arXiv:2302.14342v2 [math.AT] 9 Jun 2023

莫尔斯-诺维科夫理论与弗洛尔理论的抽象层间持久性

MICHAEL USHER

摘要。我们建立了一个通用代数框架，涉及“庞加莱–诺维科夫结构”和“过滤匹配对”，以抽象地研究与取值于 R 或 S^1 的莫尔斯函数之层间集合的同调相关联的条形码；随后可将其应用于无法显而易见地找到层间集合类比物的弗洛尔理论情形。由此得到的条形码满足稳定性与对偶性定理的抽象版本；在莫尔斯理论或诺维科夫理论中，它们与层间持久性所产生的标准条形码一致。在哈密顿弗洛尔理论中，条形的长度给出多个量，这些量让人联想到哈密顿量微分同胚的谱范数。

目录

1. 引言 2 1.1. 论文结构 5 致谢 6 2. 一般设置 7 2.1. 过滤匹配对 7 2.2. 庞加莱–诺维科夫结构 10 2.3. 链级概念 11 3. 示例、联系与诠释 13 3.1. 莫尔斯函数与扩展持久性 13 3.2. 诺维科夫同调 15 3.3. 其他过滤匹配对 19 4. 一些代数预备知识 21 4.1. 共轭 23 4.2. 非阿基米德范数与正交基 24 4.3. 对偶 28 4.4. 庞加莱对偶结构 29 5. 过滤匹配对 32 5.1. 稳定性 36 5.2. 对偶性 41 5.3. 构造双重正交基 45 6. 庞加莱–诺维科夫结构 54 7. 哈密顿弗洛尔理论 59 8. 链级构造与持久模 72 8.1. 关于滤过与锥的一般性说明 72

8.2. 从链级过滤匹配对到持久模 74 8.3. 构件 77 8.4. 直和分解与条形码 82 8.5. 链级庞加莱–诺维科夫结构 88 9. Morse理论与Novikov理论的链级庞加莱–诺维科夫结构 90 9.1. Morse复形、延续映射以及带有 $\Gamma = \{0\}$ 的庞加莱–诺维科夫结构 90 9.2. 覆盖空间上的提升的莫尔斯复形 95 9.3. 诺维科夫复形 98 9.4. 相关的链级过滤匹配对 100 9.5. 与层间持久性的同构 105 附录 A. 定向 113 A.1. 初始约定 113 A.2. Morse理论中的定向 114 A.3. 哈密顿弗洛尔理论与 PSS映射中的定向 118 参考文献 135

1. 引言

若 $f : X \to \mathbb{R}$ 是紧拓扑空间 X 上一个足够良态的函数，则 f 的子水平持久性模（例如取域 κ 上的系数）由次水平集的同调群 $H_*(X^{\leq t}; \kappa)$（其中 $X^{\leq t} = f^{-1}((-\infty, t])$）以及包含诱导映射 $H_*(X^{\leq s}; \kappa) \to H_*(X^{\leq t}; \kappa)$构成。至少从 [Mor25] 起，人们就开始研究这一理论的某些方面；用当代语言来说，正如 [Ba94] 和 [ZC05]，所示，子水平持久性模可视为由过滤链复形各项的同调群产生，并可分解为区间模之和$\kappa_{[s,t)}$，其中$-\infty < s < t \leq \infty$。每个直和项 $\kappa_{[s,t)}$ 对应一个一维子空间，它最初出现在 $H_*(X^{\leq s}; \kappa)$ 中；若 $t = \infty$，则该子空间会单射映入 $H_*(X; \kappa)$；若 $t < \infty$，则当且仅当 $t' \geq t$ 时，该子空间在次水平集 $H_*(X^{\leq t'}$ 的同调群中映为零。该分解中的区间 $[s, t)$ 的集合称为 f 的子水平条形码。

与（如今所称的）子水平持久性相关的思想，长期以来一直对辛拓扑产生着影响；这一方向上的早期重要工作包括 [Vit92],[FH94],[Oh97],[Sc00]。其中，第一篇文献使用了定义在一个辅助拓扑空间上的函数的次水平集的（相对）奇异同调群，而此后的研究则更多地采用某种形式的过滤Floer同调。后者涉及一个过滤链复形，其构造类比于有限维流形上的Morse理论中所熟悉的Morse复形；然而，由于过滤Floer复形基于无限维流形（例如辛流形(M的自由环空间 $L_M\ \omega$)）上的函数 A，且其临界点具有无限Morse指标，相应的过滤Floer群实际上并不表示 A 的次水平集的同调。尽管如此，从代数角度来看，过滤Floer持久性模具有相当良好的性质，而从中提取出的各种量能够传达有关 Hamiltonian微分同胚和Lagrangian子流形的有趣几何信息，例如例如。持久同调的语言，尤其是条形码，最早由 [PS16] 引入Floer理论，且

相关理论在 [UZ16]中得到进一步发展；这一框架已被应用于近期的各种辛应用，例如 [Sh 22],[CGG21]。

函数f的$X \to \mathrm{R}$上的层间集合按定义是某个闭区间 $[a,b] \subset \mathrm{R}$ 在f下的原像$X_{[a,b]} := f^{-1}([a,b])$；例如，水平集就是$a = b$这一特殊情形。随后，基于包含诱导映射$H_k(X_{[a,b]};\kappa) \to H_k(X_{[c,d]};\kappa)$ for $[a,b] \subset [c,d]$，可得到一个以闭区间偏序集为参数的持久模。在适当假设下，这个持久模还满足分解定理，因此可由一组区间分类，我们将其称为f的层间条形码；对此，可以从箭图理论分类之字形图的角度来理解，例如

$$\cdots \leftarrow H_k(X_{[s,s]};\kappa) \to H_k(X_{[s,t]};\kappa) \leftarrow H_k(X_{[t,t]};\kappa) \to H_k(X_{[t,u]};\kappa) \leftarrow \cdots$$

如 [CdSM09], ，也可以从这样的事实来理解：Mayer-Vietoris序列在二维持久模这一类中，对层间持久模施加了特殊结构，如 [CO20],[BGO19]。[1] 一般而言，层间条形码由四种类型的有限长度区间组成：$[a,b), (a,b], (a,b), [a,b]$；粗略地说，层间条形码中存在区间 I，对应于每个水平集同调 $H_k(X_{[t,t]};\kappa)$ for $t \in I$ 中的一个一维直和项，并且若 $[s,t] \subset I$，则 $H_k(X_{[s,s]};\kappa)$ 与 $H_k(X_{[t,t]};\kappa)$ 中相应的直和项在 $H_k(X_{[s,t]};\kappa)$中具有非平凡的公共像。

适当良态函数 $f : X \to R$ 的层间持久性条形码包含的信息多于子水平持久性条形码。由 [CdSM09，第3],[CEH09] 节可知，形如 $[a,b)$ 的（有限长度）条形对于子水平条形码和层间条形码而言是相同的，而 f 的层间条形码中形如 $(a,b]$ 的条形，则对应于子水平条形码中形如 $[-b,-a)$ 的有限长度条（忽略分次调整）；当 f 是紧致光滑κ定向流形上的莫尔斯函数时，庞加莱对偶性将后者与 f 的子水平条形码中的条形联系起来。两类半开条 $[a,b), (a,b]$ 都检测 f 的层间（或子水平）集合中的同调类，这些同调类在包含映射进入整个空间 X 时消失；另一方面，闭条或开条 $[a,b], (a,b)$则对应于在 $H_*(X$ 中非平凡的类；$\kappa)$。事实上，对于紧致光滑 κ定向流形上的莫尔斯函数，这类条形成对出现，形如 $\{[a,b], (a,b)\}$，其同调次数之和为 $n-1$；每一对都对应于 f 的子水平条形码中的两条无限长度条 $[a,\infty), [b,\infty)$。因此，在这一莫尔斯情形下，层间条形码相较于子水平条形码所提供的额外信息，就是对子水平条形码中无限长度条的端点进行配对。关于两个定义在二亏格曲面上的函数的简单例子——它们具有相同的子水平条形码但不同的层间条形码——请参见图1。

[1]由于 Mayer-Vietoris序列在开集上的效果优于在闭集上的效果，[CO20],[BGO19] 使用开区间的原像 $X_{(a,b)} = f^{-1}((a,b))$ 作为层间集合。在本文的动机案例中，f 将是一个莫尔斯函数，这意味着对于足够小的 $\epsilon > 0$，$X_{[a,b]}$ 是$X_{(a-\epsilon,b+\epsilon)}$ 的变形收缩，因此使用闭区间不会带来额外困难。关于对不那么良好的函数f进行（闭）层间持久性研究时的相关考量，参见 [CdSKM19] 和 [Bu18a]。

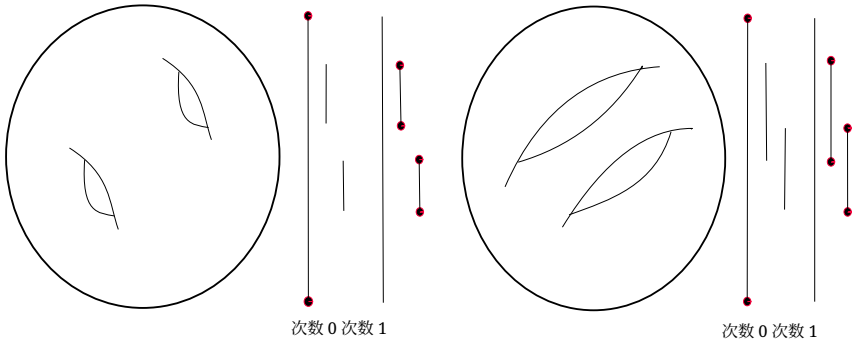


图1. 上述亏格二曲面上的高度函数都是完美莫尔斯函数（即莫尔斯不等式取等），因此它们的层间条形码中没有半开区间，而子水平集条形码仅由从临界值开始的半无限区间组成；两种情况下的临界值相同。然而，如图所示，它们的层间条形码中的闭区间和开区间有所不同。（实心端点表示闭区间；没有实心端点的线段表示开区间。）

本工作源于一个项目：旨在为层间持久性建立一个抽象的代数框架，使其足够一般，从而能够在哈密顿弗洛尔理论及其在辛拓扑中的变体背景下提供层间型条形码；这正如 [UZ16] 的“Floer 型复形”允许人们构造辛-Floer理论意义下的子水平条形码版本一样。由于根据 [UZ16，定理 A 和 B]，，这些子水平条形码完全分类了 Floer 型复形（在滤过复形的适当同构意义下），而层间条形码应包含比子水平条形码更多的信息，因此我们的处理必须考虑 Floer 复形的滤过同构类型之外的特征。我们对这一问题的解决方案采用了“**庞加莱–诺维科夫结构**”这一抽象代数概念，该概念在第 2.2 节中作了简要讨论，并在第6节中作了更详细的介绍；将其应用于第 7 节的哈密顿弗洛尔理论时，它纳入了来自 PSS同构 [PSS94] 以及底层辛流形中的庞加莱交叉配对的信息。一个一般的代数程序为每个分次中的庞加莱–诺维科夫结构关联一个**“过滤匹配对”**，并由此提取层间条形码型不变量。虽然本文中的构造最初受辛拓扑启发，但它们本质上是代数性的，因此具有足够的适应性，有望引起更广泛的兴趣。第 3 节描述了我们构造的若干经典拓扑实例。

有两个主要问题使得将层间持久性应用于 Floer 理论并非易事；单独来看，或许可以通过对标准方法稍作修改来解决其中任何一个，但二者结合起来似乎需要采用我们在此发展的新技术。首先，虽然 Floer 复形的过滤子复形的同调群可以自然地模拟次水平集的同调，但似乎并不存在与层间集合的同调相对应的、成熟的 Floer 理论版本

。[2] 因此，我们起初无法使用通常用于发展层间持久性理论的 zigzag 持久模或双参数持久模。（我们最终会构造一个可用于此目的的对象（见 (8.3)），但应将其视为我们理论的副产品，而非输入。）

克服这一困难的一种方法，是利用 [CdSM09] 层间持久性与 [CEH09]的扩展持久性之间的同构。后者直接基于函数的子水平集和超水平集，而不是层间集，因此在概念上似乎更接近 Floer理论。然而，这又引出了我们的第二个问题，即在许多所关注的情形中，过滤Floer复形所对应的并不是紧流形X 上光滑函数的 Morse复形，而是覆盖空间 $\tilde{X}$ 上的函数 $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$ 的诺维科夫复形 [Nov81]，其中 $d\tilde{f}$ 是 X 上闭一形式的拉回。（如果周期群 $\Gamma = \{\int_{S_1} \gamma^*\theta \mid \gamma\colon S^1 \to X\}$ 是非平凡且离散的，θ 可以被视为函数$X \to S^1$ 的导数。）在诺维科夫理论背景下，层间持久性的多个版本已经针对离散（[BD13],[BH17],[Bu18b]）和非离散（[Bu20a][Bu20b]）周期群得到发展，但文献中似乎尚未有扩展持久性的类似构造，能够以适合直接推广到 Floer理论的形式呈现。本文中的一些构造可以被视为在一般代数框架下对扩展持久性所作的此类推广。关于与扩展持久性之间联系的更多内容，参见第3.1节；关于与 Burghelea 工作的比较，参见注记 3.2。

1.1. **论文结构**。 接下来的两节可以视为扩展的引言：第 2 节概述我们代数框架的关键要素，第 3 节则更具体地说明我们的结构如何产生于有限维 Morse 理论和 Novikov理论等背景中，并指出它们与其他构造之间的联系。第 2 节和第 3 节都很少包含证明，并且经常提前引用本文后续部分，以给出精确定义。我们将 Hamiltonian Floer理论这一动机案例的讨论推迟到第 7 节，届时相关代数已得到更详细的阐释。第4节为本文其余部分介绍一些基本代数要素，其中包括第4.4节对庞加莱对偶的抽象化。第 5 节引入过滤匹配对这一核心概念，并证明了关于这类对象的若干关键结果，特别是一个稳定性定理（定理 5.12），以及第 5.3 节中的一个存在性定理：当周期群 Γ离散时，该定理保证存在我们用来构造本文所定义的层间条形码中开区间和闭区间的双重正交基。第6节介绍我们提出的庞加莱–诺维科夫结构概念，它将庞加莱对偶与过滤 Novikov理论的抽象版本结合起来，并将庞加莱–诺维科夫结构与过滤匹配对联系起来。完成代数框架的构建后，我们在第 7 节将其应用于 Hamiltonian Floer理论，从而得到一个与 Hamiltonian 流相关的“本质条形码”（同样是在 Γ 离散时；若非离散，仍有一些结构保留下来）

[2]常用的“作用窗口弗洛尔同调”，记作$S^{[a,b)}$ in [FH94], ，可视为相对同调$relative\, H_*(f^{-1}([a,b)), f^{-1}(\{a\}))$的对应物；但对于层间持久性，我们需要绝对同调——特别是，我们不希望当 $[a,b)$ 不含临界值时同调消失，而这正是作用窗口同调的情形。

它旨在发挥层间条形码中那些开区间或闭区间的集合的作用。（层间条形码中其余的半开区间，类似于 [UZ16] 中条形码的有限长度区间。）例 7.5 表明，当 Hamiltonian 是小且与时间无关时，只要 Floer 理论数据与 Morse 理论数据适当等价，这种类似关系便成为精确的等价。在第 7 节末尾，我们将本质条形码中各区间的端点（相差一个符号）与 Hamiltonian 流及其逆流的特定谱不变量对应起来；这些区间的长度——其数量等于流形同调的维数——可以在某种意义上被视为类似于 Hamiltonian 微分同胚的谱范数。第 7 节以及第 A.3 节中关于定向的相关内容，是本文其余部分中仅有的讨论辛拓扑的部分；对其他领域感兴趣的读者可以跳过这些内容。

截至第 7 节的构造，主要关注“同调上本质的”持久性特征，即这些特征源于非平凡全局同调类的行为，并且可以根据这种行为计算得到。若要获得完整图景，还应纳入那些在层间条形码中由半开区间表示、但在全局同调中消失的数据。因此，在第 8 节中，我们引入了构造的链级版本，使这类信息能够显现出来。在 (8.3) 中，我们基于这种链级结构综合出一个二维持久模，旨在发挥由层间集的同调给出的二维持久模的作用。我们还证明，这个持久模可以根据第 5 节讨论的同调级结构以及 [UZ16] 中的次水平持久型条形码计算得到。第 9 节回顾 Morse 复形和诺维科夫复形的基本特征，并详细说明如何将我们的链级结构与这类复形联系起来。随后，在第 9.5 节中，我们运用 [Paj06] 中的思想证明（定理 9.10）：对于一个取值于 R 或 S^1 的函数的诺维科夫复形，将 (8.3) 应用于相应链级结构所得到的二维持久模，事实上同构于通常的层间同调持久模。除了其内在意义之外，这也说明，将我们的 Floer 理论条形码视为层间条形码的正确类比是合理的，因为 Floer 复形及其相关的庞加莱–诺维科夫结构，在形式上与诺维科夫理论中的相应结构非常相似。本文最后以一个关于 Morse 理论和 Floer 理论中定向问题的附录收尾，重点明确描述所采用的约定，并推导这些约定对 Morse 对偶性和 Floer 理论版本的庞加莱对偶性中出现的符号所产生的影响。

致谢。 本文的构思萌芽于2018年特拉维夫研讨会“拓扑数据分析与辛拓扑相遇”，尤其是我在会上与 Dan Burghelea 的讨论。这些讨论让我不禁好奇，他的构造是否存在更抽象的版本。研究初期得到了美国国家科学基金会 DMS-1509213 号资助。我还要感谢爱荷华大学的几何与拓扑小组以及 IBS 几何与物理中心，感谢他们在2021年邀请我在研讨会上介绍这项工作；当时这项工作仍处于相对早期的阶段。

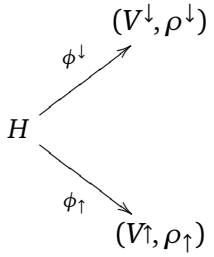
2. 一般设置

现在我们开始介绍代数框架，旨在涵盖前文讨论的、与函数 $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$ 相关的滤化Novikov复形的重要特征，以及它们在 Floer 理论中的对应物。在全文中，我们固定一个系数域 κ，以及 $\mathbb{R}$ 的一个有限生成加法子群 Γ；对于诺维科夫复形，该子群对应于 X 上某个 1-形式的周期群，该 1-形式在覆盖映射 $\tilde{X} \to X$ 下拉回为 $d\tilde{f}$，并且该子群同构于覆盖的甲板变换群。Γ 可能是平凡群，这对应于经典莫尔斯理论的情形。正如第4节将更详细讨论的，与 κ 和 Γ相关联的有群代数 $\Lambda := \kappa[\Gamma]$，以及我们分别记作 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 的两种诺维科夫域；二者都包含 Λ 作为子环。若 Γ 是平凡群，则 Λ、$\Lambda_\uparrow$、$\Lambda^\downarrow$各自退化为原系数域 κ。若 $\Gamma = \mathbb{Z}$，则 Λ是Laurent多项式环 $\kappa[T^{-1}, T]$,；而 $\Lambda_\uparrow$和 $\Lambda^\downarrow$则是两个Laurent级数域 $\kappa[T^{-1}, T]$]和 $\kappa[[T^{-1}, T]$。后两者显然作为域同构，但我们将它们区分开来，因为它们并不同构为 Λ-代数。

2.1. 过滤匹配对。在上文提到的情形中，函数 $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$ 在覆盖空间 $\tilde{X} \to X$ 上的诺维科夫复形，其中 Γ 扮演周期群的角色，Γ 在 $\tilde{X}$ 上的甲板变换作用使同调 $H_*(\tilde{X};\kappa)$ 成为一个分次 Λ-$\tilde{}$模。通常的 f 的诺维科夫链复形（第 9.3 节回顾过，并记作 $CN(f;\xi)_\uparrow$，其中 ξ 表示 X 上某个微分形式的上同调类，该形式的微分为其拉回）是一个有限维向量空间 $\Lambda_\uparrow$ 上的链复形，并配备有一个递增的实值滤过。复形 $CN(f;\xi)_\uparrow$ 是通过考察 $\tilde{f}$ 的负梯度轨线构造的；同样也可以使用 $\tilde{f}$ 的正梯度轨线，得到一个向量空间 $\Lambda^\downarrow$ 上的复形 $CN(\tilde{f};\xi)^\downarrow$，并配备有一个递减的实值滤过。[3]

我们在定义 5.1 中精确定义的**滤化匹配对**这一概念，刻画了$H_*(\tilde{X};\kappa)$与上述两个版本的滤化诺维科夫复形的同调群之间的关系。一个滤化匹配对 P 对应于如下图表

(2.1)



其中 H 是一个有限生成的 Λ-模，$V^\uparrow$ （分别为$V^\downarrow$）是一个 $\Lambda_\uparrow$-向量空间（分别为一个$\Lambda^\downarrow$-向量空间），这两个映射是 Λ-模同态，并且在系数扩张后成为同构

[3]当然，调整系数和滤过后，也可以将这个复形理解为f的通常诺维科夫复形。假设其可定向，它也可以解释为链复形$\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow$（参见命题 9.7）的对偶；不过，我们将两个复形$\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow$和$\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^\downarrow$都按同调方式分次。

，且$\rho_{\uparrow}$、$\rho^{\downarrow}$是$V^{\uparrow}$、$V^{\downarrow}$上的“过滤函数”，其含义是为一个元素赋予它首次出现时的过滤层级。[4]

若 d 是 H 中 Λ-线性无关集的最大基数，则在定义 5.3 中，我们将如 (2.1) 所示的过滤匹配对 P 与一个实数序列 $G_1(\mathrm{P}) \geq \cdots \geq G_d(\mathrm{P})$关联。在某些有利情形下——包括我们在定理 5.5 中证明的周期群 Γ 为离散群的所有情形——P 都将具有我们称为**双重正交基** $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset H$的基。在这种情况下（模去重排后）有 $G_i(\mathrm{P}) = \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}e_i) - \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}e_i)$，而 P 的**基谱**定义为元素的多重集

$$\left(\rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}e_i) \bmod \Gamma,\ \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}e_i) - \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}e_i)\right)$$

$(\mathrm{R}/\Gamma) \times \mathrm{R}$ 中的元素。根据命题 5.7，此多重集与双重正交基的选取无关。

在我们考虑的例子中，过滤匹配对中出现的模 H、$\mathrm{V}^{\uparrow}$、$\mathrm{V}^{\downarrow}$，对于某个 $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$，分别是链复形 C 、$\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$的 k 次同调群，其中 $\mathrm{C}^{\uparrow}$ 和 $\mathrm{C}^{\downarrow}$ 带有使其成为如[UZ16]中的 Floer 型复形的滤过。（参见定义 8.3 中“链级过滤匹配对”的概念。）基谱中的元素旨在对应于层间条形码中连接端点 $\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}\mathrm{e}_i)$ 和 $\rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}\mathrm{e}_i)$的区间（在 Γ-平移意义下是典范的）；当 $\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}\mathrm{e}_i) \geq \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}\mathrm{e}_i)$ 时，相关区间在同调次数 k 上是闭的；当 -1 且 $\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}\mathrm{e}_i) < \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}\mathrm{e}_i)$时，则在同调次数 k 上是开区间。间隙”$\mathrm{G}_i(\mathrm{P})$的绝对值对应于这些区间的长度（无需模$\Gamma$约化）。按设计，过滤匹配对只携带在完整链复形 C 、$\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$的同调群 H、$\mathrm{V}^{\uparrow}$、$\mathrm{V}^{\downarrow}$中保留下来的信息；层间条形码中其余的（半开）条形可通过将 [UZ16] 的方法应用于 Floer 型复形 $\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$来求得。

注意，与基谱不同，$G_i(\mathrm{P})$的定义并不取决于 P 是否存在双重正交基。根据定理 5.5，P 可能不存在双重正交基的唯一情形，是子群 Γ 在 R 中不可离散，因而稠密。在这种情况下，与模 Γ-平移的区间相关联、且对扰动具有稳健性的唯一量就是其长度，而这由 $G_i(\mathrm{P})$ 表示；因此，在基谱无法良好定义的情形下，可以说 $G_i(\mathrm{P})$ 承载了基谱可能传达的所有具有几何意义的信息。尽管如此，若能将定理 5.5 推广到 Γ 稠密的一些情形，仍然很值得探究；特别是，如果推广方式（如同我们在离散情形下对定理 5.5 的证明）是构造性的，从而提供一种计算 $G_i(\mathrm{P})$的方法，那就更有意义了，因为当 Γ 稠密时，直接根据定义计算它似乎很困难。

持久条形码的一个关键普遍性质是**稳定性**：例如，对于层间持久性，若所考虑的层间集合所对应的函数发生微小变化，便会导致

[4] $V^{\uparrow}$ 上的滤过是递增的，而$V^{\downarrow}$ 上的滤过是递减的，因此，在 $\rho_{\uparrow}$的情形下，“第一个”表示“最小”，而在 $\rho^{\downarrow}$ 的情形下则表示“最大”。对 $\rho_{\uparrow}$ 和 $\rho^{\downarrow}$ 所要求的精确条件详见定义 4.5。[5]要进行这种推广，至少需要假设 Λ-模 H 可分解为自由模与挠模的直和；当 Γ 稠密时，这一点并不总是成立。在作为动机的哈密顿弗洛尔理论中，这一假设确实成立（事实上，在该情形下H 是自由模）。

条形码相应地发生微小变化。现在，我们将在过滤匹配对的代数框架中描述这样一个结果。由于过滤匹配对仅用于模拟与全局同调类相对应的层间持久性贡献，恰当的稳定性结果应比较这样的过滤匹配对：它们各自的模H、$V\uparrow$、$V^{\downarrow}$版本彼此同构，但过滤函数$\rho\uparrow$、$\rho^{\downarrow}$的版本不同。为便于在本引言中阐述，我们假设H、$V\uparrow$、$V^{\downarrow}$的版本相等，而不只是同构；我们将在第 5 节给出稍具一般性的表述。下面是基本的稳定性结果：

定理 2.1. 考虑两个过滤匹配对

$$\mathscr{P} \;=\; \begin{array}{ccc} & & (V^{\downarrow},\rho^{\downarrow}) \\ & \overset{\phi^{\downarrow}}{\nearrow} & \\ H & & \\ & \underset{\phi_{\uparrow}}{\searrow} & \\ & & (V\uparrow,\rho_{\uparrow}) \end{array} \qquad \text{and} \qquad \hat{\mathscr{P}} \;=\; \begin{array}{ccc} & & (V^{\downarrow},\hat{}\rho^{\downarrow}) \\ & \overset{\phi^{\downarrow}}{\nearrow} & \\ H & & \\ & \underset{\phi_{\uparrow}}{\searrow} & \\ & & (V\uparrow,\hat{}\rho_{\uparrow}) \end{array}$$

具有相同的数据 H、$V^{\downarrow}$、$V\uparrow$、$\phi^{\downarrow}$、$\phi_{\uparrow}$，但过滤函数 $\rho^{\downarrow}$、$\rho\uparrow$、$\hat{}\rho^{\downarrow}$、$\hat{}\rho\uparrow$ 可能不同，并令

$$t = \max\left\{ \max_{V^{\downarrow}\setminus\{0\}} |\rho^{\downarrow} - \hat{\rho}^{\downarrow}|, \max_{V_{\uparrow}\setminus\{0\}} |\rho_{\uparrow} - \hat{\rho}_{\uparrow}| \right\}.$$

于是间隙 G_i 满足

$$|G_i(\mathscr{P}) - G_i(\hat{\mathscr{P}})| \leq 2t.$$

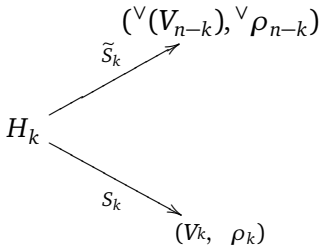
此外，如果 Γ是离散的，从而基谱 Σ(P) 和 Σ(ˆP) 均有定义，那么存在一个双射 σ: Σ(P) → Σ(ˆP)，使得对于每个 ([a]、ℓ) ∈ Σ(P)，其像([ˆa],ˆℓ) = σ([a]、ℓ)满足（对于在其 Γ-陪集中对 ˆa的某种选择）

$$|\hat{a} - a| \leq t \quad \text{and} \quad |(\hat{a} + \hat{\ell}) - (a + \ell)| \leq t.$$

证明。 关于 G_i 的陈述由命题 5.10 得出（在该命题中使用恒等映射作为“t-态射”），而关于基谱的陈述则由定理 5.12 得出。 □

定理 2.1（针对闭条和开条）与 [UZ16，定理 8.17]（针对半开条）的结合，可视为层间持久性稳定性定理的一种代数版本，例如 [CdSM09] 的 LZZ 稳定性定理，或 [BH17，定理 1.2]。正如 [BH17]，所指出的，函数的连续变形可能导致次数 k 中的一个闭层间条形码区间缩短，随后转变为次数 $k-1$ 中的一个开层间条形码区间；在我们的语境中，这对应于基谱中某个元素 ([a]、ℓ) 的参数 ℓ （对应于差值 $\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}e_i) - \rho\uparrow(\phi_{\uparrow}e_i)$）从正变为负。

2.2. 庞加莱-诺维科夫结构。一个过滤匹配对包含两个定义在（不同）Novikov域上的向量空间 $V^{\uparrow}$和 $V^{\downarrow}$，其中一个带有递增过滤，另一个带有递减过滤。在动机性例子中，每个分次 k 都有一个过滤匹配对，并且（对某个固定整数 n）庞加莱对偶的一个版本将 $V^{\downarrow}$ 的次数 k 版本与 $V^{\uparrow}$ 的次数 n−k 版本的对偶联系起来。我们的 n-庞加莱-诺维科夫结构定义对此作了抽象，见定义 6.1。这里，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有一个 Λ-模 H_k、一个配备递增过滤函数 ρ_k 的 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间 V_k，以及（如图表 (2.1) 的下半部分所示）一个模同态 $S_k\colon H_k \to V_k$，它在系数扩张后成为同构。此外，我们要求对 H_k 与 H_{n-k} 之间的庞加莱交叉配对进行抽象，形式为一个适当的映射 $D_k\colon H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$，其中 ${}^{\vee}H_{n-k}$ 是 H_{n-k} 的“共轭对偶”（见第 4.3 节）。（根据对 D_k 的具体要求，可得到“强”或“弱” n-庞加莱–诺维科夫结构。）这些信息足以导出一个形如 $P(N)_k$ 的过滤匹配对，其形式为



在第6节中进行了详细构造。根据 $P(N)_k$，我们可以定义间隙 $G_{k,i}(N) := G_i(P(N)_k)$；并且，当 $P(N)_k$ 存在双重正交基时，还可以定义 N 的“本质条形码”；后者在定义 6.3 中根据 $P(N)_k$ 的基谱定义，并且在每个分次中由闭区间或开区间关于 Γ 的平移作用所形成的等价类组成（记作 $[a,b]^{\Gamma}$ 或 $(a,b)^{\Gamma}$）。之所以称为“本质”，是因为在层间持久性的情形下，这些区间对应于非平凡的全局同调类。定理 2.1 直接推出了这些庞加莱-诺维科夫结构不变量的稳定性结果，见推论 6.7 和 6.8。

过滤匹配对的对偶有一个自然的定义，详见第 5.2 节。对于与一个n-庞加莱–诺维科夫结构相关联的过滤匹配对 $P(N)_k$，$P(N)_k$ 的对偶与 $P(N)_{n-k}$ 密切相关（精确表述见命题 6.9）。由此得到推论 6.10：若 N 是一个强n-庞加莱–诺维科夫结构，且 $P(N)_k$ 都存在双重正交基[6]，那么对每个k，N 的次数为k 的本质条形码中的元素 $[a,b]^{\Gamma}$ 与 N 的次数为$(n-k-1)$的本质条形码中的元素 $(a,b)^{\Gamma}$之间存在双射。在光滑流形上取值于 R 或 S^1的莫尔斯函数f 的层间持久性背景下，这一结论，加上关于完整条形码中半开条的类似结论（可由[UZ16, Proposition 6.7][7], 推得），可以视为说明了庞加莱对偶（至少在

[6]例如，若 Γ是离散的，那么利用命题 4.14 和定理 5.5，与过滤诺维科夫复形及其哈密顿–弗洛尔理论类比物相关联的庞加莱–诺维科夫结构满足这些性质。[7]参见第 8.5 节中的讨论

经典意义上，即 Betti数的对称性）适用于f的正则纤维。因此，我们关于庞加莱–诺维科夫结构的一般形式体系，可用于从包括庞加莱对偶（以映射 $\mathrm{D}k\colon H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$的形式）在内、针对映射整个定义域的假设出发，完全通过代数方法推导出一个对应于映射正则纤维上庞加莱对偶的结论。

2.3. **链级概念**。 在实践中，过滤匹配对 (2.1) 中的模 H、$V^{\uparrow}$、$V^{\downarrow}$ 通常是由链复形 C、$\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$（某个次数上的）同调群得到的，但第 6 节的形式体系并不要求如此；过滤匹配对的间隙和基谱仅根据H、$V^{\uparrow}$、$V^{\downarrow}$及它们之间的映射来定义，无需参考任何链复形。同样，n-Poincaré–Novikov 结构的定义和性质也不依赖于任何以H_k、V_k 为同调群的链复形。然而，为了说明我们为何将这些结构解释为层间持久性的模型，并纳入层间集合的同调类在包含映射进入整个空间后消失所产生的层间持久性部分，我们应当纳入这类链复形的数据，而不应仅考虑其同调群。这促使我们定义“链级过滤匹配对”（定义 8.3）和“链级 n-Poincaré–Novikov 结构”（第 8.5 节第二段）。粗略地说，这些链级定义将相关的 Λ、$\Lambda_{\uparrow}$、$\Lambda^{\downarrow}$ 上的模替换为链复形，并将各种映射在系数扩张后为同构的条件，替换为这些映射在系数扩张后为链同伦等价的条件。

链级过滤匹配对的数据包括链复形 $\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$，分别定义在 $\Lambda_{\uparrow}$ 和 $\Lambda^{\downarrow}$ 上，并分别配备过滤函数 $\ell_{\uparrow}$ 和 $\ell^{\downarrow}$，使它们成为 [UZ16] 意义下的 Floer 型复形（对于 $\mathrm{C}^{\downarrow}$，对定义略作修改，使滤过为递减而非递增）。对链级过滤匹配对应用同调函子，会在每个次数 k 上得到一个（原意义下的）过滤匹配对；相关的（递增）过滤函数 $\rho^{\uparrow}$ 在$H_k(\mathrm{C}_{\uparrow})$ 上定义为

$$\rho_{\uparrow}(h) = \inf\{c \in \mathscr{C}_{\uparrow} | \partial_{\mathscr{C}_{\uparrow}} c = 0, [c] = h\}$$

类似地，$H_k(\mathrm{C}^{\downarrow})$ 上的递减过滤函数定义为

$$\rho^{\downarrow}(h) = \sup\{c \in \mathscr{C}^{\downarrow} | \partial_{\mathscr{C}^{\downarrow}} c = 0, [c] = h\}.$$

（用链级辛 Floer 理论的术语来说，$\rho_{\uparrow}(h)$ 或 $\rho^{\downarrow}(h)$ 会被称为同调类 h 的谱不变量。）

对于链级过滤匹配对 C P 和分次 $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$，我们在 (8.3) 中关联一个双参数持久模 $\mathrm{H}_k($ C P $)$，它属于以 κ 为底环的向量空间范畴；因此对于所有 $(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}^2,$，都有一个 κ-向量空间 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P})_{s,t}$，以及一组适当相容的映射$\varepsilon_{(s,t),(s',\mathrm{t}')}\colon \mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P})_{s,t} \to \mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P})_{s',\mathrm{t}'}$，只要 $\mathrm{s} \leq \mathrm{s}'$ 且 $\mathrm{t} \leq \mathrm{t}'$。这个持久模最直接地推广了由层间集合构造的持久模。具体来说，设 X 是一个光滑定向n维流形，且 $\mathrm{p}\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ 是一个甲板变换群为 $\tilde{\Gamma}$ 的正则覆盖空间。再设 $\tilde{\mathrm{f}}\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{R}$ 是一个莫尔斯函数，使得对于某个同构 $\omega\colon \tilde{\Gamma} \to \Gamma$（其中 Γ 与前面相同，是 R 的子群），对于所有 $\tilde{\mathrm{x}} \in \tilde{\mathrm{X}}$ 都有 $\tilde{\mathrm{f}}(\gamma \tilde{\mathrm{x}}) = \tilde{\mathrm{f}}(\mathrm{x}) - \omega(\gamma)$。于是，可以利用 $\tilde{\mathrm{f}}$ 的滤化Novikov复形，以及适用于正则覆盖空间的 $\tilde{\mathrm{X}}$ 的庞加莱对偶（

在覆盖空间中，例如 [Ran02，第4节.5]），构造链级 n-庞加莱–诺维科夫结构 $\mathrm{C\,N}(f;\xi)$；参见定义 9.6。在此背景下，我们证明以下结果，它由定理 9.10 推出：

定理 2.2。假设 Γ 是离散的。那么，对于 $s+t\geq 0$，存在同构

$$\sigma_{s,t}\colon \mathbb{H}_k(\mathscr{C}\mathscr{P}(\mathscr{C}\mathscr{N}(\tilde{f};\xi)))_{s,t}\to H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]);\kappa)$$

使得当 $s\leq s'$ 且 $t\leq t'$ 时，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}_k(\mathscr{C}\mathscr{P}(\mathscr{C}\mathscr{N}(\tilde{f};\xi)))_{s,t} & \xrightarrow{\varepsilon_{(s,t),(s',t')}} & \mathbb{H}_k(\mathscr{C}\mathscr{P}(\mathscr{C}\mathscr{N}(\tilde{f};\xi)))_{s',t'}\\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{s,t}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{s',t'}}\\ H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]);\kappa) & \longrightarrow & H_k(\tilde{f}^{-1}([-s',t']);\kappa)\end{array}$$

其中，底部的水平映射是由包含映射诱导的奇异同调上的映射。

当 Γ 是离散的时，我们在第 8.4 节中证明：在保持相应持久模 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C\,P})$ 的同构类型的“过滤匹配同伦等价”（定义 8.5）这一概念下，任意链级过滤匹配对 $\mathrm{C\,P}=(\mathrm{C},\mathrm{C}^{\downarrow},\mathrm{C}^{\uparrow},\phi^{\downarrow},\phi_{\uparrow})$ 都可分解为五类简单构件的直和，从而使每个 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C\,P})$ 也得到相应的分解。五类构件中的两类对应于 [UZ16] 的 Floer 型复形 $\mathrm{C}^{\uparrow},\mathrm{C}^{\downarrow}$ 的分解中的同调平凡直和项。另两类对应于将同调函子应用于 $\mathrm{C\,P}$ 后得到的过滤匹配对 P 的基谱中的元素 $([\mathrm{a}],\ell)$，其中一种变体对应于具有 $\ell\geq 0$ 的元素，另一种对应于具有 $\ell<0$ 的元素。剩下的一类构件对应于链复形的 Λ-模 C 的 Λ-挠部分，并为每个 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C\,P})_{s,t}$ 贡献一项，该项与参数 s 和 t 以及 Floer 型复形 $\mathrm{C}^{\uparrow},\mathrm{C}^{\downarrow}$ 上的过滤无关。（如果 $\Gamma=\{0\}$，那么 Λ 是域 κ，因此 Λ-挠是平凡的；对于非平凡的 Γ，$\mathrm{H}_k(\mathrm{C\,P})$ 的 Λ-挠部分对应于 [BH17, 第 4]，节开头记作 $\mathrm{V}_r(\xi)$ 的对象，因而也对应于 [BD13],[BH17]的“若尔当胞腔”。）

$\mathrm{C\,P}$ 的“完整条形码”（定义 8.11）由区间模 Γ 平移 $[\mathrm{a},\mathrm{b}]^{\Gamma}$ 和 $(\mathrm{a},\mathrm{b})^{\Gamma}$ 构成，它们取自 P 的基谱；还包括 $[\mathrm{a},\mathrm{b})^{\Gamma}$ 和 $(\mathrm{a},\mathrm{b}]^{\Gamma}$，它们取自 $\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$ 的简明条形码（如 [UZ16] 中所示）。接下来，继续假设 Γ 是离散的，则 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C\,P})$ 分解为与完整条形码中各区间相对应的 Γ-周期版本的 [CO20] 块模的直和，并加上 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C})$ 的挠部分；精确表述见定理 8.10。就实际应用而言，这意味着，对于离散的 Γ，第 5 节中在同调层面进行的构造，以及 [UZ16] 中针对 Floer 型复形 $\mathrm{C}^{\uparrow}$、$\mathrm{C}^{\downarrow}$ 的构造，足以计算与我们代数版本的层间持久性相关的所有不变量；无需直接采用第 8 节中稍复杂的构造，不过这些构造在概念上很重要，因为它们通过定理 2.2 为我们对不变量的解释提供了依据。请注意，定理 5.5 允许确定完整条形码中的区间 $[\mathrm{a},\mathrm{b}]^{\Gamma}$ 和 $(\mathrm{a},\mathrm{b})^{\Gamma}$，而 [UZ16，定理 3.5] 允许确定区间 $[\mathrm{a},\mathrm{b})^{\Gamma}$ 和 $(\mathrm{a},\mathrm{b}]^{\Gamma}$；这两者的证明至少在隐含意义上都具有算法性。

如果 Γ 不是离散的，就不能指望链级庞加莱–诺维科夫结构 C P 能像离散情形那样，以直接明了的方式按过滤匹配同伦等价进行分类；毕竟，任何这样的分类都至少需要与可能的 H_k(C) 的分类一样复杂，而后者可以是任意有限生成的 Λ 模；此外， Γ 的非离散性意味着 Λ 不是主理想整环，因此其有限生成模无法得到简单分类。不过，从持久同调的角度来看，人们主要关注 C P 的不变量，这些不变量实质性地取决于 C↑ 和 C↓ 上的滤过，并且在扰动下具有适当的稳定性。此类不变量的例子包括：对 C P 应用同调函子后得到的过滤匹配对 P 的间隙 G_i ，以及 C↑ 和 C↓ 的简明条形码中有限长度条的长度。至于是否存在超出这些例子的其他此类不变量，我尚不清楚。

3. 示例、联系与阐释

3.1. 莫尔斯函数与扩展持久性。现在我们更详细地讨论一下，在实际中我们的代数框架是如何产生的。先从特殊情形开始：在紧致 n 维 κ-定向光滑流形 X 上的莫尔斯函数 f : X → R。（因此在此情形下 Γ ={0}。）正如我们在第 9.1 节回顾的，与 f 相关联的是一个 Λ↑-Floer 型复形 CM(f)↑；这一记号同时涵盖了通常的 Morse链复形（我们单独记作 CM$_*$(f)）以及过滤函数 $\ell^f_\uparrow$，后者将临界点的形式和映射到其中出现的临界点的最大临界值。存在一个标准同构 ϕ_f: H$_*$(X ; κ) → HM$_*$(f)，它联系了 X 的 κ系数奇异同调与 CM$_*$(f) 的同调（例如，参见 [Paj06，第 6]章）。定义 9.3 将链级 n-庞加莱–诺维科夫结构与 f 相关联；通过取同调（并利用同构 ϕ_{h_0} ，将定义 9.3 中辅助莫尔斯函数 h$_0$ 的 Morse同调与 H$_*$(X ;κ)相识别），即可得到由以下数据构成的 n-Poincaré–Novikov结构：

- 同构 ϕ_f: $H_*(X;\ \kappa) \to \mathbf{HM}_*(f\ )$;
- 过滤函数 $\rho_{f\uparrow}$: $\mathbf{HM}_*(f\ ) \to$ R ∪{−∞} 定义为 $\rho_{f_\uparrow}(h) = \inf\{\ell_{f_\uparrow}(c) | c \in \mathbf{CM}_*(f\ ), [c\ ] = h\}$; 并且
- 对每个 k，映射 Dk : Hk(X ; κ) → 同态$_\kappa$(Hn–k(X ;κ), κ) 对应于庞加莱交叉配对：对于一个 ∈Hk(X ;κ) 和 b ∈Hn–k(X ;κ)， (Dka)(b) =a ∩ b 是 a 和 b 的一般位置代表元之间交集的带符号计数。

