 D. Smith，簇倾斜对象与势的突变，《美国数学杂志》133 (2011)，第 4 期，835–887。MR2823864[BP98] P. Bouwknegt 和 K. Pilch，关于变形 $\mathscr{W}$-代数与量子仿射代数，《理论与数学物理进展》2 (1998)，第 2 期，357–397。MR1633032[Cha02] V. Chari，辫群作用与张量积，《国际数学研究通知》7 (2002)，357–382。MR1883181[DR75] V. Dlab 和 C. M. Ringel，关于有限表示型代数，《代数杂志》33 (1975)，306–394。MR357506[DR76] ———，图与代数的不可分解表示，《美国数学会回忆录》6 (1976)，第 173 号，v+57。MR447344[DR80] ———，调制图的预投射代数，《表示论 II》（第二届国际会议论文集，加拿大渥太华卡尔顿大学，1979），1980年，第 216–231 页。MR607155[FG19] C. Fu 和 S. Geng，可对称化卡当矩阵所关联预投射代数上的倾斜模与支撑 τ-倾斜模，《代数与表示论》22 (2019)，第 5 期，1239–1260。MR4026632[FM23] R. Fujita 和 K. Murakami，《变形卡当矩阵与广义预投射代数 I：有限型》，《国际数学研究通知》IMRN 8 (2023)，6924–6975。MR4574392[FO21] R. Fujita 和 S.-j. Oh，非扭量子仿射代数的 Q-数据与表示论，《数学物理通讯》384 (2021)，第 2 期，1351–1407。MR4259388[FR98] E. Frenkel 和 N. Reshetikhin，与单李代数相关的 $\mathscr{W}$-代数的变形，《数学物理通讯》197 (1998)，第 1 期，1–32。MR1646483[Fuj22] R. Fujita，基本模的分次箭图簇与归一化 R-矩阵的奇点，《精选数学》(新系列) 28 (2022)，第 1 期，论文第 2 号，45。MR4333501[Gab73] P. Gabriel，不可分解表示 II，《数学研讨会》第 XI 卷（INDAM 罗马代数几何会议，1971年；INDAM 罗马几何会议，1972年），1973年，第 81–104 页。MR0340377[GLS16] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer，可对称化卡当矩阵的带关系箭图 III：卷积代数，《表示论》20 (2016)，375–413。MR3555157[GLS17] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer，可对称化卡当矩阵的带关系箭图 I：基础，《发明数学》209 (2017)，第 1 期，61–158。MR3660306[GLS18] ———,可对称化卡当矩阵的带关系箭图 IV：晶体图与半典范函数，《精选数学》(新系列) 24 (2018)，第 4 期，3283–3348。MR3848021[GLS20] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer，刚性模与舒尔根，《数学杂志》295 (2020)，第 3–4 期，1245–1277。MR4125687

[GTL17] S. Gautam 和 V. Toledano Laredo，杨量子群与量子环代数的亚纯张量等价，《高等科学研究所数学出版物》125 (2017)，267–337。MR3668651[Her11]D. Hernandez，代数 $\mathcal{U}_q(sl_\infty)$ 及其应用，《代数杂志》329 (2011)，147–162。MR2769320[HL15] D. Hernandez 和 B. Leclerc，量子格洛腾迪克环与导出霍尔代数，《纯粹与应用数学杂志》701 (2015)，77–126。MR3331727[IR08] O. I yama 和 I. Reiten，Calabi-Yau 代数上的 Fomin-Zelevinsky 突变与倾斜模，《美国数学杂志》130 (2008)，第 4 期，1087–1149。MR2427009[Kel] B. Keller，范畴化的量子 Cartan 矩阵。在线报告，会议“表示论中的范畴化”，莱斯特，2020年9月16日。[KO23a] M. Kashiwara 和 S.-j. Oh，在 $q = 1$ 处特化的 (q, t)-卡当矩阵及其应用，《数学杂志》303 (2023)，第 2 期，论文第 42 号，49。MR4533489[KO23b] ，t-量子化卡当矩阵与箭图 Hecke 代数尖点模的 R 矩阵，2023年。预印本，arXiv:2302.08700。[KP18a] T. Kimura 和 V. Pestun，分数箭图 W-代数，《数学物理通讯》108 (2018)，第 11 期，2425–2451。MR3861382[KP18b] ———，箭图 W-代数，《数学物理通讯》108 (2018)，第 6 期，1351–1381。MR3797750[Miz14] Y. Mizuno，对 Dynkin 型预投射代数上的 τ-倾斜模进行分类，《数学杂志》277 (2014)，第 3–4 期，665–690。MR3229959[MP19] A. Marcus 和 S. Pan，群分次自内射代数的倾斜复形，《筑波数学杂志》43 (2019)，第 2 期，211–222。MR4080792[Mur22a] K. Murakami，Dynkin 型广义预投射代数的模范畴，《大阪数学杂志》59 (2022)，第 2 期，387–402。MR4405985[Mur22b] ———，PBW 参数化与广义预投射代数，《数学进展》395 (2022)，论文第 108144 号。MR4355737[Nak11] H. Nakajima，箭图簇与簇代数，《京都数学杂志》51 (2011)，第 1 期，71–126。MR2784748[NW23] H. Nakajima 和 A. Weekes，带对称化子的箭图规范理论的库仑分支，《欧洲数学会杂志》(JEMS) 25 (2023)，第 1 期，203–230。MR4556783[Rin76] C. M. Ringel，K-种类的表示与双模，《代数杂志》41 (1976)，第 2 期，269–302。MR422350[S¨od21]C. S¨oderberg，关系有限表示型 d-种类的预投射代数，2021年。预印本，arXiv:2109.15187v3。[Spe09] D. E. Speyer，无限群中的 Coxeter 元幂是约化的，《美国数学会会刊》137 (2009)，第 4 期，1295–1302。MR2465651

（R. Fujita） Research Institute for Mathematical Sciences、 Kyoto University、 Oiwake-Kitashirakawa、 Sakyo、 Kyoto、 606-8502、 Japan & Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche、 Université Paris Cité、 F-75013、 Paris、 France电子邮箱: rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

（K. Murakami） Graduate School of Mathematical Sciences、 The University of Tokyo 3-8-1 Komaba、 Meguro、 Tokyo、 153-8914 Japan & Department of Mathematics、 Kyoto Uni-versity、 Kitashirakawa Oiwake-cho、 Sakyo-ku、 Kyoto、 606-8502、 Japan电子邮箱：murakami@ms.u-tokyo.ac.jp