将此庞加莱–诺维科夫结构记为 N (*f*)。第6节的一般过程于是对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 给出一个过滤匹配对 P (N (*f*))$_k$。应用命题9.9（针对 Γ = {0} 的情形），再取同调，可知 P (N (*f*))$_k$

在自然意义下同构于过滤匹配对

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbf{HM}_k(-f), -\rho_\uparrow^{-f}) \\ & \overset{\phi_{-f}}{\nearrow} & \\ H_k(X;\kappa) & & \\ & \underset{\phi_f}{\searrow} & \\ & & (\mathbf{HM}_k(f), \rho f\uparrow) \end{array}$$

令 $\mu_\uparrow^f = \rho f\uparrow \circ \phi_f$ 和 $\mu^\downarrow{}_f = (-\rho_{-f}^\downarrow) \circ \phi_{-f}$表示将上图中出现的过滤函数拉回到$H_k(X;\kappa)$上的函数。这些分别定义了$H_k(X;\kappa)$上的递增滤过和递减滤过；例如，参见 [Qin10, 定理 3.8]可知，对于任意$t \in \mathbb{R}$,

(3.2)
$$\{h \in H_k(X;\kappa) | \mu_\uparrow^f(h) \le t\} = \mathrm{Im}\left(H_k(X^{\le t};\kappa) \to H_k(X;\kappa)\right)$$
$$\{h \in H_k(X;\kappa) | \mu_f^\downarrow(h) \ge t\} = \mathrm{Im}\left(H_k(X_{\ge t};\kappa) \to H_k(X;\kappa)\right)$$

其中，同调上的映射由包含映射诱导，并且与之前一样，$X^{\le t} = f^{-1}((-\infty, t]))$和$X_{\ge t} = f^{-1}([t, \infty))$。因此，$\mu_\uparrow^f$将同调类$h$关联到其“极小极大值”——在所有表示$h$的循环$c$中，$f$在$c$上最大值的下确界；而 $\mu^\downarrow{}_f(h)$则是以类似方式定义的极大极小值。

过滤匹配对 (3.1) 的双重正交基——如定义 5.4 中的一般定义——于是就是 $H_k(X$ 的一个基 $\{e_1, \ldots, e_d\}$； $\kappa)$ 使得对于 $c_1, \ldots, c_d \in \kappa$，以下两者均成立

$$\mu_\uparrow^f\left(\sum_{i=1}^d c_i e_i\right) = \max\left\{\mu_\uparrow^f(e_i) \middle| c_i \neq 0\right\} \quad \text{and} \quad \mu_f^\downarrow\left(\sum_{i=1}^d c_i e_i\right) = \min\left\{\mu_f^\downarrow(e_i) \middle| c_i \neq 0\right\}.$$

于是，我们的一般规定为每个满足 $\mu_\uparrow^f(e_i) \le \mu^\downarrow{}_f(e_i)$ 的 e_i 在次数 k 中关联一个条形码区间 $[\mu_\uparrow^f(e_i), \mu^\downarrow{}_f(e_i)]$，并为每个满足 $\mu^\downarrow{}_f(e_i) < \mu_\uparrow^f(e_i)$ 的 e_i 在次数 $k-1$ 中关联一个条形码区间 $\left(\mu^\downarrow{}_f(e_i), \mu_\uparrow^f(e_i)\right)$。

回顾 [CEH09], [CdSM09，第 3] 节，f 的扩展持久性由以下持久模构造而成：选取一个递增序列 $(s_0, \ldots, s_m)$，使得正则值集合的每个连通分支中各有一个元素（因此 $s_0 <$ 是 f 的最小值，而 $s_m >$ 是 f 的最大值），并考察图表

(3.3)
$$\begin{aligned} 0 = H_k(X^{\le s_0};\kappa) \to H_k(X^{\le s_1};\kappa) \to \cdots \to H_k(X^{\le s_m};\kappa) = H_k(X;\kappa) = H_k(X, X_{\ge s_m};\kappa) \\ \to H_k(X, X_{\ge s_{m-1}};\kappa) \to \cdots \to H_k(X, X_{\ge s_0};\kappa) = 0 \end{aligned}$$

其中所有映射均由包含映射诱导。标准持久模分解定理 [ZC05] 将此持久模分解为区间模的直和，即形如以下形式的图表

(3.4)
$$0 \to \cdots 0 \to \kappa \to \kappa \to \cdots \kappa \to 0 \to \cdots \to 0$$

其中每个映射 $\kappa \to \kappa$ 都是恒等映射。由此得到一个持久性图，它被细分为“普通”、“相对”和“扩展”子图，分别对应于（3.4）中的直和项：其中非零项全部出现在图表的前半部分、全部出现在后半部分，或跨越前后两半（因此包含一个一维直和项 $H_k(X;\kappa)$）。显然，普通子图对应于f的子水平条形码中有限长度的部分；根据 [CdSM09] 中的 EP对称性推论，相对子图对应于 $-f$ 的子水平条形码中有限长度的部分。

我们断言，扩展子图与过滤匹配对（3.1）的双重正交基之间存在直接的对应关系。事实上，对 $i = 1, \dots, m$，令 c_i 为 f 在区间 (s_{i-1}, s_i) 中的唯一临界值，并考虑（3.3）的一个直和项（3.4），其第一个非零项位于 $H_k(X^{\leq s_i}; \kappa)$ 而其最后一个非零项位于 $H_k(X, X^{\geq s_j}; \kappa)$。令 h 生成该直和项的 $H_k(X; \kappa)$-项。于是（由于当 $s_i \in (a_i, a_{i+1})$ 时，$H_k(X^{\leq s}; \kappa)$ 在 $H_k(X; \kappa)$ 中的像对于所有 $s \in (a_i, a_{i+1})$ 都相同），我们看到，a_i 是满足 $h \in \mathrm{Im}(H_k(X^{\leq s}; \kappa) \to H_k(X; \kappa))$ 的 s 的下确界，即 $\mu^f_\uparrow(h) = a_i$。类似地，a_j 是所有满足 $h \in \ker(H_k(X; \kappa) \to H_k(X, X^{\geq s}; \kappa))$ 的 s 值的上确界；根据成对空间 $(X, X_{\geq s})$ 的同调正合序列的正合性，这等价于如下陈述：$\mu^\downarrow f(h) = a_j$。

现在，给定将 (3.3) 分解为区间模的分解，令 $e_1, \dots, e_d$ 表示该分解中那些 $H_k(X;\kappa)$ 项非平凡（即，对扩展子图有贡献）的直和项的 $H_k(X;\kappa)$ 项的生成元。因此，对于 $\ell = 1, \dots, d$，可以按照上述方式，从对应于 e_ℓ 的直和项的第一个和最后一个非零项中读出数值 $\mu^f_\uparrow(e_\ell)$ 和 $\mu^\downarrow f(e_\ell)$。更一般地，对这些 e_ℓ 的任意线性组合应用同样的推理，可得

$$\mu^f_\uparrow\left(\sum_{i=1}^{d} c_i e_i\right) = \max\left\{\mu^f_\uparrow(e_i)\,\middle|\, c_i \neq 0\right\} \quad \text{and} \quad \mu^\downarrow_f\left(\sum_{i=1}^{d} c_i e_i\right) = \min\left\{\mu^f_\uparrow(e_i)\,\middle|\, c_i \neq 0\right\},$$

即 $\{e_1, \dots, e_d\}$ 是一个双重正交基。因此，(3.3) 的扩展子图与 (3.1) 的基谱之间存在直接联系，进而也与 N (f) 的本质条形码存在直接联系。有鉴于此，任意过滤匹配对的基谱可视为扩展持久性中扩展子图的推广，而定理 2.2 则可看作是从 [CdSM09] 出发、关于 EP 等价定理（扩展持久性与层间持久性之间）的诺维科夫理论扩展。

3.2. 诺维科夫同调。设 X 是一个 κ 定向的 n 维光滑流形，设 $\xi \in H^1(X; R)$，并设 $\pi\colon \tilde{X} \to X$ 是满足 $\pi^*\xi = 0$ 的最小覆盖空间。因此，$\tilde{X}$ 的甲板变换群自然同构于 R 的子群 $\Gamma = \{\langle \xi, a\rangle \mid a \in H_1(X; Z)\}$，我们使用该群 Γ（以及域 κ）来构造环 Λ 和域 $\Lambda_\uparrow$、$\Lambda^\downarrow$，如第 4 节所述。对于 $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to R$ 这样一个莫尔斯函数，其外微分 $d\tilde{f}$ 是 π 对 ξ 的一个德拉姆代表的拉回，我们在第 9.3 节回顾 $\Lambda_\uparrow$-Floer-$\tilde{}$ $\tilde{}$ 型复形 $CN(f; \xi)_\uparrow$。该复形的同调 $HN_*(f; \xi)$ 还配备有

˜一个滤过函数 $\rho^f_\uparrow$，其定义与通常相同，即取代表循环的过滤层级的下确界。

覆盖空间 $\tilde{X}$ 的甲板变换使其 κ-系数奇异同调成为 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$ 上的分次模；我们将这一同调记作 $H_*(\tilde{X};\Lambda)$，以强调其模结构。正如 [Lat94], [Paj95], 中最初所示，存在一个自然同构 $\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H_*(\tilde{X};\Lambda) \cong HN_*(f;\xi)$。我们将这一同构与系数扩张映射 $H_*(\tilde{X};\Lambda) \to \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H_*(\tilde{X};\Lambda)$ 的复合记作 $\phi_{\tilde{f}} : H_*(\tilde{X};\Lambda) \to HN_*(f;\xi)$。（于是，$\phi_f$ 是由第 9.3 节的“拉图尔映射”在同调上诱导的映射。）如果 $\Gamma \neq \{0\}$（因此 $\Lambda_\uparrow$ 包含不属于 Λ 的无限和），除非其陪域为零，否则该映射不会是满射；它通常也不会是单射，因为其核是 $H_*(\tilde{X};\Lambda)$ 的 Λ-挠子模。

˜与f相关的庞加莱–诺维科夫结构 $N(f;\xi)$——从第 9.3 节的链级庞加莱–诺维科夫结构 $CN(f;\xi)$ 取同调而得——定义如下：

- 映射 $\phi_f : H_*(\tilde{X};\Lambda) \to \mathbf{HN}_*(\tilde{f};\xi)$;
- $\mathbf{HN}_*(\tilde{f};\xi)$上的上述过滤函数 $\rho_f\uparrow$；以及
- 对每个 k，映射 $Dk : Hk(\tilde{X};\Lambda) \to {}^\vee Hn\text{–}k(\tilde{X};\Lambda)$，其中记号 $^\vee$ 在第 4.3 节中定义，并且对于 $\in Hk(\tilde{X};\Lambda)$ 中的 a 和 $\in Hn\text{–}k(\tilde{X};\Lambda)$中的 b，$\langle a, b\rangle := (Dka)(b) \in \Lambda$ 是按 [Ran02, 定义 4.66] 的意义，a 与 b 的交叉配对。

换言之，将 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$ 中的元素写作 $\sum_{g\in\Gamma} c_g T_g$，则有 $\langle a, b\rangle = \sum_{g\in\Gamma} ((T_g a) \cap b) T_g$，其中 $((T_g a) \cap b) \in \kappa$ 表示将 g 所对应的甲板变换作用于 a 的一般位置代表元后，与 b的一般位置代表元的交点带符号计数。该映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_k(\tilde{X};\Lambda) \times H_{n-k}(\tilde{X};\Lambda) \to \Lambda$$

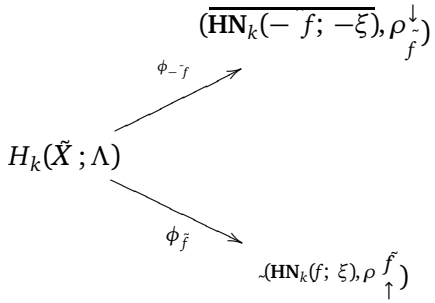
是半线性的，也就是说它是双加性的，并且满足对于 $\lambda, \mu \in \Lambda$,

$$\langle \lambda a, \mu b\rangle = \bar{\lambda}\mu\langle a, b\rangle$$

¯其中，共轭运算 $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ 定义于第4.1节。注意，后一个性质表明，此配对无法扩展为定义在 $\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H_*(\tilde{X};\Lambda)$（或定义在 $\mathbf{HN}_*(f;\xi)$上；它与后者同构）：若 $\lambda, \mu \in \Lambda_\uparrow \setminus \Lambda$，那么尽管存在域 $\Lambda^\downarrow$中的一个元素 λ，通常却无法使乘积 $\bar{\lambda}\mu$有意义。庞加莱配对无法直接定义在诺维科夫同调上，这正是我们采用当前方式定义庞加莱–诺维科夫结构的动机之一。

按照第6节中的步骤，对每个 k，可得到一个过滤匹配对 $\tilde{\mathrm{P}}\ (\mathrm{N}\ (f;\ \xi))_k$ 命题9.9（取同调后）将其识别为

(3.5)



在此我们用 $\rho^{\downarrow}_{\tilde{f}}$ 表示 $(-\rho^{-f}_{\uparrow})$，而记号 $\mathbf{HN}_k(\overline{-\ f;\ -\xi})$ 指的是第4.1节中定义的共轭函子，它将 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间转换为 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间。空间 $\mathbf{HN}_k(-f;\ -\xi)$ 可以更直接地用 f 来解释，即为一个 $\Lambda^{\downarrow}$-Floer 型复形 $\mathbf{CN}(f;\ \xi)^{\downarrow}$ 的第 k 个同调群，其微分计数 f 的正梯度流线；正如 $\mathbf{HN}_k(f;\ \xi)$ 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形 $\mathbf{CN}(f;\ \xi)_{\uparrow}$ 的第 k 个同调群，其微分计数 f 的负梯度流线。

若 Γ 是离散的，定理 5.5 表明，每个过滤匹配对 $\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ (\mathrm{f};\ \xi))_k$ 都存在一个双重正交基 $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d\} \subset \mathrm{H}_k(\tilde{\mathrm{X}};\ \Lambda)$，从而为 $\mathrm{N}\ (\tilde{\mathrm{f}};\ \xi)$ 给出一个本质条形码（定义 6.3），由模 Γ-平移 $\left[\rho^{\tilde{\mathrm{f}}}_{\uparrow}(\phi_{\tilde{f}}\mathrm{e}_i), \rho^{\downarrow}_{\tilde{\mathrm{f}}}(\phi_{-\tilde{\mathrm{f}}}\mathrm{e}_i)\right]^{\Gamma}$ 或 $\left(\rho^{\downarrow}_{\tilde{\mathrm{f}}}(\phi_{-\tilde{\mathrm{f}}}\mathrm{e}_i), \rho^{\tilde{\mathrm{f}}}_{\uparrow}(\phi_{\tilde{\mathrm{f}}}\mathrm{e}_i)\right)^{\Gamma}$ 的区间组成（取决于 $\rho^{\tilde{\mathrm{f}}}_{\uparrow}(\phi_{\tilde{f}}\mathrm{e}_i), \rho^{\downarrow}_{\tilde{\mathrm{f}}}(\phi_{-\tilde{\mathrm{f}}}\mathrm{e}_i)$ 中哪一个更大）。鉴于第3.1节中的讨论，这一本质条形码可视为扩展持久性的扩展子图的一种 Novikov 理论类比。本质条形码中 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f};\ \xi)$ 的条形，根据定理8.10和定理2.2，代表了 $\tilde{\mathrm{f}}$ 的层间集同调群中的贡献。

无论 Γ 是否为离散的，庞加莱–诺维科夫结构 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f};\ \xi)$ 都具有关联的间隙 $\mathrm{G}_{k,i}(\mathrm{N}\ (\mathrm{f};\ \xi))$（定义 6.4 和 5.3）；当本质条形码有定义时，这些间隙的绝对值等于本质条形码中条形的长度。给定本节所考虑类型的两个函数 $\tilde{\mathrm{f}}0, \tilde{\mathrm{f}}_1\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{R}$，基于估计（如（9.3））对滤过相对于通常的 $\tilde{\ }$ 延续映射 $\mathrm{CN}(\mathrm{f}_0;\ \xi)_{\uparrow} \to \mathrm{CN}(\mathrm{f}_1;\ \xi)_{\uparrow}$ 以及 $\mathrm{CN}(\mathrm{f}_1;\ \xi)_{\uparrow} \to \mathrm{CN}(\mathrm{f}_0;\ \xi)_{\uparrow}$ 的行为所作的标准论证表明，在 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f}_0;\ \xi)$ 与 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f}_1;\ \xi)$ 之间存在一个 $\mathrm{k}\,\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_0\mathrm{k}_{C^0}$-态射（定义 6.5 意义下）。根据定理 2.1 的推论 6.7 和 6.8，这意味着 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f}_0;\ \xi)$ 与 $\mathrm{N}\ (\mathrm{f}_1;\ \xi)$ 的间隙以及（若 Γ 为离散的）本质条形码具有稳定性结果，类似于 [CdSM09、LZZ 稳定性定理], [Bu18b、定理 1.2],以及 [Bu20a、定理 1.3]。

对于 $(\phi_{\tilde{f}}, h)$ 是 $H_*(\tilde{X})$ 关联对和 $\rho^{\downarrow}_{\tilde{\mathrm{f}}}(\phi)$ 极大量 $\rho^{\tilde{\mathrm{f}}}_{\uparrow}(\phi_{\tilde{f}}\mathrm{e}_i)$ 极大量 ρ 用来描述函数 f 的取值层级，在这些层级上，h 可以在 $\tilde{\ }$ Novikov 链复形中表示，其中涉及 $-f$ 和 f。作为展示我们的方法所能揭示的信息的一个例子，我们证明：

推论 3.1. 使用上述记号，假设 $\Gamma = \mathbb{Z}$，因此 $\tilde{f}: \tilde{X} \to \mathbb{R}$ 是 Morse 函数 $f: X \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的一个提升。令 $m \in \mathbb{N}$，并假设对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都存在一个子集 $S_k \subset H_k(\tilde{X}; \Lambda)$，它在 Λ 上线性无关，且对每个 $h \in S_k$，均有 $\rho^{\downarrow_{-\tilde{f}}}(\phi_{-\tilde{f}} h) - \rho f_{\uparrow}(\phi_f h) \geq m$。再令 τ_k 表示 $H_k(\tilde{X}; \Lambda)$ 的 Λ-挠子模 $tH_k(\tilde{X}; \Lambda)$ 在域 κ 上的维数。那么对于 f 的每个正则值 θ，都有

$$\dim_\kappa H_k(f^{-1}(\{\theta\}); \kappa) \geq \tau_k + m(\#S_k + \#S_{n-k-1}).$$

证明。如果 $\theta' \in \mathbb{R}$ 投影到 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，那么 θ' 是 $\tilde{f}$ 的正则值，且覆盖投影将 $\tilde{f}^{-1}(\{\theta'\})$ 微分同胚地映射到 $f^{-1}(\{\theta\})$，因此只需证明将 $f^{-1}(\{\theta\})$ 替换为 $\tilde{f}^{-1}(\{\theta'\})$ 后的不等式。根据定理 2.2，$H_k(\tilde{f}^{-1}(\{\theta'\}); \kappa)$ 同构于其中记作 $H_k(CP(CN(f; \xi)))_{-\theta',\theta'}$ 的对象。根据定理 8.10（以及定义 8.11），$\dim_\kappa H_k(CP(CN(f; \xi)))_{-\theta',\theta'}$ 等于 τ_k 与以下各数之和：对于 $CP(CN(f; \xi))$ 的 k 次完整条形码中每个模 $\mathbb{Z}$ 平移的区间 $I^{\mathbb{Z}}$，满足 $\theta' + g \in I$ 的 $g \in \mathbb{Z}$ 的个数。这个 k 次完整条形码包含 $\tilde{N}(f; \xi)$ 的 k 次本质条形码。

令 $s_k = \#S_k$。根据假设和定义 5.3，对于 $i = 1, \ldots, s_k$，间隙 $G_{k,i}(N(f; \xi))$ 大于或等于 m。由命题 5.6 可知，$N(\tilde{f}; \xi)$ 的 k 次本质条形码至少包含 s_k 个元素 I^Γ（按重数计），其中 I 是长度至少为 m 的闭区间。交换 k 与 $n-k-1$ 的角色，根据对偶性结果推论 6.10，$N(\tilde{f}; \xi)$ 的 k 次本质条形码同样至少包含 s_{n-k-1} 个元素 I^Γ，其中 I 是长度至少为 m 的开区间。由于本质条形码中任何区间的端点必然是 $\tilde{f}$,[8] 的临界值，而无论区间 I 是开区间还是闭区间，只要其长度至少为 m，就必然包含至少 m 个正则值 $\theta' + g$（其中 g 遍历 $\mathbb{Z}$）。因此，由 k 次完整条形码中这些长度至少为 m 的（至少）$(s_k + s_{n-k-1})$ 个区间，可对 $\dim_\kappa(\tilde{f}^{-1}(\{\theta\}); \kappa)$ 贡献 $m(s_k + s_{n-k-1})$。将其与上一段中提到的贡献 τ_k 结合，即得所述结果。□

如果有关于 $\tilde{N}(f$ 的本质条形码中各条形的更多具体信息；$\xi)$ 则可以调整上述证明，以得到更精确的结果，例如使其适用于 f 的部分而非全部正则水平集。

注 3.2：让我们将本文针对诺维科夫同调的条形码方法与 Burghelea 在诸如 [Bu18a], [Bu18b],[Bu20a] 等著作中采用的方法进行比较。在这两种方法中，本质性的条形码型不变量都可以看作源自以下相互作用：在分次 Λ-模 $H_*(\tilde{X}; \Lambda)$ 的 κ-子空间上，一个递增过滤与一个递减过滤之间的相互作用。对于 Burghelea 而言，这些过滤分别由包含诱导映射的像给出：$H_*(\tilde{X}^{\leq t}; \kappa) \to H_*(\tilde{X}; \Lambda)$（对于递增过滤）以及 $H_*(\tilde{X}^{\geq t}; \kappa) \to H_*(\tilde{X}; \Lambda)$（对于递减过滤）；参见例如 [Bu20a 第 4] 节开头的记号。在本文中，这些过滤则分别由函数的下水平集和超水平集给出，

[8] 即使在 Γ 稠密这一更微妙的情形下，这也可由 [Us08，定理 1.4], 推出，因为这些端点是 Floer 型复形的谱数，而这些复形的所有非零元素的滤过都等于 f 的 $\tilde{}$ 临界值。

函数 $\rho_{f\uparrow} \circ \phi_f$和 $\rho^{\downarrow}_{\tilde{f}} \circ \phi_{-f}$在 $H_*(\tilde{X};\Lambda)$ 上——换言之，由 $\phi_{\tilde{f}}$ 和 $\phi_{-\tilde{f}}$ 下，定义在诺维科夫同调上的函数 $\rho^f_\uparrow$ 和 $\rho^{\downarrow}_{\tilde{f}}$ 的子水平集与超水平集的原像。若 $\Gamma = \{0\}$，则根据（3.2），我们的过滤与 Burghelea 的过滤相同。若 $\Gamma \neq \{0\}$，由于诺维科夫复形涉及半无限链，从诺维科夫复形的过滤子复形的同调群到 $H_*(\tilde{X};\Lambda)$ 不存在自然的包含诱导映射；这一事实（以及 Floer理论中的类似事实）促使我们采用了不同的表述。当 Γ 为离散时，可以考虑使用 [Bu18b 命题 5.2], ，该命题将 Burghelea 的过滤与 Borel–Moore同调上的类似过滤联系起来，从而得到其与我们方法之间的关系。

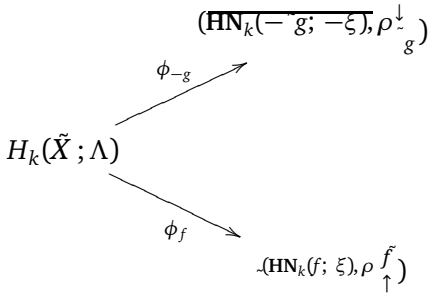
若 Γ不是离散的，那么对于 {style id='6'>f </style}，我们的间隙集合 $G_{k,1}(N(f;\xi)), \ldots, G_{k,d}(N(f;\xi))$，其中 d 等于 $H_k(\tilde{X};\Lambda)$ 中 Λ-线性无关集的最大基数，似乎类似于 [Bu20a] 中记作 $\delta^\omega{}_k$ 的对象；两种情况下，它们都是基数为 d 、满足稳定性定理的 R 的多重集（对于 $G_{k,i}$, [Bu20a，对应推论 6.7；对于 $\delta^\omega{}_k$，对应定理 1.3]）。虽然有人可能会推测 $\delta^\omega{}_k$ 恰好由我们的 $G_{k,i}$ 构成，但证明这一点的尝试超出了本文的范围。困难之一在于，由于在 $\tilde{}$ 非离散情形下，函数 f 并非适定，诺维科夫复形的过滤子复形的同调群与 f 的次水平集的同调群之间的联系就不那么清楚。

在非离散情形下，我们也将重新排序的对偶性结果这一问题反数解决（若 Γ 是离散的，则由推论 6.10 可得此结论。一般而言，推论 6.11 表明，重新排序后，$G_{k,i}$ 由 $G_{n-k,i}$ 的相反数从上方界定。）与此相应的问题是，Burghelea 的$\delta^\omega{}_k$ 是否由 $\delta^\omega{}_{n-k}$ 中的元素取相反数得到；根据[Bu20b，定理 1.4] ，若将 $\delta^\omega{}_{n-k}$ 替换为 Borel–Moore 类比 ${}_{BM}\delta^\omega{}_{n-k}$，则答案为是；但在非离散情形下， $\delta^\omega{}_{n-k} = {}^{BM}\delta^\omega{}_{n-k}$ 是否成立似乎尚不明确。

3.3. **其他过滤匹配对**。 前面两个小节讨论了庞加莱–诺维科夫结构 N 的构造；通过一个一般过程，这些结构产生本质条形码：该过程首先为 N 关联过滤匹配对 $P(N)_k$ ，随后再为后者关联基谱。我们也可以考虑并非由庞加莱–诺维科夫结构产生的过滤匹配对；它们仍具有间隙，并且（若 Γ 是离散的）其基谱满足稳定性结果定理 2.1，不过通常不满足诸如推论 6.10 这样的对称性结果。

例如，若去掉前两个小节中关于 X 是κ定向的假设，那么由于符号问题，将不再有相同类型的庞加莱交叉配对，因此构造 $N(f;\xi)$ 会失败，但仍可构造 Novikov$\tilde{}$复形 $\mathbf{CN}(\pm f;\pm\xi)_\uparrow$ 以及过滤匹配对 (3.5)。在第 9.5 节中，我们考虑持久模 $H_k(f)$ ，它通过 (8.3) 直接从 (3.5) 的链级版本构造而来，无需使用 X 的定向。同构结果定理 2.2 虽然针对定向流形陈述，但实际上是定理 9.10 的推论；定理 9.10 无需可定向性假设，便将持久模 $H_k(f)$ 与层间集的同调联系起来。因此，若 Γ 是离散的，我们就能得到 (3.5) 的基谱与层间集的同调之间的相同关系，如上一小节所述。

上一小节的另一种小变体是考虑两个不同的莫尔斯函数 $\tilde{f}$、$\tilde{g}\colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$，它们的导数均为同一个上同调类 ξ的德拉姆代表元的拉回；并且对于任意分次 k，构造过滤匹配对



它的基谱（至少在 Γ 离散的情况下）将编码有关 f 的次水平集与 $\tilde{g}$ 的超水平集如何相互作用的同调信息。如注 5.16 所述，稳定性定理可以进一步细化，以提供有关当 f 和 $\tilde{g}$ 各自独立变化时，基谱如何变化的信息。

在计算拓扑中，更接近标准构造的一种设定涉及一个多面体（即，有限单纯复形的几何实现）X 以及一个分段线性函数$f\colon X \to \mathbb{R}$。单纯链复形 $\Delta_*(X;\kappa)$ 带有一个上升过滤函数 $\ell_\uparrow$ 和一个下降过滤函数 $\ell^\downarrow$，它们分别将单纯链映射为f 在该链上的最大值和最小值。因此，对于任意$t \in \mathbb{R}$，子复形 $\Delta_*^{\leq t}(X;\kappa) = \{a \in \Delta_*(X;\kappa) | \ell_\uparrow(a) \leq t\}$ 是由完全包含在子水平集$X^{\leq t}$中的单形构成的子多面体的单纯链复形。根据 [EH10, p. 135] 中的论证，该子多面体是$X^{\leq t}$的变形收缩。类似地，也可以将由 $\ell^\downarrow$给出的滤过与f的超水平集联系起来。

这符合我们关于链级过滤匹配对的一般理论，其中 $\Gamma = \{0\}$，在定义 8.3 中令三个链复形 C、$C^\uparrow$、$C^\downarrow$均等于 $\Delta_*(X;\kappa)$（$C^\uparrow$ 和 $C^\downarrow$上的滤过分别由 $\ell_\uparrow$和 $\ell^\downarrow$给出），并令映射 $\phi_\uparrow$、$\phi^\downarrow$均为恒等映射。可以验证，该链级过滤匹配对的完整条形码（定义 8.11）与f 的层间条形码一致，例如，可以按照第3.1节中的思路，通过将其与扩展持久性建立识别来验证。

如果改为令 $\mathrm{f}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{S}^1$ 是多面体上的分段线性函数（即，f 在每个单形 $\Delta \subset \mathrm{X}$ 上的限制都应是一个仿射映射 $\Delta \to \mathbb{R}$ 与投影 $\mathbb{R} \to \mathrm{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的复合），那么对于合适的无限循环覆盖 $\tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$，f 可提升为一个分段线性映射 $\tilde{\mathrm{f}}\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathbb{R}$。于是，（无限）单纯复形 $\tilde{\mathrm{X}}$ 的单纯链复形 $\Delta_*(\tilde{\mathrm{X}};\kappa)$ 成为一个由 $\Lambda = \kappa[\mathrm{Z}]$ 上有限秩自由模构成的链复形。通过令 $C = \Delta_*(\tilde{\mathrm{X}};\kappa)$、$C_\uparrow = \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda C$ 和 $C^\downarrow = \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda C$（其中 $\phi_\uparrow, \phi^\downarrow$ 均由系数扩张给出），我们得到一个链级过滤匹配对（系数为 $\Gamma = \mathbb{Z}$）。与之前一样，过滤函数 $\ell_\uparrow$, $\ell^\downarrow$ 分别通过取链上 f 的最大值和最小值来定义。由此得到的完整条形码应与 [BD13],[BH17], 中所考察的条形码一致，尽管我们计算它的方法——基于定理 5.5 的证明中构造的双重正交基——与 [BD13 第 6] 节中的算法大不相同。

4. 一些代数预备知识

现在我们开始更精确地阐述本工作中的代数要素。贯穿下文的背景中（为简洁起见，常在记号中省略）包括：

- 一个域 κ （它作为同调系数环，不过在某些情况下，适当的环将是 κ的扩张），并且
- R 的一个有限生成加法子群 Γ。

在动机性例子中，群 Γ 是某个覆盖空间的甲板变换群（同构于该群）$p\colon \tilde{X} \to X$，我们希望理解函数 $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathrm{R}$ 的持久性理论；这些函数是函数 $f\colon X \to \mathrm{R}/\Gamma$ 的提升。在 $\Gamma = \{0\}$ 的情形下，这对应于经典Morse理论；或者在第 7 节的情形下，对应于弱正合、正单调或负单调辛流形上的哈密顿弗洛尔理论。对于那些（至少在第一次阅读时）倾向于将自己局限于这一情形的读者，可以略读本节，但应注意，当 $\Gamma = \{0\}$ 时，下面以 Λ、$\Lambda_\uparrow$、$\Lambda^\downarrow$、$\mathrm{Q}(\Lambda)$ 和 $\Lambda_\updownarrow$ 表示的对象都简单地等于域 κ，而第4.1节中讨论的共轭运算就是恒等映射，因此，本节的许多结果在这一特殊情形下都是空泛的。

用“T”表示一个形式变量，我们考虑以下包含 κ 的环（其加法和乘法由多项式或幂级数相应运算的自然推广给出）：

(1)
$$\Lambda = \left\{ \sum_{g\in\Gamma} a_g T^g \,\middle|\, a_g \in \kappa,\ \#\{g | a_g \neq 0\} < \infty \right\}$$

(2)
$$\Lambda_\uparrow = \left\{ \sum_{g\in\Gamma} a_g T^g \,\middle|\, a_g \in \kappa,\ (\forall C \in \mathbb{R})\big(\#\{g | a_g \neq 0 \text{ and } g < C\} < \infty\big) \right\}$$

(3)
$$\Lambda^\downarrow = \left\{ \sum_{g\in\Gamma} a_g T^g \,\middle|\, a_g \in \kappa,\ (\forall C \in \mathbb{R})\big(\#\{g | a_g \neq 0 \text{ and } g > -C\} < \infty\big) \right\}$$

环 Λ 就是 Γ 在 κ 上的群代数 $\kappa[\Gamma]$。由于 Γ（作为 R 的有限生成子群）同构于某个 Z^d，其中 $d \geq 0$，因此我们看到，Λ 作为 κ-代数同构于多变量劳朗多项式代数 $\kappa[t_1, t_1^{-1}, \ldots\ldots, t_d, t^{-1}{}_d]$。特别地，$\Lambda$ 是一个整环。

环 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 都是域，例如可以由 [HS95 定理 4.1] 看出。由于 Λ 既是 $\Lambda_\uparrow$ 的子环，也是 $\Lambda^\downarrow$ 的子环，若 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 表示Λ的分式域，则 Λ 到 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 的包含映射可唯一地扩张为域扩张 $\mathrm{Q}(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda_\uparrow$ 和 $\mathrm{Q}(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda^\downarrow$。与整环的任意分式域一样，$\mathrm{Q}(\Lambda)$ 作为 Λ-模是平坦的（应用 [Rot09 定理 4.80]，其中乘法集合 S 取为 Λ的所有非零元素组成的集合）。因此，由于域扩张同样作为模是平坦的，可得

包含映射 $i\uparrow\colon\ \Lambda \hookrightarrow \Lambda_\uparrow$ 和 $i^\downarrow\colon\ \Lambda \hookrightarrow \Lambda^\downarrow$ 使 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 成为平坦的 Λ-模。与此相关，我们有：

命题 4.1. 设M 是任意一个（左） Λ-模。那么，系数扩张映射$i_\uparrow \otimes 1_M : M \to \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda M$ 和$i^\downarrow \otimes 1_M : M \to \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda M$ 的核都等于 Λ-挠子模

$$tM := \{m \in M | (\exists \lambda \in \Lambda \setminus \{0\})(\lambda m = 0)\}.$$

证明。 两种情形完全相同，因此我们只考虑 $1_M \otimes i\uparrow$ 这一情形。此映射可写为以下映射的复合

$$M = \Lambda \otimes_\Lambda M \to \mathcal{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda M \to \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda M$$

由恒等映射 1_M 与单射 $\Lambda \hookrightarrow \mathrm{Q}(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda_\uparrow$张量化得到。映射$M \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda M$ 的核为tM，根据 [Rot09，命题 4.78]，可知；而映射 $\mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda M \to \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda M$ 的核为零，因为 $\mathrm{Q}(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda_\uparrow$ 是域扩张。□

现在引入以下内容，供第 8 节起使用：

$$\Lambda_\updownarrow = \left\{ \sum_{g \in \Gamma} a_g T^g \,\middle|\, a_g \in \kappa, (\forall C \in \mathbb{R})\left(\#\{g | a_g \neq 0 \text{ and } |g| < C\} < \infty\right) \right\}. \tag{4.1}$$

因此，我们有包含映射 $j\uparrow\colon\ \Lambda_\uparrow \to \Lambda_\updownarrow$ 和 $j^\downarrow\colon\ \Lambda^\downarrow \to \Lambda_\updownarrow$。由于通常无法良好定义 $\Lambda_\uparrow$ 的元素与 $\Lambda^\downarrow$ 的元素相乘，二者的公共超集 $\Lambda_\updownarrow$ 并非自然地成为一个环（除非在 $\Gamma = \{0\}$ 的情形下）；不过， $\Lambda_\updownarrow$的元素相加，或 $\Lambda_\updownarrow$ 的元素与 Λ的元素相乘，都没有困难，因此 $\Lambda_\updownarrow$ 自然地是一个 Λ-模。事实上，我们显然有一个 Λ-模的短正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{(i^\downarrow, i_\uparrow)} \Lambda^\downarrow \oplus \Lambda_\uparrow \xrightarrow{-j^\downarrow + j_\uparrow} \Lambda_\updownarrow \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

命题 4.2. 对于任意左 Λ-模 M，我们有一个 Λ-模的自然同构 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_\updownarrow, M) \cong tM$，其中 tM是 M 的 Λ-挠子模，并且对于所有 $i > 1$，$\mathrm{Tor}^\Lambda{}_i(\Lambda_\updownarrow, M) = \{0\}$。

证明。 我们使用由 (4.2) 诱导的关于 $\mathrm{Tor}_*^\Lambda(\cdot, M)$ 的长正合列；例如参见[Rot09，推论 6.30]。由于 $\Lambda_\uparrow$和 $\Lambda^\downarrow$是平坦的 Λ-模，对于所有 $i \geq 1$，我们有 $\mathrm{Tor}^\Lambda{}_i(\Lambda_\uparrow \oplus \Lambda^\downarrow, M) = \{0\}$。因此，长正合列的一部分为

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_\updownarrow, M) \xrightarrow{\partial} \Lambda \otimes_\Lambda M \xrightarrow{(i^\downarrow \otimes 1_M, i_\uparrow \otimes 1_M)} (\Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda M) \oplus (\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda M).$$

根据命题 4.1，上述最后一个映射的核等于 tM，因此连接同态 ∂将 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_\updownarrow, M)$同构地映射到 tM。如果 $i > 1$，那么正合列以及 $\Lambda_\uparrow$和 $\Lambda^\downarrow$的平坦性推出一个同构 $\mathrm{Tor}^\Lambda{}_i(\Lambda_\updownarrow, M) \cong \mathrm{Tor}^\Lambda{}_{i-1}(\Lambda, M)$；不过，后者显然为零，因为 $i - 1 \geq 1$。□

4.1. 共轭。给定域 κ 和子群 $\Gamma \subset \mathrm{R}$，其中 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$，定义共轭 自同构 $\mathfrak{c}\colon \Lambda \to \Lambda$ 如下

$$\mathfrak{c}\left(\sum_g a_g T^g\right) = \sum_g a_g T^{-g}$$

¯一般而言，我们将 $\mathfrak{c}(\lambda)$ 记作 $\bar{\lambda}$，对应于 $\lambda \in \Lambda$。注意， $\mathfrak{c}$ 可以沿用上面的同一公式扩展为域同构 $\Lambda_\uparrow \to \Lambda^\downarrow$，也可以同样扩展为域同构 $\Lambda^\downarrow \to \Lambda_\uparrow$；对于这些共轭映射下的元素 λ（属于 $\Lambda^\downarrow$ 或 $\Lambda_\uparrow$），我们将继续用记号 $\bar{\lambda}$ 表示其像。尽管共轭定义了域 $\Lambda_\uparrow \cong \Lambda^\downarrow$之间的同构，但如果$\Gamma \neq \{0\}$，那么它当然不是 Λ-代数的同构（否则， Λ的所有元素都会在 $\mathfrak{c}$ 下保持不变）。正是由于与此相关的问题，我们才会保留 $\Lambda_\uparrow$ 与 $\Lambda^\downarrow$ 之间的区别，而不借助共轭只在其中一个域上进行研究。

注4.3。对于任意群 π，无论其是否为阿贝尔群，群代数 $\kappa[\pi]$ 都允许定义一个类似于上述的共轭映射 $\mathfrak{c}$；不过，如果 π 不是阿贝尔群（因而 $\kappa[\pi]$ 不是交换的），那么这就不是代数自同构，而是反自同构，即 $\mathfrak{c}(\lambda\mu) = \mathfrak{c}(\mu)\mathfrak{c}(\lambda)$。这一映射 $\mathfrak{c}$ 源于对甲板变换群为 π 的正则覆盖空间的庞加莱对偶的考察，参见 [Ran02，第 4 节。5] 在这种情形下，尽管 $\kappa[\pi]$不可交换，仍可将左 $\kappa[\pi]$-模 M 转化为右$\kappa[\pi]$-模，方法是定义$m\lambda = \mathfrak{c}(\lambda)m$ （其中 $\lambda \in \kappa[\pi]$ ）以及$m \in M$。这种对模的共轭运算在诸如我们所研究的情形（群 π，即我们的 Γ，为阿贝尔群）中仍然有用。因此，不同于交换环的左模和右模通常不加区分的惯例，我们经常会明确指出 Λ 上的模是左模还是右模，并约定若要在两者之间转换，恰当的做法是使用共轭，而不是简单地把左乘改称为右乘。例外情况是，当环 Λ、$\Lambda_\uparrow$或 $\Lambda^\downarrow$ 之一被视为其子环 Λ上的模时，左模和右模结构都应仅解释为由环乘法给出，不涉及共轭。此外，在域 $\Lambda_\uparrow$ 或 $\Lambda^\downarrow$ 上的向量空间中，数乘将始终记为作用于左侧。

给定一个左（分别为右） Λ-模M，如刚才所述，我们将其共轭模¯M 定义为一个右（分别为左） Λ-模，其底层阿贝尔群与M相同，¯ ¯数乘定义为$m\lambda = \bar{\lambda}m$ （分别为 $\lambda m = m\bar{\lambda}$）。类似地，如果$V$是一个定义在 $\Lambda_\uparrow$上的向量空间，那么它有一个相应的共轭向量空间 ¯V，定义在 $\Lambda^\downarrow$ 上，其¯底层阿贝尔群相同，但数乘改为 $\lambda v = \bar{\lambda}v$；反过来交换 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 的角色时也同样如此。这些运算显然具有函子性：若 $\phi\colon M \to N$ 是左 Λ-模同态（分别为 $\Lambda_\uparrow$-向量空间同态），那么同一个函数 ϕ 也可以视为右 Λ-模同态（分别为 $\Lambda^\downarrow$-向量空间同态） ¯$M \to$ ¯N。

以下内容的证明留作练习，供希望检验自己对该记号理解程度的读者完成。

Pro命题 4.4. 若 M 是一个右 Λ-模，则存在一个 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间之间的同构

$$\alpha\colon \overline{M \otimes_{\Lambda} \Lambda_{\uparrow}} \to \Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} \bar{M}$$

定义为，对于 $m_i \in M$ 和 $\lambda_i \in \Lambda_{\uparrow}$,

$$\alpha\left(\sum_i m_i \otimes \lambda_i\right) = \sum_i \bar{\lambda}_i \otimes m_i.$$

4.2. **非阿基米德范数与正交基**。 定义函数

$$\nu_{\uparrow}\colon \Lambda \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \qquad \nu^{\downarrow}\colon \Lambda \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

by

$$\nu_{\uparrow}\left(\sum_g a_g T^g\right) = \min\{g | a_g \neq 0\}, \qquad \nu^{\downarrow}\left(\sum_g a_g T^g\right) = \max\{g | a_g \neq 0\} \tag{4.3}$$

（约定空集的最大值为 $-\infty$ ，最小值为 ∞）。令ν 分别等于 $\nu_{\uparrow}$ 或 $-\nu^{\downarrow}$ ，即可在 Λ上得到一个非阿基米德赋值，也就是说，一个函数 $\nu\colon \Lambda \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ 满足：

(i) $\nu(\lambda) = \infty$ 当且仅当 $\lambda = 0$；(ii) 对所有 λ、$\mu \in \Lambda$, $\nu(\lambda\mu) = \nu(\lambda) + \nu(\mu)$；(iii) 对所有 λ、$\mu \in \Lambda$, $\nu(\lambda + \mu) \geq \min\{\nu(\lambda), \nu(\mu)\}$。

因此，公式 $(\lambda, \mu) \mapsto e^{-\nu_{\uparrow}(\lambda - \mu)}$或 $(\lambda, \mu) \mapsto e^{\nu^{\downarrow}(\lambda - \mu)}$均定义了$\Lambda$上的一个度量，而域 $\Lambda_{\uparrow}$ 和 $\Lambda^{\downarrow}$ 分别是 Λ 关于这些度量的完备化。函数 $\nu_{\uparrow}$ 和 $\nu^{\downarrow}$ 按照与 (4.3) 相同的公式延拓为函数$\nu_{\uparrow}\colon \Lambda_{\uparrow} \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ 和 $\nu^{\downarrow}\colon \Lambda^{\downarrow} \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$（注意，尽管 $\Lambda_{\uparrow}$和 $\Lambda^{\downarrow}$包含某些无穷和 $\sum a_g T_g$，但 (4.3) 中的最小值仍会在 $\Lambda_{\uparrow}$的某个非零元素处取到，而最大值仍会在 $\Lambda^{\downarrow}$的某个非零元素处取到）。显然，我们有

$$\nu_{\uparrow}(\lambda) = -\nu^{\downarrow}(\bar{\lambda})$$

对于 $\lambda \in \Lambda_{\uparrow}$，使用第4.1节中定义的共轭映射 $\Lambda_{\uparrow} \to \Lambda^{\downarrow}$。

非阿基米德域上的向量空间有一种标准的非阿基米德范数概念，下面的定义对此作了改编（参见 [MoSp65],[UZ16，定义 2.2]）：

定义4.5。(1) 一个**赋范 $\Lambda_{\uparrow}$-空间**是一个二元组 $(V\uparrow, \rho_{\uparrow})$，其中$V\uparrow$ 是一个有限维向量空间，其上的域为 $\Lambda_{\uparrow}$，且函数 $\rho\uparrow\colon V_{\uparrow} \cup \{-\infty\}$满足：

(i) $\rho_{\uparrow}(x) = -\infty$ 当且仅当$x = 0$；(ii) $\rho_{\uparrow}(\lambda x) = \rho_{\uparrow}(x) - \nu_{\uparrow}(\lambda)$对所有 $\lambda \in \Lambda_{\uparrow}$、$x \in V\uparrow$均成立；以及 (iii) $\rho_{\uparrow}(x + y) \leq \max\{\rho_{\uparrow}(x), \rho_{\uparrow}(y)\}$ 对所有x、$y \in V\uparrow$均成立。

(2) 范数 $\Lambda^{\downarrow}$空间是一个有序对 $(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$其中$V^{\downarrow}$是定义在 $\Lambda^{\downarrow}$上的有限维向量空间，且函数 $\rho^{\downarrow}\colon V^{\downarrow} \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ 满足：

(i) $\rho^{\downarrow}(x) = \infty$ 当且仅当$x = 0$；(ii) $\rho^{\downarrow}(\lambda x) = \rho_{\downarrow}(x) - \nu^{\downarrow}(\lambda)$对于所有 $\lambda \in \Lambda^{\downarrow}$，$x \in V^{\downarrow}$；以及 (iii) $\rho^{\downarrow}(x + y) \geq \min\{\rho^{\downarrow}(x), \rho^{\downarrow}(y)\}$ 对所有x、$y \in V^{\downarrow}$均成立。

(我们所谓“赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间” $(V\uparrow,\rho_\uparrow)$ 或“赋范$\Lambda^\downarrow$-空间” $(V^\downarrow,\rho^\downarrow)$ 上的实际“范数”会是$e^{\rho\uparrow}$或 $e^{-\rho^\downarrow}$。)

若 $(V\uparrow,\rho_\uparrow)$ 是一个赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间，则 $\rho\uparrow$ 在 V↑ 上编码了一个递增过滤，由 κ- 子空间 $V\,t\uparrow = \{x \in V_\uparrow | \rho_\uparrow(x) \le t\}$（$t \in R$）构成，并满足 $V\,s\uparrow \subset V\,t\uparrow$（当 $s \le t$ 时）。对偶地，若$(V\downarrow,\rho^\downarrow)$ 是一个赋范 $\Lambda^\downarrow$-空间，则 $V^\downarrow$ 上有一个递减过滤，由 κ-子空间 $\{x \in V\downarrow | \rho^\downarrow(x) \ge t\}$（$t \in R$）构成。

通常意义下的非阿基米德正交性对我们很重要：

定义 4.6。 设 $(V\uparrow,\rho_\uparrow)$ 是一个赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间。若一个子集 $\{x_1,\dots,x_k\} \subset V\uparrow$ 满足以下条件，则称其为$\rho\uparrow$-**正交**： 对所有 $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \Lambda_\uparrow$,

$$\rho_\uparrow\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right) = \max_{1\le i\le k}\left(\ell_\uparrow(x_i) - \nu_\uparrow(\lambda_i)\right).$$

类似地，若 $(V^\downarrow,\rho^\downarrow)$ 是一个赋范 $\Lambda^\downarrow$ 空间，则子集 $\{x_1,\dots,x_k\} \subset V^\downarrow$ 称为 $\rho^\downarrow$-**正交** 的，如果对所有 $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \Lambda^\downarrow$,

$$\rho^\downarrow\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right) = \min_{1\le i\le k}\left(\ell_\uparrow(x_i) - \nu_\uparrow(\lambda_i)\right).$$

赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间（分别地，赋范 $\Lambda^\downarrow$ 空间）称为可**正交化** $\Lambda_\uparrow$**-空间**（分别地，可正交化的 $\Lambda^\downarrow$ 空间），如果它有一个 $\rho\uparrow$-正交（分别地， $\rho^\downarrow$-正交）基。

注 4.7. 一个标准练习表明，在任意赋范 $\Lambda_\uparrow$空间中，只要 $\ell_\uparrow(x) \ne \ell_\uparrow(y)$，非阿基米德三角不等式 $\ell_\uparrow(x+y) \le \max\{\ell_\uparrow(x),\ell_\uparrow(y)\}$ 就取等号。由此容易看出，若赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间 (V↑ 中的非零元素 $x_1,\dots,x_k$ 满足实数 $\rho_\uparrow(x_1),\dots,\rho_\uparrow(x_k)$ 模 Γ 的约化两两不同，则 $\{x_1,\dots,x_k\}$ 必定是 $\rho\uparrow$-正交的。（特别地，它们必定线性无关。）根据我们的定义，赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间是有限维的，因此对于任意赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间$(V\uparrow,\rho_\uparrow)$，无论其是否可正交化， $\rho_\uparrow(V\uparrow\setminus\{0\})$ 都是至多 $(\dim V_\uparrow)$ 个 Γ 的陪集之并。特别地，如果 Γ 是离散的，那么 $\rho_\uparrow(V\uparrow\setminus\{0\})$ 是离散的。

此外，如果 $\rho_\uparrow(V_\uparrow)\setminus\{0\})$ 恰由 $(\dim V_\uparrow)$ 个 Γ的陪集组成，那么 $V\uparrow$ 的一般基 $\{x_1,\dots,x_d\}$ 是 $\rho\uparrow$-正交的，当且仅当 $\rho_\uparrow(x_i)$模 Γ的约化在 $i = 1,\dots,d$ 时互不相同。

类似的论述当然也适用于赋范 $\Lambda^\downarrow$-空间。

注 4.8. 如果 $(V\uparrow,\rho_\uparrow)$是赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间，那么 $(V\uparrow,-\rho_\uparrow)$是赋范 $\Lambda^\downarrow$-空间，反过来也同样成立。此外，$\{e_1,\dots,e_m\}$ 是 $V\uparrow$ 的 $\rho\uparrow$-正交基，当且仅当同一集合 $\{e_1,\dots,e_d\}$ 是 $V\uparrow$ 的 $(-\rho_\uparrow)$-正交基。这使我们能够将关于可正交化 $\Lambda_\uparrow$-空间的基本结果（例如 UZ16 第 2] 节中的结果）转化为关于可正交化 $\Lambda^\downarrow$-空间的结果。例如，这类空间的子空间总是可正交化的（UZ16, 推论 2.17]）。

注记4.9。 考虑定义 4.6 中 $\Gamma = \{0\}$ 的情形，因此 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 都与系数域 κ 重合。$\nu\uparrow$ 和 $\nu^\downarrow$ 都将 κ 的所有非零元素映为 0，并分别将 0 映为 $+\infty$ 和 $-\infty$。因此，可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间 $(V\uparrow,\rho_\uparrow)$ 有一个

基 $\{e_1, \dots, e_m\}$，使得 $\rho_\uparrow\left(\sum_i \lambda_i e_i\right) = \max\{\rho_\uparrow(e_i) | \lambda_i \neq 0\}$；而可正交化的 $\Lambda^\downarrow$-空间有一个基 $\{e_1, \dots, e_m\}$，使得 $\rho^\downarrow\left(\sum_i \lambda_i e_i\right) = \min\{\rho^\downarrow(e_i) | \lambda_i \neq 0\}$。

以下内容可视为 [MoSp65, Théorème 1.1]，的一个实例，不过仍需下面证明中的一部分来确认该定理的假设得到满足。

命题 4.10. 假设 Γ 是离散的。那么每个赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间都是可正交化的。

证明。设 $(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 是一个可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间。根据 [UZ16, 引理 2.15]，，若 $\{e_1, \dots, e_k\}$ 是 $V\uparrow$ 的一个 $\rho\uparrow$-正交子集，且 $e_{k+1} \in V\uparrow \setminus \operatorname{span}^{\Lambda\uparrow}\{e_1, \dots, e_k\}$，则 $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ 是 $\rho\uparrow$-正交的，当且仅当

$$\rho_\uparrow(e_{k+1}) = \inf\left\{\rho_\uparrow(e_{k+1} - w) | w \in \operatorname{span}_{\Lambda_\uparrow}\{e_1, \dots, e_k\}\right\}.$$

因此，只需证明：对于任意可正交化子空间 $V \leq V\uparrow$ 以及任意 $x \in V\uparrow \setminus V$，存在 $v \in V$，使得 $\rho_\uparrow(x - v) = \inf\{\rho_\uparrow(x - w) | w \in V\}$；于是，我们便可通过任意选取 $e_1 \in V\uparrow \setminus \{0\}$，并归纳地进行构造，得到 $V\uparrow$ 的一个正交基：在已选出一个张成 V_k 且 $k < \dim^{\Lambda\uparrow} V\uparrow$ 的正交集 $\{e_1, \dots, e_k\}$ 后，令 $e_{k+1} = x - v$，其中 $x \in V\uparrow \setminus V_k$，而 $v \in V_k$ 满足 $\rho_\uparrow(x - v) = \inf\{\rho_\uparrow(x - w) | w \in V_k\}$。

为了说明对于任意子空间 $V < V\uparrow$ 和 $x \notin V$，优化问题 $\rho_\uparrow(x-v) = \inf\{\rho_\uparrow(x-w) | w \in V\}$ 确实都能求解，注意到我们的假设 Γ 是离散的，由注 4.7 可知集合 $\{\rho_\uparrow(x - w) | w \in V\}$ 是离散的，因此只要它有下界，其下确界便能由某个 $v \in V$ 取得。若 $\Gamma = \{0\}$，这显然成立，因为根据注 4.7，$\rho\uparrow$ 只取有限多个值。若 Γ 非平凡，则 [Bo87, I.2.3.Corollary 1] 适用，可得 V 关于由 $V\uparrow$ 上的范数 $e^{\rho\uparrow}$ 所诱导的拓扑是闭的，因此对于 $x \notin V$，集合 $\{\rho_\uparrow(x - w) | w \in V\}$ 同样有下界。□

另一方面，如果 Γ 不是离散的，那么存在不是可正交化的赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间 $(V\uparrow, 其\rho_\uparrow)$ 在 $\Lambda_\uparrow$ 上。事实上，如果 $V\uparrow$ 是可正交化的，那么根据 [UZ16，推论 2.18]，，对于 $V \leq V\uparrow$ 的任意 m 维子空间，都可以找到一个正交基 $\{e_1, \dots, e_d\}$，使得 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 是 V 的一个（必然正交的）基。这立即意味着，对于任意 $x \in V\uparrow \setminus V$，“最佳逼近问题”——寻找使 $\rho_\uparrow(x - v)$ 的值最小的 $v \in V$——都有解，因为可以取 v 为由该正交基给出的 x 在 V 上的投影。但是，正如 [Us08], 中所指出的，如果 Γ 不是离散的，则可以调整 [IH71] 中的构造，得到一个二维赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间，其中存在一个子空间 V 和一个向量 x，使得最佳逼近问题无解。

为了详细描述这样一个例子，令 $\Lambda w\uparrow$ 由广义形式幂级数 $\sum_{g \in \Gamma} a_g T^g$ 组成，其中 $a_g \in \kappa$，并以如下较弱条件取代定义 $\Lambda_\uparrow$ 的有限性条件：$\{g | a_g \neq 0\}$ 是 R 的良序子集。于是，我们的非阿基米德赋值 $\nu_\uparrow\left(\sum_{g \in G} a_g T^g\right) = \min\{g | a_g \neq 0\}$ 按照同一公式延拓为定义在 $\Lambda w\uparrow$ 上的函数；事实上，它使后者成为 $\Lambda_\uparrow$ 的非阿基米德域扩张，不过我们只将其视为一个 $\Lambda_\uparrow$-向量空间。若选取一个严格递增但有界的序列 $\{\epsilon_i\}_{i=0}^\infty$ in Γ（这是可能的，因为 Γ 是 R 的非离散子群），并令 $v = \sum_{i=0}^\infty T^{\epsilon_i}$，则 $\Lambda_\uparrow$-子空间 $V\uparrow = \operatorname{span}^{\Lambda\uparrow}\{1, v\} \subset \Lambda w\uparrow$ 是一个赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间，

关于函数 $\ell = -\nu_{\uparrow}$，元素 $\nu \in V$ 在子空间 $\mathrm{span}^{\Lambda_{\uparrow}}\{1\}$ 中没有最佳逼近。

为提供一些背景，我们现在列举一些范数 $\Lambda_{\uparrow}$-空间或$\Lambda^{\downarrow}$-空间的动机性例子。对于一个带有 $\Gamma = \{0\}$ 的例子，可以考虑紧拓扑空间 X 上的连续函数 $f: X \to \mathrm{R}$，令 $V^{\uparrow} = H_k(X;\kappa)$ 对某个次数 k 作选择，并定义$\rho^f_{\uparrow}: V^{\uparrow} \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ 为

$$\rho^f_{\uparrow}(a) = \inf\{t \in \mathbb{R} | a \in \mathrm{Im}(H_k(f^{-1}((-\infty, t]); \kappa) \to H_k(X;\kappa))\} \tag{4.4}$$

(其中，该映射是由包含映射 $f^{-1}((-\infty, t]) \to X$ 显然诱导的）。因此$\rho^f_{\uparrow}(a)$ 记录了同调类 a 首次出现在 f 的次水平集同调中的层级。若 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ 是 $V^{\uparrow}$ 的 $\rho^{\uparrow}$-正交基（由命题 4.10 可知，这样的基总是存在），则可以验证，f 的次数为 k 的子水平持久条形码中出现的无限区间为 $[\rho^f_{\uparrow}(e_1), \infty), \ldots, [\rho^f_{\uparrow}(e_m), \infty)$。

对偶地，取$V^{\downarrow} = H_k(X$，并令$\ldots\ldots \kappa)$可再次得到一个带有 $\Gamma = \{0\}$ 的可正交化 $\Lambda^{\downarrow}$-空间示例；不过这次令

$$\rho^{\downarrow}_f(a) = \sup\{t \in \mathbb{R} | a \in \mathrm{Im}(H_k(f^{-1}([t, \infty)); \kappa) \to H_k(X;\kappa))\}.$$

因此，$\rho^f_{\uparrow}$记录了随着层级升高，子水平集的同调在$H_k(X;\ \kappa)$中的像如何增长，而 $\rho^{\downarrow}{}_f$ 记录了随着层级降低，超水平集的同调在$H_k(X;\kappa)$中的像如何增长。（这正是记号中使用箭头↑和 ↓的动机。）

对于一般的 Γ，[UZ16] 中的构造（特别是该文的命题 6.6）表明：对于紧致光滑流形 X、一个覆盖 $\tilde{X} \to X$ of 及其甲板变换群 Γ，以及莫尔斯函数 $\tilde{f}: \tilde{X} \to \mathrm{R}$，使得 $\mathrm{d}\,\tilde{f}$ 是 X 上代表类 $\xi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}; \mathrm{R})$ 的闭一形式的拉回，诺维科夫同调 $\mathrm{HN}_k(\tilde{f}; \xi)$（它是一个定义在 $\Lambda_{\uparrow}$上的向量空间）再次具有可正交化 $\Lambda_{\uparrow}$-空间的结构，其中使用函数：$\mathrm{HN}_k(\tilde{f}; \xi) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$，该函数将等价类 a 映射到 a 在 Novikov链复形中有代表元时的最小滤过层级。对于任意一个 $\rho^f_{\uparrow}$-正交基，值 $\rho^f_{\uparrow}(\mathrm{e}_1)$、$\ldots\ldots \rho\,\mathrm{f}_{\uparrow}(\mathrm{e}_m)$是 [UZ16] 的版本中 f 的子水平条形码无限区间的左端点；由这些区间在模去 Γ 的平移后所得等价类构成的多重集，与 $\rho^f_{\uparrow}$-正交基的选择无关。

在由延续映射所诱导的典范同构意义下，例如第 9.1 节和第 9.3 节中回顾的那些映射，向量空间 $\mathbf{HN}_k(f; \xi)$ 仅取决于上同调类 ξ，而不取决于莫尔斯函数 f（其导数是 ξ 的 de Rham 代表元的拉回），因此（固定 ξ 后），我们可以将每个 $\rho^f_{\uparrow}$ 视为定义在同一个向量空间 $V_{\xi} \cong \mathbf{HN}_k(f; \xi)$上。此外，根据 (9.3)，不难看出，在这类 $\tilde{f}$ 的集合中，赋值 $\tilde{f} \mapsto \rho^f_{\uparrow}$ 关于这类 $\tilde{f}$ 所成空间上的 C^0 拓扑以及映射 $V_{\xi} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$ 上的 L^{∞} 范数是连续的。因此我们可以定义 $\rho^f_{\uparrow}$

˜利用连续性，即使我们去掉f上的莫尔斯条件也可以进行定义。没有莫尔斯假设时，连续性意味着 $(V^{\xi}, \rho_{\uparrow}^{f})$ 仍将是一个赋范向量空间。因此，若 Γ 是离散的，根据命题 4.10，它仍可正交化；若 Γ 不是离散的，我不知道这一结论是否仍总是成立。

4.3. **对偶**。 若M 是环R上的左模（不一定是交换环），则M^* :=同态$_R(M, R)$ 自然可视为一个右 R模，其中元素 $\phi \in M^*$ 与$r \in R$ 数乘定义如下：对所有$m \in M$，$(\phi r)(m) = \phi(m)r$。当$R = \Lambda$ 时（更一般地，若R 是群代数），我们便可通过共轭将这个右模转化为左模；由此得到的模对偶概念对本文最为有用。

定义4.11。 若M 是左（分别地，右） Λ模，我们将其对偶模 $^{\vee}M$ 定义为左（分别地，右） Λ模

$$^{\vee}M = \overline{\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, \Lambda)}.$$

类似地，若V 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$向量空间，我们将 $^{\vee}V$ 定义为 $\Lambda^{\downarrow}$向量空间

$$^{\vee}V = \overline{\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(V, \Lambda_{\uparrow})}.$$

若 A: M $\to$ N 是 Λ模之间的态射，则可通过取通常的转置 $\phi \mapsto \phi \circ$ A，从同态$_{\Lambda}($ N , $\Lambda) \to$同态$_{\Lambda}$(M, Λ)得到伴随 $^{\vee}$A: $^{\vee}$N $\to$ $^{\vee}$M，并将其视为共轭模 $^{\vee}$N 和 $^{\vee}$M之间的映射。若 M 和 N 恰好是有限秩自由（左）模，其相应的 Λ基为{e$_1$, . . . , e$_m$}、{ f$_1$, . . . , f$_n$}，那么右模 Hom$_{\Lambda}$(M, Λ)和 Hom$_{\Lambda}$(N , Λ)的通常对偶基{e$_1^*$, . . . , e*m},{ f $_1^*$, . . . , f *n }同样可作为左模 $^{\vee}$M 和 $^{\vee}$N 的基；不过，共轭会使得相对于这些基的表示中的系数发生共轭，因此，相对于对偶基表示 $^{\vee}$A 的矩阵，是相对于原基表示 A 的矩阵的共轭转置。

对于可复合的态射A 和B，显然有 $^{\vee}(B \circ A) = {}^{\vee}A \circ {}^{\vee}B$；特别地，若$A$可逆，则 $^{\vee}A$也可逆，且 $(^{\vee}A)^{-1} = {}^{\vee}(A^{-1})$。因此，我们可以写作 $^{\vee}A^{-1}$，而不必担心运算顺序会引起混淆。

类似地，若A: $V \to W$ 是 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间之间的态射，则对转置A^*: Hom$_{\Lambda_{\uparrow}}(W, \Lambda_{\uparrow}) \to$ Hom$_{\Lambda_{\uparrow}}(W, \Lambda_{\uparrow})$应用共轭函子，可得到 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间之间的伴随态射 $^{\vee}A$: $^{\vee}W \to {}^{\vee}V$ 。注意，尽管 $^{\vee}A$和A^*作为集合论意义上的函数相同，但 $^{\vee}A$是 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间之间的态射，而 A^*是 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间之间的态射。

当然，如果B: $X \to Y$ 是 $\Lambda^{\downarrow}$向量空间之间的态射，那么按照上一段中的相同构造，可以得到 $\Lambda_{\uparrow}$向量空间之间的伴随态射 $^{\vee}B$: $^{\vee}Y \to {}^{\vee}X$ 。

若 V 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间，且 v $\in$ V，则可得到一个 $\Lambda^{\downarrow}$-线性映射 ι_v: $^{\vee}$V $\to \Lambda^{\downarrow}$，其定义为 $\iota_v(\phi) = \phi(\mathrm{v})$，其中 $\phi \in {}^{\vee}$V。现在 $^{\vee}(^{\vee}$V) =$\overline{\mathrm{Hom}_{\Lambda^{\downarrow}}(^{\vee}\mathrm{V}, \Lambda^{\downarrow})}$，因此 ι_v可视为 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间 $^{\vee}(^{\vee}$V)的一个元素，而映射 $\alpha_V : \mathrm{v} \mapsto \iota_v$ 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-线性映射 V $\to {}^{\vee}(^{\vee}$V)。显然，该映射 α_V是单射，因此若 V 是有限维的，根据维数方面的考虑，α_V必定是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间同构 V $\cong {}^{\vee}(^{\vee}$V)。事实上，若 {e$_1$, . . . , e$_m$}

是V的一组基，其对偶基为 $\{e_1^*, \dots, e^*{}_n\}$，对应于 $^\vee V$，那么 $^\vee(^\vee V)$ 中 $\{e_1^*, \dots, e^*{}_n\}$的对偶基显然是 $\{\alpha_V(e_1), \dots, \alpha_V(e_n)\}$。

若 $A\colon V \to W$ 是有限维 $\Lambda_\uparrow$-向量空间之间的态射，则可得到双伴随 $^\vee(^\vee A)\colon {}^\vee(^\vee V) \to {}^\vee(^\vee W)$，并且容易验证，$^\vee(^\vee A)$ 在同构 $\alpha_V\colon V \cong {}^\vee(^\vee V)$ 和 $\alpha_W\colon W \cong {}^\vee(^\vee V)$下与$A$ 重合。

同理，若 H 是一个 Λ-模，则可通过令 $\alpha_H(h)$ 等于由 $\phi \mapsto \phi(h)$定义的映射 $^\vee H \to \Lambda$，得到一个 Λ-模同态 $\alpha_H\colon H \to {}^\vee(^\vee H)$。与有限维向量空间在 $\Lambda_\uparrow$ 或 $\Lambda^\downarrow$ 上的情形不同，对于一般的 Λ 上的有限生成模 H，映射 α_H 未必是同构；例如，若 h 是H 的一个挠元，则 $\alpha_H(h)$ 将为零。若 $A\colon H_0 \to H_1$ 是一个 Λ-模同态，则有一个交换图表

(4.5)
$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{A} & H_1 \\ {\scriptstyle \alpha_{H_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{H_1}} \\ {}^\vee(^\vee H_0) & \xrightarrow[{}^\vee{}^\vee A]{} & {}^\vee(^\vee H_1) \end{array},$$

因为这两个复合都将 $x \in H_0$ 映射为由 $\psi \mapsto \psi(Ax)$给出的从 $^\vee H_1$ 到相应映射。

4.4. 庞加莱对偶结构。 我们构造中的一个要素是以下这对定义，它们旨在仿照从覆盖空间中的庞加莱对偶得到的映射。

定义4.12。 设$H_* = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k$ 是一个分次左 Λ-模，使得每个H_k 都是在 Λ上的有限生成模，并设$n \in \mathbb{Z}$。H_* 上的一个**弱 n-庞加莱对偶结构** 由以下模同态组成：$\mathrm{D}k\colon H_k \to {}^\vee H_{n-k}$，对所有$k \in \mathbb{Z}$均成立，并满足对称条件

(4.6)
$$(\mathscr{D}_k x)(y) = \pm\overline{(\mathscr{D}_{n-k} y)(x)} \quad \text{for all } x \in H_k, y \in H_{n-k}$$

对于某个符号 $\pm$（它可能取决于k），使得 $1 \otimes \mathrm{D}k\colon \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H_k \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda {}^\vee H_{n-k}$是一个同构，其中 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 是 Λ的分式域。H_*上的一个**强 n-庞加莱对偶结构** 由满足（4.6）的模同态 $\mathrm{D}k\colon H_k \to {}^\vee H_{n-k}$ 组成；这些同态是满射，且其核等于H_k的 Λ-挠子模tH_k。

注记 4.13. 如果 $\Gamma = \{0\}$，因而 Λ 等于域 κ，那么就不存在 Λ-挠，且 $\mathrm{Q}(\Lambda) = \Lambda$，所以弱或强$n$-PD 结构都只不过是满足 (4.6) 的同构$H_k \cong {}^\vee H_{n-k}$。

对于一般的 Γ，根据以下事实（[Rot09、命题 4.78 和定理 4.80]）：$\mathrm{Q}(\Lambda)$在 Λ 上是平坦的，且系数扩张映射$H_k \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H_k$ 的核等于tH_k，容易看出强n-PD 结构也是弱 n-PD 结构。若 $\Gamma \neq \{0\}$（因而 Λ 不是域），则可用以下方法构造一个反例来说明反向结论不成立：从一个强n-PD 结构出发，然后用 Λ 中某个非零、不可逆、自共轭元素（例如$T_g + T^{-}{}_g$，其中$g \in \Gamma\setminus\{0\}$）乘以所有 $\mathrm{D}k$；所得映射将不再是满射，但张量乘以 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 后仍会成为同构。我们将在例 6.12 中重新讨论这种情况。

定义 4.12 的动机性拓扑模型涉及一个正则覆盖空间$p\colon \tilde{X} \to X$，其中X 是一个光滑闭定向流形，而甲板变换

群 p 同构于 Γ。 Γ 在 $\tilde{X}$ 上的作用使 $\tilde{X}$ 的奇异链复形成为 Λ-模的复形；对于 H_k ，我们可以取该复形的第 k 个同调。正如 [Ran02，定理 4.65] 中的庞加莱对偶性所给出的那样，存在一个同构 $H_k \cong H^{n-k}$，其中 H^{n-k} 是奇异链复形的对偶复形的上同调。现在，定义 4.12 并未引用任何直接扮演上同调 H^{n-k} 角色的对象；相反，我们使用 $^{\vee}H_{n-k}$，即同调的对偶，而当 $\Gamma \neq \{0\}$ 时，它是一个不同的对象。更具体地说，存在一个求值映射 $\mathrm{ev}\colon H^{n-k} \to {}^{\vee}H_{n-k}$ ，从上同调映射到同调的对偶；而映射 $D_k\colon H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$ 应理解为庞加莱对偶同构与 ev 的复合。映射 $(x, y) \mapsto (D_k x)(y)$ 是 [Ran02，定义 4.66] 中定义的同调交叉配对；正如其中所指出的，有 $(D_k x)(y) = (-1)^{k(n-k)}(D_{n-k}y)(x)$，因此对称条件（4.6）成立。

此时，我们在分析中遇到了代数复杂性的基本三分法，这取决于 R 的子群 Γ 的性质。若 $\Gamma = \{0\}$，则此前的大部分讨论都会简化许多： Λ、$\Lambda_{\uparrow}$、$\Lambda^{\downarrow}$、$\Lambda_{\updownarrow}$ 都恰好等于域 κ； κ上的“共轭”是恒等映射；前一段中的映射 ev 是一个同构；并且，正如注4.13中已经指出的，定义 4.12 中任一种 n-PD 结构都只不过是满足 (4.6) 的同构 $H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$ （在此情形下，可以忽略 (4.12) 中的共轭符号）。

次简单的可能性是， Γ 是 R 的一个离散非平凡子群；众所周知且不难证明，这意味着 Γ 同构于 Z，因而群环 Λ 同构于 Laurent多项式环 $\kappa[t,t^{-1}]$。因此在此情形下， Λ是一个主理想整环，故泛系数定理 [Rot09，定理 7.59]适用，它表明 ev 是满射，并可计算其（通常非平凡的）核。

剩下的可能性是 $\Gamma \leq R$ 为稠密子群；此时（由于我们假设 Γ 是有限生成的） Λ 同构于多元劳伦多项式环 $\kappa[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t^{-1}{}_d]$，其中$d > 1$，而它并非主理想整环。因此，Λ 上的有限生成模可能相当复杂，而且通常的泛系数定理也不适用。取而代之的是，存在一个泛系数谱序列，详见[Lev77，第 2], 节；如果该谱序列的某个E^r 页上，$r \geq 2$ 对应的某个微分在底行上不为零，那么映射 ev 就不是满射。

我们对弱n-PD 结构的定义旨在具有足够的灵活性，使其即使在 Γ 是 R 的稠密子群时，也能适用于相关情形；而强n-PD 结构的定义，则是为了在 Γ为离散子群时，能够得到推论 6.10 等更精确的结论。为说明这类结构确实源自庞加莱对偶，我们证明：

命题 4.14. 设 $C_* = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$ 是一个分次左 Λ-模，且每个 C_k 都是自由的；设$\partial\colon C_* \to C_{*-1}$ 满足 $\partial \circ \partial = 0$，并假设每个同调模 $H_k = \ker(\partial\colon C_k \to C_{k-1})/\mathrm{Im}(\partial\colon C_{k+1} \to C_k)$作为~~Λ-模都是有~~限生成的。记 $C^k = {}^{\vee}(C_k)$，并令 $\delta\colon C^* \to C^{*+1}$为在 C^k 上由 $^{\vee}((-1)^k \partial|_{C_{k+1}})$给出的映射。假设对每个 k，都有一个同构 $D_k\colon H_k \to H^{n-k}$，其中 $H^{n-k} = \ker(\delta\colon C^k \to C^{k+1})/\mathrm{Im}(\delta\colon C^{k-1} \to C^k)$；令 $\mathrm{ev}\colon H^{n-k} \to {}^{\vee}H_{n-k}$ ~~为求值~~映射：

[9] H_k 是有限生成的，因为X作为一个光滑闭流形，具有有限胞腔分解；该分解随后提升为 Γ等变的X胞腔分解，而H_k同构于与此胞腔分解相关的有限生成 Λ模复形的第k阶同调。

$\mathrm{ev}([\phi])([c]) = \phi(c)$ 当 $\phi \in C^{n-k}$ 具有 $\delta\phi = 0$ 且 $c \in C_{n-k}$ 具有 $\partial c = 0$时。此外，假设映射 $\mathrm{D}_k = \mathrm{ev} \circ D_k$ 满足 (4.6)。那么：

(i) 如果 Γ是离散的，那么映射 $\mathrm{D}_k = \mathrm{ev} \circ D_k$ 定义了一个强 n-PD 结构。(ii) 无论 Γ是否离散，如果每个 C_k 都是有限生成模，那么映射 $\mathrm{D}_k = \mathrm{ev} \circ D_k$ 定义了一个弱 n-PD 结构。

命题 *4.14(i)* 的证明。 由于 Γ是离散的，因此 Λ 是一个主理想整环，泛系数定理给出（应用共轭函子后）一个短正合列

$$0 \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_{n-k-1}, \Lambda)} \xrightarrow{j} H^{n-k} \xrightarrow{\mathrm{ev}} {}^\vee H_{n-k} \longrightarrow 0\ .$$

由于我们假设 $D_k : H_k \to H^{n-k}$ 是同构，因此 $\mathrm{D}_k = \mathrm{ev} \circ D_k$ 是一个满射，其核等于 $D^{-1}{}_k(\mathrm{Im}\, j)$。由于 ${}^\vee H_{n-k} = \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{n-k}, \Lambda)$ 是无挠的，该核必须包含 $\overline{H_k}$ 的所有 Λ-挠元。反过来，$\ker \mathrm{D}_k = D^{-1}{}_k(\mathrm{Im} j)$ 中的所有元素都是挠元，因为 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_{n-k-1}, \Lambda)$ 是一个挠 Λ-模（这可通过主理想整环上有限生成模的分类直接计算得到，同时注意到 H_{n-k-1} 假设为有限生成模）。□

证明命题第二部分时，下面的引理很有帮助。

引理 4.15. 设A是一个整环，分式域为Q，且M 是一个有限生成的A-模。那么Q-向量空间同态

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A Q \to \mathrm{Hom}_A(M, Q),$$

在纯张量 $\phi \otimes q$ 上的定义为 $(\alpha(\phi \otimes q))(m) = q\phi(m)$，对所有$m \in M$均成立，是一个同构。

证明。首先注意，由于 M 是有限生成的，对每个 $\phi \in$同态$_A$(M , Q)，都存在一个 $\in$A，使得 a$\phi \in$同态$_A$(M , A)。事实上，若 {x$_1$, . . . , x$_m$} 是 M 的一个生成集，且ϕ(x$_i$) = p$_i$q$_i$，其中 p$_i$、q$_i \in$A 且 q$_i \neq 0$，则可取 $\mathrm{a} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{q}_i$。因此，商 Hom$_A$(M,Q) Hom$_A$(M,A)是一个挠 A-模，所以它与分式域 Q 的张量积为零。现在 Q 是一个平坦 A-模，因此对短正合列应用正合函子 $\_ \otimes_A \mathrm{Q}$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \to \mathrm{Hom}_A(M, Q) \to \frac{\mathrm{Hom}_A(M, Q)}{\mathrm{Hom}_A(M, A)} \to 0$$

表明该映射

$$\mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A Q \to \mathrm{Hom}_A(M, Q) \otimes_A Q \tag{4.7}$$

由A到Q 的包含映射诱导的映射是一个同构。但存在一个Q-向量空间同态$_A(M, Q) \otimes_A Q \to \mathrm{Hom}_A(M, Q)$之间的同构，它在纯张量上的定义为 $\phi \otimes q \mapsto q\phi$（例如，这可由 [Rot09, 推论 4.79(ii)]的证明得出）；将其与 (4.7) 复合即可得到所求结果。□

命题 4.14(ii) 的证明。记 (C^*, δ) 为 (C_*, ∂) 的通常（未取共轭）对偶复形，于是 C i $=$同态$_\Lambda$(C$_i$, Λ)，由引理 4.15 得到同构 $\mathrm{C}^i \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda) \cong$同态$_\Lambda$(C$_i$, Q(Λ))。由于 Q(Λ) 是一个平坦的 Λ-模，显然的映射 $\mathrm{H}^{n-k}(\mathrm{C}^*) \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda) \to \mathrm{H}\ \mathrm{n–k}(\mathrm{C}^* \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda))$ 是同构。因此我们得到同构 $\mathrm{H}\ \mathrm{n–k}(\mathrm{C}^*) \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda) \cong \mathrm{H}^{n-k}$(同态$_\Lambda$(C$_*$, Q(Λ)))。

进而，由于 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 是一个单射 Λ-模，求值映射 $H^{n-k}(\text{同态}_\Lambda(C_*, \mathrm{Q}(\Lambda))) \to \text{同态}_\Lambda(H_{n-k}(C_*), \mathrm{Q}(\Lambda))$ 是同构。最后，再次应用引理 4.15，得到同构 $\text{同态}_\Lambda(H_{n-k}(C_*), \mathrm{Q}(\Lambda)) \cong \text{同态}_\Lambda(H_{n-k}(C_*), \Lambda) \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda)$。

将上述所有同构串联起来，得到一个同构 $H^{n-k}(C^*) \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda) \to \text{同态}_\Lambda(H_{n-k}(C_*), \Lambda) \otimes_\Lambda \mathrm{Q}(\Lambda)$ 不难看出，该同构与求值映射的系数扩张相一致。随后取共轭可得，$1_{\mathcal{Q}(\Lambda)} \otimes \mathrm{ev}: \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H_{n-k} \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda {}^\vee H_{n-k}$ 是一个同构。将此同构与命题陈述中的同构 $D_k : H_k \to H^{n-k}$ 的系数扩张复合，我们看到，$\mathrm{D}_k = \mathrm{ev} \circ D_k$ 的系数扩张到 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 给出一个同构 $\mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H_k \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda {}^\vee H_{n-k}$，正如所需。□

注记 4.16。命题 4.14 中微分 $\delta: C^* \to C^{*+1}$ 定义所用的符号，与对偶复形微分的常用符号相反（参见例如，[Dol80，注记 VI.10.28]）；当然，这不影响命题 4.14 或其证明在（余）同调层面的结论，但这一符号会在第 8.5 节再次出现。

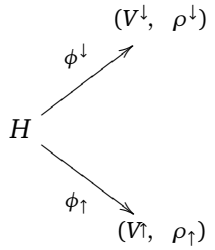
我们可以用共轭来说明采用这一符号约定的理由。[Dol80] 中采用的 $\mathrm{Hom}(C_*, \Lambda)$ 微分符号，是为了使求值映射 $\mathrm{Hom}(C_{-*}, \Lambda) \otimes_\Lambda C_* \to \Lambda$ 成为链映射而定义的，其中陪域被视为集中在次数零的链复形（微分平凡）。但是，当 (C_*, ∂) 是左 Λ-模复形时，各个 $C^k = \mathrm{Hom}(C_k, \Lambda)$ 自然也被视为左模；~~此时取代通~~常的求值映射的是求值映射 $C_* \otimes_\Lambda C^{-*} \to \Lambda$。命题 4.14 中的约定使后一个求值映射——其中元素从右侧作用~~于~~C^*——成为链映射。

事实上，这一论证多少有些事后附会；我在命题 4.14 中选择该符号的真正动机（因而也是在第 8.5 节链级庞加莱–诺维科夫结构的定义中采用该符号的动机）是，它与附录 A 中 Morse 和 Floer 理论的定向约定更为契合。

5. 过滤匹配对

现在，我们终于定义将最终导出层间条形码中开区间和闭区间这一版本的基本结构。回顾定义 4.5 中关于赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间和赋范 $\Lambda^\downarrow$-空间的概念。

定义 5.1。如前所述，固定一个域 κ 和一个有限生成子群 $\Gamma < \mathbb{R}$。一个**过滤匹配对** 是如下图表



其中：

- H 是有限生成的左 Λ-模；

- $(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 是一个赋范 $\Lambda_\uparrow$-空间，并且 Λ-模同态 $\phi_\uparrow : H \to V\uparrow$ 具有如下性质：$1_{\Lambda_\uparrow} \otimes \phi_\uparrow : \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H \to V\uparrow$ 是一个同构；并且
- $(V^\downarrow, \rho^\downarrow)$ 是一个赋范的 $\Lambda^\downarrow$-空间，并且 Λ-模同态 $\phi^\downarrow : H \to V^\downarrow$ 具有如下性质：$1_{\Lambda^\downarrow} \otimes \phi^\downarrow : \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda H \to V^\downarrow$ 是一个同构。

若 $\Gamma = \{0\}$，则 $\Lambda_\uparrow = \Lambda^\downarrow = \Lambda = \kappa$，因此 $\phi_\uparrow$ 和 $\phi^\downarrow$ 已经是同构；所以在这种情况下，过滤匹配对所提供的信息并不比一个 $V\uparrow$ 与 $V^\downarrow$ 之间的 κ-向量空间同构（即 $\phi^\downarrow \circ \phi_\uparrow^{-1}$）多多少。然而，若 $\Gamma \neq \{0\}$，那么 $V\uparrow$ 和 $V^\downarrow$ 甚至不是同一域上的向量空间，因此它们当然不可能同构。可以对 $V^\downarrow$ 进行共轭，使其成为与 $V\uparrow$ 同一域上的向量空间，但共轭与 Γ-作用不相容，而该作用旨在编码几何上具有重要意义的信息。定义 5.1 通过提供一个环境 H，使 $V\uparrow$ 与 $V^\downarrow$ 中的元素有时能够在同时保持两个空间上的 Γ-作用的情况下进行“匹配”，从而允许对它们进行比较。

注记5.2. 沿用定义 5.1 中的记号，由于 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 都是分式域 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 的域扩张，映射 $\phi_\uparrow$ 可分解为 $H \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H \to V\uparrow$，其中第一个映射是系数扩张映射，第二个是对 $1_{\Lambda_\uparrow} \otimes \phi_\uparrow$ 的限制，且特别地是单射。对 $\phi^\downarrow$ 也有类似的说明。因此，由于系数扩张映射 $H \to \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H$ 的核等于 Λ-挠子模 tH of H，可知 $\ker \phi_\uparrow = \ker \phi^\downarrow = tH$，并且 $\phi_\uparrow$（分别为 $\phi^\downarrow$）下降为单射 $H_{tH} \to \Lambda_\uparrow$（分别为 $H_{tH} \to \Lambda^\downarrow$），张量上 $\Lambda_\uparrow$（分别为 $\Lambda^\downarrow$）后成为同构。此外，$V\uparrow$ 和 $V^\downarrow$ 的维数都等于 $\dim_{\mathrm{Q}(\Lambda)} \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H$。

现在，我们从一个过滤匹配对 $\mathrm{P} = (H, V\uparrow, \rho_\uparrow, \phi_\uparrow, V^\downarrow, \rho^\downarrow, \phi^\downarrow)$ 中提取定量数据。在有利的情况下，这些数据可通过为无挠模 H_{tH} 找到一种特殊的基而得到。在我们目前的一般性程度下，这种特殊的基可能并不存在——事实上，如果 Γ 是 R 的稠密子群，使得 Λ 不是主理想整环，那么 H_{tH} 很可能根本没有基 —— 但我们仍可以作如下定义：

定义 5.3. 对于上述过滤匹配对 P，令 $d = \dim_{\mathrm{Q}(\Lambda)} \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H$，并令 i 为一个满足 $1 \le i \le d$ 的整数。我们将 P 的 **ith gap** 定义为

$$G_i(\mathscr{P}) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} (\exists x_1, \ldots, x_i \in H \text{ independent}) \\ (\rho^\downarrow(\phi^\downarrow x_j) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow x_j) \ge \gamma \text{ for all } j = 1, \ldots, i) \end{array} \right\}.$$

（这里，若一个整环上的模 H 中的一组元素在与该整环的分式域张量后成为线性无关，则称它们线性无关。）

对于通过第6节中的构造从庞加莱–诺维科夫结构得到的过滤匹配对，正的 $G_i(\mathrm{P})$ 将作为相关条形码中闭区间的长度出现，而负的 $G_i(\mathrm{P})$ 的绝对值将作为开区间的长度出现。（后者的同调次数将下移1。）

或许我们希望存在 $G_i(\mathrm{P}) = \rho^\downarrow(\phi^\downarrow x_i) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow x_i)$，使其对某组元素 $\{x_1, \ldots, x_d\} \subset H$ 成立。我们将看到，如果这些 x_i 按如下意义构成一个双重正交基，那么这一点就成立：

定义5.4. 对于上述过滤匹配对 P，**双重正交基** 是一个子集 $\{e_1, \dots, e_d\} \subset H$，满足：

(i) $\{e_1, \dots, e_d\}$ 在商映射 $H \to_{H\,tH}$ 下映为 Λ-模$_{H\,tH}$的一组基，其中tH 是H的 Λ-挠模；(ii) $\{\phi_\uparrow(e_1), \dots, \phi_\uparrow(e_d)\}$ 是$V\uparrow$的一组$\rho_\uparrow$-正交基；(iii) $\{\phi^\downarrow(e_1), \dots, \phi^\downarrow(e_d)\}$ 是$V^\downarrow$的一组 $\rho^\downarrow$-正交基。

我们将在第 5.3 节证明以下结论。

定理 5.5. 假设子群 $\Gamma < \mathrm{R}$ 是离散的。那么，任意过滤匹配对都有一组双重正交基。

如前所述，如果 Γ 不是离散的，那么由于$_{H\,tH}$ 可能不是自由模，双重正交基可能不存在。此外，正如命题 4.10 后所指出的，如果 Γ不是离散的，那么 $(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 以及 $(V^\downarrow, \rho^\downarrow)$ 可能不可正交化。我不知道，在非离散情形下，满足$_{H\,tH}$ 是自由模且 $(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 和$(V^\downarrow, \rho^\downarrow)$ 可正交化的过滤匹配对，是否总有双重正交基。尽管定理 5.5 的证明中隐含描述的算法，其各个步骤对任意 Γ都可以执行，但证明该算法终止时用到了 Γ 是离散的这一假设。

双重正交基与定义 5.3 中的间隙关系如下：

命题 5.6. 设 $\{e_1, \dots, e_d\}$ 是过滤匹配对 P 的一个双重正交基，并按如下方式排序：对每个 $i \in \{1, \dots, d-1\}$，都有 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) \geq \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_{i+1})) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_{i+1}))$。那么，对每个 i，

$$G_i(\mathscr{P}) = \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)).$$

证明。 $G_i(\mathrm{P}) \geq \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))$ 由定义立即可得（取$x_j = e_j$）。为证明反向不等式，我们必须说明：每当 $\{x_1, \dots, x_i\}$ 是 H 中的一个线性无关集时，都存在某个 $j \leq i$，使得 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(x_j)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(x_j)) \leq \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))$。

为说明这一点，注意到由于 $\{x_1, \dots, x_i\}$ 是一个线性无关集，因此它不包含在 Λ-张成的 $\{e_i, \dots, e_{i-1}\}$ 中。因此存在 $j \leq i$和 $k \geq i$，使得将 x_j用我们的基表示为 $x_j = t + \sum_\ell \lambda_\ell e_\ell$ 时，其中 $t \in tH$，系数 $\lambda_k \in \Lambda$ 非零。因此，根据 $\{e_1, \dots, e_d\}$ 的双正交性，以及 $\phi_\uparrow$ 和 $\phi^\downarrow$ 在 tH 上取值为零这一事实，我们有，

$$\begin{aligned}
\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(x_j)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(x_j)) &\leq \big(\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_k)) - \nu^\downarrow(\lambda_k)\big) - \big(\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_k)) - \nu_\uparrow(\lambda_k)\big) \\
&\leq \big(\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))\big) - \big(\nu^\downarrow(\lambda_k) - \nu_\uparrow(\lambda_k)\big) \\
&\leq \big(\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))\big),
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式利用了 $k \geq i$，最后一个不等式则利用了显然可由 (4.3) 得出的结论：对于 Λ 的所有非零元素 λ， $\nu^\downarrow(\lambda) - \nu_\uparrow(\lambda) \geq 0$。□

特别地可知，对于任意选择的双重正交基，多重集 $\{\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))\}$ 都相同。请注意，要使这一点成立，关键在于我们在定义 5.4 中要求 $\{e_1, \dots, e_d\}$ 投影到模 $_{H\,tH}$的一个**基**上，而不仅仅是一个极大线性无关集（假设 $\Gamma \neq \{0\}$，从而这两种概念之间存在区别）

事实上，如果我们从一个双重正交基 $\{e_1,\dots,e_d\}$ 出发，然后将其中的某个元素（例如e_1）乘以一个非零的不可逆元素 $\lambda\in\Lambda$，则新集合 $\{\lambda e_1,e_2,\dots,e_d\}$ 在 $\phi_\uparrow$ 和 $\phi^\downarrow$ 下的像仍分别是 $V^\uparrow$ 和$V^\downarrow$ 的正交基，但由于对于 Λ 中的非零不可逆（即，非单项式）元素，$\nu^\downarrow(\lambda)-\nu_\uparrow(\lambda)$ 非零，这一运算会改变 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_1))-\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_1))$ 的值。

双重正交基 $\{e_i\}$ 中 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))$ 的绝对值，旨在对应条形码中条形的长度；因此自然可以预期，这些条形的端点将是 $\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))$ 和 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))$。正如在存在甲板变换群 Γ 的情况下的 [UZ16]，中一样，我们预期这些条形仅在群 Γ 的平移意义下定义良好；这对应于以下事实：将每个 e_i 乘以 Λ 中的可逆元素 T^{g_i}（其中 $g_i\in\Gamma$）会保持该基的双正交性。除去这一歧义后，我们将在命题 5.7 中证明，不同的双重正交基选择会产生相同的“条形”集合。

为建立一些记号，给定如上所述的过滤匹配对 P，对陪集 $[x]\ \text{in}\ H^tH\ \text{of}\ x\in H$ 定义函数$\ell_\uparrow\colon H^tH\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 和 $\ell^\downarrow\colon H^tH\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，

$$\ell_\uparrow([x])=\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(x)),\qquad \ell^\downarrow([x])=\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(x)).$$

此外，若 $a\in\mathbb{R}$，则令

$$H_\uparrow^{\le a}=\left\{[x]\in\frac{H}{tH}\,\middle|\,\ell_\uparrow([x])\le a\right\},\qquad H_\uparrow^{<a}=\left\{[x]\in\frac{H}{tH}\,\middle|\,\ell_\uparrow([x])<a\right\},\tag{5.1}$$

$$H_{\ge a}^{\downarrow}=\left\{[x]\in\frac{H}{tH}\,\middle|\,\ell^\downarrow([x])\ge a\right\},\qquad H_{>a}^{\downarrow}=\left\{[x]\in\frac{H}{tH}\,\middle|\,\ell^\downarrow([x])>a\right\}.$$

由定义 4.5 可知，$H_\uparrow^{\le a}$、$H_\uparrow^{>a}$、$H_{\ge a}^{\downarrow}$、$H_{>a}^{\downarrow}$均为H^tH的 κ-向量子空间。

命题 5.7. 采用上述记号，若 $\{e_1,\dots,e_d\}\subset H$是过滤匹配对 P 的双重正交基，且$a$、$b\in\mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned}&\#\{i\mid(\exists g\in\Gamma)(\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))=a+g\ \text{and}\ \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))=b+g)\}\\&\quad=\dim_\kappa\left(\frac{H_\uparrow^{\le a}\cap H_{\ge b}^{\downarrow}}{(H_\uparrow^{<a}\cap H_{\ge b}^{\downarrow})+(H_\uparrow^{\le a}\cap H_{>b}^{\downarrow})}\right).\end{aligned}\tag{5.2}$$

证明。元素 $z\in H^tH$ 属于$H_\uparrow^{\le a}\cap H_{\ge}^{\downarrow}b$，当且仅当它关于基 $[e_1],\dots,[e_d]$ 的坐标表达式 $z=\sum_i\lambda_i[e_i]$ 对所有 i 都满足 $\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))-\nu_\uparrow(\lambda_i)\le a$ 和 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-\nu^\downarrow(\lambda_i)\ge b$，即 $\nu_\uparrow(\lambda_i)\ge\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))-a$ 和 $\nu^\downarrow(\lambda_i)\le\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-b$ 均成立。将系数 $\lambda_i\in\Lambda$ 表示为有限和 $\lambda_i=\sum_{g\in\Gamma}k_{g,i}T^g$，其中 $k_{g,i}\in\kappa$，这表明 $z=\sum_{i=1}^d\sum_{g\in\Gamma}k_{g,i}T^g\,[e_i]$ 属于 $H_\uparrow^{\le a}\cap H_{\ge}^{\downarrow}b$，当且仅当对于所有 g，除 g 落在区间 $[\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))-a,\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-b]$ 中的情况外，i 的 $k_{g,i}$ 均为零。

类似地，$z=\sum_{i,g}k_{g,i}T^g\,[e_i]$属于 $H_\uparrow^{<a}\cap H_{\ge}^{\downarrow}b$，当且仅当对于 $g\notin(\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))-a,\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-b]$，，$k_{g,i}=0$；并且属于 $H_\uparrow^{\le a}\cap H_{>}^{\downarrow}b$，当且仅当对于 $g\notin[\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))-a,\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i))-b)$，$k_{g,i}=0$。因此，$H_\uparrow^{\le a}\cap H_{\ge}^{\downarrow}b$ 中 $(H_\uparrow^{<a}\cap H_{\ge}^{\downarrow}b)+(H_\uparrow^{\le a}\cap H_{>}^{\downarrow}b)$ 的一个向量空间补空间由所有具有如下性质的等价类 $\sum_{i,g}k_{g,i}T^g\,[e_i]$ 所组成：唯一可能非零的 $k_{g,i}$

是那些 g 属于 $[\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) - a, \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - b]$，但既不属于 $(\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) - a, \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - b]$，也不属于 $[\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) - a, \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - b)$ 的情形。换句话说，除非 $g = \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) - a = \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - b$，否则 $k_{g,i} = 0$。因此，若 I_0 是 (5.2) 左侧出现的 $\{1, \ldots, d\}$ 的子集，则 $H_\uparrow^{\leq a} \cap H_\geq^\downarrow b \,(H_\uparrow^{<a} \cap H_\geq^\downarrow b) + (H_\uparrow^{\leq a} \cap H_>^\downarrow b)$ 作为 <u>aκ-向量空间同构于</u> κ-span $\{T^{\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i)) - a}[e_i] | i \in I_0\}$。

□

因此我们作出如下定义：

定义5.8。 设 P 是一个具有双重正交基的过滤匹配对。P 的<basis spectrum $\Sigma(P)$ 基谱是 $(\mathbb{R}/\Gamma) \times \mathbb{R}$ 的子多重集，定义为

$$\left\{\left([\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))], \rho^\downarrow(\phi^\downarrow(e_i)) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow(e_i))\right) | i \in \{1, \ldots, d\}\right\}$$

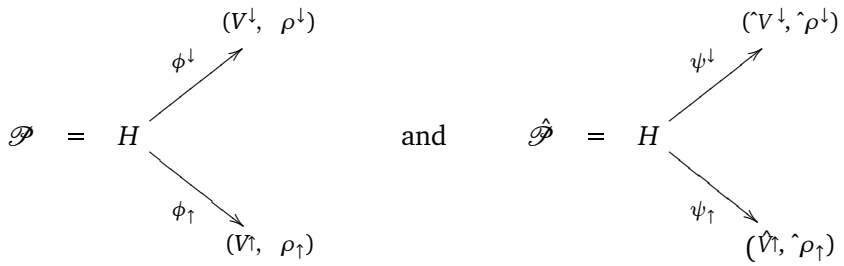
对于一个，因而（根据命题 5.7）对于 P 的每一个双重正交基 $\{e_1, \ldots, e_d\}$ 都成立。

因此，命题 5.7 表明，对于 $([a], \ell) \in (\mathbb{R}/\Gamma) \times \mathbb{R}$，其中 $[a]$ 表示实数 a 在 $\mathbb{R}/\Gamma$ 中的陪集，$([a], \ell)$ 在 $\Sigma(P)$ 中的重数等于 $\dim_\kappa \left(H_\uparrow^{\leq a} \cap H_\geq^\downarrow b \,(H_\uparrow^{<a} \cap H_\geq^\downarrow b) + (H_\uparrow^{\leq a} \cap H_>^\downarrow b) \right)$。<u>这一刻画类似于</u> $\delta^f r(a, b)$ 在 [Bu20a 第 3] 节中所表示的量的定义。

如第 2 节所述，在作为动机的拓扑学例子中，$([a], \ell)$中的一个元素对应于层间持久性条形码中的一条条形，其形式为 $[a, a + \ell]$（若 $\ell \geq 0$，则如此），以及 $(a + \ell, a)$（若 $\ell < 0$，则如此；后一种情形下同调次数下移 1）。当Γ 非平凡时，正如命题 5.7 所反映的那样，条形可以通过 Γ中的元素平移；与 [UZ16] 一样，我们的记号通过规定 $\Sigma(P)$ 中元素的第一项仅在模 Γ 意义下定义，而第二项（表示端点之差）为实数，从而体现了这种不确定性。（与 [UZ16] 的区别在于，这里的第二项允许为负数，这反映出这些“同调本质”条形体现了拓扑不变量特征，因此不会在其“长度”趋于零时消失；相反，它们会转变为其他类型的条形。）

5.1. **稳定性**。 现在我们讨论这样一种观点的代数对应物：函数发生 C^0-小变化时，其层间条形码也应发生相应的小变化。过滤匹配对定义中的 Λ-模 H 旨在对应于定义函数的覆盖的同调（或其一个分次分量），因此不会随函数而改变。由于向量空间 $V\uparrow$ 和$V^\downarrow$ 分别与 $\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H$和 $\Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda H$同构，它们的向量空间同构类型也不会改变，但滤过函数$\rho\uparrow$ 和 $\rho^\downarrow$ 会对函数较为敏感。

定义 5.9。令 $t \geq 0$ 为，并令



设 P 和 $\hat{}$P 是两个具有相同 Λ-模 H 的过滤匹配对。一个从 P 到 $\hat{}$P 的 ***t*-态射** 由一个 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间同构 $\alpha_{\uparrow}: V^{\uparrow} \to \hat{V}^{\uparrow}$ 和一个 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间同构 $\alpha^{\downarrow}: V^{\downarrow} \to \hat{V}^{\downarrow}$ 组成，并满足：

- $\psi_{\uparrow} = \alpha_{\uparrow} \circ \phi_{\uparrow}$;
- $\psi^{\downarrow} = \alpha^{\downarrow} \circ \phi^{\downarrow}$; and
- $|\rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}(x)) - \hat{\rho}_{\uparrow}(\psi_{\uparrow}(x))| \leq t$ and $|\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}(x)) - \hat{\rho}^{\downarrow}(\psi^{\downarrow}(x))| \leq t$ for all $x \in H \setminus \{0\}$.

我们首先证明定义 5.3 中间隙 G_i 的稳定性。

命题 5.10. 假设存在一个从 P 到 $\hat{}$P 的 *t*-态射。那么，对所有 i，$|G_i(\mathrm{P}) - G_i(\hat{}\mathrm{P})| \leq 2t$。

证明。由定义可几乎立即得出结论。若如定义 5.3 所述，$\{x_1, \ldots, x_i\} \subset H$ 是一个线性无关集，且 γ 是一个实数，使得对所有 $j \in \{1, \ldots, i\}$ 都有 $\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}(x_j)) - \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}(x_j)) \geq \gamma$，那么由定义 5.9 可得 $\hat{\rho}^{\downarrow}(\psi^{\downarrow}(x_j)) \geq \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}(x_j)) - t$，且 $\hat{\rho}_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}(x_j)) \leq \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}(x_j)) + t$。因此，$\hat{\rho}^{\downarrow}(\psi^{\downarrow}(x_j)) - \hat{\rho}_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}(x_j)) \geq \gamma - 2t$。对所有此类 γ 取上确界可知，$G_i(\hat{}\mathrm{P}) \geq G_i(\mathrm{P}) - 2t$。再结合将 P 与 $\hat{}$P 的角色互换后得到的同一结论，即得所需结果。□

在 P 和 $\hat{}$P 存在双重正交基的情形下，我们现在考虑将命题 5.10 改进为关于基谱 $\Sigma(\mathrm{P}), \Sigma(\hat{}\mathrm{P})$ 的陈述。根据命题 5.6，$\Sigma(\mathrm{P})$ 具有如下形式：$\{([a_1], G_1(\mathrm{P})), \ldots, ([a_d], G_d(\mathrm{P}))\}$，其中 $[a_i] \in \mathrm{R}/\Gamma$ 取适当值；对 $\Sigma(\hat{}\mathrm{P})$ 也同样如此。因此，命题 5.10 给出了它们第二个坐标之差的界。如果 $\Gamma < \mathrm{R}$ 稠密，那么第一个坐标之间不存在有意义的非平凡距离（R/Γ 上的自然拓扑是平凡拓扑），因此，即便暂且不论定理 5.5 仅针对离散情形得到了证明，在稠密情形下，命题 5.10 也应被视为提供了我们所能要求的全部稳定性信息。因此，下面的命题 5.12 将假设 Γ 是离散的。

为了比较基谱，我们先介绍以下定义。

定义 5.11. 设 S 和 $\hat{}$S 是两个多重集，其元素属于 $(\mathrm{R}/\Gamma) \times \mathrm{R}$，且令 $t \geq 0$。S 与 $\hat{}$S 之间的一个**强 *t*-匹配** 是一个双射 $\sigma: \mathrm{S} \to \hat{}\mathrm{S}$，使得对于所有 $([a], \ell) \in \mathrm{S}$，若记 $\sigma([a], \ell) = ([\hat{}a], \ell)$，则存在 $g \in \Gamma$，使得 $|g + \hat{}a - a| \leq t$ 且 $|(g + \hat{}a + \ell) - (a + \ell)| \leq t$。

（我们使用“强”一词，是为了将这一概念与子水平持久性中出现的匹配概念区分开来；后者允许删除元素，且 $\ell \leq 2t$。）

定理 5.12. 假设 Γ 是离散的，并且存在从 P 到 $\hat{}$P 的 t-态射，其中 $t \geq 0$。那么，基谱 $\Sigma(\mathrm{P})$ 与 $\Sigma(\hat{}\mathrm{P})$ 之间存在强 t-匹配。

证明. 证明的大致思路与 [CdSGO16 第 4] 节有些相似：我们使用插值将问题约化为一个局部结果，再通过考察某些矩形测度来证明该结果，不过具体细节有所不同。

通过将 $(\hat{}\mathrm{V}\uparrow, \hat{}\rho_\uparrow)$ 和 $(\hat{}\mathrm{V}\downarrow, \hat{}\rho^\downarrow)$ 替换为 $(\mathrm{V}\uparrow, \hat{}\rho_\uparrow \circ \alpha_\uparrow)$ 和 $(\mathrm{V}\downarrow, \hat{}\rho^\downarrow \circ \alpha^\downarrow)$，不妨假设 $\hat{}\mathrm{V}\uparrow = \mathrm{V}\uparrow$ 且 $\hat{}\mathrm{V}\downarrow = \mathrm{V}\downarrow$，并且 $\alpha_\uparrow$ 和 $\alpha^\downarrow$ 分别是恒等映射。因此，我们有函数 $\rho_\uparrow, \hat{}\rho_\uparrow \colon \mathrm{V}\uparrow \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$，使得 $(\mathrm{V}\uparrow, \rho_\uparrow)$ 和 $(\mathrm{V}\uparrow, \hat{}\rho_\uparrow)$ 都是可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间；同样，我们有函数 $\rho^\downarrow, \hat{}\rho^\downarrow \colon \mathrm{V}\downarrow \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$，使得 $(\mathrm{V}\downarrow, \rho^\downarrow)$ 和 $(\mathrm{V}\downarrow, \hat{}\rho^\downarrow)$ 都是可正交化的 $\Lambda^\downarrow$-空间。此外，$\max |(\rho_\uparrow - \hat{}\rho_\uparrow) \circ \phi_\uparrow)| \leq \mathrm{t}$ 且 $\max |(\rho^\downarrow - \hat{}\rho^\downarrow) \circ \phi^\downarrow| \leq \mathrm{t}$。

对每个 $s \in [0,1]$，令

$$\rho_\uparrow^s = (1-s)\rho_\uparrow + s\hat{\rho}_\uparrow, \qquad \rho_s^\downarrow = (1-s)\rho^\downarrow + s\hat{\rho}^\downarrow.$$

那么对所有 $s \in [0,1]$，$\phi_\uparrow \colon H \to (V\uparrow, \rho_\uparrow^s)$ 以及 $\phi^\downarrow \colon H \to (V\downarrow, \rho^\downarrow{}_s)$ 共同构成一个过滤匹配对，记作 P_s。此外，若 $s, s' \in [0,1]$，则恒等映射给出 P_s 与 $\mathrm{P}_{s'}$ 之间的一个 $(t|s-s'|)$-态射。

因此，只需证明定理 5.12 的以下“局部”版本：

引理 5.13. 假设 Γ 是离散的，且 P 是一个过滤匹配对。那么存在 $\tau(\mathrm{P}) > 0$，使得对于任何其他过滤匹配对 $\hat{}$P，若存在从 P 到 $\hat{}$P 的一个 t-态射，且 $t < \tau(\mathrm{P})$，则 P 与 $\hat{}$P 之间存在一个强 t-匹配。

事实上，假设引理 5.13 成立，则对所有 $s \in [0,1]$，都存在 $\delta_s > 0$，使得若 $s' \in [0,1]$ 满足 $|s-s'| < \delta_s$，则 $\Sigma(\mathrm{P}_s)$ 与 $\Sigma(\mathrm{P}_{s'})$ 之间存在一个强 $t|s-s'|$-匹配。利用 $[0,1]$ 的有限覆盖（由形如 $(s-\delta_s, s+\delta_s)$ 的区间构成），便可找到 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{N-1} < s_N = 1$ 使得对于每个 $i \in \{0, \ldots, N-1\}$，$\Sigma(\mathrm{P}_{s_i})$ 与 $\Sigma(\mathrm{P}_{s_{i+1}})$ 之间存在一个 $t(s_{i+1} - s_i)$-匹配。随后这些匹配的复合将是所需的 t-匹配，介于 $\Sigma(\mathrm{P}_0)$ 与 $\Sigma(\mathrm{P}_1)$ 之间。

因此，为完成定理 5.12 的证明，我们现在证明引理 5.13。由于 Γ 是 R 的离散子群，它要么是 $\Gamma = \{0\}$，要么是 Γ 无限循环群。在前一种情形下，令 $\lambda_0 = \infty$；在后一种情形下，令 λ_0 等于 Γ 的正生成元。设 P 的基谱为 $\{([\mathrm{a}_1], \ell_1), \ldots, ([\mathrm{a}_d], \ell_d)\}$；对于 Γ-陪集 $[\mathrm{a}_i]$ 的代表元 a_i，取该陪集中属于 $\left(-\frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0}{2}\right]$ 的唯一元素。选取 $\tau(\mathrm{P}) > 0$，使得 $\tau(\mathrm{P}) < \frac{\lambda_0}{2}$，并且对于所有 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{d}\}$ 及 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$，要么 $([\mathrm{a}_j], \ell_j) = ([\mathrm{a}_i], \ell_i)$，要么从 $(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_i + \ell_i)$ 到 Γ-轨道 $\{(\mathrm{a}_j + \mathrm{g}, \mathrm{a}_j + \ell_j + \mathrm{g}) | \mathrm{g} \in \Gamma\}$ 的 R^2 中的 ℓ^∞-距离大于 $2\tau(\mathrm{P})$。

对于 a、$b \in \mathrm{R}$，令 $H_\uparrow^{\leq a}, H_\uparrow^{<a}, H_{\geq b}^\downarrow, H_{>b}^\downarrow$ 为式 (5.1) 中定义的 $H^t H$ 的 κ-向量子空间。若 $a' < a$ 且 $b' > b$，并且 $\max\{|a'-a|, |b'-b|\} < \lambda_0$，则类似于

命题 5.7 的证明可知， κ-向量空间

$$V_{[a',a]\times[b,b']} := \frac{H_{\uparrow}^{\le a} \cap H_{\ge b}^{\downarrow}}{(H_{\uparrow}^{<a'} \cap H_{\ge b}^{\downarrow}) + (H_{\uparrow}^{\le a} \cap H_{>b'}^{\downarrow})}$$

维数等于满足以下条件的 i 的个数（计入重数）：集合 $O_i := \{(a_i + g, a_i + \ell_i + g) | g \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2$ 中含有矩形 $[a', a] \times [b, b']$.[10] 中的元素。若 $a' < x' \le a < x$ 且 $b' > y' \ge b > y$，则包含映射 $H_{\uparrow}^{\le a} \subset H_{\uparrow}^{\le x}$, $H_{\uparrow}^{<a'} \subset H_{\uparrow}^{<x'}$, $H_{\ge}^{\downarrow} b \subset H_{\ge}^{\downarrow} y$, 和 $H_{>}^{\downarrow} b, \subset H_{>}^{\downarrow} y'$ 诱导出映射 $V_{[a',a]\times[b,b']} \to V_{[x',x]\times[y,y']}$，且该映射的秩等于满足以下条件的 i 的个数：$O_i$ 中有某个元素同时位于矩形 $[a', a] \times [b, b']$ 和 $[x', x] \times [y, y']$ 中（即位于交集 $[x', a] \times [b, y']$ 中）。

特别地，只要落在 $[a'、a] \times [b、b']$ 或 $[x'、x] \times [y、y']$ 中任意一个区间内的每个 $\cup_i O_i$ 元素事实上都同时落在这两个区间内，包含诱导映射 $V_{[a',a]\times[b,b']} \to V_{[x',x]\times[y,y']}$ 就是一个同构。例如，如果 $([a_i], \ell_i) \in \Sigma(P)$，我们可以令 $x' = a = a_i$ 且 $b = y' = a_i + \ell_i$，由此可知，如果 t 小于上面定义的数 $\tau(P)$，那么包含诱导映射

$$V_{[a_i-2t,a_i]\times[a_i+\ell_i,a_i+\ell_i+2t]} \to V_{[a_i,a_i+2t]\times[a_i+\ell_i-2t,a_i+\ell_i]}$$

是 κ-向量空间之间的一个同构，其维数等于 $([a_i], \ell_i)$ 在 $\Sigma(P)$ 中的重数。

现在假设存在一个从 P 到 $\hat{P}$ 的 t-态射，其中 $t < \tau(P)$。对于闭区间 I、$J \subset \mathbb{R}$，令 $\hat{V}_{I\times J}$ 为与 $V_{I\times J}$ 类似的向量空间，但由 $\hat{P}$ 而非 P 构造，并类似地定义 $\hat{H}_{\uparrow}^{\le a}$、$\hat{H}_{\uparrow}^{<a}$、$\hat{H}_{\ge}^{\downarrow} b$、$\hat{H}_{>}^{\downarrow} b$。由于 $|\rho_{\uparrow} \circ \phi_{\uparrow} - \hat{\rho}_{\uparrow} \circ \hat{\psi}_{\uparrow}| \le t$ 且 $|\rho_{\uparrow} \circ \phi_{\uparrow} - \hat{\rho}_{\uparrow} \circ \hat{\psi}_{\uparrow}| \le t$，对于所有 $a \in \mathbb{R}$，我们都有包含映射 $H_{\uparrow}^{\le a-t} \subset \hat{H}_{\uparrow}^{\le a} \subset H_{\uparrow}^{\le a+t}$、$H_{\uparrow}^{<a-t} \subset \hat{H}_{\uparrow}^{<a} \subset H_{\uparrow}^{<a+t}$、$H_{\ge}^{\downarrow} b+t \subset \hat{H}_{\ge}^{\downarrow} b \subset H_{\ge}^{\downarrow} b-t$，以及 $H_{>}^{\downarrow} b+t \subset \hat{H}_{>}^{\downarrow} b \subset H_{>}^{\downarrow} b-t$。因此，对于任意矩形 $[a'、a] \times [b、b']$，我们有一个由这些包含映射诱导的映射的复合：

$$V_{[a'-t,a-t]\times[b+t,b'+t]} \to \hat{V}_{[a',a]\times[b,b']} \to V_{[a'+t,a+t]\times[b-t,b'-t]}.$$

因此，如果 $([a_i], \ell_i)$ 属于 $\Sigma(P)$ 且重数为正整数 m_i，那么 m_i 维向量空间 $V_{[a_i-2t,a_i]\times[a_i+\ell_i,a_i+\ell_i+2t]} \to V_{[a_i,a_i+2t]\times[a_i+\ell_i-2t,a_i+\ell_i]}$ 的同构可经由 κ-向量空间 $\hat{V}_{[a_i-t,a_i+t]\times[a_i+\ell_i-t,a_i+\ell_i+t]}$ 分解，因此后一个向量空间的维数至少为 m_i。暂将 $\dim_\kappa \hat{V}_{[a_i-t,a_i+t]\times[a_i+\ell_i-t,a_i+\ell_i+t]}$ 记为 $\hat{d}_i$；现在来证明 $\hat{d}_i = m_i$。再次利用 $2t < \lambda_0$，维数 d_i 等于 $\Sigma(\hat{P})$ 中所有元素 $([\hat{a}_j], \hat{\ell}_j)$ 的重数之和，其中 a_j 可在其 Γ-陪集中选取，使其满足 $(\hat{a}_j, \hat{a}_j + \ell_j) \in [a_i - t, a_i + t] \times [a_i + \ell_i - t, a_i + \ell_i + t]$。由于 $t < \tau(P)$，在 Γ 的对角作用下，矩形 $[a_i - t, a_i + t] \times [a_i + \ell_i - t, a_i + \ell_i + t]$ 的轨道随 i 变化两两不相交。因此 $\sum_i \hat{d}_i$ 不大于 $\Sigma(\hat{P})$ 中所有元素的重数之和。但由于 $\Sigma(P)$ 和 $\Sigma(\hat{P})$ 各自都与自由秩 d Γ-模 H tH 的一组基一一对应，这些多重集各自的重数之和为

—

[10] 根据 $\max\{|a' - a|, |b' - b|\} < \lambda_0$ 这一假设，该元素必然是唯一的；若没有这一假设，正确的表述应为：$\dim_\kappa V_{[a',a]\times[b,b']}$ 等于集合 $O_i \cap ([a'、a] \times [b、b'])$ 的基数之和。

其元素的重数之和等于 d。因此，一方面我们得到 $\sum_i \hat{d}_i \leq \sum_i m_i = d$；另一方面，对于每个 i，$\hat{d}_i \geq m_i$，由此确有 $\hat{d}_i = m_i$ 对所有 i均成立。此外，$\Sigma(\hat{P})$ 中按重数计数的 每一个 d 元素，都包含在各个 $\hat{d}_i$所列举的元素之中；否则，就不可能同时满足 $\hat{d}_i = m_i$ 和 $\sum_i m_i = d$。

由此可得 $\Sigma(\hat{P})$ 与 $\Sigma(P)$ 之间存在一个双射，它将 $([\hat{a}],\hat{\ell}) \in \Sigma(\hat{P})$ 映到唯一的 $([a_i], \ell_i)$（其 d_i 个副本之一），其中存在 $g \in \Gamma$ 使得 $(\hat{a} + \hat{g}, \hat{a} + \ell + g) \in [a_i - t, a_i + t] \times [a_i + \ell_i - t, a_i + \ell_i + t]$。于是这个双射就是一个 t-匹配，从而完成引理 5.13 的证明，也就完成了定理 5.12 的证明。□

备注 5.14。反过来，如果 $\Sigma(P)$ 与 $\Sigma(\hat{P})$ 之间存在一个 t-匹配，那么很容易构造出一个从 P 到 $\hat{P}$ 的 t-态射：令 $\alpha_\uparrow$ 和 $\alpha^\downarrow$ 交织对应于在 t-匹配下相对应的 $(R/\Gamma)\times R$ 元素的基元素。因此，上述稳定性定理蕴含一个等距定理（关于配备适当态射伪度量和匹配伪度量的过滤匹配对空间），类似于子水平持久性中熟悉的结论（参见 [CdSGO16]）。

注记 5.15. 如 [UZ16，注记 8.5], a 所示，可以通过如下方式定义 [tt-态射概念的“二参数”版本：对于任意满足$s + t \geq 0$的实数s、t，将 (s、t)-态射定义为满足定义 5.9 中所述数据，但将最后一个项目替换为以下条件

$$\rho_\uparrow \circ \phi_\uparrow - s \leq \hat{\rho}_\uparrow \circ \psi_\uparrow \leq \rho_\uparrow \circ \phi_\uparrow + t, \qquad \rho^\downarrow \circ \phi^\downarrow - s \leq \hat{\rho}^\downarrow \circ \psi^\downarrow \leq \rho^\downarrow \circ \phi^\downarrow \circ + t.$$

于是，(s、t)-态射的存在意味着存在一个“(s、t)-匹配”，即 $\Sigma(P)$ 与 $\Sigma(\hat{P})$ 之间的一个双射，使得对于相互对应的元素 $([a],\ell) \in \Sigma(P)$和 $([\hat{a}],\hat{\ell})$，在各自的 Γ-陪集中适当选取 a、$\hat{a}$ 后，有 $a - s \leq \hat{a} \leq a + t$ ^，且 $a + \ell - s \leq \hat{a} + \ell \leq a + \ell + t$。事实上，考虑过滤匹配对 $\tilde{P}$，其中令 $\tilde{\rho}_\uparrow = \hat{\rho}_\uparrow + s–t\ 2$，且令$\tilde{\rho}^\downarrow = \hat{\rho}^\downarrow + s–t\ 2$，即可从我们已完成的工作中形式地推出这一点。于是，P 与 $\tilde{P}$ 之间存在一个 s+t 2-态射，因此（根据定理 5.12），$\Sigma(P)$ 与 $\Sigma(\tilde{P})$之间存在一个 s+t 2-匹配；进而，由联系 $\Sigma(\tilde{P})$ 与 $\Sigma(\hat{P})$的显然平移关系，即可得到我们的结论。

例如（令$s = 0$），如果 $\Gamma = \{0\}$，那么基谱在如下意义下是单调的：如果 $\hat{\rho}_\uparrow \circ \phi_\uparrow \geq \rho_\uparrow \circ \psi_\uparrow$ 且 $\hat{\rho}^\downarrow \circ \psi^\downarrow \geq \rho^\downarrow \circ \psi^\downarrow$，则存在一个从 $\Sigma(P)$ 到 $\Sigma(\hat{P})$的双射，它将每个 (a, ℓ)映射为 $(\hat{a}, \hat{\ell})$，且满足 $\hat{a} \geq a$和 $\hat{a} + \hat{\ell} \geq a + \ell$。

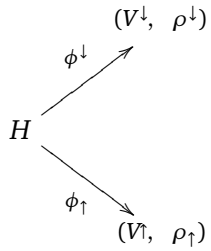
注 5.16. 对 t-态射概念的另一种适度推广，是允许 $(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 和 $(V\downarrow, \rho^\downarrow)$ 彼此独立地变化，因此我们可以选取两个非负数 $t\uparrow, t^\downarrow$，并要求对所有 $x \in V\uparrow \setminus \{0\}$，都有 $|\rho_\uparrow(\phi_\uparrow(x)) - \hat{\rho}_\uparrow(\psi_\uparrow(x))| \leq t\uparrow$；对所有 $x \in V\downarrow \setminus \{0\}$，都有 $|\rho^\downarrow(\phi^\downarrow(x)) - \hat{\rho}^\downarrow(\psi^\downarrow(x))| \leq t^\downarrow$。当然，此时可以在 $t = \max\{t\uparrow, t^\downarrow\}$ 的情况下应用定理 5.12；但如果 $t_\uparrow \neq t^\downarrow$，则有一个稍强的结论。具体来说，定理 5.12 给出的 t-匹配可以满足以下性质：对于匹配的元素 $([a_i],\ell_i),([\hat{a}_i],\ell_i)$ 以及 Γ-陪集的适当代表元 $a_i, \hat{a}_i$，有 $|\hat{a}_i - a_i| \leq t\uparrow$ 和 $|(\hat{a}_i + \hat{\ell}_i) - (a_i + \ell_i)| \leq t^\downarrow$。如果 $t\uparrow, t^\downarrow$ 都非零，则可以通过将 $\rho^\downarrow, \hat{\rho}^\downarrow$ 乘以 $t\ ^\uparrow t\downarrow$，应用定理 5.12

取 $\mathrm{t} = t\uparrow$，然后再次缩放以恢复原来的 $\rho^{\downarrow}, \hat{}\rho^{\downarrow}$。如果 $t^{\downarrow} = 0$（例如），可以注意到，鉴于 Γ 的离散性，对于所有 $0 < t^{\downarrow} < t\uparrow$，存在所需形式的匹配，这意味着对 $t^{\downarrow} = 0$ 也成立，因为如果 $|(\hat{}a_i + \hat{}\ell_i) - (a_i + \ell_i)|$ 足够小，就必定为零。

例如，可以令 $V\uparrow$ 来自某个允许变化的函数的子水平持久性，并令 $V^{\downarrow}$ 来自另一个保持固定的函数的超水平持久性。由此得到的过滤匹配对 P_s 的基谱 $\Sigma(\mathrm{P}_s)$ 将随第一个函数连续变化，而当s 变化时，值 $a + \ell$ for$([a],\ell) \in \Sigma(\mathrm{P}_s)$ 则保持不变。

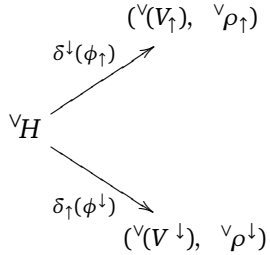
5.2. **对偶性**。 给定一个由以下数据组成的过滤匹配对 P

(5.3)



满足定义 5.1 中的条件后，我们现在定义**对偶匹配对** ${}^{\vee}\mathrm{P}$，其对应数据为

(5.4)



（箭头并未放错位置——请回忆，若 W 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间，那么 ${}^{\vee}W = \overline{\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(W,\ \Lambda_{\uparrow})}$ 是一个 $\Lambda^{\downarrow}$-向量空间，反之亦然。）

构造过程相当直接。首先，我们需要以如下方式定义函数 ${}^{\vee}\rho_{\uparrow}\colon\ {}^{\vee}(\mathrm{V}_{\uparrow}) \to \mathrm{R}\cup\{\infty\}$ 和 ${}^{\vee}\rho^{\downarrow}\colon\ {}^{\vee}(\mathrm{V}^{\downarrow}) \to \mathrm{R}\cup\{-\infty\}$，使得 $({}^{\vee}(\mathrm{V}_{\uparrow}), {}^{\vee}\rho_{\uparrow})$是一个可正交化的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间，而 $({}^{\vee}(\mathrm{V}^{\downarrow}), {}^{\vee}\rho_{\downarrow})$ 是一个可正交化的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间。我们基本上遵循 [UZ16, 第 2 节4], 中的做法；在该文中，对于一个赋范 $\Lambda_{\uparrow}$-空间 (V, ρ)，通过 $\rho^{*}(\zeta) = \sup_{0\neq x\in V}(-\rho(\mathrm{x}) - \nu_{\uparrow}(\zeta(\mathrm{x})))$定义了一个函数$\rho^{*}\colon \mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(\mathrm{V}, \Lambda_{\uparrow}) \to \mathrm{R}\cup\{-\infty\}$。正如在 [UZ16], (中所验证的，${}_{\Lambda_{\uparrow}}(\mathrm{Hom}\,\Lambda_{\uparrow})\mathrm{V}, \rho^{*})$ 随后成为一个赋范 $\Lambda_{\uparrow}$-空间，因此根据注记 4.8 $({}^{\vee}\mathrm{V}, -\rho^{*})$ 是一个赋范 $\Lambda^{\downarrow}$-空间。

因此，对于赋范的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间 $(V\uparrow, \rho_{\uparrow})$，通过对每个 $\zeta \in {}^{\vee}(V_{\uparrow}) = $同态$_{\Lambda_{\uparrow}}(V\uparrow, \Lambda_{\uparrow})$作如下定义，我们得到一个赋范的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间 $({}^{\vee}(V_{\uparrow}), {}^{\vee}\rho_{\uparrow})$，

$$ {}^{\vee}\rho_{\uparrow}(\zeta) = \inf_{0\neq x\in V_{\uparrow}} (\nu_{\uparrow}(\zeta(x)) + \rho_{\uparrow}(x)). $$

类似地，对于赋范的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间 $(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$，通过对每个 $\zeta \in {}^{\vee}(V^{\downarrow})$作如下定义，我们得到一个赋范的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间 $({}^{\vee}(V^{\downarrow}), {}^{\vee}\rho^{\downarrow})$，

$$ {}^{\vee}\rho^{\downarrow}(\zeta) = \sup_{0 \neq x \in V^{\downarrow}} (\nu^{\downarrow}(\zeta(x)) + \rho^{\downarrow}(x)).$$

这足以定义出现在 (5.4) 中的记号 ${}^{\vee}\rho_{\uparrow}, {}^{\vee}\rho^{\downarrow}$。

注5.17。 根据共轭的影响调整符号后， [UZ16，命题 2.20]表明，若 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 是 $V^{\uparrow}$（分别是 $V^{\downarrow}$）的正交基，那么相对于${}^{\vee}\rho_{\uparrow}$或 ${}^{\vee}\rho^{\downarrow}$，对偶基 $\{v_1^*, \ldots, v^*{}_d\}$ 同样是 ${}^{\vee}(V_{\uparrow})$（分别是${}^{\vee}(V^{\downarrow})$）的正交基；此外，对每个 i，均有 ${}^{\vee}\rho_{\uparrow}(v^*{}_i) = \rho_{\uparrow}(v_i)$（分别有 ${}^{\vee}\rho^{\downarrow}(v^*{}_i) = \rho^{\downarrow}(v_i)$）。

接下来，我们定义出现在 (5.4) 中的映射 $\delta^{\downarrow}(\phi_{\uparrow}), \delta_{\uparrow}(\phi^{\downarrow})$。关于这一点，注意以下内容会有所帮助：

命题 5.18. 若H是一个有限生成的 Λ-模，则 $\Lambda^{\downarrow}$-线性映射 β: $\Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} {}^{\vee}H \to {}^{\vee}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H)$, 由以下方式线性延拓定义：

$$(\beta(\mu \otimes \phi))(\lambda \otimes x) = \bar{\mu}\lambda\phi(x)$$

只要 $\mu \in \Lambda^{\downarrow}, \phi \in {}^{\vee}H, \lambda \in \Lambda_{\uparrow}, x \in H$，它就是一个同构。同样地，相同的公式定义了 β 的一个同构，即 $\Lambda_{\uparrow}$-向量空间 $\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} {}^{\vee}H \to {}^{\vee}(\Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} H)$ 之间的同构。

注 5.19. 若 H 是一个自由模，例如其基为 $\{e_1, \ldots, e_r\}$，则我们得到 $\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H$ 的一组基 $\{1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_r\}$，进而得到 ${}^{\vee}H$ 的对偶基 $\{e_1^{\vee}, \ldots, e^{\vee}r\}$ 以及 ${}^{\vee}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H)$ 的对偶基 $\{(1 \otimes e_1)^{\vee}, \ldots, (1 \otimes e_r)^{\vee}\}$。于是 β: $\Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} {}^{\vee}H \to {}^{\vee}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H)$ 是将$1 \otimes (e^{\vee} i) \in \Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} {}^{\vee}H$ 映至 $(1 \otimes e_i)^{\vee} \in {}^{\vee}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H)$ 的同构。然而，我们下面给出的论证不论 H 是否为自由模都适用。

证明。 将命题 4.4 应用于 M等于 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(H, \Lambda)$（因此按定义 ${}^{\vee}H = \bar{M}$），我们的映射是该命题中映射 α 的逆映射与映射γ的复合：$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(H, \Lambda) \otimes_{\Lambda} \Lambda_{\uparrow} \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H, \Lambda_{\uparrow})$ 该映射将纯张量 $\phi \otimes \mu$映射为由纯张量定义的映射 $\lambda \otimes x \mapsto \mu\lambda\phi(x)$。去掉共轭符号，并将此映射 γ视为一个 $\Lambda_{\uparrow}$-线性映射 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(H, \Lambda) \otimes_{\Lambda} \Lambda_{\uparrow} \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H, \Lambda_{\uparrow})$。（请注意，共轭函子不会改变底层的集合论映射。）

略去各种识别 $R \otimes_R N \cong N$（对于 R-模 N），并回忆 $\mathrm{Q}(\Lambda)$ 是 Λ的分式域，映射 γ 分解为

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(H, \Lambda) \otimes_{\Lambda} \mathcal{Q}(\Lambda)) \otimes_{\mathcal{Q}(\Lambda)} \Lambda_{\uparrow} &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}(\Lambda)}(\mathcal{Q}(\Lambda) \otimes_{\Lambda} H, \mathcal{Q}(\Lambda)) \otimes_{\mathcal{Q}(\Lambda)} \Lambda_{\uparrow} \\ &\to \mathrm{Hom}_{\Lambda_{\uparrow}}(\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} H, \Lambda_{\uparrow})\end{aligned}$$

其中两个映射的定义方式都很直接，与 γ 的定义十分相似。上面的第一个映射根据 [Rot09 引理 4.87][11]，是同构；而第二个映射是将 $\mathrm{Q}(\Lambda)$-向量空间 $W := \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_{\Lambda} H$ 的对偶进行系数扩张，与系数扩张 $\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\mathcal{Q}(\Lambda)} W$ 的对偶之间的典范同构。因此， γ 是同构，进而 $\beta = \gamma \circ \alpha^{-1}$ 也是同构。同构 $\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} {}^{\vee}H \cong {}^{\vee}(\Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} H)$ 可由相同论证得到。□

[11]该引理之所以适用，是因为我们的模 H 是在诺特环 Λ 上有限生成的，因此也是有限表示的。

给定具有 (5.3) 中数据的过滤匹配对 P，特别是 $1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\phi_\uparrow\colon \Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda H\to V\uparrow$ 和 $1_{\Lambda\downarrow}\otimes\phi^\downarrow\colon \Lambda^\downarrow\otimes_\Lambda H\to V^\downarrow$ 均为同构，我们将 **这些映射定义为**$\delta_\uparrow(\phi^\downarrow),\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$ **在 (5.4) 中所示的相应复合**

$$^\vee H\longrightarrow \Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda {}^\vee H\xrightarrow{\beta} {}^\vee(\Lambda^\downarrow\otimes_\Lambda H)\xrightarrow{{}^\vee(1_{\Lambda\downarrow}\otimes\phi^\downarrow)^{-1}} {}^\vee(V^\downarrow)$$

and

$$^\vee H\longrightarrow \Lambda^\downarrow\otimes_\Lambda {}^\vee H\xrightarrow{\beta} {}^\vee(\Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda H)\xrightarrow{{}^\vee(1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\phi_\uparrow)^{-1}} {}^\vee(V_\uparrow) \tag{5.5}$$

其中，在每种情况下，第一个映射都是系数扩张，而映射 β 是命题 5.18 中的同构。将 $\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$ 替换为 $1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$，并将 $\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$ 替换为 $1_{\Lambda\downarrow}\otimes\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$，会使上述复合中的第一个映射分别变为恒等映射。因此，由于每种情况下第二个和第三个映射都是同构，可知 $1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$ 和 $1_{\Lambda\downarrow}\otimes\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$ 都是同构。这足以说明，按照我们的定义，(5.4) 中的对偶 $^\vee$P 是一个过滤匹配对。

下面或许给出映射 $\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$和 $\delta^\downarrow(\phi^\uparrow)$的一种更直观的刻画。

命题 5.20. 对于每个 $\zeta\in{}^\vee H$，元素 $\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)(\zeta)\in{}^\vee(V^\downarrow)$ 由以下性质唯一确定：

$$\text{for all } h\in H,\quad \big(\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)(\zeta)\big)(\phi^\downarrow h)=\zeta(h). \tag{5.6}$$

类似地，$\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)(\zeta)\in{}^\vee(V_\uparrow)$ 由以下性质唯一确定：

$$\text{for all } h\in H,\quad \big(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)(\zeta)\big)(\phi_\uparrow h)=\zeta(h).$$

证明。 这两个结论的证明相同，因此我们只证明第一个。满足 $\eta(\phi^\downarrow h)=\zeta(h)$ 对所有 $h\in H$ 成立的 $\eta\in{}^\vee(V^\downarrow)$ 至多只有一个，因为 H 在$\phi^\downarrow$ 下的像张成 $\Lambda^\downarrow$ 上的 $V^\downarrow$，所以我们只需验证 (5.6) 成立。根据定义，

$$\begin{aligned}\big(\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)(\zeta)\big)(\phi^\downarrow h)&=\big({}^\vee(1_{\Lambda\downarrow}\otimes\phi^\downarrow)^{-1}\beta(1\otimes\zeta)\big)(\phi^\downarrow h)\\&=(\beta(1\otimes\zeta))(1\otimes h)=\zeta(h),\end{aligned}$$

正如所需。 □

当 P 有一个双重正交基时，我们可以立即为 $^\vee$P 得到类似的基，如下所示。

命题 5.21. 若 P 是一个具有双重正交基 $\{e_1,\dots,e_d\}$ 的过滤匹配对，则其对偶过滤匹配对具有双重正交基 $\{e_1^*,\dots,e^*{}_d\}$，使得采用 (5.3) 和 (5.4)) 中的记号时，$^\vee\rho_\uparrow(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)e^*{}_i)=\rho_\uparrow(\phi_\uparrow e_i)$ 且 $^\vee\rho^\downarrow(\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)e^*{}_i)=\rho^\downarrow(\phi^\downarrow e_i)$ 对所有 i 均成立。因此，$^\vee$P 与 P 的基谱满足关系

$$\Sigma({}^\vee\mathscr{P})=\{([a_i+\ell_i],-\ell_i)\mid([a_i],\ell_i)\in\Sigma(\mathscr{P})\}.$$

证明。 对于 P，双重正交基 $\{e_1,\dots,e_d\}$ 的存在尤其意味着 $_H\,tH$ 是自由的，其基由 e_i 的陪集 $[e_i]$ 组成。由于 Λ 是整环，我们有 $\mathrm{Hom}_\Lambda(tH,\Lambda)=\{0\}$；将典范正合序列$tH\to H\to{}_H\,tH\to 0$ 取对偶后，可知拉回映射 $^\vee\big({}_H\,tH\big)\to{}^\vee H$ 是一个同构。因此

$^\vee$H 具有一个基 {e* i }，它由以下元素在 H 上的拉回组成：对于 $^\vee\big($H tH $\big)$，{[e$_1$],. . . , [e$_d$]} 的对偶基。由命题 5.20 立即可知，$\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$e*i 与 $\phi^\downarrow$e$_j$ 的配对在 i = j 时为 1，否则为 0。因此，$\{\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)e_1^*, \ldots, \delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$e*d } 是 $\Lambda_\uparrow$-向量空间 $^\vee$(V $^\downarrow$) 的对偶基，对应于 V $^\downarrow$ 的正交基 $\{\phi^\downarrow$e$_1, \ldots, \phi^\downarrow$e$_d\}$。类似地，$\{\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)e_1^*, \ldots, \delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$e*d} 是 V↑ 的正交基 $\{\phi_\uparrow$e$_1, \ldots \phi_\uparrow$e$_d\}$ 的对偶基。根据注 5.17，基 $\{\delta_\uparrow(\phi^\downarrow)e_1^*, \ldots, \delta_\uparrow(\phi^\downarrow)$e*d } 和 $\{\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)e_1^*, \ldots,$ $\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)$e*d } 正交，其 $^\vee\rho^\downarrow$ 和 $^\vee\rho_\uparrow$ 的取值如命题中所述。命题的最后一句直接由此以及基谱的定义得出。□

我们的构造在双对偶下表现良好：

命题 5.22. 对于一个记号如 (5.3) 所示的过滤匹配对 P，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi_\uparrow} & V_\uparrow \\ {\scriptstyle\alpha_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{V_\uparrow}} \\ {}^{\vee\vee}H & \xrightarrow[\delta_\uparrow(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow))]{} & {}^{\vee\vee}V_\uparrow \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi^\downarrow} & V^\downarrow \\ {\scriptstyle\alpha_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{V^\downarrow}} \\ {}^{\vee\vee}H & \xrightarrow[\delta^\downarrow(\delta_\uparrow(\phi^\downarrow))]{} & {}^{\vee\vee}V^\downarrow \end{array}$$

其中 $\alpha_H, \alpha_{V_\uparrow}, \alpha_{V^\downarrow}$ 是来自第 4.3 节的到双对偶的典范映射。

证明. 两个图表的证明相同，因此我们只验证第一个图表的交换性。

设 $h \in H$。根据命题 5.20，$^{\vee\vee}V\uparrow$ 中的元素 $\eta := (\delta_\uparrow(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)))(\alpha_H h)$ 由以下性质唯一确定：每当 $\zeta \in {}^\vee H$ 时，都有 $\eta(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)\zeta) = (\alpha_H h)(\zeta)$。因此，我们只需验证 $\alpha_{V_\uparrow}(\phi_\uparrow h)$ 满足同一性质。对于 $\zeta \in {}^\vee H$，有

$$\begin{aligned}(\alpha_{V_\uparrow}(\phi_\uparrow h))(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow)\zeta) &= \overline{(\delta^\downarrow(\phi_\uparrow\zeta))(\phi_\uparrow h)} \\ &= \overline{\zeta(h)} = (\alpha_H h)(\zeta),\end{aligned}$$

如所 desired，其中在倒数第二个等式中，我们再次使用了命题 5.20。 □

如果 P 是一个过滤匹配对，且记号仍如 (5.3) 所示，那么对于 $d = \dim_{\mathbb{Q}(\Lambda)} \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H$，我们有定义 5.3 中的间隙 G_1(P)、.....、G_d(P)。Q(Λ) ⊗$_\Lambda$ $^\vee H$的维数也等于 d （例如，这可由 [Rot09, 引理 4.87] 得出），因此我们还有间隙 $G_1(^\vee$P)、.....、$G_d(^\vee$P)。如果 P 具有双重正交基（当 Γ为离散时总是如此），那么命题 5.6 和 5.21 蕴含，对于每个 $i = 1$、.....、d，我们有 G_i(P) = $-G_{d+1-i}(^\vee$P) 。更一般地，我们至少有如下不等式：

命题 5.23。 沿用上述记号，对于每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$，我们有 G_i(P) ≤$-G_{d+1-i}(^\vee$P)。

证明。 假设 $c > -G_{d+1-i}(^\vee$P)；只需证明，对于任意线性无关集 $\{h_1, \ldots, h_i\} \subset H$，存在某个 $\ell \in \{1, \ldots, i\}$，使得 $\rho^\downarrow(\phi^\downarrow h_\ell) - \rho_\uparrow(\phi_\uparrow h_\ell) < c$。

现在，假设 $c > -G_{d+1-i}({}^{\vee}\mathrm{P})$ 意味着存在一个线性无关集 $\{\zeta_1,\dots,\zeta_{d+1-i}\} \subset {}^{\vee}H$，使得对于每个 $m \in \{1,\dots,d+1-i\}$，我们有

$$ {}^{\vee}\rho_{\uparrow}(\delta^{\downarrow}(\phi_{\uparrow})\zeta_m) - {}^{\vee}\rho^{\downarrow}(\delta_{\uparrow}(\phi^{\downarrow})\zeta_m) > -c. \tag{5.7}$$

对于任意线性无关集 $\{h_1,\dots,h_i\} \subset H$，$\{1\otimes h_1,\dots,1\otimes h_i\} \subset Q(\Lambda)\otimes_{\Lambda} H$ 的湮灭子是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Q}(\Lambda)}(Q(\Lambda)\otimes_{\Lambda} H, Q(\Lambda))$ 中一个 $(d-i)$ 维子空间。由于将系数扩张到 $Q(\Lambda)$ 后，$(d+1-i)$ 元集合 $\{\zeta_1,\dots,\zeta_{d+1-i}\}$ 变为线性无关集，因此至少有一个 ζ_m with $1 \le m \le d+1-i$ 在 $\{h_1,\dots,h_i\}$ 上不恒为零。因此，选择 $\ell \in \{1,\dots,i\}$ 使得 $\zeta_m(h_\ell) \neq 0$。

根据 ${}^{\vee}\rho_{\uparrow}$ 的定义和命题 5.20，我们有

$${}^{\vee}\rho_{\uparrow}(\delta^{\downarrow}(\phi_{\uparrow})\zeta_m) \le \nu_{\uparrow}((\delta^{\downarrow}(\phi_{\uparrow})\zeta_m)(\phi_{\uparrow}h_\ell)) + \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}h_\ell) = \nu_{\uparrow}(\zeta_m(h_\ell)) + \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}h_\ell);$$

类似地，由 ${}^{\vee}\rho^{\downarrow}$ 的定义可得

$${}^{\vee}\rho^{\downarrow}(\delta_{\uparrow}(\phi^{\downarrow})\zeta_m) \ge \nu^{\downarrow}((\delta_{\uparrow}(\phi^{\downarrow})\zeta_m)(\phi^{\downarrow}h_\ell)) + \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}h_\ell) = \nu^{\downarrow}(\zeta_m(h_\ell)) + \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}h_\ell).$$

因此，由 (5.7) 可得

$$-c < \big(\nu_{\uparrow}(\zeta_m(h_\ell)) + \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}h_\ell)\big) - \big(\nu^{\downarrow}(\zeta_m(h_\ell)) + \rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}h_\ell)\big).$$

但任意非零的 $\lambda \in \Lambda$，例如 $\lambda = \zeta_m(h_\ell)$，都满足 $\nu_{\uparrow}(\lambda) - \nu^{\downarrow}(\lambda) \le 0$，因此由上文可推得

$$-c < -\big(\rho^{\downarrow}(\phi^{\downarrow}h_\ell) - \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow}h_\ell)\big).$$

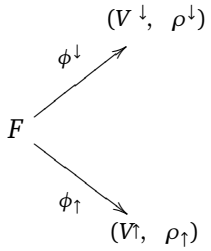
由于数 $c > -G_{d+1-i}({}^{\vee}\mathrm{P})$ 和独立的 i 元素集 $\{h_1,\dots,h_i\} \subset H$ 均为任意选取，这就证实了 $G_i(\mathrm{P}) \le -G_{d+1-i}({}^{\vee}\mathrm{P})$。□

命题 5.23 中的等号是否总是成立，这一点值得探讨。

5.3. **构造双重正交基**。 本节证明定理 5.5：若 Γ 是离散的，则任意过滤匹配对都存在双重正交基。证明相当复杂，而且其中引入的思想在本文其他部分并未用到，因此初次阅读时可以略过。若 $\Gamma = \{0\}$，则所需工作远少于一般离散情形：按下文使用的记号，当 $\Gamma = \{0\}$ 时，映射 $\phi_{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}$ 只是 κ-向量空间之间的同构，此时可将 $\phi_{\uparrow} \circ \phi^{\downarrow -1}$应用于正交可化的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间 $(\bar{V}^{\downarrow}, -\rho^{\downarrow})$ 和 $(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$，再利用 UZ16，定理 3.4]（或 Ba94，引理 2]）得到所需的基。

假设过滤匹配对由映射 $\phi_{\uparrow}: H \to V^{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}: H \to V^{\downarrow}$给出，其中（根据命题 4.10）$(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$是一个可正交化的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间，而 $(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$是一个可正交化的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间。令 F 表示商 H_{tH}；那么 F 是一个自由 Λ-模，因为 H 是一个在 Λ 上有限生成的模，而 Λ 是一个主理想整环，因为 Γ是离散的。由于$\phi_{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}$ 都经由商投影 $H \to F$分解，且该商投影在与 $\Lambda_{\uparrow}$ 或 $\Lambda^{\downarrow}$ 张量积后成为同构，为简化起见，我们只考虑

形如以下形式的过滤匹配对



其中F 是一个有限生成自由的 Λ-模，因为这个滤过匹配对的双重正交基将通过商投影提升为原匹配对的双重正交基。

因此，我们需要证明，自由模 F 存在一个基 $\{e_1,\dots,e_d\}$，使得 $\{\phi_{\uparrow}e_1,\dots,\phi_{\uparrow}e_d\}$ 同时是 $V^{\uparrow}$ 的 $\rho_{\uparrow}$-正交基，而 $\{\phi^{\downarrow}e_1,\dots,\phi^{\downarrow}e_d\}$ 是 $V^{\downarrow}$ 的 $\rho^{\downarrow}$-正交基。第一步已在引理 5.26 中完成，即证明$(V^{\uparrow}\rho_{\uparrow})$和 $(V^{\downarrow}\rho^{\downarrow})$分别都具有正交基，且这些正交基分别是 F 的基 $\{x_1,\dots,x_d\}$ 和 $\{y_1,\dots,y_d\}$ 在 $\phi_{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}$ 下的像；在此基础上，我们将迭代地修改这两个基，同时保持各自的正交性判据，直至它们成为 F 的同一个基。为实现这两个目的，记录一些保持正交性这一性质的一般运算将很有帮助。

命题 5.24. 设 $(V^{\uparrow},\rho_{\uparrow})$ 是一个可正交化的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间，且 $\{v_1,\dots,v_d\}$ 是 $V^{\uparrow}$ 的一个$\rho_{\uparrow}$-正交基。

(i) 若 $\mu_1,\dots,\mu_d$ 是 $\Lambda_{\uparrow}$ 的非零元素，则 $\{\mu_1v_1,\dots,\mu_dv_d\}$ 仍是 $V^{\uparrow}$ 的一个 $\rho_{\uparrow}$-正交基。(ii) 若 $w_1,\dots,w_d\in V^{\uparrow}$ 满足对所有 i 均有 $\rho_{\uparrow}(w_i)<\rho_{\uparrow}(v_i)$，则 $\{v_1+w_1,\dots,v_d+w_d\}$ 仍是 $V^{\uparrow}$ 的一个$\rho_{\uparrow}$-正交基。(iii) 若 $v\in\mathrm{span}^{\Lambda_{\uparrow}}\{v_2,\dots,v_d\}$ 满足 $\rho_{\uparrow}(v)\le\rho_{\uparrow}(v_1)$，且若 $\lambda\in\Lambda_{\uparrow}$ 满足 $\nu_{\uparrow}(\lambda)=0$，则 $\{\lambda v_1+v,v_2,\dots,v_d\}$ 仍是 $V^{\uparrow}$ 的一个 $\rho_{\uparrow}$-正交基。

注记 5.25。根据注记 4.8，这个命题蕴含了对可正交化的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间的类似结论，只需将各种出现的 $\rho_{\uparrow}$ 替换为 $(-\rho^{\downarrow})$。具体而言，(ii) 的 $\Lambda^{\downarrow}$版本（将在引理 5.26 的证明中用到）指出：若 $(V^{\downarrow},\rho^{\downarrow})$ 有一组正交基 $\{v_1,\dots,v_d\}$，且对每个i都有 $\rho^{\downarrow}(w_i)>\rho^{\downarrow}(v_i)$，那么 $\{v_1+w_1,\dots,v_d+w_d\}$ 仍是一组正交基。

证明。(i) 可由以下事实得出：根据一般关系 $\nu_{\uparrow}(\lambda\mu)=\nu_{\uparrow}(\lambda)+\nu_{\uparrow}(\mu)$，对任意 $\lambda_1,\dots,\lambda_d\in\Lambda_{\uparrow}$，我们有

$$\nu_{\uparrow}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\mu_iv_i\right)=\max_i\big(\rho_{\uparrow}(v_i)-\nu_{\uparrow}(\mu_i)-\nu_{\uparrow}(\lambda_i)\big)=\max_i\big(\rho_{\uparrow}(\mu_iv_i)-\nu_{\uparrow}(\lambda_i)\big).$$

对于 (ii)，回想一下，正如注 4.7 中所述，只要 $\rho_{\uparrow}(x)\neq\rho_{\uparrow}(y)$，就有 $\rho_{\uparrow}(x+y)=\max\{\rho_{\uparrow}(x)+\rho_{\uparrow}(y)\}$。给定 $\lambda_1,\dots,\lambda_d\in\Lambda_{\uparrow}$，假设 $\rho_{\uparrow}(w_i)<\rho_{\uparrow}(v_i)$ 对所有 i

意味着

$$\rho_{\uparrow}\left(\sum_i \lambda_i w_i\right) \le \max_i\left(\rho_{\uparrow}(w_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i)\right) < \max_i\left(\rho_{\uparrow}(v_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i)\right) = \rho_{\uparrow}\left(\sum_i \lambda_i v_i\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\rho_{\uparrow}\left(\sum_i \lambda_i (v_i + w_i)\right) &= \rho_{\uparrow}\left(\sum_i \lambda_i v_i + \sum_i \lambda_i w_i\right) = \rho_{\uparrow}\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) \\ &= \max_i\left(\rho_{\uparrow}(v_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i)\right) = \max_i\left(\rho_{\uparrow}(v_i + w_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i)\right).\end{aligned}$$

因此，集合 $\{v_1 + w_1, \ldots, v_d + w_d\}$ 是 $\rho_{\uparrow}$-正交的。由非零向量构成的 $\rho_{\uparrow}$-正交集合必然线性无关，因为正交条件意味着这些向量的任意非平凡线性组合都具有 $\rho_{\uparrow} > -\infty$，而 $\rho_{\uparrow}(0) = -\infty$。因此，由假设 $\dim V^{\uparrow} = d$ 可知，我们的 $\rho_{\uparrow}$-正交集合 $\{v_1 + w_1, \ldots, v_d + w_d\}$ 是 $V^{\uparrow}$ 的一组基。

现在证明 (iii)。首先注意，先用 $\mu_1 = \lambda$ 和 $\mu_2 = \cdots = \mu_d = 1$ 应用 (i) 后，只需证明 $\lambda = 1$ 情况下的 (iii)。由于 $\rho_{\uparrow}(v) \le \rho_{\uparrow}(v_1)$ 和 $v \in$ 张成 $^{\Lambda_{\uparrow}}\{v_2, \ldots, v_d\}$，其中 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 是正交的，因此有 $\rho_{\uparrow}(v_1 + v) = \rho_{\uparrow}(v_1)$。令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \Lambda_{\uparrow}$。若 $\rho_{\uparrow}(v_1 + v) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1) < \max_{i\ge 2}(\rho_{\uparrow}(v_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i))$，则利用注 4.7，

$$\begin{aligned}\rho_{\uparrow}\left(\lambda_1(v_1 + v) + \sum_{i\ge 2}\lambda_i v_i\right) &= \rho_{\uparrow}\left(\sum_{i\ge 2}\lambda_i v_i\right) = \max_{i\ge 2}(\rho_{\uparrow}(v_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i)) \\ &= \max\left\{\rho_{\uparrow}(v_1 + v) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1), \rho_{\uparrow}(v_2) - \nu_{\uparrow}(\lambda_2), \ldots, \rho_{\uparrow}(v_d) - \nu_{\uparrow}(\lambda_d)\right\}.\end{aligned}$$

剩下的情况是 $\rho_{\uparrow}(v_1 + v) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1) \ge \max_{i\ge 2}(\rho_{\uparrow}(v_i) - \nu_{\uparrow}(\lambda_i))$。那么 $\lambda_1 v + \sum_{i=2}^{d} \lambda_i v_i \in \operatorname{span}^{\Lambda_{\uparrow}}\{v_2, \ldots, v_d\}$，其中 $\rho_{\uparrow}\left(\lambda_1 v + \sum_{i=2}^{d} \lambda_i v_i\right) \le \rho_{\uparrow}(\lambda_1 v_1)$，因此由 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 的正交性可得

$$\begin{aligned}&\rho_{\uparrow}\left(\lambda_1(v_1 + v) + \sum_{i=2}^{d}\lambda_i v_i\right) = \rho_{\uparrow}\left(\lambda_1 v_1 + \left(\lambda_1 v + \sum_{i=2}^{d}\lambda_i v_i\right)\right) = \rho_{\uparrow}(\lambda_1 v_1) \\ &= \rho_{\uparrow}(v_1) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1) = \rho_{\uparrow}(v_1 + v) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1) \\ &= \max\left\{\rho_{\uparrow}(v_1 + v) - \nu_{\uparrow}(\lambda_1), \rho_{\uparrow}(v_2) - \nu_{\uparrow}(\lambda_2), \ldots, \rho_{\uparrow}(v_d) - \nu_{\uparrow}(\lambda_d)\right\}.\end{aligned}$$

因此，集合 $\{v_1 + v, v_2, \ldots, v_d\}$（显然是一个基）确实是 $\rho_{\uparrow}$-正交的。 □

现在我们开始构造所需的基。以下始终假设 F 是一个秩为 d 的自由 Λ-模，配备了 Λ-模同态 $\phi_{\uparrow}\colon F \to V^{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}\colon F \to V^{\downarrow}$，其中 $(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$ 是一个可正交化的 $\Lambda_{\uparrow}$-空间，$(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$ 是一个可正交化的 $\Lambda^{\downarrow}$-空间，并且 $1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes \phi_{\uparrow}$ 和 $1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \phi^{\downarrow}$ 是向量空间同构。

引理 5.26。 </style}存在基 $\{x_1, \ldots, x_d\}$ 和 $\{y_1, \ldots, y_d\}$，它们是自由 Λ-模 F 的一组基，使得：

(i) $\{\phi_{\uparrow} x_1, \ldots, \phi_{\uparrow} x_d\}$ 是 $(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$ 的正交基；(ii) $\{\phi^{\downarrow} y_1, \ldots, \phi^{\downarrow} y_d\}$ 是 $(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$ 的正交基；并且

(iii) 对每个 $i \in \{1, \dots, d\}$，$x_i - y_i \in \mathrm{span}_\Lambda\{y_1, \dots, y_{i-1}\}$。

证明。 我们先构造 $\{y_1, \dots, y_d\}$。设 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 是自由模 F 的任意一组基。那么 $\{\phi^\downarrow f_1, \dots, \phi^\downarrow f_d\}$ 是 $V^\downarrow$ 的一组（可能并不正交的）基。根据注 4.8, [UZ16，定理 2.16] 表明，存在 $V^\downarrow, \rho^\downarrow)$ 的一组正交基 $\{v_1, \dots, v_d\}$，使得对于每个 i</style}，都有

$$v_i = \phi^\downarrow f_i + \sum_{j<i} \mu_{ij} \phi^\downarrow f_j$$

对于适当的 $\mu_{ij} \in \Lambda^\downarrow$。这些$v_i$可能不属于 $\phi^\downarrow$的像，因为μ_{ij}可能不属于 $\Lambda^\downarrow$的子集 Λ，但我们可以通过使用命题 5.24（及其注 5.25 中的变体）来解决这个问题。

具体而言，令 $a_0 = \max_i \rho^\downarrow(v_i)$，并令 $d_0 = \min_j \rho^\downarrow(\phi^\downarrow f_j) - a_0$。对于一般元素$\mu \in \Lambda^\downarrow$，使得 μ 具有如下形式：$\sum_{g \in \Gamma} c_g T^g$，其中 $c_g \in \kappa$，并且对于任意$g_0 \in \mathbb{R}$，只有有限多个满足$g \geq g_0$ 的c_g 非零。记作

$$\widehat{\mu} = \sum_{g \in \Gamma : g \geq d_0} c_g T^g$$

表示广义幂级数定义 μ 时，幂次不小于d_0的那些项之和。特别地，上文定义 $\widehat{\mu}$ 的和是有限和，因此$\widehat{\mu} \in \Lambda$。此外，$\nu^\downarrow(\widehat{\mu} - \mu) < d_0$。因此，对于每个$i$ 和j 以及每个 $\mu \in \Lambda^\downarrow$，我们有

$$\rho^\downarrow\left((\widehat{\mu} - \mu)\phi^\downarrow f_j\right) > \rho^\downarrow(\phi^\downarrow f_j) - d_0 \geq a_0 \geq \rho^\downarrow(v_i).$$

因此，根据注 5.25，若令

$$\widehat{v}_i = v_i + \sum_{j<i} (\widehat{\mu}_{ij} - \mu_{ij})\phi^\downarrow f_j = \phi^\downarrow f_i + \sum_{j<i} \widehat{\mu}_{ij} \phi^\downarrow f_j$$

then $\{\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$ 将是 $V^\downarrow$ 的正交基。因此，定义元素 $y_i \in F$ 如下：

$$y_i = f_i + \sum_{j<i} \widehat{\mu}_{ij} f_j;$$

根据构造，$v_i = \phi^\downarrow y_i$，因此 $\{\phi^\downarrow y_1, \dots, \phi^\downarrow y_d\}$ 是 $V^\downarrow$ 的正交基。此外，由于 $\{y_1, \dots, y_d\}$ 与 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 之间由一个对角线上全为 1 的三角形 Λ 值矩阵联系，而 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 是 Λ-模 F 的基（而不仅仅是极大线性无关集），这意味着 $\{y_1, \dots, y_d\}$ 也是 F 的基。

现在我们有了基 $\{y_1, \dots, y_d\}$，构造 $\{x_1, \dots, x_d\}$ 的方法基本相同（需调整符号），只需以 $\{y_1, \dots, y_d\}$ 代替 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 作为初始基。 [UZ16，定理 2.16] 给出了 $V^\uparrow$ 的一个正交基 $\{w_1, \dots, w_d\}$，其中每个 w_i 的形式为

$$w_i = \phi_\uparrow y_i + \sum_{j<i} \lambda_{ij} \phi_\uparrow y_j$$

$\widehat{}$与 $\lambda_i \in \Lambda_\uparrow$。如果令 λ_{ij}表示从 Λ中删去 λ_{ij}所有含有幂次 T^d 且满足 $d > \max_j \rho_\uparrow(\phi_\uparrow y_j) - \min_i \rho_\uparrow(w_i)$的项后得到的元素，那么元素$x_i = y_i + \sum_{j<i} \widehat{\lambda}_{ij} y_j$ 显然构成了满足性质 (iii) 的F 的一组基，这一

引理，而命题 5.24 (ii) 蕴含 $\{\phi_\uparrow x_1, \dots, \phi_\uparrow x_d\}$ 是$(V\uparrow, \rho_\uparrow)$ 的一组正交基。□

有了引理 5.26 中 F 的基 $\{x_1, \dots, x_d\}$ 和 $\{y_1, \dots, y_d\}$，我们着手描述一个线性代数过程，对这些基进行修改，直至它们成为同一个公共的双重正交基。令 M 表示一个系数属于 Λ 的 $d \times d$ 矩阵，它以如下意义关联我们的两个基：$x_j = \sum_{i=1}^{d} M^{ij} y_i$。因此，由引理 5.26(iii) 可知，M 是单位三角的，即上三角且所有对角线元素均为 1。对基 $\{x_1, \dots, x_d\}$（分别地，$\{y_1, \dots, y_d\}$）的变换当然对应于对 M 的列变换（分别地，行变换）；我们希望仅限于那些对应于基变换的行或列运算，这些基变换保持如下性质：$\{\phi_\uparrow x_1, \dots, \phi_\uparrow x_d\}$ 和 $\{\phi^\downarrow y_1, \dots, \phi^\downarrow y_d\}$ 分别是 $\rho\uparrow$-正交和$\rho^\downarrow$-正交的。为此，除基变换矩阵 M 外，我们还记录数值 $\xi_i = \rho_\uparrow(\phi_\uparrow x_i)$ 和 $\eta_j = \rho^\downarrow(\phi^\downarrow y_j)$。

定义 5.27。 A **带标记的基变换矩阵** 是一个三元组 $\mathcal{M} = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$，其中 M 是一个系数取自 Λ 的可逆矩阵，假设其大小为 $d \times d$，且 $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^d$。

引入下面这个量会很有帮助：

定义 5.28。 设 $\mathcal{M} = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 是一个带有如下性质的带标记的基变换矩阵：M 是单位三角的。$\mathcal{M}$ 的**失配度**定义为这个数

$$m(\mathcal{M}) = \sum_{i<j} |(\eta_i - \xi_i) - (\eta_j - \xi_j)|.$$

现在考虑带标记的基变换矩阵 $(M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 的一些变换，它们对应于对基 $\{x_1, \dots, x_d\}$ 和/或 $\{y_1, \dots, y_d\}$ 的修改，并且保持所需的正交性：

(A1) 重新排列 y_i，例如交换 y_i 和 y_j，对应于交换 M 的第 i 行和第 j 行，同时交换 η_i 和η_j。(A2) 将基元素 x_j 乘以 Λ 中的一个单位（它必定具有 $aT\,g$ 的形式，其中 $a \in \kappa^\times$ 且 $g \in \Gamma$），对应于将 M 的第 j 列乘以 $aT\,g$，同时从 ξ_j中减去 g。(A3) 根据命题 5.24 和注 5.25，对某些不同的 i 和 j，令 $y'j = y_j + \mu y_i$，并令所有其他 $y'k = y_k$，由此得到的基 $\{y'_1, \dots, y'd\}$ 在满足 $\rho^\downarrow(\mu y_i) \geq \rho^\downarrow(y_j)$ 时仍具有 $\{\phi^\downarrow y'_1, \dots, \phi^\downarrow y'd\}$ 为 $\rho^\downarrow$-正交的性质。这对应于从第 i 行减去 μ 倍的第 j 行，同时保持所有 η_k, ξ_k不变，条件是 $\nu^\downarrow(\mu) \leq \eta_i - \eta_j$。(A4) 与 (A3) 类似，命题 5.24 表明，对某些不同的 i 和 j，令 $x'j = x\,j + \mu x_i$，并令所有其他 $x'k = xk$，由此得到的基 $\{x'_1, \dots, x'd\}$ 在满足 $\rho_\uparrow(\mu x_i) \leq \rho_\uparrow(x\,j)$ 时仍具有 $\{\phi_\uparrow x'_1, \dots, \phi_\uparrow x'd\}$ $\rho\uparrow$-正交的性质。这对应于将 μ 倍的第 i 列加到第 j 列，同时保持所有 η_k, ξ_k 不变，条件是 $\nu_\uparrow(\mu) \geq \xi_i - \xi_j$。

(A5) 推广 (A4)，设 $Z = \begin{pmatrix} d\lambda^{i} & \mu \\ & d_j \end{pmatrix}$是一个在 Λ 上可逆的 2×2 矩阵，其中 $\nu_\uparrow(d_i) = \nu_\uparrow(d_j) = 0$，且 $\nu_\uparrow(\lambda) > \xi_j - \xi_i$，而 $\nu_\uparrow(\mu) \geq \xi_i - \xi_j$（对应于

条件 $\rho_\uparrow(\lambda x_j) < \rho_\uparrow(x_i)$ 和 $\rho_\uparrow(\mu x_i) \le \rho_\uparrow(x_j)$）。命题 5.24 表明，通过令 $x'_i = d_i x_i + \lambda x_j$、$x'_j = \mu x_i + d_j x_j$，并令其余所有 $x'_k = x_k$，得到的基 $\{x'_1, \dots, x'_d\}$ 仍将满足 $\{\phi_\uparrow x'_1, \dots, \phi_\uparrow x'_d\}$ $\rho_\uparrow$-正交。对带标记基变换矩阵 $(M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 所作的相应运算保持 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ 不变，并将 M 右乘以 $d \times d$ 矩阵 E；该矩阵除 $E_{ii} = d_i$、$E_{ij} = \mu$、$E_{ji} = \lambda$、$E_{jj} = d_j$ 外均与恒等矩阵相同（同样需满足条件 $\nu_\uparrow(d_i) = \nu_\uparrow(d_j) = 0$, $\nu_\uparrow(\lambda) > \xi_j - \xi_i$ 和 $\nu_\uparrow(\mu) \ge \xi_i - \xi_j$）。

鉴于引理 5.26，要证明定理 5.5，只需证明：若 $M = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 是任意一个带标记的基变换矩阵，且 M 是单位三角的，则存在一列由上述 (A1)、(A2)、(A3)、(A4)、(A5) 类型运算组成的序列，可将 M 化为恒等映射（此时，相应的基 $\{x'_1, \dots, x'_d\}$ 和 $\{y'_1, \dots, y'_d\}$ 将彼此相等，并且仍满足 $\{\phi_\uparrow x'_1, \dots, \phi_\uparrow x'_d\}$ 是 $\rho_\uparrow$-正交的，$\{\phi^\downarrow y'_1, \dots, \phi^\downarrow y'_d\}$ 是 $\rho^\downarrow$-正交的；因此 $\{x'_1, \dots, x'_d\} = \{y'_1, \dots, y'_d\}$ 将构成一个双正交基）。为便于归纳论证，我们将证明一个更具体的命题，其中包含有关标签 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 的信息。首先给出以下定义。

定义 5.29. 设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$。$\vec{\alpha}$ 的**简单压缩** 是一个元素 $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$，满足：对于某个互不相同的 k，$\ell \in \{1, \dots, d\}$，有

$$\beta_k + \beta_\ell = \alpha_k + \alpha_\ell, \quad |\beta_k - \beta_\ell| < |\alpha_k - \alpha_\ell|, \text{ and } \beta_i = \alpha_i \text{ for all } i \notin \{k, \ell\}.$$

α 的**压缩**是一个元素 $\vec{\alpha}' \in \mathbb{R}^d$，满足：对于某个 $m \ge 1$，存在 $\vec{\alpha}^{(0)} = \alpha, \vec{\alpha}^{(1)}, \dots, \vec{\alpha}^{(m)} = \vec{\alpha}'$，使得对于每个 $i \in \{0, \dots, m-1\}$，$\vec{\alpha}^{(i+1)}$ 都是 $\vec{\alpha}^{(i)}$ 的简单压缩。

以下内容将会很有帮助（参见定义 5.28）：

命题 5.30. 假设 $\vec{\alpha}'$ 是 $\vec{\alpha}$ 的压缩。那么

$$\sum_{i<j} |\alpha'_i - \alpha'_j| < \sum_{i<j} |\alpha_i - \alpha_j|.$$

证明. 由传递性，只需证明简单压缩的情形，因此假设对于某个 k，ℓ，例如 $\alpha'_k \le \alpha'_\ell$，有 $\alpha'_k + \alpha'_\ell = \alpha_k + \alpha_\ell$，$|\alpha'_k - \alpha'_\ell| < |\alpha_k - \alpha_\ell|$，且对于所有 $i \notin \{k, \ell\}$，均有 $\alpha'_i = \alpha_i$。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，若 t 不位于开区间 $(\alpha'_k, \alpha'_\ell)$ 内，则

$$|t - \alpha'_k| + |t - \alpha'_\ell| = |2t - (\alpha'_k + \alpha'_\ell)| = |2t - (\alpha_k + \alpha_\ell)| \le |t - \alpha_k| + |t - \alpha_\ell|;$$

另一方面，若 t 确实属于 $(\alpha'_k, \alpha'_\ell)$ 那么

$$|t - \alpha'_k| + |t - \alpha'_\ell| = |\alpha'_k - \alpha'_\ell| < |\alpha_k - \alpha_\ell| \le |\alpha_k - t| + |t - \alpha_\ell|.$$

因此，事实上，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $|t - \alpha'_k| + |t - \alpha'_\ell| \le |t - \alpha_k| + |t - \alpha_\ell|$。对 $i \notin \{k, \ell\}$ 取 $t = \alpha_i$ 并应用这一结论，可知在满足 $\{i, j\} \ne \{k, \ell\}$ 的情况下，$\sum_{i<j} |\alpha'_i - \alpha'_j|$ 中这些项的和不超过 $\sum_{i<j} |\alpha_i - \alpha_j|$ 中相应项的和。因此，由于 $|\alpha'_k - \alpha'_\ell| < |\alpha_k - \alpha_\ell|$，结论得证。□

接下来给出定理 5.5 证明中的主要技术要素。

命题 5.31. 设 M $=(M,\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个带标记的基变换矩阵，且 M 是一个$d\times d$单位三角矩阵，并假设 Γ是离散的。那么，经过一系列类型为 (A1)、(A2)、(A3)、(A4)、(A5) 的运算，M 可以转化为一个形式为 M′ $=(I,\vec{\xi}',\vec{\eta}')$的带标记的基变换矩阵，其中 I是$d\times d$恒等映射，且元组 $(\eta_1'-\xi_1',\dots,\eta'_d-\xi'_d)$要么等于 $(\eta_1-\xi_1,\dots,\eta_d-\xi_d)$，要么是其压缩。

证明。 证明采用对维数的归纳法，因此我们假设，对于所有满足$k\times k$ 标签的单位三角基变换矩阵，只要$k<d$，结论均成立。

若 M 是 d ×d 且为单位三角矩阵，并且 $\ell\in\{2,\dots,\mathrm{d}\}$，令 M$(\ell)$ 表示 M 的右下$(\mathrm{d}-\ell+1)\times(\mathrm{d}-\ell+1)$分块（因此 M$(\ell)$的元素为 M$_{ij}$，其中 i、j 均满足 $\geq\ell$）。那么 M(ℓ) 仍为单位三角矩阵。给定一个作用于类型为 (A1)-(A5) 的带标签 $(\mathrm{d}-\ell+1)\times(\mathrm{d}-\ell+1)$基变换矩阵的运算，该运算以显而易见的方式扩展为作用于带标签 d ×d 基变换矩阵的运算，且仍属于类型 (A1)-(A5)：若原运算在矩阵层面由左乘或右乘一个 $(\mathrm{d}-\ell+1)\times(\mathrm{d}-\ell+1)$矩阵 E 给出，则扩展后的运算由左乘或右乘分块矩阵 $\begin{pmatrix}\mathrm{I}&0\\0&\mathrm{E}\end{pmatrix}$实现，而对标签 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的运算则直接扩展。扩展后的运算对右下块 M(ℓ) 的作用与原运算相同；它不影响 M 的左上 $(\ell-1)\times(\ell-1)$ 块；对于一般矩阵 M，虽然它可能影响其他块，但会保持左下块中 $\mathrm{M}_{ij}=0$ 对所有 i $\geq\ell$ 和 j $<\ell$成立这一条件。

取命题陈述中的矩阵 $=(M、\vec{\xi},\vec{\eta})$，我们可以对带有标签 $(\xi_2,\dots\xi_d)$ 和 $(\eta_2,\dots\eta_d)$ 的 $(d-1)\times(d-1)$ 子矩阵 $M(2)$ 应用归纳假设，并按照前一段中所述的方式将运算序列扩展到 M。这样便可将问题化归为 $M(2)$ 是单位矩阵的情形，因此 M 具有如下形式：

$$M=\begin{pmatrix}1&f_2&f_3&\cdots&f_d\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\tag{5.8}$$

现在我们的任务是消去各项f_i。对于 $k\in\{1,\dots,d\}$，若一个 $d\times d$-矩阵 M 满足：只要 $i\geq 2$ 或 $j\leq$ 不大于 k，$M_{ij}=\delta_{ij}$ 就等于克罗内克δ，那么称它为 k-**清零的**。因此，(5.8) 中的矩阵是 1-清零的；当且仅当对所有 $j\leq$ 不大于 k，$f_j=0$ 时，它是 k-清零的。

我们的归约过程的主要步骤包含在以下引理的证明中：

引理 5.32. 设 M $=(M,\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个带标记的基变换矩阵，且$d\times d$矩阵M是k-清除的，其中某个$k\in\{1,\dots,d-1\}$。那么存在一系列(A1)-(A5)型操作，将 M 转换为带标记的基变换矩阵 M′ $=(M',\vec{\xi}',\vec{\eta}')$，使得以下条件之一成立：

- M'是 $(k+1)$-清除的，且 $\vec{\xi}'=\vec{\xi}$和 $\vec{\eta}'=\vec{\eta}$；或者
- M'是k清理的，并且 $(\eta'_1-\xi'_1,\dots,\eta'_d-\xi'_d)$是 $(\eta_1-\xi_1,\dots,\eta_d-\xi_d)$的压缩。

现在我们在假设引理 5.32 成立的前提下完成命题 5.31 的证明（因此，如命题前所述，也完成定理 5.5 的证明），并将引理 5.32 的证明推迟到本节末尾。

剩下的主要观察是，由于 Γ 的离散性，若我们迭代应用引理 5.32，那么在迭代过程中，失配度 m 只能取有限多个值。为此，任取带标记的基变换矩阵 $\mathrm{M} = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$令

$$\mathscr{S}(\mathscr{M}) = \{(\eta_i - \xi_j) - (\eta_k - \xi_\ell) + g | 1 \le i, j, k, \ell \le d,\ g \in \Gamma\}.$$

因此，$\mathrm{S}(\mathrm{M})$ 是离散子群 $\Gamma < \mathrm{R}$ 的有限个陪集之并，故 $\mathrm{S}(\mathrm{M})$ 是 R 的离散子集。在运算 (A1)–(A5) 中，只有 (A1)（交换两个 η_i）和 (A2)（从某个 ξ_i 中减去 Γ 的一个元素）会改变标签 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$。由于 Γ 是 R 的加法子群，可知只要 M' 是通过 (A1)–(A5) 中某个运算从 M 得到，就有 $\mathrm{S}(\mathrm{M}') = \mathrm{S}(\mathrm{M})$；因此，只要 M' 是通过一系列此类运算从 M 得到，该结论同样成立。

给定 $\mathrm{M} = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 如命题陈述所示。正如前面指出的，我们可以对 $\mathrm{M}(2)$ 应用归纳假设，将问题化简为 M 已经 1-清除的情形，从而可以应用引理 5.32。令 $\mathrm{M}^{(0)} = \mathrm{M}$，并归纳地假设 $\mathrm{M}^{(i)} = (\mathrm{M}^{(i)}, \vec{\xi}^{(i)}, \vec{\eta}^{(i)})$ 是 k_i-清除的，其中 $\mathrm{k}_i < \mathrm{d}$。令 $\mathrm{M}^{(\mathrm{i}+1)}$ 为对 $\mathrm{M}^{(i)}$ 应用引理 5.32 后得到的结果。由前一段可知，对所有 i，$\mathrm{S}(\mathrm{M}^{(\mathrm{i})}) = \mathrm{S}(\mathrm{M}^{(0)})$。此外，由命题 5.30，失配度 $\mathrm{m}(\mathrm{M}^{(i)})$ 满足 $\mathrm{m}(\mathrm{M}^{(\mathrm{i}+1)}) \le \mathrm{m}(\mathrm{M}^{(\mathrm{i})})$，且仅当 $\mathrm{M}^{(i+1)}$ 是 $(\mathrm{k}_i + 1)$-清除的时等号成立。现在，失配度 $\mathrm{m}(\mathrm{M}^{(\mathrm{i})})$ 构成一个非递增序列，其取值属于由离散集 $\mathrm{S}(\mathrm{M}^{(0)})$ 中元素的绝对值构成的有限和集合；该和集本身是一个非负离散数集。然而，非负离散数集中的任何非递增序列最终都必须稳定：存在 i_0，使得当 $\mathrm{i} \ge \mathrm{i}_0$ 时，$\mathrm{m}(\mathrm{M}^{(i+1)}) = \mathrm{m}(\mathrm{M}^{\mathrm{i}})$。在此后的迭代中，引理 5.32 中的第一种情况必定始终成立，因此，由于 $\mathrm{M}^{(i_0)}$ 是 k_{i_0}-清除的，可知 $\mathrm{M}^{(i_0+\mathrm{d}-\mathrm{k}_{i_0})}$ 是 d-清除的，也就是说，它等于单位矩阵。因此，取 $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^{(i_0+\mathrm{d}-\mathrm{k}_{i_0})}$ 即可使命题成立，从而完成除引理 5.32 外的证明。□

引理 *5.32* 的证明。 我们的输入是一个带标记的基变换矩阵 $\mathrm{M} = (M, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ 使得 $M_{ij} = \delta_{ij}$ 对所有 $i \ge 2$ 成立，且 $M_{1j} = \delta_{1j}$ 对所有 $j \le k$ 成立，因此 M 第一行中对角线外第一个（可能非零的）元素是 $f := M_{1,k+1}$。我们的任务是使用运算 (A1)-(A5)，要么消去 f 同时保持 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$，要么在压缩向量 $\vec{\eta} - \vec{\xi}$ 的同时保留其 k-已清除的性质。

根据定义，f 是群代数 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$ 中的一个元素，因此可写成 $f = \sum_{g \in \Gamma} a_g T^g$，其中某些 $a_g \in \kappa$（其中只有有限多个非零）。我们将这个和拆分如下：

$$f = \underbrace{\sum_{g \le \eta_1 - \eta_{k+1}} a_g T^g}_{f_-} + \underbrace{\sum_{\eta_1 - \eta_{k+1} < g < \xi_1 - \xi_{k+1}} a_g T^g}_{f_0} + \underbrace{\sum_{g \ge \xi_1 - \xi_{k+1}} a_g T^g}_{f_+}.$$

（如果 $\eta_1 - \eta_{k+1} \ge \xi_1 - \xi_{k+1}$ 这样的分解并不唯一，但我们选取其中一种。）因此 $\nu^{\downarrow}(f_-) \le \eta_1 - \eta_{k+1}$，且 $\nu_{\uparrow}(f_+) \ge \xi_1 - \xi_{k+1}$。于是我们可以应用操作 (A3)，将

f_-倍的第 $k+1$行减去第 1 行；由于第 $k+1$行是 $(k+1)$个标准基向量，这唯一的效果是将 $M1,_{k+1}$ 从 f 变为 f_0+f_+。然后应用操作 (A4)，将f_+ 倍的第 1 列减去第 $k+1$列。此后，$M1,_{k+1}$ 将等于 f_0，而矩阵 M的其余部分以及标签 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$，都与证明开始时保持不变。根据构造，我们有

$$\nu_\uparrow(f_0) > \eta_1 - \eta_{k+1} \text{ and } \nu^\downarrow(f_0) < \xi_1 - \xi_{k+1}. \tag{5.9}$$

如果$f_0 = 0$（当 $\eta_1-\eta_{k+1} \geq \xi_1-\xi_{k+1}$时，情况将自动如此），那么我们就完成了：此时矩阵已被 $(k+1)$ 消去，标签 $\vec{\xi}$和 $\vec{\eta}$保持不变，因此引理结论中的第一个备选情况成立。

因此，在证明的其余部分中，设 $f_0 \neq 0$。那么，f_0 中的最低次数项具有 aT^g 的形式，其中 $a \in \kappa^\times$ 且 $\eta_1 - \eta_{k+1} < g < \xi_1 - \xi_{k+1}$；将其因式分解出来，并将 f_0 表示为如下形式

$$f_0 = aT^g(1-r) \text{ where } a \in \kappa^\times,\ \eta_1 - \eta_{k+1} < g < \xi_1 - \xi_{k+1}\ \ \nu_\uparrow(r) > 0.$$

（这包括 $r = 0$的可能性，因为 $\nu_\uparrow(0) = \infty$。）由于 $\nu_\uparrow$ 将乘积转换为和，并且由于 $\nu_\uparrow(r) > 0$，我们可以选取 $N \in \mathrm{N}$，使得

$$\nu_\uparrow(r^{N+1}) > \xi_1 - \xi_{k+1} - g. \tag{5.10}$$

我们将对$i = 1$、$j = k+1$应用 (A5)，并且

$$Z = \begin{pmatrix} -a(1-r) & T^g r^{N+1} \\ T^{-g} & a^{-1}(1+r+\cdots+r^N) \end{pmatrix}.$$

注意，这个Z在 Λ 上可逆：关系 $(1-r)(1+r+\cdots+r_N) = 1-r_N{}^{+1}$意味着 $\det Z = -1$。此外，$\nu_\uparrow(T^{-g}) = -g > \xi_{k+1} - \xi_1$且 $\nu_\uparrow(T_g r_N{}^{+1}) = g + \nu_\uparrow(r^{N+1}) > \xi_1 - \xi_{k+1}$，因此 (A5) 中对$Z$ 的要求确实满足。应用这一变换后，M 中的所有数据均保持不变，唯一变化是对应于第 1 行和$k+1$ 行以及相应列的M主子矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 0 & T^g r^{N+1} + T^g(1-r^{N+1}) \\ T^{-g} & a^{-1}(1+r+\cdots+r^N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T^g \\ T^{-g} & a^{-1}(1+r+\cdots+r^N) \end{pmatrix}.$$

接下来，应用 (A1)（交换第 1 行和第$k+1$行），然后应用 (A2)，将第 1 列乘以T_g，并将第$k+1$列乘以T^{-g}。这一系列运算的结果是一个带标记的基变换矩阵 $\mathrm{M}_{\prime\prime} = (M'', \vec{\xi}'', \vec{\eta}'')$，其中$M''$是如下形式的单位三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & a^{-1}T^{-g}(1+r+\cdots+r^N) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

并且标签 $\vec{\xi}'', \vec{\eta}''$ 与 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ 一致，只是

$$\xi_1'' = \xi_1 - g, \quad \xi_{k+1}'' = \xi_{k+1} + g, \quad \eta_1'' = \eta_{k+1}, \quad \eta_{k+1}'' = \eta_1. \tag{5.12}$$

特别地，我们有

$$(\eta_1'' - \xi_1'') + (\eta_{k+1}'' - \xi_{k+1}'') = (\eta_1 - \xi_1) + (\eta_{k+1} - \xi_{k+1}). \tag{5.13}$$

此外，

$$(\eta_1'' - \xi_1'') - (\eta_1 - \xi_1) = (\eta_{k+1} - \eta_1) + g > 0$$

and

$$(\eta_1'' - \xi_1'') - (\eta_{k+1} - \xi_{k+1}) = \xi_{k+1} - \xi_1 + g < 0,$$

其中我们两次使用了 (5.9)，因为$f_0 = aT_g$ $(1-r)$ 有$g = \nu_\uparrow(f_0) \le \nu^\downarrow(f_0)$。

由 (5.13)，由于 $\eta_1'' - \xi_1''$ 严格位于 $\eta_1 - \xi_1$ 和 $\eta_{k+1} - \xi_{k+1}$之间，我们看到$\eta''_{k+1} - \xi''_{k+1}$ 也严格位于 $\eta_1 - \xi_1$ 和 $\eta_{k+1} - \xi_{k+1}$ 之间，因此 $|(\eta_1'' - \xi_1'') - (\eta''_{k+1} - \xi''_{k+1})| < |(\eta_1 - \xi_1) - (\eta_{k+1} - \xi_{k+1})|$。因此，$\vec{\eta}'' - \vec{\xi}''$ 是 $\vec{\eta} - \vec{\xi}$的简单压缩。

现在，M'' 也许并非 k-清除的，因为我们的行交换可能在第 $k+1$行的对角线上方引入了非零项。不过，我们可以对 $(d-k)\times(d-k)$ 右下块 $M''(k+1)$ 应用归纳假设，其标签为 $\vec{\xi}''(k+1) = (\xi''_{k+1}, \dots, \xi''_d)$ 以及$\vec{\eta}''(k+1) = (\eta''_1, \dots, \eta''_d)$，从而得到 (A1)-(A5)型操作，将 $M''(k+1)$ 变为 $(d-k)\times(d-k)$ 单位矩阵，并得到新标签 $\vec{\xi}'(k+1) = (\xi'_{k+1}, \dots, \xi'_d), \vec{\eta}'(k+1) = (\eta'_{k+1}, \dots, \eta'_d)$，使得 $\vec{\eta}'(k+1) - \vec{\xi}'(k+1)$要么等于 $\vec{\eta}''(k+1) - \vec{\xi}''(k+1)$，要么是它的压缩。将这些作用于右下块 $M''(k+1)$ 的操作以自然方式扩展为作用于整个矩阵 M''的操作后，列 1 至 k 以及第 2 至 k 行仍与单位矩阵中对应的列和行一致；与此同时，它们将较小的 $(d-k)\times(d-k)$ 块变为单位矩阵，因此所得矩阵 M' 仍是 k-清除的。此外，标签 $\vec{\xi}''$ 和 $\vec{\eta}''$ 分别变为 $\vec{\xi}' := (\xi''_1, \dots, \xi''_k, \xi'_{k+1}, \dots, \xi'_d)$ 和 $\vec{\eta}' = (\eta''_1, \dots, \eta''_k, \eta'_{k+1}, \dots, \eta'_d)$。$\vec{\eta}'(k+1) - \vec{\xi}'(k+1)$ 要么等于 $\vec{\eta}''(k+1) - \vec{\xi}''(k+1)$、要么是其压缩这一事实意味着，$\vec{\eta}' - \vec{\xi}'$ 要么等于 $\vec{\eta}'' - \vec{\xi}''$、要么是其压缩。因此，由于 $\vec{\eta}'' - \vec{\xi}''$ 是 $\vec{\eta} - \vec{\xi}$的简单压缩，$\vec{\eta}' - \vec{\xi}'$ 是 $\vec{\eta} - \vec{\xi}$的压缩。于是，我们新的带标记的基变换矩阵 $M' = (M', \vec{\xi}', \vec{\eta}')$ 满足引理 5.32结论的第二种情形，证明完成。□

6. 庞加莱–诺维科夫结构

我们现在引入一种新型结构，它可产生满足某种庞加莱对偶形式的过滤匹配对。我们继续在固定的域 κ 和有限生成子群 $\Gamma < R$ 下进行讨论。

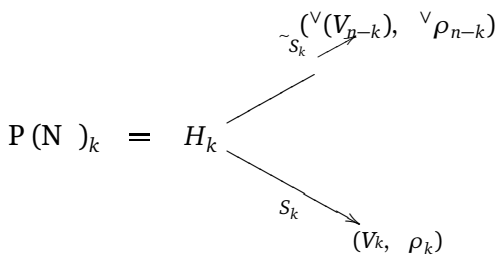
定义6.1. 一个弱（分别地，强）n-**庞加莱–诺维科夫结构** N 由以下数据组成：

- 一个分次 Λ-模 $H_* = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k$，其中每个 H_k 在 Λ 上有限生成；以及映射 $D_k: H_k \to {}^\vee H_{n-k}$，它们构成一个弱（分别地，强）$n$-PD 结构的数据（参见定义 4.12）；
- 对于每个$k \in \mathbb{Z}$，一个赋范的 $\Lambda_\uparrow$-空间 (V_k, ρ_k); 以及

• 对于每个$k \in \mathbb{Z}$，一个 Λ-模的同态$S_k\colon H_k \to V_k$ 使得 $1_{\Lambda_\uparrow} \otimes S_k\colon \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda H_k \to V_k$ 是 $\Lambda_\uparrow$-向量空间的一个同构。

若 N 如定义 6.1 所述，则对每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们得到一个形式如下的过滤匹配对 $\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$

(6.1)



其中，$\vee\rho_{n-k}$按照第 5.2 节中的方式由 ρ_{n-k}定义，并且 $\widetilde{S}_k = \delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathrm{D}_k$。因此，根据命题 5.20，映射 $\widetilde{S}_k\colon H_k \to \vee(V_{n-k})$ 由以下性质刻画：对于所有的$x \in H_k$ 和 $y \in H_{n-k}$，都有

(6.2) $$(\widetilde{S}_k x)(S_{n-k} y) = (\mathscr{D}_k x)(y).$$

现在我们引入一个与庞加莱–诺维科夫结构相关联的条形码。本文中的条形码元素将取为模 Γ-平移的区间，表示如下：

记号 6.2. 设I 是 R 中一个非空区间（可以是任意类型 $[a,b),(a,b],[a,b],(a,b)$，允许在第一种和第四种情形下有$b = \infty$，在第二种和第四种情形下有$a = -\infty$），我们用I^Γ 表示 I 在区间集合 I 上关于等价关系 $\sim$ 的等价类；集合 I 由 R 中所有区间组成。根据该等价关系，对于$I,J \in \mathrm{I}$，$I \sim J$ 当且仅当存在$g \in \Gamma$，使得平移$x \mapsto x + g$ 将I 双射到J。

以下定义中的约定源于第 8.3.3 节中的计算结果；另请参见定义 8.11。

定义 6.3. 设 N 是一个弱 n-庞加莱–诺维科夫结构，且每个 $\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$ 都允许取一个双重正交基。N 的**本质条形码** 是区间多重集 $\{\mathrm{B}_k(\mathrm{N})|k \in \mathbb{Z}\}$ 模 Γ-平移的集合，其中 $\mathrm{B}_k(\mathrm{N})$ 由以下元素组成：对于每个满足 $\ell \geq 0$ 的 $([a],\ell) \in \Sigma(\mathrm{P}(\mathrm{N})_k)$，取元素$[a, a+\ell]^\Gamma$；以及对于每个满足 $\ell < 0$ 的 $([a],\ell) \in \Sigma(\mathrm{P}(\mathrm{N})_{k+1})$，取元素 $(a+\ell, a)^\Gamma$。（这里 $\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$ 的定义见 (6.1)。）

在较弱的假设下，我们可以如下调整定义 5.3 中的间隙：

定义6.4。 如果 N 是一个具有模 H_k（如定义 6.1 中所述）的弱n阶庞加莱–诺维科夫结构，且满足$d_k = \dim_{\mathcal{Q}(\Lambda)} \mathrm{Q}(\Lambda) \otimes_\Lambda H_k$，则对于任意$k \in \mathbb{Z}$ 和$i \in \{1, \ldots, d_k\}$，我们定义

$$\mathscr{G}_{k,i}(\mathscr{N}) = G_i(\mathscr{P}(\mathscr{N})_k).$$

将第 5.1 节中关于过滤匹配对的稳定性结果直接推广，即可证明庞加莱–诺维科夫结构的类似结果。首先，我们定义适当的近似同构概念：

定义 6.5。设 N 和 N′ 是两个弱 n-庞加莱-诺维科夫结构，它们具有相同的模 H_k 和对偶态射 $D_k\colon H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$，以及（可能不同的）赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间 (V_k, ρ_k), $(V'k, \rho' k)$ 和 Λ-模同态 $S_k\colon H_k \to V_k$ 及 $S'k : H_k \to V'k$。若 $t \geq 0$，则从 N 到 N′ 的 t-态射由对每个 k 的 $\Lambda_\uparrow$-线性同构 $a_k\colon V_k \to V'k$ 组成，并满足 $S'k = a_k \circ S_k$，且对所有 $x \in V_k$, $|\rho' k(a_k x) - \rho_k(x)| \leq t$。

命题 6.6. 若弱n-庞加莱-诺维科夫结构 N 与 N′ 之间存在一个t-态射，那么对于每个k，相应的过滤匹配对 $P(N)_k$ 与 $P(N')_k$之间都存在一个t-态射（按定义 5.9 的意义）。

证明。对于定义 5.9 中的映射 $\alpha_\uparrow$，我们可以采用定义 6.5 中的 a_k，因为根据定义，a_k 满足 $S'k = a_k \circ S_k$ 且 $|\rho' k \circ S'k - \rho_k \circ S_k| \leq t$。对于映射 $\alpha^{\downarrow}\colon {}^{\vee}V_{n-k} \to {}^{\vee}V'n\text{–}k$，由于 a_{n-k} 是向量空间同构，我们可以采用映射 ${}^{\vee}a^{-1}\ n\text{–}k$。事实上，若 $x \in H_k$ 且 $y \in H_{n-k}$，则由 (6.2) 得 $(\tilde{}S_k x)(S_{n-k} y) = (\tilde{}S'k\, x)(S'n\text{–}k\, y) = (D_k x)(y)$，因此

$$({}^{\vee}a_{n-k}^{-1}\tilde{S}_k x)(S'_{n-k} y) = (\tilde{S}_k x)(a_{n-k}^{-1} S'_{n-k} y) = (\tilde{S}_k x)(S_{n-k} y) = (\tilde{S}'_k x)(S'_{n-k} y),$$

确认这一点，因为 ${}^{\vee}a^{-1}{}_{n-k}\tilde{}S_k = \tilde{}S'_k$，因为$S'_{n-k}$的像在 $\Lambda_\uparrow$ 上张成V'_{n-k}。此外，若 $\zeta \in {}^{\vee}V'_{n-k}$，则

$${}^{\vee}\rho_{n-k}({}^{\vee}a_{n-k}\eta) = \inf_{0 \neq x \in V_{n-k}} \left(\nu_\uparrow(\zeta(a_{n-k}x)) + \rho_k(x)\right)$$

它与……相差

$${}^{\vee}\rho'_{n-k}(\eta) = \inf_{0 \neq y \in V'_{n-k}} (\nu_\uparrow(\zeta(y)) + \rho'_k(y))$$

至多t，因为a_{n-k}是满射，且根据假设，$|\rho'_{n-k} \circ a_{n-k} - \rho_{n-k}| \leq t$。这表明 $|{}^{\vee}\rho'_{n-k} \circ {}^{\vee}a^{-1}{}_{n-k} - {}^{\vee}\rho_{n-k}| \leq t$，因此满足对 $\alpha^{\downarrow} = {}^{\vee}a^{-1}{}_{n-k}$ 的连续性要求。□

现在可以得出以下稳定性结果。

推论 6.7. 若 N 和 N′ 是弱n-庞加莱–诺维科夫结构，且二者之间存在一个t-态射，那么对于所有k和i，有 $|G_{k,i}(N) - G_{k,i}(N')| \leq 2t$。

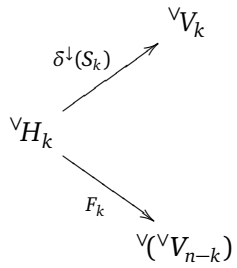
证明。 这直接由命题 5.10 和 6.6 得出。 □

推论 6.8。假设 Γ 是离散的，并且 N 和 N′ 是两个弱 n-Poincaré-Novikov 结构，二者之间存在一个 t-态射。那么存在一个双射σ：$\cup_k B_k(N) \to \cup B_k(N')$，使得每个 $[a, b]^\Gamma \in B_k(N)$ 中的 $\sigma([a, b]^\Gamma)$ 要么等于某个 $[a', b']^\Gamma \in B_k(N')$，要么等于某个 $(b', a')^\Gamma \in B_{k-1}(N')$；在这两种情况下，均有 $|a' - a| \leq t$ 和 $|b' - b| \leq t$。同样地，每个 $(a, b)^\Gamma \in B_k(N')$ 中的 $\sigma((a, b)^\Gamma)$ 要么等于某个$(a', b')^\Gamma \in B_k(N')$，要么等于某个 $[b', a']^\Gamma \in B_{k+1}(N')$；在这两种情况下，均有 $|a' - a| \leq t$ 和$|b' - b| \leq t$,

证明。 这直接由定理 5.12、命题 6.6 以及定义 6.3 中的约定得到。□

现在我们来推导第 5.2 节中对偶性分析的结果。首先，我们利用 (6.1) 找出与庞加莱–诺维科夫结构相关联的过滤匹配对 $P(N)_k$ 的对偶。

命题 6.9。 对于具有上述记号的弱n-庞加莱诺维科夫结构，对偶过滤匹配对 $^{\vee}\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$ （按第 5.2 节中的含义）具有如下形式



其中映射 F_k 满足

$$F_k \circ \mathscr{D}_{n-k} = \pm\alpha_{V_{n-k}} \circ S_{n-k}$$

其中 $\pm$ 是 (4.6) 中的符号，而 $\alpha_{V_{n-k}}\colon V_{n-k} \to {}^{\vee}({}^{\vee}V_{n-k})$ 是第 4.3 节中的同构。

证明。 根据定义，映射 $^{\vee}H_k \to {}^{\vee}V_k$ 在 $^{\vee}\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$ 中等于 $\delta^{\downarrow}(S_k)$。另一个映射 F_k 根据定义等于 $\delta_{\uparrow}(\tilde{S}_k) = \delta_{\uparrow}(\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathrm{D}_k)$，因此我们要证明，对于所有 $y \in H_{n-k}$，

$$\delta_{\uparrow}(\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathscr{D}_k)(\mathscr{D}_{n-k}y) = \pm\alpha_{V_{n-k}}(S_{n-k}y) \tag{6.3}$$

作为 $^{\vee}({}^{\vee}V_{n-k})$ 的元素。由于 $\mathrm{D}k\colon H_k \to {}^{\vee}H_{n-k}$ 和 $\delta^{\downarrow}(S_{n-k})\colon {}^{\vee}H_{n-k} \to {}^{\vee}V_{n-k}$ 在与域 $\Lambda^{\downarrow}$ 张量积后都成为同构，只需证明将 (6.3) 两边作用于 $\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathrm{D}k$ 的像中的任意元素时，两边相等。为验证这一点，根据命题 5.20，我们得到对于任意 $x \in Hk$，

$$\big(\delta_{\uparrow}(\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathscr{D}_k)(\mathscr{D}_{n-k}y)\big)\big((\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathscr{D}_k)x\big) = (\mathscr{D}_{n-k}y)(x),$$

而

$$\big(\alpha_{V_{n-k}}(S_{n-k}y)\big)\big((\delta^{\downarrow}(S_{n-k}) \circ \mathscr{D}_k)x\big) = \overline{(\delta^{\downarrow}(S_{n-k})(\mathscr{D}_k x))(S_{n-k}y)} = \overline{(\mathscr{D}_k x)(y)}.$$

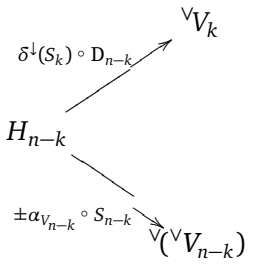
因此，所需的等式体现了对称性（4.6）。 □

推论 6.10. 若 N 是强 n-庞加莱-诺维科夫结构，且每个 $\mathrm{P}(\mathrm{N})_k$ ad- 都有一个双重正交基，则存在一个从 $\cup_k \mathrm{B}_k(\mathrm{N})$ 到其自身的双射，将每个满足 $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ 的元素 $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]^{\Gamma} \in \mathrm{B}_k(\mathrm{N})$ （分别为 $(\mathrm{a}, \mathrm{b})^{\Gamma} \in \mathrm{B}_k(\mathrm{N})$）与 $\mathrm{B}_{n-1-k}(\mathrm{N})$ 中的一个元素 $(\mathrm{a}, \mathrm{b})^{\Gamma}$（分别为 $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]^{\Gamma}$）配对，并将形如 $[\mathrm{a}, \mathrm{a}]^{\Gamma} \in \mathrm{B}_k(\mathrm{N})$ 的任意元素与 $\mathrm{B}_{n-k}(\mathrm{N})$ 中的一个元素 $[\mathrm{a}, \mathrm{a}]^{\Gamma}$ 配对。

证明。注意，在元素 $([\mathrm{a}], \ell) \in (\mathrm{R}/\Gamma) \times \mathrm{R}$ 与模 Γ-平移的区间 $[\mathrm{a}、\mathrm{a} + \ell]^{\Gamma}$(对于 $\ell \geq 0$) 以及 $(\mathrm{a} + \ell、\mathrm{a})^{\Gamma}$(对于 $\ell < 0$) 之间的通常的对应关系下，对合 $([\mathrm{a}], \ell) \leftrightarrow ([\mathrm{a}+\ell], -\ell)$ 对应于交换 $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]^{\Gamma}$ 与 $(\mathrm{a}, \mathrm{b})^{\Gamma}$（除了 $\ell = 0$ 的情况，此时它不起作用）。因此，结合命题 5.21，该陈述等价于以下主张：对于每个 k，基谱 $\Sigma(\mathrm{P}(\mathrm{N})_{n-k})$ 和 $\Sigma(^{\vee}\mathrm{P}(\mathrm{N})_k)$ 相同。根据假设，采用定义 6.1 中的记号，$\mathrm{D}n-k\colon \mathrm{H}_{n-k} \to {}^{\vee}\mathrm{H}k$ 是一个满射，其核等于挠模 tH_{n-k}。因此，由命题 6.9，

$^{\vee}\mathrm{P}(\mathrm{N}\ )_k$ 的双重正交基经由 D_{n-k} 提升为该过滤匹配对的双正交基

(6.4)



根据定义，映射 $\delta^{\downarrow}(S_k)\circ \mathrm{D}_{n-k}$ 等于 $\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k}$ 定义中的映射 $\tilde{}S_{n-k}$。此外，由注 5.17 可知，对于 V_{n-k} 的任意正交基 $\{v_1,\dots,v_d\}$，同构 $\pm\alpha_{V_{n-k}}\colon V_{n-k}\to {}^{\vee\vee}V_{n-k}$ 会将其映射为 $^{\vee\vee}V_{n-k}$ 的一个正交基，其中对于每个 i，都有 $^{\vee\vee}\rho_{\uparrow}(\pm\alpha_{V_{n-k}}v_i)=\rho_{\uparrow}(v_i)$。因此，$\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k}$ 的任意双重正交基也是 (6.4) 中过滤匹配对的双重正交基，并且函数 $\rho_{\uparrow},\rho^{\downarrow}$ 的各种版本在这一对应关系下取值一致。所以确实有$\Sigma(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k})=\Sigma(^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)$ □

在对 N 采用较弱假设的情况下，我们仍有间隙 $\mathrm{G}_{k,i}(\mathrm{N}\ )$ 的对偶不等式：

推论 6.11. 设 N 是一个弱 n-庞加莱–诺维科夫结构，并且对每个 k，令 d_k 如定义 6.4 所述。则 $d_{n-k}=d_k$，并且对所有 $i\in\{1,\dots,d_k\}$，都有 $\mathrm{G}_{n-k,i}(\mathrm{N}\ )+\mathrm{G}_{k,d_k+1-i}(\mathrm{N}\ )\le 0$。

证明。$d_k=d_{n-k}$ 成立，这源于以下事实：采用定义 6.1 中的记号，$\mathrm{Q}(\Gamma)\otimes_{\Lambda}H_k$ 与 $\mathrm{Q}(\Lambda)\otimes_{\Lambda}{}^{\vee}H_{n-k}$ 同构（通过 D_k 的系数扩张）。

根据定义，我们有 $\mathrm{G}_{n-k,i}(\mathrm{N}\ )=\mathrm{G}_i(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k})$，且 $\mathrm{G}_{k,d_k+1-i}(\mathrm{N}\ )=\mathrm{G}_{d_k+1-i}(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)$；而命题 5.23 表明，$\mathrm{G}_i(^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)+\mathrm{G}_{d_k+1-i}(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)\le 0$。因此，只需证明 $\mathrm{G}_i(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k})\le \mathrm{G}_i(^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)$。根据命题 6.9，定义 $\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k}$ 的映射 $\tilde{}\mathrm{S}_{n-k}\colon \mathrm{H}_{n-k}\to {}^{\vee}\mathrm{V}_k$ 和 $\mathrm{S}_{n-k}\colon \mathrm{H}_{n-k}\to \mathrm{V}_{n-k}$，分别经由用于 $^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k$ 的相应映射 $\delta^{\downarrow}(\mathrm{S}_k)$ 和 F_k 分解为

$$H_{n-k}\xrightarrow{\mathscr{D}_{n-k}}{}^{\vee}H_k\xrightarrow{\delta^{\downarrow}(S_k)}{}^{\vee}V_k$$

and

$$H_{n-k}\xrightarrow{\mathscr{D}_{n-k}}{}^{\vee}H_k\xrightarrow{F_k}{}^{\vee}(^{\vee}V_{n-k})\xrightarrow{\pm\alpha^{-1}_{V_{n-k}}}V_{n-k}\ .$$

此外，根据注 5.17，对于所有 $x\in{}^{\vee}(^{\vee}V_{n-k})$，我们有 $^{\vee\vee}\rho_{n-k}(x)=\rho_{n-k}(\pm\alpha^{-1}{}_{V_k}\,x)$。我们的假设意味着 D_{n-k} 虽然不一定是满射，但会将H_{n-k} 的独立子集映射为 $^{\vee}H_k$的独立子集。因此，定义 5.3 将$G_i(^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)$ 定义为上确界时所依据的集合，包含$G_i(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k})$所对应的集合。因此，确有$G_i(\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_{n-k})\le G_i(^{\vee}\mathrm{P}\ (\mathrm{N}\ )_k)$。□

例 6.12. 我们给出一个例子，说明若 N 不是强 Poincaré–Novikov 结构，则推论 6.11 中的不等式可能是严格的。采用定义

6.1 中的记号，取 $n=0$ 和 $H_k=\begin{cases}\Lambda & k=0\\ \{\} & k\neq 0\end{cases}$。唯一非平凡的 V_k 必然对应于 $k=0$，并取 $(V0,\rho_0)=(\Lambda_\uparrow,-\nu_\uparrow)$，映射 $S_0\colon H_0\to V_0$ 取为包含映射$\Lambda\to\Lambda_\uparrow$。为定义 PD 结构，选取 $\alpha\in\Lambda\backslash\{0\}$ 使得 $\bar{\alpha}=\alpha$，并定义 $D_0\colon H_0\to {}^\vee H_0$ 为 $(D_0(\lambda))(\mu)=\alpha\bar{\lambda}\mu$。令 N_α 表示由本段中的数据构成的弱 Poincaré–Novikov 结构。（条件 $\bar{\alpha}=\alpha$ 确保 (4.6) 成立。）

存在一个同构 $\Lambda^\downarrow\to {}^\vee\Lambda_\uparrow$，将 $\mu\in\Lambda^\downarrow$ 映射到映射 $(\lambda\mapsto\bar{\mu}\lambda)$。可以验证，在此同构下，${}^\vee\Lambda_\uparrow$ 上的过滤函数 ${}^\vee\rho_0$ 对应于 $-\nu^\downarrow\colon\ \Lambda^\downarrow\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，并且式 (6.1) 中的映射 $\tilde{S}_0$ 对应于由 α 乘以包含映射给出的映射 $\Lambda\to\Lambda^\downarrow$。

由于$d_0=1$ 以及所有其他d_k 均为零，因此唯一需要考虑的间隙是 $G_{0,1}(N_\alpha)$，而推论 6.11 断言 $2G_{0,1}(N_\alpha)\leq 0$。现在根据定义以及上一段中的识别可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{0,1}(\mathcal{N}_\alpha)&=\sup\left\{\nu_\uparrow(\lambda)-\nu^\downarrow(\alpha\lambda)\middle|\lambda\neq 0\right\}\\&=-\nu^\downarrow(\alpha)+\sup\left\{\nu_\uparrow(\lambda)-\nu^\downarrow(\lambda)\middle|\lambda\neq 0\right\}=-\nu^\downarrow(\alpha)\end{aligned}$$

因此，如果 $\Gamma\neq\{0\}$ 且 $\alpha=T_g+T^{-g}$，其中某个$g>0$ 满足该条件，那么我们有 $G_{0,1}(N_\alpha)=-g<0$，并且推论 6.11 中的不等式确实是严格的。

上面的例子也说明了对称条件 (4.6) 的重要性；我们在命题 6.9 中用到了这一条件。若不要求 (4.6) 成立，我们就可以令 α 为 Λ 中任意一个非零元素，并通过选取满足 $\nu^\downarrow(\alpha)<0$ 的 α，得到一个反例，推翻命题 6.11。

7. 哈密顿弗洛尔理论

现在我们转向促成本研究的情形，即紧致辛流形上哈密顿流的 Floer 理论。我们不打算全面自足地介绍这一主题，相关哈密顿 Floer 同调的一般理论请参阅 [Oh15 第 19 章和 20]（关于辛流形及其上的哈密顿流的基础知识，请参阅 [Oh15] 的第一部分）。当然，Floer 理论还有其他一些变体也适用于我们的方法；例如，可以考虑如 [LO95], 中所述的（不一定是哈密顿的）辛同伦的 Floer 理论，而第 9.3 节关于诺维科夫同调的一些讨论与此相关。不过，我们在此将只关注哈密顿弗洛尔理论。

令 (M,ω)为紧致的 2m 维半正辛流形。[12] 记 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，则 L_0M 表示可缩环路的空间 $\gamma\colon S^1\to M$，而 $\widetilde{L_0M}$ 表示 L_0M 的覆盖空间，其在 $\gamma\in L_0M$ 上方的纤维由等价类 $[\gamma,w]$构成，其中每个等价类由一对 (γ,w) 组成，满足 $w\colon D^2\to M$ 且对所有 t 都有 $w(e^{2\pi it})=\gamma(t)$，其中 (γ,v)与 (γ,w)等价当且仅当 $\int_{D^2}v^*\omega=\int_{D^2}w^*\omega$ 且 $\langle c_1,[\bar{v}\#w]\rangle=0$。这里 $c_1\in H^2(M;\mathbb{Z})$是第一

[12]关于半正性的定义，参见 [Oh15, Definition 19.6.1]；如果采用 [BX22],[Par16] 中的虚拟技术，这个条件应该并非必不可少。不过，在命题 7.7 中，我们将使用一些与 PSS 映射相关的事实；据我所知，在非半正情形下，文献中尚无这些结果。

TM 的陈类，而TM 并且 $[\bar{\ }v\#w]$ 是将圆盘 w 和 v 沿边界粘合后所得球面的同调类，其中v 上的定向反转。

对于一般位置的非退化光滑哈密顿函数 $H\colon S^1 \times M \to \mathrm{R}$，我们于是$\widetilde{\ \ }$有一个作用泛函 $\mathrm{A}_H\colon \mathrm{L}_0M \to \mathrm{R}$，定义如下

$$\mathcal{A}_H([\gamma, w]) = -\int_{D^2} w^*\omega - \int_0^1 H(t, \gamma(t))dt.$$

形式上，Floer 复形 $\mathrm{CF}_*(\mathrm{H})$ 是该作用泛函的诺维科夫复形（定义时借助适当的几乎复结构 J，以便定义梯度流的类比；由于不同选择会导出自然同构的过滤Floer同调群[13]，我们在记号中省略 J）。A_H 的临界点是满足以下条件的$[\gamma,\mathrm{w}]$：γ 是 H 的哈密顿流的闭轨道（采用[Oh15]的符号约定，即 H 的哈密顿向量场在时刻 t 由 $\omega(\mathrm{X}^{H_t}, \cdot) = \mathrm{d}(\mathrm{H}(\mathrm{t}, \cdot))$给出）。这样的临界点对应一个指标 $\mu_H([\gamma,\mathrm{w}]) \in \mathrm{Z}$，在 Floer理论中它取代 Morse指标（因为真正的 Morse指标是无穷的）；我们遵循 [Sal97]中的约定，将 μ_H定义为 $\mathrm{m} - \mu_C\mathrm{Z}(\Psi)$，其中 Ψ是通过平凡化 $\mathrm{w}^*\mathrm{T}\,\mathrm{M}$ 后，由哈密顿流沿 γ 的线性化得到的辛矩阵路径，而 $\mu_C\mathrm{Z}$ 是 Conley–Zehnder指标。按照这一约定，Floer同调与系数扩张的奇异同调之间的同构保持分次。

与有限维Novikov背景不同，投影 $\mathrm{L}_0M \to \mathrm{L}_0M$ 的同一纤维中的两个临界点 $[\gamma, v]$ 和 $\widetilde{[\gamma,w]}$可能具有不同的Conley–Zehnder$\widetilde{\ \ }$指标。准确地说，若 $A \in \pi_2(M)$，且 $[\gamma, w] \in \mathrm{L}_0M$，令 $[\gamma, A\#w]$表示将A的一个代表元与w粘合所得的结果；则有

$$\mu_H([\gamma, A\#w]) = \mu_H([\gamma, w]) - 2\langle c_1, A\rangle \tag{7.1}$$

（这里我们已通过Hurewicz映射将A 隐式映射到$H_2(M; \mathrm{Z})$。类似地，根据A_H的定义，有

$$\mathcal{A}_H([\gamma, A\#w]) = \mathcal{A}_H([\gamma, w]) - \langle[\omega], A\rangle, \tag{7.2}$$

其中 $[\omega]$ 是闭2-形式 ω的de Rham上同调类。

令$I_\omega\colon \pi_2(M) \to \mathrm{R}$和$I_{c_1}\colon \pi_2(M) \to \mathrm{Z}$分别为通过在球面上取值而定义的映射，分别对应于 $[\omega]$ 和c_1，并记

$$\hat{\Gamma} = \frac{\pi_2(M)}{\ker(I_\omega) \cap \ker(I_{c_1})}, \qquad \Gamma' = \frac{\ker(I_{c_1})}{\ker(I_\omega) \cap \ker(I_{c_1})}, \tag{7.3}$$

因此，I_ω 和I_{c_1}下降为定义在$\hat{\Gamma}, \Gamma'$上的映射。因此，$\hat{\Gamma}$是覆盖空间 L_0M的完整甲板变换$\widetilde{\ \ }$群，而 Γ'是保持 A_H的临界点的 Conley–Zehnder 指数 μ_H的子群。对于 R 的子群 Γ（在第4节中用于定义 Λ、$\Lambda_\uparrow$、$\Lambda^\downarrow$），我们使用单同态$I_\omega|_{\Gamma'}\colon \Gamma' \to \mathrm{R}$ 下的像。（特别地，如果 (M是正单调或负单调的，或者是弱正合的，那么 $\Gamma = \{0\}$。）

[13]我们沿用 [HS95] 中的方法来规避气泡问题：令几乎复结构与S^1-变量无关，这要求哈密顿量除满足非退化性外，还满足一个额外的一般性条件。

模去通过对 ω积分给出的 Γ' 与 Γ的识别后，我们的 Novikov域 $\Lambda_\uparrow$ 便与 Oh15 的命题 19.1.5] 中记作 $\Lambda_\omega^{(0)}$ 的域一致。

对于$k \in \mathbb{Z}$，令 $\tilde{P}_k(H)$ 表示 A_H 中满足 $\mu_H([\gamma,w]) = k$ 的临界点 $[\gamma,w]$ 的集合。Floer 复形 $CF_k(H)$ 的次数k 部分由形式和组成

$$\sum_{[\gamma,w]\in\tilde{P}_k(H)} a_{[\gamma,w]}[\gamma,w]$$

其中 $a_{[\gamma,w]} \in \kappa$，并且对于所有 $c \in \mathbb{R}$，只有有限多个 $[\gamma,w]$ 同时满足 $\mathrm{A}_H([\gamma,w]) \geq c$ 和 $a_{[\gamma,w]} \neq 0$。任意 $\lambda \in \Lambda_\uparrow$ 都可写为 $\lambda = \sum_{A\in\ker(I_{c_1})} \lambda_A T^{I_\omega(A)}$，其中对于所有 $c \in \mathbb{R}$，只有有限多个 A 同时满足 $\lambda_A \neq 0$ 和 $I_\omega(A) \leq c$。根据 (7.2) 以及 L0M 上的$\widetilde{\quad}$等价关系的定义，$CF_k(H)$ 是一个 $\Lambda_\uparrow$-向量空间，其数乘为

$$\left(\sum_{A\in\ker(I_{c_1})} \lambda_A T^{I_\omega(A)}\right)\cdot\left(\sum_{[\gamma,w]\in\tilde{P}_k(H)} a_{[\gamma,w]}[\gamma,w]\right) = \sum_{[\gamma,w],A} \lambda_A a_{[\gamma,w]}[\gamma,A\#w].$$

有一个 Floer 边界算子 $\partial_H : CF_k(H) \to CF_{k-1}(H)$，其定义如 [Oh15, 第 19 节2], 所述；还有一个过滤函数 $\ell_\uparrow^H : CF_k(H) \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，定义为 $\ell_\uparrow^H\left(\sum_{[\gamma,w]\in\tilde{P}_k(H)} a_{[\gamma,w]}[\gamma,w]\right) = \max\{\mathrm{A}_H([\gamma,w]) | a_{[\gamma,w]} \neq 0\}$。记 $CF_*(H) = \oplus_k CF_k(H)$，则我们得到（用第 8.2 节的术语来说）一个 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $CF(H)_\uparrow = (CF_*(H), \partial_H, \ell_\uparrow^H)$。

将 $HF_k(H)$ 定义为复形 $CF_*(H)$的第 k 个同调后，一般结论 [UZ16, 命题 6.6] 表明，$HF_k(H)$ 是一个可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间，依照定义 4.6 的含义，相对于过滤函数 $\rho_\uparrow^H$ 而言；该函数将同调类 h 映到表示 h 的循环上的最小下确界（事实上，若 $h \neq 0$，则由 [Us08, 定理 1.4]可知该值能够取到最小值）。与 H 相关的庞加莱–诺维科夫结构 $N(M, \omega, H)$ 将以可正交化的 $\Lambda_\uparrow$- 空间 $(HF_k(H), \rho_\uparrow^H)$ 为基础，并结合与 PSS 同构 $QH_*(M, \omega) \to HF_*(H)$（其来自量子同调）以及 M 上（经典）庞加莱交叉配对相关的数据。

为准确说明这一点，我们应首先约定量子同调的定义。回顾（7.3），令 $\hat{\Lambda} = \kappa[\hat{\Gamma}]$, 使得 $\hat{\Lambda}$ 由有限和 $\sum_{A\in\hat{\Gamma}} b_A T^A$ 组成，其中 $b_A \in \kappa$)；并令 $\hat{\Lambda}_\uparrow$表示由（可能是无限的）和 $\sum_{A\in\hat{\Gamma}} b_A T^A$ 组成的环，使得对于每个 $c \in \mathbb{R}$，仅有有限多个 A 满足 $b_A \neq 0$ 且 $I_\omega(A) \leq c$, 并且集合 $\{I_{c_1}(A) | b_A \neq 0\} \subset \mathbb{Z}$ 还是有限的。我们将 $\hat{\Lambda}_\uparrow$ 及其子环 $\hat{\Lambda}$ 都视为分次 κ-代数，其第 k 个分次部分由形如 $\sum A\, b_A T^A$ 的和组成，其中和中出现的每个 A 都满足 $-2I_{c_1}(A) = k$。（其中的 -2 源于（7.1）。）积分同构 $I_\omega : \Gamma' \cong \Gamma$将我们此前的环 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$和 $\Lambda_\uparrow$ 分别与 $\hat{\Lambda}$ 和 $\hat{\Lambda}_\uparrow$的零次部分对应起来。如果 I_{c_1}：$\pi_2(M) \to \mathbb{Z}$ 恒等为零，则这些零次部分就是整个环（此时在下文中令 $q = 1$）。否则，令 N 表示 (M 的最小陈数，ω)（即 I_{c_1}的像的正生成元）；选取某个 $A_0 \in \hat{\Gamma}$，使得 $I_{c_1}(A_0) = N$，则可将 $\hat{\Lambda} \cong \Lambda[q^{-1}, q]$和 $\hat{\Lambda}_\uparrow \cong \Lambda_\uparrow[q^{-1}, q]$分别认作其中 $q = T^{A_0}$是一个次数为$-2N$ 的变量。注意，相应地，$\Lambda_\uparrow$ 在 $CF_*(H)$上的作用可通过对规定 $T^A[\gamma,w] = [\gamma, A\#w]$, 作显然延拓而扩展为 $\hat{\Lambda}_\uparrow$的作用；并且该作用与分次相容，即 $\hat{\Lambda}_\uparrow$ 的第 j 个分次部分将 $CF_k(H)$ 映到 $CF_{j+k}(H)$。

量子同调of $(M,\ \omega)$，量子同调$_*(M,\ \omega)$，就是分次模 $\hat{}\,\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa H_*(M$的张量积；$\kappa)$其中 $H_*(M;\ \kappa)$是系数取自 κ的奇异同调。因此，如果 $I_{c_1} = 0$，那么 量子同调$_k(M,\ \omega) = \Lambda_\uparrow \otimes_\kappa H_k(M;\ \kappa)$；否则，采用上一段中的记号，有

$$QH_k(M,\omega) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} q^j \Lambda_\uparrow \otimes_\kappa H_{k+2Nj}(M;\kappa),$$

且乘以q会诱导同构量子同调$_k(M,\ \omega) \cong$量子同调$_{k-2N}(M,\ \omega)$。PSS 同构 $\Phi^H{}_{PSS}$ 如 [PSS 94],[Oh15 第 20 节3] 所述，因此是分次 $\hat{}\,\Lambda_\uparrow$-模量子同调$_*(M,\ \omega) \to HF_*(H)$之间的同构。

现在我们可以给出如下定义：

定义 7.1。设$H\colon S^1 \times M \to \mathrm{R}$ 是一个定义在 $2m$维半正辛流形 $(M,\ \omega)$ 上的一般位置非退化哈密顿量。我们将 N $(M,\ \omega, H)$定义为具有如下定义 6.1 中所给数据$n, H_k, \mathrm{D}_k, V_k, \rho_k, S_k$ 的庞加莱–诺维科夫结构（记号同上）：

- $n = 2m$。
- H_k是张量积 $\hat{}\,\Lambda \otimes_\kappa H_*(M$的第$k$个分次部分；$\kappa)$。因此，如果$I_{c_1} = 0$，则$H_k = \Lambda \otimes_\kappa H_k(M;\ \kappa)$；否则$H_k = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} q_j\ \Lambda \otimes_\kappa H_{k+2Nj}(M;\ \kappa)$。
- $\mathrm{D}_k\colon H_k \to {}^\vee H_{2m-k}$ =同态$_\Lambda(H_{2m-k},\ \Lambda)$定义如下：对于$x_i,\ {}_A \in H_{k+2Ni}(M;\ \kappa)$以及$y_j,\ {}_B \in H_{2m-k+2Nj}(M;\ \kappa)$。

$$\mathscr{D}_k\left(\sum_{A\in\Gamma',i\in\mathbb{Z}} q^i T^A x_{i,A}\right)\left(\sum_{B\in\Gamma',j\in\mathbb{Z}} q^j T^B y_{j,B}\right) = \sum_{A,B\in\Gamma,\,i,j\in\mathbb{Z}} T^{I_\omega(-A+B)} x_{i,A} \cap y_{j,B}, \tag{7.4}$$

这里x_i、$_A \cap y_j$、$_B$ 表示x_i、$_A$ 与y_j、$_B$的一般位置代表元之间通常的交点带符号计数；如果它们的维数不是互补维数，则该计数取零。（因此，上述求和中唯一的贡献满足$j = -i$。）

- $V_k = H\,Fk(H)$，且$\rho_k = \rho_H\uparrow$。
- $S_k\colon H_k \to V_k$是到$H_k = \big(\hat{}\,\Lambda \otimes_\kappa H_*(M、\ \omega)\big)_k \subset$量子同调$_k(M、\ \omega)$的 PSS 同构 $\Phi_H{}_{PSS}$：量子同调$_*(M、\ \omega) \to HF_*(H)$中次数为$k$部分的限制。

请注意，由于我们在H_k的定义中使用$\hat{}\,\Lambda$ 而非$\hat{}\,\Lambda_\uparrow$，(7.4)中的所有求和都是有限的。根据$H_*(M;\ \kappa)$上交叉配对的相应性质，直接验证可得，$\mathrm{D}_k\colon H_k \to {}^\vee H_{2m-k}$ 是一个满足对称条件(4.6)的同构；因此，按照定义 6.1 的术语，N $(M、\ \omega、H)$是一个强 $2m$-庞加莱–诺维科夫结构。

备注 7.2。 在I_{c_1}与 Γ均非平凡的情况下，我们的表述有一个多少不太自然之处：为了将 $\hat{}\,\Lambda$ 与 $\Lambda[q^{-1}$识别，$q]$, 我们选取了一个元素$A_0 \in \hat{}\,\Gamma$，使其满足$I_{c_1}(A_0) = N$，并将q解释为T^{A_0}。所有这类A_0的可能选取构成 $\Gamma' \cong \Gamma$ 在 $\hat{}\,\Gamma$中的一个陪集；如果I_{c_1}与 Γ均非平凡，那么（7.4）确实取决于这一选取。相应地，下面推论 7.8 中出现的映射 $\mathfrak{c}$ 也取决于A_0的选取。（7.4）一种或许更自然的表述方式，是省略对q 的引用，并且

允许A、B遍历 $\hat{\Gamma}$而不是 Γ'，从而得到一个配对

$$\left(\sum_{A\in\hat{\Gamma}} T^A x_A, \sum_{B\in\hat{\Gamma}} T^B y_B\right) \mapsto \sum_{A,B} T^{I_\omega(-A+B)} x_A \cap y_B. \tag{7.5}$$

然而，如果 $I_\omega(\hat{\Gamma})$ 真包含 $\Gamma = I_\omega(\Gamma')$，那么（7.5）的右端通常不属于 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$，因此还需要进行其他修改才能使其符合一般理论，例如在 Γ 的角色中使用更大的群 $I_\omega(\hat{\Gamma})$，并相应地扩展 Floer 复形中的系数。以这种方式扩大 Γ 似乎并不可取，尤其是如果这样做会导致 Γ 从离散变为稠密。另一方面，如果 $I_\omega(\hat{\Gamma}) = I_\omega(\Gamma')$，那么（7.5）就与（7.4）一致，前提是我们将 A_0 取为 $\hat{\Gamma}$ 中唯一满足 $I_{c_1}(A_0) = N$ 且 $I_\omega(A_0) = 0$ 的元素；在此情形下，这可视为一种自然的选择。

定义了 $\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H})$之后，第 6 节的一般构造便给出：对每个 $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$，都有一个过滤匹配对 $\mathrm{P}(\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}))_k$、间隙 $\mathrm{G}_{k,1}(\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H})), \ldots, \mathrm{G}_{k,\dim_{\Lambda_\uparrow} \mathrm{QH}_k(\mathrm{M},\omega)}(\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}))$；若 Γ是离散的，还可得到本质条形码 $\mathrm{B}_k(\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}))$（利用定理 5.5 求得合适的双重正交基）。我们对 $\mathrm{P}(\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}))$的定义中涉及的各种映射，都是将链级定义的映射传递到同调后得到的，因此可以改写该定义，从而得到第 8.5 节中的链级庞加莱–诺维科夫结构。（根据推论 A.10 以及类似于命题9.2证明中的论证，符号均能正确处理。）若 Γ是离散的，该结构便有一个与之关联的“完整条形码”，旨在将其视为层间持久性条形码的 Floer 理论版本；根据定理 8.10，该条形码可由 $\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H})$的本质条形码与 Floer 型复形 $\mathrm{CF}(\mathrm{H})_\uparrow$的简明条形码（来自 [UZ16]）读出。

注 7.3. 与注 7.2 相关，若$x \in H_k = (\hat{\Lambda} \otimes_\kappa H_*(M; \kappa))_k$，则采用式 (6.1) 和定义7.1中的记号，可得

$$\rho_{k-2N}(S_{k-2n}(qx)) = \rho_k(S_k x) - I_\omega(A_0), \qquad {}^\vee\rho_{k-2N}(\tilde{S}_{k-2N}(qx)) = {}^\vee\rho_k(\tilde{S}_k x) + I_\omega(A_0).$$

（从推论 7.8 可以最容易地看出这一点，但也可以通过直接展开各种定义推知。）特别地，间隙 $\mathrm{G}_{k-2N,i}(\mathrm{N}(M, \omega, H))$ 相对于间隙 $\mathrm{G}_{k,i}(\mathrm{N}(M, \omega, H))$平移了 $2I_\omega(A_0)$

若 $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1 \colon \mathrm{S}^1 \times \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ 是两个不同的非退化哈密顿量，则存在一个延拓链同伦等价 $\mathrm{h}_{H_0,H_1} : \mathrm{C}\,\mathrm{F}_*(\mathrm{H}_0) \to \mathrm{C}\,\mathrm{F}_*(\mathrm{H}_1)$，其诱导的同调映射 $\mathrm{h}_{H_0}\mathrm{H}_1$ 满足 $\mathrm{h}_{H_0,H_1} \circ \Phi^{H_0}\,\mathrm{PSS} = \Phi^{H_1}\,\underline{\mathrm{P}}\mathrm{SS}$。关于过滤函数 $\ell_\uparrow^{H_i}$ 在 $\underline{\mathrm{h}}_{H_0,H_1}$ 下行为的标准估计表明，如 Oh15, 命题 21.3.6]所示，$\mathrm{h}_{H_0}\mathrm{H}_1$给出了定义 6.5 意义下的一个 t-态射，从 $\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}_0)$到 $\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H}_1)$，其中 $\underline{\mathrm{t}} = \int_0^1 \max_M |\mathrm{H}_1(t, \cdot) - \mathrm{H}_0(t, \cdot)| \mathrm{d}\, t$。因此，推论 6.7 和 6.8 表明，$\mathrm{N}(\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H})$的间隙和本质条形码以利普希茨方式[14]依赖于哈密顿量 H

[14]其中隐含着一种条形码上的度量，可根据推论 6.7 推知。该度量基于对双射取下确界：将次数$k-1$的开区间与次数$k-1$的其他开区间或次数k的闭区间相匹配；同样，将次数k的闭区间与次数k的其他闭区间或次数$k-1$的开区间相匹配。

关于 C^0-范数。特别是，我们可以通过连续性将这些结果推广到任意哈密顿量 H，包括退化哈密顿量。关于 $\mathbf{CF}(H_i)_\uparrow$ 的简明条形码的类似连续性结论见 [UZ16, 推论 1.5]。请注意，在连续变化过程中，短区间的行为在简明条形码和本质条形码中有所不同，因为简明条形码所依据的瓶颈距离允许区间长度连续缩短至零后消失。

注 7.4. 通过使用 Oh15 第 21.6 节中记作 $h_{(\phi^\rho, J)}$ in [的“最优延拓映射”，2], 这些映射关联均值归一化哈密顿量 $H_0, H_1 \colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 的 Floer 复形；这些哈密顿量的流端点固定同伦，$\{\phi^t H_t\}_{0\le t\le 1}$，并且根据 Oh15 推论 21.6，$\ell_\uparrow^{H_i}$ 这些映射保持过滤 [。由此可在此情形下得到庞加莱–诺维科夫结构 $N(M, \omega, H_i)$ 之间的一个同构（t-态射，其中 $t = 0$）。因此，间隙以及（适用时的）本质条形码可视为与万有覆盖 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 中的一个元素 ϕ 相关联：$\widetilde{\text{任选一个流代表该元素 } \phi}$的均值归一化哈密顿量即可；此外，它们关于 Hamiltonian 微分同胚群 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 上的 Hofer（伪）范数以利普希茨方式变化。利用这些最优延拓映射，还可以推出简明条形码的类似不变性结果。

此外，ψ (M的任意辛同胚 ω) 都会诱导一个同构 $N(M, \omega, H) \cong N(M, \omega, H \circ \psi^{-1})$（前提是对注 7.2 中提到的 A_0 的选择所存在的歧义，在 $N(M, \omega, H)$ 和 $N(M, \omega, H \circ \psi^{-1})$中以一致的方式消除，例如要求 $I_\omega(A_0)\widetilde{\ }$相同），因此，与 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$中元素相关的间隙和/或本质条形码在辛同胚群 $\mathrm{Symp}(M, \omega)$的共轭作用下保持不变。

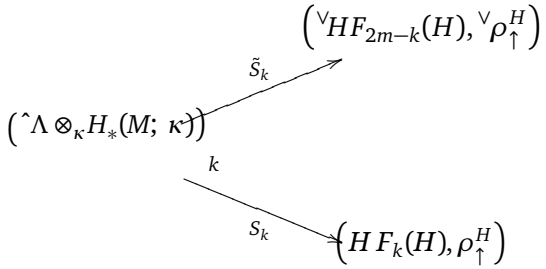
例 7.5. 假设 $H : S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 与 S^1变量无关，不妨设 $H(t, x) = h(x)$，其中 $h \colon M \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数。于是，H 的哈密顿流在 h 的每个临界点处都有驻点。若 h 足够 C^2-小，则这些临界点 $x \in \mathrm{Crit}(h)$ 将是 H 的时间一映射 ϕ^1 的唯一不动点，并且有$\mu_H([\gamma_x, w_x]) = \mathrm{ind}_{-h}(x)$，其中 $\gamma_x \colon S^1 \to M$ 和 $w_x \colon D^2 \to M$ 是映到 x 的常值映射，而 $\mathrm{ind}_{-h}(x)$ 是 x 关于莫尔斯函数 $-h$ 的 Morse 指标。此外，$A_H([\gamma_x, w_x]) = -h(x)$。在这种情况下，可以合理地预期 Floer 复形 $CF_*(H)$ 在映射 $x \mapsto [\gamma_x, w_x]$下与（系数扩张后的）Morse 复形 $\hat{\Lambda}_\uparrow \otimes CM_*(-h)$相一致，并且 PSS 映射也与奇异同调和 Morse同调之间的标准同构相一致。例如，在附加假设成立并将 H 乘以一个小常数之后，关于 Floer 复形的论断可由 [HS95, 命题 7.4]推出；若使用 [Par16] 的虚拟技术（因而采用特征零系数）来定义 Floer 复形，那么在 $-h$ 的系数扩张 Morse 复形与 H 的 Floer 复形之间建立识别这一结果，相当普遍地见于 [Par16, 定理 10.7.1], 的证明中。Pardon 的 S^1-局部化技术似乎也有望用于证明关于 PSS 映射的论断。无论如何，我们不妨假设所处情形满足这些对应关系。

在这种情况下，我们的庞加莱–诺维科夫结构 $N(M、\ \omega、H)$ 与为 $-h$ 构造的莫尔斯理论庞加莱–诺维科夫结构的系数扩张重合。因此，根据定理 2.2，$N(M、\ \omega、H)$ 的间隙以及（对于离散的 Γ）本质条形码可以从函数 $-h$的层间条形码中读出。（需要注意的是，

针对系数扩张调整为 $\hat{\Lambda}$，尤其要注意注7.3（如果$I_{c_1} \neq 0$）。举个具体例子，假设图1中的函数经过缩放，足够小以满足我们的假设，那么它们的交错条形码之间的差异意味着，与其时间一哈密顿流相关联的 Ham 中元素之间的 Hofer距离存在一个下界。这些函数的子水平集条形码完全相同，这一事实表明，无法从它们的简明条形码推导出任何正下界，因此本质条形码提供了新的信息。

为了更好地理解与 $\mathrm{N}(M, \omega, H)$ 相关的不变量，让我们尝试对相应的过滤匹配对 $\mathrm{P}(\mathrm{N}(M, \omega, H))_k$给出一个明确的描述（在同构意义下）。根据定义7.1和（6.1），对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{P}(\mathrm{N}(M, \omega, H))_k$ 具有如下形式

(7.6)



其中 S_k 是 PSS 映射 $\Phi^{H}{}_{PSS}$ 的限制，而 Λ-模同态 $\tilde{S}_k$ 根据 (6.2) 由以下性质唯一确定：对于所有 $x \in \left(\hat{\Lambda} \otimes_{\kappa} H_*(M; \kappa)\right)_k$ 以及 $y \in \left(\hat{\Lambda} \otimes_{\kappa} H_*(M; \kappa)\right)_{2m-k}$，都有 $(\tilde{S}_k x)(\Phi^{H}{}_{PSS} y) = (\mathrm{D}_k x)(y)$。

为了说明下文内容的动机，定义 $\hat{\mathrm{H}} : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{M} \to \mathbb{R}$，使得 $\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) = -\mathrm{H}(1-\mathrm{t}, \mathrm{x})$。因此，$\hat{\mathrm{H}}$ 和 H 的时间一映射互为逆映射；环路 $\gamma: \mathrm{S}^1 \to \mathrm{M}$ 是 H 的哈密顿流的闭轨道，当且仅当其时间反演 $\bar{\gamma}: \mathrm{S}^1 \to \mathrm{M}$（定义为 $\bar{\gamma}(\mathrm{t}) = \gamma(1-\mathrm{t})$）是 $\hat{\mathrm{H}}$ 的哈密顿流的闭轨道。对应关系 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ 可提升为一个对合 $\mathrm{I}: \widetilde{\mathrm{L_0M}} \to \widetilde{\mathrm{L_0M}}$，定义为 $\mathrm{I}([\gamma, \mathrm{w}]) = [\bar{\gamma}, \bar{\mathrm{w}}]$；其中，对任意 $\mathrm{w}: \mathrm{D}^2 \to \mathrm{M}$，我们定义 $\bar{\mathrm{w}}: \mathrm{D}^2 \to \mathrm{M}$ 为 $\bar{\mathrm{w}}(\mathrm{z}) = \mathrm{w}(\bar{\mathrm{z}})$。容易看出，作用泛函之间满足 $\mathcal{A}_{\hat{H}} = -\mathcal{A}_H \circ \mathrm{I}$ 的关系。因此，通过 I 的作用，$\mathcal{A}_H$ 的（形式）正梯度流对应于 $\hat{\mathrm{H}}$ 的负梯度流。类比 (3.5)，我们会预期在 (7.6) 中，${}^{\vee}\mathrm{H}\,\mathrm{F}_{2m-k}(\mathrm{H})$ 可以替换为 $\mathrm{H}\,\mathrm{F}_k(\hat{\mathrm{H}})$。这将在命题 7.7 中体现；对合 I 的作用表现为映射到 $\mathrm{H}\,\mathrm{F}_k(\hat{\mathrm{H}})$时所涉及的共轭。至少在 $\mathrm{I}_{c_1} = 0$ 的情况下，这可以解释为 I 在覆盖空间 $\mathrm{L_0M}$ 限制到常值环路后所得空间的 $\widetilde{}$ 同调上的作用；该空间对应于量子同调的子模 $\hat{\Lambda} \otimes_{\kappa} \mathrm{H}_*(\mathrm{M}; \kappa)$。

对于任意 $[\gamma, \mathrm{w}] \in \widetilde{\mathrm{L_0M}}$，取 $\mathcal{A}_H$ 具有 $\mu_H([\gamma, \mathrm{w}]) = 2\mathrm{m} - \mathrm{k}$ 的 $\mathrm{P}_{2m-k}(\mathrm{H})$。将 $\mathrm{P}_{2m-k}(\mathrm{H}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ 记为 $\tilde{\mathrm{P}}_{2m-k}(\mathrm{H})$ 在覆盖投影 $\pi: \widetilde{\mathrm{L_0M}} \to \mathrm{L_0M}$ 下的像，并且对于 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r}$ 选择一个元素 $[\gamma_i, \mathrm{w}_i] \in \pi^{-1}(\{\gamma_i\})$。于是，$\mathrm{C}\,\mathrm{F}_{2m-k}(\mathrm{H})$ 以 $\{[\gamma_1, \mathrm{w}_1], \ldots, [\gamma_r, \mathrm{w}_r]\}$ 为其在 $\Lambda_{\uparrow}$ 上的基，而 $\mathrm{C}\,\mathrm{F}_k(\hat{\mathrm{H}})$ 以 $\{[\bar{\gamma}_1, \bar{\mathrm{w}}_1], \ldots, [\bar{\gamma}_r, \bar{\mathrm{w}}_r]\}$ 为其在 $\Lambda_{\uparrow}$ 上的基。因此，我们可以定义一个双线性配对

$$L_{H,k}^{F}: CF_{2m-k}(H) \times CF_k(\hat{H}) \to \Lambda_{\uparrow}$$

对于 λ_i、$\mu_i \in \Lambda_\uparrow$，定义为

$$L^F_{H,k}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i[\gamma_i, w_i], \sum_{i=1}^r \mu_i[\bar{\gamma}_i, \bar{w}_i]\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i. \tag{7.7}$$

因为对于 $A \in \Gamma'$，有 $[\gamma_i, A\#w_i] = T^{I_\omega(A)}[\gamma_i, w_i]$，而 $[\bar{\gamma}_i, A\#w_i] = [\bar{\gamma}_i, (-A)\#\bar{w}_i] = T^{-I_\omega(A)}[\bar{\gamma}_i, \bar{w}_i]$，我们看到 $L^F(H,k)$ 与 w_i 的选择无关。此外，对于任意 $a \in CF_{2m-k+1}(H)$、$b \in CF_k(\hat{H})$，

$$L^F_{H,k}(\partial_H a, b) = (-1)^k L^F_{H,k-1}(a, \partial_{\hat{H}} b);$$

除一个符号外，这反映了这样一个事实：对于 $\hat{H}$，Floer 轨线 $u: \mathbb{R} \times S^1 \to M$，通过反转 $\mathbb{R}$ 和 S^1 变量的方向，对应于一条对于 H 的 Floer 轨线；该符号由推论 A.10 计算得出。

因此，$L^F(H,k)$ 可下降为双线性配对 $L^F(H,k) : HF_{2m-k}(H) \times HF_k(\hat{H}) \to \Lambda_\uparrow$。由于 $L^F(H,k)$ 是非退化配对，且 $\Lambda_\uparrow$ 是一个域，泛系数定理推出 $L^F(H,k)$ 同样非退化，因此映射 $a \mapsto L^F(H,k)(\cdot, a)$ 定义了 $\Lambda_\uparrow$-向量空间 $\lambda^F(H,k) : HF_k(\hat{H}) \to HF_{2m-k}(H)^*$ 之间的一个同构。应用第4.1节的共轭函子，同一映射 $\lambda^F(H,k)$ 可视为 $\Lambda^\downarrow$-向量空间 $HF_k(\hat{H}) \cong {}^\vee HF_{-k}(H)$ 之间的一个同构。

这属于 [Us10] 以更一般形式考察的情形；对应关系 $[\bar{\gamma}, \bar{w}] \leftrightarrow [\gamma, w]$ 将 Floer 型复形 $\mathbf{CF}(H)_\uparrow$ 与 [Us10] 所称的 $\mathbf{CF}(\hat{H})_\uparrow$ 的“对偶复形”相对应，而配对 $L^F(H,k)$ 则对应于 [Us10] 中的配对 L。由此我们推得：

命题 7.6. 对于 ${}^\vee\rho^H_\uparrow : {}^\vee H_{2m-k} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$（按第 5.2 节中对 $\rho^H_\uparrow$ 的定义），对每个 $a \in HF_k(\hat{H})$，有

$$-\rho^{\hat{H}}_\uparrow(a) = {}^\vee\rho^H_\uparrow(\lambda^F_{H,k}(a)).$$

证明。将 $\Delta: HF_{2m-k}(H) \times HF_k(\hat{H}) \to \kappa$ 记为由配对 $L^F(H,k)$ 与函数 $\tau: \Lambda_\uparrow \to \kappa$（由 $\tau\left(\sum_g c_g T^g\right) = c_0$ 定义）复合而成的映射。于是根据 [Us10，推论 1.4]（推广 [EP03, 引理 2.2]），对每个 $a \in HF_k(\hat{H})$，

$$-\rho^{\hat{H}}_\uparrow(a) = \inf\{\rho^H_\uparrow(b) | \Delta(b,a) \neq 0\}.$$

根据定义，

$${}^\vee\rho^H_\uparrow(\lambda^F_{H,k}(a)) = \inf\left\{\rho^H_\uparrow(b) + \nu_\uparrow\left(L^F_{H,k}(b,a)\right) \middle| b \neq 0\right\}.$$

根据 $\nu_\uparrow$ 和 Δ 的定义，若 $\Delta(b,a) \neq 0$，则 $\nu_\uparrow\left(L^F(H,k)(b,a)\right) \leq 0$，由此可直接推出 ${}^\vee\rho^H_\uparrow(\lambda^F(H,k)(a)) \leq -\rho^H_\uparrow(a)$。为证明反向不等式，注意若 $b \neq 0$ 但 $L^F(H,k)(b,a) = 0$，则 $\rho^H_\uparrow(b) + \nu_\uparrow\left(L^F(H,k)(b,a)\right) = \infty$；而若 $L^F(H,k)(b,a) \neq 0$，则元素 $b' = T^{-\nu_\uparrow(L^F(H,k)(b,a))} b$ 满足 $\nu_\uparrow(L^F(H,k)(b',a)) = 0$，$\Delta(b',a) \neq 0$，且 $\rho^H_\uparrow(b') = \rho^H_\uparrow(b) + \nu_\uparrow\left(L^F(H,k)(b,a)\right)$。因此 $-\rho^{\hat{H}}_\uparrow(a) \leq {}^\vee\rho^H_\uparrow(\lambda^F(H,k)(a))$。□

根据命题 7.6，在同构意义下，(7.6) 中出现的 $\left({}^{\vee}HF_{2m-k}(H),{}^{\vee}\rho_{\uparrow}^{H}\right)$ 可替换为 $(HF_k(\hat{}H),-\rho\hat{}_{H_{\uparrow}})$。下述命题说明了相应替换 (7.6) 中 $\tilde{}S_k$ 的映射。我们再次将 $\hat{}\Lambda$ 识别为 $\Lambda[q^{-1},q]$；如注 7.2 所述，若$I_{c_1}\neq 0$，此识别取决于 $A_0\in\hat{}\Gamma$ 的选择，其中 $I_{c_1}(A_0)=N$。（若 $I_{c_1}=0$，则在下文中应将 q 解释为等于 1，这反映了 $\hat{}\Lambda=\Lambda$。）

命题 7.7。定义 $\mathfrak{c}\colon\ \Lambda[q^{-1},q]\to\Lambda[q^{-1},q]$如下：对于 $\lambda_i\in\Lambda$, $\mathfrak{c}\left(\sum i\ \lambda_i q^i\right)=\sum i\ \bar{\lambda}_i q^i$, 以及对于一个 $\in\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa)$，令 $\bar{}a=(\mathfrak{c}\otimes 1_{H_*(M;\kappa)})(a)$。那么，对于所有 $a\in(\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k$，(7.6) 中的映射 $\tilde{}S_k$ 满足

$$\tilde{S}_k(a)=\lambda_{H,k}^{F}\left(\Phi_{PSS}^{\hat{H}}(\bar{a})\right).$$

证明。映射 $a\mapsto\lambda^F H,k(\Phi\hat{}H\ PSS(\bar{}a))$ 是一个 Λ-模同态，其定义域为 $(\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k$，值域为共轭对偶 ${}^{\vee}H\ F_{2m-k}(H)$。因此，由于 $\tilde{}S_k\colon\ (\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k\to{}^{\vee}H\ F_{2m-k}(H)$ 是满足 (6.2)、其中 $n=2m$ 且 S_{2m-k} 等于 PSS 同构 $\Phi^H PSS: QH_{2m-k}(M,\omega)\to H\ F_{2m-k}(H)$ 在 $(\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_{2m-k}$ 上的限制的唯一 Λ-模同态，只需证明，对于所有 $a\in(\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k$ 和 $b\in(\hat{}\Lambda\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_{2m-k}$，我们有

$$\underline{L}_{H,k}^{F}(\Phi_{PSS}^{H}(b),\Phi_{PSS}^{\hat{H}}(\bar{a}))=(\mathscr{D}_k a)(b). \tag{7.8}$$

在这方面，回想一下，$\Phi^H PSS$ 是通过将 $H_*(M;\kappa)$ 与 M 上莫尔斯函数 f 的莫尔斯同调 $HM_*(f;\kappa)$ 相识别来定义的。（下文假定读者熟悉莫尔斯同调；另见第 9.1 节。关于 PSS映射的进一步说明，重点介绍定向，见 A.3 节。）令 $CM_*(f;\kappa)$ 表示 f 的莫尔斯复形，$\Phi^H PSS$ 定义为由链映射 $\tilde{\Phi}^f,H^+PSS:\hat{}\ \Lambda_\uparrow\otimes_\kappa CM_*(f;\kappa)\to C\ F_*(H)$ 在同调上诱导的映射，该链映射与函数 $H^+\colon C\times M\ \to R$ 相关，其中 $H^+(r\,e^{2\pi it},x)=H(t,x)for\ r\ >2$。不同的 H^+选择会给出链同伦的映射 $\tilde{\Phi}^f,H^+PSS$，而不同 f 选择所对应的 $HM_*(f\ )$ 之间通常的延拓同构，会识别相应 $\tilde{\Phi}^f,H\ PSS$ 在同调上诱导的映射。由于这些延拓同构也与莫尔斯同调和奇异同调之间的识别相容（参见 (9.2)），因此可知，对于任意 f 和 H^+的选择，$\tilde{\Phi}^f,H^+$ PSS 都会诱导出同一个映射 $\Phi^H PSS: QH_*(M,\omega)\to H\ F_*(H)$。特别地，如果在构造 Φ^H PSS 时使用 f，那么我们可以（并且将会）在构造 Φ^H PSS 时使用 $-f$。

由于对于 f，指标为 $(2m-k)$ 的临界点与对于 $-f$ 的指标为 k 的临界点相同，因此对每个 k，我们都有一个非退化的 κ-双线性配对 $L^M,\kappa f,k: CM_{2m-k}(f;\kappa)\times CM_k(-f;\kappa)\to\kappa$，其定义为 $L^M,\kappa f,k\ \left(\sum i\ \alpha_i p_i,\sum j\ \beta_j p_j\right)=\sum i\ \alpha_i\beta_i$，其中 $\alpha_i,\beta j\in\kappa$，若 f 的指标为 $(2m-k)$ 的临界点为 $p_1,\ldots,p_r$。对于 $\pm f$ 的 Morse边界算子在此配对下互为伴随，但相差一个由推论 A.3 给出的符号，因此该配对下降为同调上的非退化配对。事实上，通过考察 f 的下降流形与 $-f$ 的下降流形的交集，很容易看出，在典范同构下，同调上的所得配对与庞加莱交叉配对一致，这些典范同构连接

$H_*(M;\ \kappa)$和$\mathbf{HM}_*(\pm f;\ \kappa)$。现在我们扩张系数，以得到一个 $\Lambda_\uparrow$-向量空间之间的非退化配对

$$L^M_{f,k}\colon \left(\hat\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f;\kappa)\right)_{2m-k} \times \left(\hat\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(-f;\kappa)\right)_k \to \Lambda_\uparrow$$

令 $\lambda_j, \mu_j \in \Lambda_\uparrow$，$x_j \in \mathbf{CM}_{2m-k+2N_j}(f;\ \kappa)$，以及$y_j \in \mathbf{CM}_{k+2N_j}(-f;\ \kappa)$,

$$L^M_{f,k}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j\lambda_j \otimes x_j, \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j\mu_j \otimes y_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{-j}\mu_j L^{M,\kappa}_{f,k+2N_j}(x_{-j}, y_j). \tag{7.9}$$

转到同调并将 Morse同调与奇异同调等同后，我们得到一个诱导的非退化配对$L^M{}_{f,k}$: $QH_{2m-k}(M,\ \omega)\times QH_k(M,\ \omega) \to \Lambda_\uparrow$（事实上它与$f$无关）。鉴于$L^M{}_{,\kappa\, f,k}$ 在同调上诱导庞加莱交叉配对，与 (7.4) 比较可知，$L^M{}_{f,k}$在 $(\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_{2m-k} \times (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_k$上的限制满足

$$(\mathscr{D}_k a)(b) = \underline{L}^M_{f,k}(b, \bar a) \text{ for } a \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k,\ b \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_{2m-k}.$$

因此，将变量换为$z = \bar a$后，我们所需的结论 (7.8) 可归结为以下断言：对于$b \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_{2m-k}$和$z \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_k$，有

$$\underline{L}^F_{H,k}(\Phi^H_{PSS} b, \Phi^{\hat H}_{PSS} z) = \underline{L}^M_{f,k}(b, z). \tag{7.10}$$

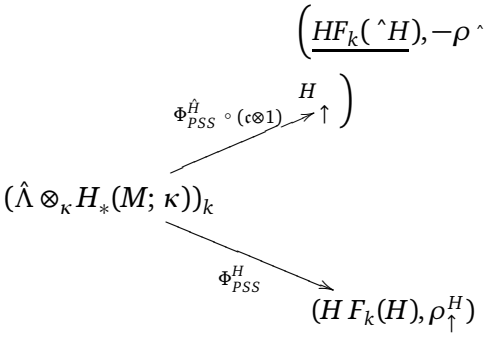
这由链同伦逆 $\tilde\Psi\hat{}\mathrm{H}^-$ 的构造得出： [PSS94],[Oh15, Section 20.3]，–f PSS : C $\mathrm{F}_*(\hat{}\mathrm{H}) \to \hat{}\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathrm{CM}_*(-\mathrm{f};\kappa)$to $\tilde\Phi^{-}\mathrm{f}$, $\hat{}\mathrm{H}^+$PSS , 其中 $\hat{}\mathrm{H}^-$: $((\mathrm{C}\setminus\{0\})\cup\{\infty\}) \times \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ 满足 $\hat{}\mathrm{H}^-(\mathrm{r}\, \mathrm{e}^{2\pi i t}, \mathrm{x}) = \hat{}\mathrm{H}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$for $\mathrm{r} < 1/2$。取 $\hat{}\mathrm{H}^-(\mathrm{z}, \mathrm{m}) = \mathrm{H}^+(1/\mathrm{z}, \mathrm{m})$，对所有……以及 $\mathrm{c} \in (\hat{}\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathrm{CM}_*(\mathrm{f};\ \kappa))_{2m-k}$和 $\mathrm{d} \in \mathrm{C}\ \mathrm{F}_k(\hat{}\mathrm{H})$，都有一个众所周知的关系（参见 [EP03, Section 2.6.8],[Us11, Proof of Proposition 3.13(vii)],，尽管这些参考文献没有讨论符号问题）。

$$L^F_{H,k}(\tilde\Phi^{f,H^+}_{PSS}(c), d) = L^M_{f,k}(c, \tilde\Psi^{\hat H^-,-f}_{PSS}(d)), \tag{7.11}$$

基本上，这是因为，左端所枚举的带尖点平面与右端所枚举的带尖点平面一一对应：只需反转梯度流线的时间变量，并将扰动全纯平面与$z \mapsto 1/z$作复合。推论 A.10 表明，按照附录中所述的定向约定，(7.11) 如所述成立，且不带任何符号。转到同调并利用 $\tilde\Psi^H$、$^f{}_{PSS}$ 在同调上诱导出 $\Phi^H{}_{PSS}$ 的逆，我们推得 (7.10) 对所有$b \in QH_{2m-k}(M、\ \omega)$以及$z \in QH_k(M、\ \omega)$成立，特别地，对所有$b \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_{2m-k}$以及$z \in (\hat\Lambda \otimes_\kappa H_*(M;\ \kappa))_k$成立。这就证明了 (7.8)，从而证明了该命题。□

推论 7.8。 与庞加莱–诺维科夫结构 N $(M$、 ω、$H)$ 相关联的过滤匹配对 P $(\mathrm{N}\ (M$、 ω、$H))_k$ 同构于过滤匹配对

(7.12)
$$\begin{array}{ccc} & & \left(\underline{HF_k(\hat{}H)}, -\rho^{\hat{}} \right. \\ & & \left. H \uparrow \right) \\ & \overset{\Phi^{\hat{H}}_{PSS}\circ(\mathfrak{c}\otimes 1)}{\nearrow} & \\ (\hat{\Lambda}\otimes_\kappa H_*(M;\kappa))_k & & \\ & \underset{\Phi^H_{PSS}}{\searrow} & \\ & & (H\,F_k(H), \rho^H_\uparrow) \end{array}$$



其中 $\mathfrak{c}\colon \hat{}\Lambda \to \hat{}\Lambda$ 由 $\mathfrak{c}\left(\sum \lambda_i q^i\right) = \bar{\lambda}_i q^i$ 定义，其中 $\lambda_i \in \Lambda$。

证明。 事实上，与 (7.6) 的同构由 $\lambda^F{}_{H,k}\colon HF_k(\hat{}H) \to {}^\vee HF_{2m-k}(H), \overline{\hat{}\ \hat{}}$ 给出；在此对应关系下，$-\rho^H_\uparrow$ 对应于${}^\vee\rho^H_\uparrow$，而 $\Phi^H{}_{PSS}\circ(\mathfrak{c}\otimes 1)$ 根据前两个命题对应于 $\tilde{}S_k$。□

注意，即使对于退化哈密顿量H （此时 Floer 复形未直接定义），也可以通过关于H的连续性来定义 N $(M,\ \omega, H)$，进而定义 P $(\mathrm{N}\ (M,\ \omega, H))$，因为映射$H \mapsto \rho^H_\uparrow \circ \Phi^H{}_{PSS}$ 是连续的，参见 [McSa12，第 12.4] 节。对于退化H，推论 7.8 同样成立，其中$H)$的HF和$HF_k(\hat{}H)$解释为对逼近它们的一般非退化哈密顿量取直接极限。

对于任意哈密顿量 $\mathrm{H}: \mathrm{S}^1 \times \mathrm{M} \to \mathrm{R}$，令 $\tilde{\phi}_H$为 $\mathrm{Ham}(\mathrm{M},\ \omega)$中的元素，由流 $\{\phi^t \mathrm{H}\}_{t\in[0,1]}$表示。回顾一下，若 $\in \mathrm{QH}_*(\mathrm{M},\ \omega)$且 $\tilde{\phi} \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(\mathrm{M},\ \omega)$，则谱不变量 $\mathrm{c}(\mathrm{a}, \tilde{\phi})$ 定义为 $\mathrm{c}(\mathrm{a}, \tilde{\phi}) = \rho^H_\uparrow(\Phi^H\ \mathrm{PSS}(\mathrm{a}))$，其中 H 是满足 $\phi_H = \phi$的一个（因而也是任意一个）均值归一化哈密顿量。（若这样的 H 是退化的，则右端由连续性定义，即用一般位置的非退化哈密顿量逼近 H。）由推论 7.8 可知，对于均值归一化的 H，N $(\mathrm{M},\ \omega, \mathrm{H})$的本质条形码（若其存在；当 Γ离散时它总是存在）由模Γ-平移的区间组成：在次数 k 下为 $[\mathrm{c}(\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}), -\mathrm{c}(\bar{}\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}^{-1})]^\Gamma$，或在次数 $\mathrm{k}-1$ 下为 $(-\mathrm{c}(\bar{}\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}^{-1}), \mathrm{c}(\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}))^\Gamma$ （取其中非空者）；其中 e^j 遍历 Λ-模$(\Lambda \otimes_\kappa \mathrm{H}_*(\mathrm{M},\ \kappa))_k$的一个双重正交基。这里 $\bar{}\mathrm{e}_j = (\mathfrak{c}\otimes 1)\mathrm{e}^j$。（特别地，若 $\Gamma = \{0\}$，例如当 $(\mathrm{M},\ \omega)$单调时，则 $\bar{}\mathrm{e}^j = \mathrm{e}^j$。）由命题 5.6，在此情形下，第 i 个间隙 $\mathrm{G}_{k,i}(\mathrm{N}\ (\mathrm{M},\ \omega, \mathrm{H}))$等于数值 $-\left(\mathrm{c}(\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}) + \mathrm{c}(\bar{}\mathrm{e}^j, \tilde{\phi}^{-1})\right)$中第 i 大者。无论本质条形码是否有定义（即，对于所有 k，(7.12) 是否存在双重正交基），我们都有

$$(7.13)\quad \mathscr{G}_{k,i}(\mathscr{N}(M,\omega,H)) = -\inf\left\{\gamma \;\middle|\; \begin{array}{c} (\exists S \subset (\Lambda \otimes_\kappa H_*(M,\kappa))_k \text{ independent over } \Lambda) \\ (\#S = i \text{ and } (\forall x \in S)\left(c(x,\tilde{\phi}) + c(\bar{x},\tilde{\phi}^{-1}) \le \gamma\right) \end{array}\right\}$$

若存在双重正交基，推论 6.10 意味着一个并不显而易见的事实：对于任意 k，当k 替换为 $2m-k$ 时，式 (7.13) 中随 i 变化的一系列量关于 0 对称。

上面的量 c(x、$\tilde{\phi}$) + c(¯x、$\tilde{\phi}^{-1}$) 显然令人联想到 Ham(M 上的谱伪范数 $\gamma(\tilde{\phi}) = c([M], \tilde{\phi}) + c([M], \tilde{\phi}^{-1})$，参见 Oh15，第 22 节。1]^{15},注意到 [M] = [M]。不过，除非 $QH_{2m}(M, \omega)$ 是一维的（等价地，$I_{c_1} = \tilde{}0$ 或 N > m），否则尚不清楚 $G_{2m,i}$(N (M, ω, H)) 中是否有任何一个等于 $\gamma(\phi)$。

正如注 7.4 中所述，$G_{k,i}$ 以及（在有定义时）与归一化哈密顿量 H 相关联的本质条形码，和 γ 一样，具有在 Symp(M, ω) 的共轭作用下保持不变的性质；它们仅取决于 H 的流在 Ham(M, ω) 中所表示的类 ϕ_H。自然会问，在什么情况下，它们仅取决于时间一映射 $\phi^1 H \in$ Ham(M, ω)。当然，若谱不变量如 [Mc10, 命题 3.1 (i) 和 (ii)], 所述下降到 Ham(M, ω)，则确实如此；但这对 (M, ω) 是一个相当严格的条件。一般而言，Ham(M, ω)) 中的一个元素 $\eta \in \pi_1($，连同与粘合构造所得的、位于 S^2 上方且与 η 相关联的向量丛的截面同伦类 $\tilde{\eta}$，会诱导一个同构 $S_{\tilde{\eta},H}$: C F_*(H) → C $F_*(\eta^* H)$，使滤过平移一个固定量 A($\tilde{\eta}$)（见 [McSa12, 练习 12.5.1]）。众所周知，这意味着 [UZ16] 为 ϕ_H 和 $\phi_H \circ \eta$ 关联的简明条形码之间，仅相差将每个区间平移 A($\tilde{\eta}$) 并相应调整分次；特别地，校正分次平移 ˜ 后，当 ϕ_H 被 Ham(M, ω) 中另一个提升 ϕ^1H 的元素取代时，区间长度不变。于是人们可能会预期，间隙 $G_{k,i}$（它们同样表示条形码中条形的长度）在分次平移意义下也保持不变。然而，由于 $S_{\tilde{\eta},H}$ 在同调上诱导的映射在 PSS 映射下对应于 [Se97] 中 $\tilde{\eta}$ 在量子同调上的 Seidel 作用 S $QH^{\tilde{\eta}}$: $QH_*(M, \omega) \to QH_*(M, \omega)$，当 Seidel 表示并非近乎平凡时，这种不变性未必成立，下面的例子便说明了这一点。

例 7.9. 考虑带有标准辛结构 ω_{FS}、且复射影直线面积为 π 的$M = CP^n$。由于 (CP^n, ω_{FS}) 是单调的，因此有 $\Gamma = \{0\}$。最小陈数为$n + 1$，按照我们的约定，量子同调$_k(CP^n, \omega_{FS})$ 在 k 为奇数时是平凡的，而对所有偶数 k，它同构于 κ；乘以q 给出同构量子同调 $_k(CP^n, \omega_{FS}) \cong$量子同调$_{k-2(n+1)}(CP^n, \omega_{FS})$。

˜单位元 $\tilde{1} \in$ $\widetilde{\text{Ham}(CP^n, \omega_{FS})}$由哈密顿量 0 生成，因此，对于任意非零的$a \in H_k(CP^n; \kappa)$ 以及$j \in$Z，有

$$c(q^j a, \tilde{1}) = -j\pi$$

（参见 [Oh15，定理 21.3.7(3)]）。因此，对于任意偶次数 k，例如满足 k + 2j(n + 1) ∈{0, . . . , 2n} 且 $QH_k(M, \omega) =$q j $H_{k+2j(n+1)}(CP^n; \kappa)$，根据 j 的符号，k 次本质条形码要么由单个元素 [−jπ，jπ]组成，要么次数 (k − 1) 本质条形码由单个元素 (jπ, −jπ)组成；在这两种情况下，相应的间隙 $G_{k,\ 1}(CP^n)$ 均为 2 jπ。

[15]由于我们将 γ 定义在 $\widetilde{\text{Ham}}$ 上，而非 Ham($M\omega$)，因此只能称其为伪范数，因为 γ 有可能在 π_1(Ham($M\omega$)) 的某个非平凡元素上取值为零。

反之，考虑环 $\eta\colon S^1 \to \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n,\ \omega_{FS})$ 由 $\eta(t)([z_0 :\ z_1 :\ \cdots :\ z_n]) = [e^{2\pi i t} z_0 :\ z_1 :\ \cdots :\ z_n]$ 给出，该环由归一化哈密顿量生成

$$G_\eta(t,[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]) = \pi\left(\frac{1}{n+1} - \frac{|z_0|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}\right).$$

第一例的一个特殊情形（参见 [Se97，第 11] 节）表明，对于 S^2，上相关纤维丛的某一类截面 $\tilde{\eta}$，Seidel 作用 $S_{QH}\tilde{\eta}\colon QH_*(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS}) \to QH_*(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS})$ 由超平面类 $h \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n$ 的量子乘法给出；$\omega_{FS})$。

回顾（例如参见 [McSa12，例 11.1.10]），若 $h^{\cap i} \in H_{2n-2i}(\mathbb{C}P^n;\ \kappa)$ 表示 h 在标准交积下的第 i 次幂，则 $QH_*(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS})$ 上的量子积 $*$ 由以下事实确定：它满足结合律，且对 $\kappa[q, q^{-1}]$ 双线性；此外，当 $0 \le i \le n-1$ 时，$h*h^{\cap i} = h^{\cap(i+1)}$，而 $h*h^{\cap n} = q$。根据 [McSa12，引理 12.5.3]，$\tilde{1}$ 的谱不变量与同伦类 $[\eta],[\eta]^{-1} \in \pi_1(\mathrm{Ham}(M,\omega)) \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ 的谱不变量之间存在如下关系

$$c(a,[\eta]^{-1}) = c(\mathscr{S}_{\tilde{\eta}}a,\tilde{1}) + \mathbb{A}(\tilde{\eta}) \quad \text{and} \quad c(a,[\eta]) = c(\mathscr{S}_{\tilde{\eta}}^{-1}a,\tilde{1}) - \mathbb{A}(\tilde{\eta}) \tag{7.14}$$

对于一个常数 $A(\tilde{\eta})$。为了方便地求出这个常数，我们可以注意到，由于 $S_{n_{\tilde{\eta}}+1}$ 的作用是与 h 进行量子乘法，即取其 $(n+1)$次量子幂，而这等于 q，并且由于$[\eta]^{n+1} = \tilde{1}$，迭代应用（7.14）可得 $c(a,\ \tilde{1}) = c(qa,\ \tilde{1}) + (n+1)A(\tilde{\eta})$，因此

$$\mathbb{A}(\tilde{\eta}) = \frac{\pi}{n+1}.$$

现在，如果 $i \in \{1,\dots,n-1\}$，则 $QH_{2n-2i}(\mathbb{C}P^n$的生成元 $h^{\cap i}\ \omega_{FS})$满足 $S_{\tilde{\eta}}^{\pm 1}h^{\cap i} = h^{\cap(i\pm1)}$；因此我们有 $c(q^j h^{\cap i},[\eta]) = -j\pi - \pi n_{+1}$ 以及 $c(q^j h^{\cap i},[\eta]^{-1}) = -j\pi + \pi n_{+1}$。所以，对于 $0 < i < n$，$\mathbb{C}P^n$的次数为$(2n-2i-2(n+1)j)$的量子同调对 $N\ (\mathbb{C}P^n,\omega_{FS},\ G_\eta)$的本质条形码贡献了单个区间 $\left[-j\pi - \pi n_{+1}、j\pi - \pi n_{+1}\right]$或 $\left(j\pi - \pi n_{+1}、-j\pi - \pi n_{+1}\right)$，取其中非空者。特别地，这些分次中的间隙，即 $2\pi j$，对于两个哈密顿量 0 和 G_η是相同的。另一方面，我们有

$$\mathscr{S}_{\tilde{\eta}}h^{\cap n} = q, \quad \mathscr{S}_{\tilde{\eta}}^{-1}h^{\cap n} = h^{\cap(n-1)}, \quad \mathscr{S}_{\tilde{\eta}}h^{\cap 0} = h, \quad \text{and } \mathscr{S}_{\tilde{\eta}}^{-1}h^{\cap 0} = q^{-1}h^{\cap n}.$$

因此

$$c(q^j h^{\cap n},[\eta]) = c(q^j h^{\cap(n-1)},\tilde{1}) - \frac{\pi}{n+1} = -j\pi - \frac{\pi}{n+1}$$

而

$$c(q^j h^{\cap n},[\eta]^{-1}) = c(q^{j+1},\tilde{1}) + \frac{\pi}{n+1} = -(j+1)\pi + \frac{\pi}{n+1},$$

类似地

$$c(q^j h^{\cap 0},[\eta]) = -(j-1)\pi - \frac{\pi}{n+1} \quad \text{and} \quad c(q^j h^{\cap 0},[\eta]^{-1}) = -j\pi + \frac{\pi}{n+1}.$$

因此，来自 $QH_{-2(n+1)j}(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS})$ 的本质条形码由一个区间构成，其端点为 $-\pi\left(j + {}^{1}n_{+1}\right)$ 和 $\pi\left(j+1- {}^{1}n_{+1}\right)$；来自 $QH_{2n-2(n+1)j}(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS})$ 的本质条形码也由一个区间构成，其端点为 $-\pi\left(j-1+ {}^{1}n_{+1}\right)$ 和 $\pi\left(j - {}^{1}n_{+1}\right)$。特别地，哈密顿量 H_η 在这些次数上的间隙，即次数为 $-2(n+1)j$ 时的 $(2j+1)\pi$，以及次数为 $2n-(2n+1)j$ 时的 $(2j-1)\pi$，与哈密顿量 0 的间隙（无论是在这些次数还是

其他次数上）各不相同，尽管这两个哈密顿量生成相同的时间一映射。正如前文所述，这与标准的、次水平集型 Floer 理论条形码的情形形成对照；如 [PS16],[UZ16]，中所示，这类条形码的区间长度仅取决于时间一映射，至多相差一个分次平移。

8. 链级构造与持久模

在本节中，我们将过滤匹配对和庞加莱–诺维科夫结构的概念提升到链复形以及它们之间的链映射（的同伦类）的层级。这将使我们能够看到，简洁的本质条形码源自一种共同的代数结构，并最终把这些条形码与S^1值莫尔斯函数的层间持久性联系起来。

8.1. 关于过滤与锥的一般性说明。我们在此汇集一些约定、定义以及简单结果，内容涉及由偏序集过滤的模，以及与它们之间的过滤映射相关的构造。

设 $(\mathrm{P}, \preceq)$ 为一个偏序集，R 为一个交换环。定义在R 上的**P-过滤模**是一个R-模M，并配备子模$M^{\preceq p}$，对所有$p \in \mathrm{P}$均如此，使得当$p \preceq q$时$M^{\preceq p} \subset M^{\preceq q}$，且 $\cup_{p\in P} M^{\preceq p} = M$。

例 8.1。用前几节的语言来说，如果 $(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$ 是一个赋范 $\Lambda_{\uparrow}$-空间，那么通过对 $p \in \mathrm{R}$，令 $V_{\uparrow}^{\preceq p} = \{v \in V_{\uparrow} | \rho_{\uparrow}(v) \leq p\}$，$V^{\uparrow}$ 就获得了一个关于 κ[16] 的 R-过滤模结构。（$V_{\uparrow}^{\preceq p}$ 是一个 κ-子空间这一事实由不等式 $\rho_{\uparrow}(v+w) \leq \max\{\rho_{\uparrow}(v), \rho_{\uparrow}(w)\}$ 得出。）

另一方面，如果 $(V^{\downarrow}, \rho^{\downarrow})$ 是一个赋范 $\Lambda^{\downarrow}$-空间，那么 $\rho^{\downarrow}$ 的不是次水平集，而是超水平集构成了 $V^{\downarrow}$ 的 κ-子空间。因此，通过令其具有 R 上通常偏序所给出的滤过，我们得到一个 R-过滤模结构，具体定义如下

$$V^{\downarrow \preceq p} = \{v \in V^{\downarrow} | \rho^{\downarrow}(v) \geq -p\}.$$

如果 M 和 N 是关于 R 的 P-过滤模，则一个 R-模同态 $\phi: M \to N$ 称为过滤的，如果对所有 p 都有 $\phi(M^{\preceq p}) \subset N^{\preceq p}$。如果 $M_1, \ldots M_k$ 是过滤的 P-模，则其**过滤直和** 是模 $\oplus^k{}_{i=1} M_i$，并赋予由下式给出的滤过

$$\left(\oplus_{i=1}^k M_i\right)^{\preceq p} = \oplus_{i=1}^k (M_i^{\preceq p}).$$

若 $(V^{\uparrow}, \rho_{\uparrow})$ 是赋范 $\Lambda_{\uparrow}$ 空间，则 $\Lambda_{\uparrow}$-基 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 是 $V^{\uparrow}$ 的 $\rho^{\uparrow}$-正交 基（按定义 4.6 的含义），当且仅当显然的加法同构

$$\oplus_{i=1}^k (\Lambda_{\uparrow} x_i) \to V_{\uparrow}$$

是一个过滤 同构（其中 $\Lambda_{\uparrow}$-张成的 $\Lambda_{\uparrow} x_i$ 的各个 x_i，分别赋予它们作为 $V^{\uparrow}$ 的子模所继承的过滤）。

由R-模构成的 P-过滤链复形是一个链复形 $\mathrm{C} = (C_*, \partial)$，其$R$-模链模$C_k$ 均为 P-过滤的，且边界映射 $\partial: C_k \to C_{k-1}$ 是

[16]虽然$V^{\uparrow}$ 是 $\Lambda_{\uparrow}$ 上的向量空间，但各个$V_{\uparrow}^{\preceq p}$ 在 $\Lambda_{\uparrow}$ 中元素的数乘作用下并不保持不变，因此$V^{\uparrow}$ 不是一个 $\Lambda_{\uparrow}$ 上的过滤模。不过，它是由 $\Lambda_{\uparrow}$ 中满足 $\nu_{\uparrow} \geq 0$ 的元素构成的子环上的过滤模，但我们不会直接使用这一点。

过滤同态。因此，对于每个$p \in \mathrm{P}$，我们都有 C 的一个子复形 $\mathrm{C}^{\preceq p}$，其链模由$C^{\preceq p}{}_k$ 给出。回顾一下，P 上的**持久模** 是一个从对象集为 P、且当$p \preceq q$时存在从p 到q 的唯一态射的范畴，到R-模范畴的函子。对于每个k，由包含映射$C^{\preceq p}{}_k \to C^{\preceq q}{}_k$ 在同调上诱导的映射$H^{\preceq p}{}_k(\mathrm{C}) \to H^{\preceq q}{}_k(\mathrm{C})$构成一个持久模的结构。持久模构成一个范畴，其态射为函子之间的自然变换。

若 $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_*, \partial_C)$ 和 $\mathrm{D} = (\mathrm{D}_*, \partial_D)$ 是 P-过滤链复形，则称两个过滤链映射 f、g：$\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 过滤同伦，若存在过滤模同态 K：$\mathrm{C}_* \to \mathrm{D}_{*+1}$，使得 $\mathrm{f} - \mathrm{g} = \partial_D \circ \mathrm{K} + \mathrm{K} \circ \partial_C$。从 C 到 D 的过滤同伦等价是指过滤链映射 f：$\mathrm{C} \to \mathrm{D}$，且存在另一个过滤链映射 h：$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$，使得 f ∘ h 和 h ∘ f 分别与恒等映射过滤同伦。从 C 到 D 的过滤拟同构是指过滤链映射 f：$\mathrm{C} \to \mathrm{D}$，使得在同调上诱导的每个映射 f_*: $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}^{\preceq p}) \to \mathrm{H}_k(\mathrm{D}^{\preceq p})$ 都是同构；也就是说，f 在相应的同调持久模之间诱导出同构。当然，过滤同伦等价是过滤拟同构。一般而言，我们将交替使用“同伦”和“链同伦”这两个术语。

现在假设 $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_*, \partial_C)$ 是一个由 R-模组成的 P-过滤链复形，而 $\mathrm{D} = (\mathrm{D}, \partial_D)$ 是另一个由 R- 模组成的复形（我们不假设它带有滤过）。若 $\mathrm{f}: \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 是链映射，则 f 的映射锥记为 Cone(f)，它是一个链复形，其第 i 个分次部分为 $\mathrm{Cone}(\mathrm{f})_i := \mathrm{C}_{i-1} \oplus \mathrm{D}_i$，其微分定义为 $\partial_{\mathrm{Cone}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}) = (-\partial_C \mathrm{c}, \mathrm{f}\,\mathrm{c} + \partial_D \mathrm{d})$。Cone(f) 继承 C 的 P-滤过，令 $\mathrm{Cone}(\mathrm{f})^{\preceq p}\mathrm{i} = \mathrm{C}^{\preceq p}\,\mathrm{i}_{-1} \oplus \mathrm{D}_i$。

对于所有 $p \in \mathrm{P}$，都有一个链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow \mathrm{Cone}(f)^{\preceq p} \longrightarrow \mathscr{C}^{\preceq p}[-1] \longrightarrow 0$$

（其中映射是显然的包含映射和投影，并且我们采用通常的约定：对于链复形 $\mathrm{E} = (E_*, \partial_E)$ 以及 $a \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{E}[a]$ 表示其第 k 个分次部分为 E_{k+a}、微分为 $(-1)^a \partial_E$) 的链复形；由此得到的同调长正合列中，连接同态 $H_k(\mathrm{C}^{\preceq p}[-1]) = H_{k-1}(\mathrm{C}^{\preceq p}) \to H_{k-1}(\mathrm{D})$ 等于由 $f|_{C^{\preceq p}}$ $_{k-1}$诱导的同调映射。

命题 8.2. 设 C、ˆC 是两个 P-过滤链复形，D、ˆD 是两个链复形，并考虑如下链映射图表

(8.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{f} & \mathscr{D} \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \hat{\mathscr{C}} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{\mathscr{D}} \end{array}$$

其中 γ 是一个过滤拟同构，δ 是一个拟同构，并且两个复合映射 $\delta \circ f$ 和 $\hat{f} \circ \gamma$: $\mathrm{C} \to$ ˆD 同伦。于是存在一个**过滤**拟同构 $\hat{}\,\mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(f)$。

证明。设$K\colon C_{*-1}\to \hat{D}_*$满足 $\partial_{\hat{D}}K+K\partial_C=\delta f-\hat{f}\gamma$。这个恒等映射关系，加上 γ和 δ都是链映射这一事实，推出映射$A\colon \mathrm{Cone}(f)\to\mathrm{Cone}(\hat{f})$定义如下：对于$c\in C_{k-1}$以及$d\in D_k$,

$$A(c,d)=(\gamma c, Kc+\delta d),$$

是一个链映射。显然，A将每个过滤子复形 $\mathrm{Cone}(f)^{\preceq p}=\mathrm{C}^{\preceq p}\oplus \mathrm{D}$映至 $\mathrm{Cone}(\hat{f})^{\preceq p}$。此外，$A$将 (8.1) 中的正合列映入一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f)^{\preceq p} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{\preceq p}[-1] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathscr{D}} & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(\hat{f})^{\preceq p} & \longrightarrow & \hat{\mathscr{C}}^{\preceq p}[-1] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此，关于同调的长正合列所构成的图表也交换；由此，根据五引理以及 δ 是拟同构、γ 是过滤拟同构这两个假设可知，对于所有k和p，A诱导同构$H_k(\mathrm{Cone}(f)^{\preceq p})\cong H_k(\mathrm{Cone}(\hat{f})^{\preceq p})$。□

8.2. **从链级过滤匹配对到持久模**。 [UZ16，定义 4.1]将**Floer 型复形** $\mathrm{C}_\uparrow=(C^{\uparrow *},\partial_{\mathscr{C}_\uparrow},\ell_\uparrow)$定义为 Novikov域 $\Lambda_\uparrow$上的链复形 $(C^{\uparrow *}=\oplus_k C^{\uparrow k},\partial_{\mathscr{C}_\uparrow})$，并配备一个函数 $\ell_\uparrow\colon C^{\uparrow *}\to \mathrm{R}\cup\{-\infty\}$，使得每个 $(C^{\uparrow k},\ell_\uparrow|_{C^{\uparrow k}})$都是可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间，并且对于所有$x\in C_*$，都有 $\ell_\uparrow(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}x)\le \ell_\uparrow(x)$。换言之，给每个$C_k$赋予例 8.1 中所述的实数过滤，最后一个条件就意味着每个 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_k}$ 都是过滤同态。

本文将把 [UZ16] 的 Floer 型复形称为“$\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形”，因为正如定义 4.6 中所述，也有相应的 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形这一概念：一个结构 $\mathrm{C}^\downarrow=(\mathrm{C}^\downarrow_*,\partial_{\mathscr{C}^\downarrow},\ell^\downarrow)$，其中每个 $(\mathrm{C}^\downarrow\mathrm{k},\ell^\downarrow|_{C^\downarrow}\mathrm{k})$ 都是可正交化的 $\Lambda^\downarrow$-空间，并且对每个 $\mathrm{x}\in\mathrm{C}^\downarrow\mathrm{k}$，$\ell^\downarrow(\partial_{\mathscr{C}^\downarrow}\mathrm{x})\ge\ell^\downarrow(\mathrm{x})$。如注记 4.8 所述，$(\mathrm{C}^\downarrow_*,\partial_{\mathscr{C}^\downarrow},\ell^\downarrow)$ 是 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形，当且仅当 $(\mathrm{C}^\downarrow{}_*,\partial_{\mathscr{C}_\downarrow},-\ell^\downarrow)$ 是 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形，因此，关于 Floer 型复形的 [UZ16] 中的一般结果适用于这两种类型（在$\Lambda^\downarrow$ 情形下需适当调整符号）。

定义 8.3. 链级过滤匹配对 $\mathrm{C}\,\mathrm{P}=(\mathrm{C},\mathrm{C}^\downarrow,\mathrm{C}\uparrow,\phi^\downarrow,\phi_\uparrow)$由以下数据组成：

- 一个链复形 $\mathrm{C}=(C_*,\partial)$，其系数取自群代数 $\Lambda=\kappa[\Gamma]$，且每个分次分量 C_k 作为 Λ-模都是有限生成自由模；
- 一个 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $\mathrm{C}^\downarrow=(C^\downarrow_*,\partial_{\mathscr{C}^\downarrow},\ell^\downarrow)$，以及一个 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $\mathrm{C}\uparrow=(C^{\uparrow *},\partial_{\mathscr{C}\uparrow},\ell_\uparrow)$；
- 链映射（与 Λ-作用相交换）$\phi^\downarrow\colon C_*\to C^\downarrow_*$和 $\phi_\uparrow\colon C_*\to C^{\uparrow *}$，使得系数扩张 $1_{\Lambda^\downarrow}\otimes\phi^\downarrow\colon \Lambda^\downarrow\otimes_\Lambda C_*\to C^\downarrow_*$和 $1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\phi_\uparrow\colon \Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda C_*\to C^{\uparrow *}$都是链同伦等价。

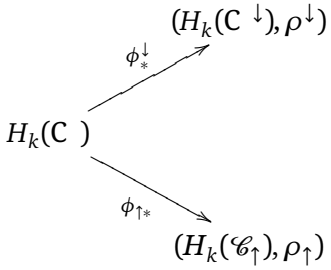
注 8.4. 对于任意 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $\mathrm{C}_\uparrow = (C\uparrow_*, \partial_{\mathscr{C}_\uparrow}, \ell_\uparrow)$ 以及任意 $k \in \mathrm{Z}$，[UZ16，命题 6.6] 表明，第 k 阶同调 $H_k(\mathrm{C}_\uparrow)$ 相对于滤过函数 $\rho\uparrow\colon H_k(\mathrm{C}_\uparrow) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ 成为一个可正交化的 $\Lambda_\uparrow$-空间，其定义为

$$\rho_\uparrow(\alpha) = \inf\{\ell_\uparrow(c) | c \in C_{\uparrow k}, \partial_{\mathscr{C}_\uparrow} c = 0, [c] = \alpha\}.$$

同样，对于一个 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $\mathrm{C}^\downarrow = (C^\downarrow_*, \partial_{\mathscr{C}\downarrow}, \ell^\downarrow)$ 以及 $k \in \mathrm{Z}$，我们有一个可正交化的 Λ-空间 $(H_k(\mathrm{C}^\downarrow), \rho^\downarrow)$，其中 $\rho^\downarrow\colon H_k(\mathrm{C}^\downarrow) \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$\rho^\downarrow(\alpha) = \sup\{\ell^\downarrow(c) | c \in C^\downarrow_k, \partial_{\mathscr{C}^\downarrow} c = 0, [c] = \alpha\}.$$

因此，定义 8.3 中的链级过滤匹配对会对每个 k 诱导出一个定义 5.1 意义下的过滤匹配对，即



我们将后一个过滤匹配对记为 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P}\ )$。

在 R^2 上赋予偏序，规定 $(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \preceq (\mathrm{s}', \mathrm{t}')$ 当且仅当 $\mathrm{s} \leq \mathrm{s}'$ 且 $\mathrm{t} \leq \mathrm{t}'$。给定一个链级过滤匹配对，现在我们描述一种构造：对每个 $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$，构造一个持久模 $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P}\ ) = \{\mathrm{H}_k(\mathrm{C}\ \mathrm{P}\ )_{s,t}\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}$ 在 R^2 上的同构类。按照定义中的记号，写作 $\mathrm{C}\ \mathrm{P}\ = (\mathrm{C}\ , \mathrm{C}^\downarrow, \mathrm{C}\uparrow, \phi^\downarrow, \phi_\uparrow)$，令 $\psi^\downarrow\colon \mathrm{C}^\downarrow_* \to \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda \mathrm{C}_*$ 和 $\psi_\uparrow\colon \mathrm{C}_{\uparrow *} \to \Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda \mathrm{C}_*$ 分别为 $\phi^\downarrow, \phi_\uparrow$ 的链同伦逆。注意，这些逆在同伦意义下唯一：若 $\psi'_\uparrow$ 是 $\phi_\uparrow$ 的另一个同伦逆，则 $\psi_\uparrow, \psi'_\uparrow$ 都与 $\psi'_\uparrow \phi_\uparrow \psi_\uparrow$ 同伦，因此彼此同伦；$\psi^\downarrow$ 的情形也类似。现在回顾 (4.1) 中的 Λ-模 $\Lambda_\updownarrow$，以及包含映射 $\mathrm{j}^\downarrow\colon \Lambda^\downarrow \to \Lambda_\updownarrow$ 和 $\mathrm{j}\uparrow\colon \Lambda_\uparrow \to \Lambda_\updownarrow$。我们将映射 $\psi^\downarrow, \psi_\uparrow$ 合并为一个映射

$$-j^\downarrow \otimes \psi^\downarrow + j_\uparrow \otimes \psi_\uparrow\colon C^\downarrow_* \oplus C_{\uparrow *} \to \Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda C_*. \tag{8.2}$$

这是一个链映射（属于 Λ 上复形的范畴），其同伦类仅取决于原始数据 $\mathrm{C}\ \mathrm{P}\ = (\mathrm{C}、\mathrm{C}^\downarrow、\mathrm{C}\uparrow, \phi^\downarrow, \phi_\uparrow)$，因为 $\psi^\downarrow, \psi_\uparrow$ 在同伦意义下唯一。

通过设定，(8.2) 的定义域自然地按 R^2，过滤

$$(C^\downarrow_* \oplus C_{\uparrow *})^{\preceq(s,t)} = \{(x, y) \in C^\downarrow_* \oplus C_{\uparrow *} | \ell^\downarrow(x) \geq -s \text{ and } \ell_\uparrow(y) \leq t\}$$

（参见例 8.1）。接下来我们定义

$$\mathbb{H}_k(\mathscr{C}\mathscr{P})_{s,t} = H_{k+1}\left(\mathrm{Cone}\left(\left(C^\downarrow_* \oplus C_{\uparrow *}\right)^{\preceq(s,t)} \xrightarrow{-j^\downarrow\otimes\psi^\downarrow + j_\uparrow\otimes\psi_\uparrow} \Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda C_*\right)\right). \tag{8.3}$$

包含映射 $\left(C_*^{\downarrow} \oplus C_{\uparrow *}\right)^{\preceq(s,t)} \hookrightarrow \left(C_*^{\downarrow} \oplus C_{\uparrow *}\right)^{\preceq(s',t')}$ 诱导出映射，使得 $H_k(CP) = \{H_k(CP)_{s,t}\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 上的 κ-向量空间持久模。在动机性例子中，如定理 2.2 所示，如果 $s + t \geq 0$（因此区间 $[-s, t]$ 非空），那么对于某个 Morse 函数 f，$H_k(CP)_{s,t}$ 同构于奇异同调 $H_k(f^{-1}([-s, t]); \kappa)$然而，按照我们的约定，即使 $s + t < 0$，$H_k(CP)_{s,t}$ 仍然有定义，尽管在这种情况下它并不旨在被解释为某个层间集合的同调。

为说明式 (8.3) 的部分动机，对于光滑函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 和区间 $I \subset \mathbb{R}$，记作 $X_I = f^{-1}(I)$；对于任意空间 Y，用 $S_*(Y)$ 表示 Y 的 κ-系数奇异链复形。于是，如果 s、$t \in \mathbb{R}$ 是 f 的正则值，且 $s + t > 0$，则 Mayer–Vietoris 序列的标准证明给出一个同构

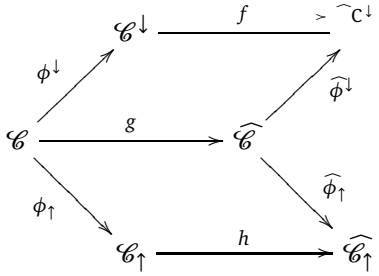
$$H_k(X_{[-s,t]}; \kappa) \cong H_{k+1}\left(\mathrm{Cone}\left(\mathbf{S}_*(X_{[-s,\infty)}) \oplus \mathbf{S}_*(X_{(-\infty,t]}) \xrightarrow{-j_{[-s,\infty)}+j_{(-\infty,t]}} \mathbf{S}_*(X)\right)\right)$$

其中 $j_{[-s,\infty)}$ 和 $j_{(-\infty,t]}$ 是到 $\mathbf{S}_*(X)$ 中的包含映射。定义 (8.3) 旨在与此相对应，同时也适用于诺维科夫同调的情形。定理 2.2 在第 9.5 节中的证明使这一论证更加精确。

尽管式 (8.3) 要求选择同伦逆 $\psi_\uparrow$、$\psi^\downarrow$，但由于这些同伦逆在同伦意义下唯一，命题 8.2 表明，$H_k(CP)$ 的持久模同构类型只取决于原始数据 CP。我们还将看到，在以下关系下具有不变性：

定义 8.5. 如果存在如下链映射图，则称两个链级过滤匹配对 $CP = (C, C^{\downarrow}, C\uparrow, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$ 和 $\widehat{CP} = (\widehat{C}, \widehat{C}^{\downarrow}, \widehat{C}\uparrow, \widehat{\phi}^{\downarrow}, \widehat{\phi}_{\uparrow})$ 是**过滤匹配同伦等价的**：

(8.4)



其中f 和h 是过滤同伦等价，g 是同伦等价，且两个平行四边形在同伦意义下交换。

命题 8.6. 如果链级过滤匹配对 $CP = (C, C^{\downarrow}, C\uparrow, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$ 和 $\widehat{CP} = (\widehat{C}, \widehat{C}^{\downarrow}, \widehat{C}\uparrow, \widehat{\phi}^{\downarrow}, \widehat{\phi}_{\uparrow})$ 过滤匹配同伦等价，那么对每个k，$\widehat{}$存在持久模 $H_k(CP) \cong H_k(\widehat{CP})$的一个同构。

证明。令 $\psi^{\downarrow}$、$\psi_{\uparrow}$、$\widehat{\psi}^{\downarrow}$、$\widehat{\psi}_{\uparrow}$分别为 $1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \phi^{\downarrow}$、$1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes \phi_{\uparrow}$、$1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \widehat{\phi}^{\downarrow}$ 和 $1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes \widehat{\phi}_{\uparrow}$ 的同伦逆。然后，用 $\sim$ 表示链映射之间的链同伦关系，由于 (8.4) 中上方的平行四边形在同伦意义下交换，可得（在

与 $\Lambda^{\downarrow}$ 作张量积后）

$$(1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \widehat{\phi^{\downarrow}}) \circ (1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes g) \circ \psi^{\downarrow} \sim f \circ (1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \phi^{\downarrow}) \circ \psi^{\downarrow} \sim f$$

因此

$$\widehat{\psi^{\downarrow}} \circ f \sim \widehat{\psi^{\downarrow}} \circ (1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \widehat{\phi^{\downarrow}}) \circ (1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes g) \circ \psi^{\downarrow} \sim (1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes g) \circ \psi^{\downarrow}.$$

Simi ⁀larly $\psi_{\uparrow} \circ h \sim (1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes g) \circ \psi_{\uparrow}$。因此我们得到了在同伦意义下交换的图表

(8.5)

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{\downarrow} & \xrightarrow{\psi^{\downarrow}} & \Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes g} \\ \widehat{\mathscr{C}^{\downarrow}} & \xrightarrow[\widehat{\psi^{\downarrow}}]{} & \Lambda^{\downarrow} \otimes_{\Lambda} \widehat{\mathscr{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{\uparrow} & \xrightarrow{\psi_{\uparrow}} & \Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} \mathscr{C} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes g} \\ \widehat{\mathscr{C}_{\uparrow}} & \xrightarrow[\widehat{\psi_{\uparrow}}]{} & \Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} \widehat{\mathscr{C}} \end{array}$$

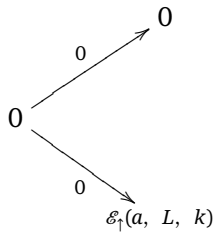
由此可知，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{\downarrow} \oplus \mathscr{C}_{\uparrow} & \xrightarrow{-j^{\downarrow} \otimes \psi^{\downarrow} + j_{\uparrow} \otimes \psi_{\uparrow}} & \Lambda_{\updownarrow} \otimes_{\Lambda} \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f \oplus h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Lambda_{\updownarrow}} \otimes g} \\ \widehat{\mathscr{C}^{\downarrow}} \oplus \widehat{\mathscr{C}_{\uparrow}} & \xrightarrow{-j^{\downarrow} \otimes \widehat{\psi^{\downarrow}} + j_{\uparrow} \otimes \widehat{\psi_{\uparrow}}} & \Lambda_{\updownarrow} \otimes_{\Lambda} \widehat{\mathscr{C}} \end{array}$$

也在同伦意义下交换，因此结论由命题 8.2 得出。　□

8.3. **构件**。我们来计算由 (8.3) 与若干相当简单的链级过滤匹配对 C P 相关联的分次持久性模 $\mathrm{H}_{*}(\mathrm{C\,P}) = \oplus_{k}\mathrm{H}_{k}(\mathrm{C\,P})$。正如我们稍后将看到的，当 Γ 是离散的时，任意链级过滤匹配对 C P 都与当前考察的这类例子的直和过滤匹配同伦等价。

8.3.1. $\mathrm{P\,E}_{\uparrow}(\mathrm{a, L, k})$。首先，借用 [UZ162], 定义 7.2], 的第二种情形中的记号，若 $\mathrm{a} \in \mathrm{R}, \mathrm{L} \in [0, \infty)$，且 $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$，则令 $\mathrm{E}_{\uparrow}(\mathrm{a, L, k})$ 表示 Floer 型复形$(\mathrm{E}_{*}, \partial_{E}, \ell_{E})$，其定义为：令 E_{k} 和 E_{k+1} 均为 $\Lambda_{\uparrow}$ 上分别由符号 x 和 y 生成的一维向量空间，同时令 $\mathrm{E}_{j} = \{0\}$，其中 $\mathrm{j} \notin \{\mathrm{k}, \mathrm{k}+1\}$；规定$\partial_{E}\mathrm{y} = \mathrm{x}$ 且 $\partial_{E}\mathrm{x} = 0$；并定义过滤函数 ℓ_{E}，使得 $\ell_{E}(\lambda \mathrm{x}) = \mathrm{a} - \nu_{\uparrow}(\lambda)$ 且 $\ell_{E}(\lambda \mathrm{y}) = \mathrm{a} + \mathrm{L} - \nu_{\uparrow}(\lambda)$。链复形 $(\mathrm{E}_{*}, \partial_{E})$ 上的恒等映射同伦于零映射（链同伦将 x 映为 y、将 y 映为 0）。鉴于此，我们可以如下定义链级过滤匹配对 $\mathrm{P\,E}_{\uparrow}(\mathrm{a, L, k})$



根据定义，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$ 以及 $(s,t) \in \mathbb{R}^2$，

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_j(\mathscr{P}\mathscr{E}_\uparrow(a,L,k))_{s,t} &= H_{j+1}\left(\mathrm{Cone}\left((\{0\} \oplus \mathscr{E}_\uparrow(a,L,k))^{\preceq(s,t)} \to \{0\}\right)\right) \\ &= H_j(\mathscr{E}_\uparrow(a,L,k)^{\leq t}) = \frac{\{v \in E_j | \partial_E v = 0, \ell_E(v) \leq t\}}{\partial_E\left(\{w \in E_{j+1} | \ell_E(w) \leq t\}\right)},\end{aligned}$$

其结构映射 $\mathrm{H}_j(\mathrm{P}\,\mathrm{E}_\uparrow(a,L,k))_{s,t} \to \mathrm{H}_j(\mathrm{P}\,\mathrm{E}_\uparrow(a,L,k))_{s',t'}$ 由包含映射诱导。由于 ∂_E 在次数不等于 k 时核平凡，因此 $\mathrm{H}_j(\mathrm{P}\,\mathrm{E}_\uparrow(a,L,k))_{s,t} = \{0\}$ 对于 $j \neq k$ 成立。在 k 次我们得到

$$\mathbb{H}_k(\mathscr{P}\mathscr{E}_\uparrow(a,L,k))_{s,t} = \frac{\{\lambda x | \lambda \in \Lambda_\uparrow, a - \nu_\uparrow(\lambda) \leq t\}}{\{\lambda x | \lambda \in \Lambda_\uparrow, (a+L) - \nu_\uparrow(\lambda) \leq t\}}.$$

现在，$\lambda = \sum_{g \in \Gamma} c_g T^g$ 中的一个元素 $\Lambda_\uparrow$ 满足 $a - \nu_\uparrow(\lambda) \leq t$，当且仅当所有使 c_g 非零的 g 都满足 $t \geq a - g$；相应的元素 λx 在上述商中为零，当且仅当所有使 c_g 非零的 g 都满足 $t \geq (a+L) - g$。因此，对于任意 t，$\mathrm{H}_k(\mathrm{P}\,\mathrm{E}_\uparrow(a,L,k))_{s,t}$ 作为一个 κ-向量空间，同构于由 $\sum_g c_g T^g$ 构成的 κ-向量空间 $V_{t,a,L}$，其中求和仅遍及满足 $t \in [a-g, a+L-g)$ 的元素 $g \in \Gamma$。在这些同构下，持久模结构映射对应于映射 $V_{t,a,L} \to V_{t',a,L}$（当 $t \leq t'$ 时），该映射通过删除所有满足 $t' \geq a+L-g$ 的项，将和式 $\sum_g c_g T^g \in V_{t,a,L}$ 截断。

让我们用 [CO20] 的“块模”来重新表述这一计算。若 $R \subset \mathbb{R}^2$ 是区间 $R = I \times J$ 的任意乘积（包括 I 和/或 J 为整个 $\mathbb{R}$ 的情形），则我们有一个 κ_R 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的持久模

$$(\kappa_R)_{s,t} = \begin{cases} \kappa & \text{if } (s,t) \in R \\ \{0\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

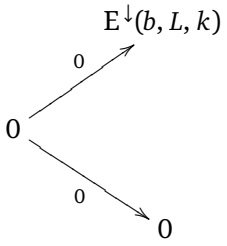
其结构映射 $(\kappa_R)_{s,t} \to (\kappa_R)_{s',t'}$ 在 $(s,t), (s',t') \in R$ 时由恒等映射给出，在其他情况下为 0。上述讨论表明

$$\mathbb{H}_j(\mathscr{P}\mathscr{E}_\uparrow(a,L,k)) \cong \begin{cases} \bigoplus_{g \in \Gamma} \kappa_{\mathbb{R} \times [a-g, a+L-g)} & \text{if } j = k \\ \{0\} & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{8.6}$$

其中的直和项 $\kappa_{\mathbb{R} \times [a-g, a+L-g)}$ 对应于元素 $\sum_g c_g T^g$ 中的系数 c_g，如前一段所述。（特别地，当 $L = 0$ 时，$\mathrm{H}_j(\mathrm{P}\,\mathrm{E}_\uparrow(a,L,k))$ 是平凡的。）

8.3.2. $\mathrm{P}\,\mathrm{E}^\downarrow(b,L,k)$。对偶地，若 $b \in \mathbb{R}$、$L \in [0,\infty)$，且 $k \in \mathbb{Z}$，则有一个 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $\mathrm{E}^\downarrow(b,L,k) = (E_*, \partial_E, \ell_E)$：令 E_j 在 $j \notin \{k, k+1\}$ 时为 $\{0\}$，并令其由以下元素生成：次数 k 中由元素 x 生成，其中 $\ell_E(x) = b$；次数 $k+1$ 中由元素 y 生成，其中 $\ell_E(y) = b - L$ 且 $\partial_E y = x$。（该 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形是沿着注记 4.8 的思路，对 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $\mathrm{E}_\uparrow(-b,L,k)$ 进行共轭得到的。）$\mathrm{E}^\downarrow(b,L,k)$ 可纳入

以下链级过滤匹配对，记为 P E$^{\downarrow}(b$、L、$k)$:



与前一种情况一样，有

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_j(\mathscr{P}\mathscr{E}^{\downarrow}(b,L,k))_{s,t} &= H_{j+1}\left(\mathrm{Cone}\left((\mathscr{E}^{\downarrow}(b,L,k)\oplus\{0\})^{\preceq(s,t)}\to\{0\}\right)\right)\\ &= H_j((\mathscr{E}^{\downarrow}(b,L,k)\oplus\{0\})^{\preceq(s,t)}).\end{aligned}$$

当$j \neq k$时，该式为零；而当$j = k$ 时，它等于

$$\frac{\{\mu x|\mu\in\Lambda^{\downarrow}, b-\nu^{\downarrow}(\mu)\geq -s\}}{\{\mu x|\mu\in\Lambda^{\downarrow}, (b-L)-\nu^{\downarrow}(\mu)\geq -s\}}.$$

接着，采用与第 8.3.1 节相同的分析，可得持久模的同构

$$\mathbb{H}_j(\mathscr{P}\mathscr{E}^{\downarrow}(b,L,k))\cong\begin{cases}\bigoplus_{g\in\Gamma}\kappa_{[-b-g,-b+L-g)\times\mathbb{R}} & \text{if } j=k\\ \{0\} & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{8.7}$$

8.3.3. P M(a, b, k). 给定 a, b $\in$R 和 k $\in$Z，我们定义如下链级过滤匹配对。 Λ-模的链复形 C $=(C_*,\partial)$ 通过令 j $\neq$ k 时 $C_k=\Lambda$且 C^j $=\{0\}$ 来定义，因此必有 $\partial=0$。 $\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形 C↑ 同样在 k 以外的次数上为零，微分为零，其 k 次链群为 $\Lambda_{\uparrow}$ 的一个副本，并配备过滤函数 $\ell_{\uparrow a}(\lambda)=$a $-\nu_{\uparrow}(\lambda)$。类似地， $\Lambda^{\downarrow}$-Floer 型复形 C$^{\downarrow}$ 在 k 以外的次数上为零，微分为零，其 k 次链群为 $\Lambda^{\downarrow}$ 的一个副本，并配备过滤函数 $\ell^{\downarrow b}(\mu)=$b $-\nu^{\downarrow}(\mu)$。随后，利用这些 C、C↑、C $^{\downarrow}$定义过滤匹配对 P M (a, b, k)，并令映射$\phi_{\uparrow}$ 和 $\phi^{\downarrow}$ 在 k 次上由 Λ 到 $\Lambda_{\uparrow}$ 和 $\Lambda^{\downarrow}$ 的标准包含映射给出。

映射 $1_{\Lambda_{\uparrow}}\otimes\phi_{\uparrow}, 1_{\Lambda^{\downarrow}}\otimes\phi^{\downarrow}$ 在次数 k 上恰好是标准典范同构$\Lambda_{\uparrow}\otimes_{\Lambda}\Lambda\cong\Lambda_{\uparrow}$和 $\Lambda^{\downarrow}\otimes_{\Lambda}\Lambda\cong\Lambda^{\downarrow}$, 因此对于同伦逆 $\psi_{\uparrow},\psi^{\downarrow}$，我们可以（事实上必须）取这些同构的逆。于是，（隐式地经过典范同构 $\Lambda_{\updownarrow}\otimes_{\Lambda}\Lambda\cong\Lambda_{\updownarrow}$）(8.3) 中出现的映射 $-$j$^{\downarrow}\otimes\psi^{\downarrow}+j_{\downarrow}\otimes\psi_{\uparrow}$在次数 k 上可认作映射 δ: $\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow}\to\Lambda_{\updownarrow}$，其定义为 $(\mu,\lambda)\mapsto -$j$^{\downarrow}\mu+$j$_{\uparrow}\lambda$。(s, t)-过滤子复形 $(C_*^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow *})^{\preceq(s,t)}$ 在次数 k 上由空间 $(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}}$(s,t)中满足 b $-\nu^{\downarrow}(\mu)\geq -$s 且 a $-\nu_{\uparrow}(\lambda)\leq$ t 的那些 $(\mu,\lambda)\in\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow}$构成。

因此，(8.3) 中的复形 锥 $\left(\underline{\left(C_*^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow *}\right)^{\preceq(s,t)} \quad {}^{-}_{j^{\downarrow}\otimes\psi^{\downarrow}+j^{\uparrow}}{}^{\otimes\psi_{\uparrow}}} \quad \succ \Lambda_{\updownarrow}\otimes_{\Lambda}C_*\right)$在次数 k+1 中由 $(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}$ 给出，在次数 k 中由 $\Lambda_{\updownarrow}$ 给出，而在所有其他次数中由 {0} 给出；唯一的非平凡微分由减法映射 δ: $\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow}\to$ 的限制给出

$\Lambda_{\updownarrow}$。因此，注意到 (8.3) 中的次数平移，
$H_k(P\ M\ (a, b, k))_{s,t} \cong \ker(\delta|_{(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}})$, $H_{k-1}(P\ M\ (a, b, k))_{s,t} \cong$ 余核$(\delta|_{(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}})$, and $H_j(P\ M\ (a, b, k))_{s,t} = \{0\}$ for $j \notin \{k-1, k\}$, with the 持久模结构映射 induced by the 包含映射 $(\Lambda^{\downarrow} \oplus \Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)} \hookrightarrow (\Lambda^{\downarrow} \oplus \Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s',t')}$.

现在我们来计算上述核和余核。一对 $(\mu, \lambda) \in \Lambda^{\downarrow} \oplus \Lambda_{\uparrow}$ 属于差映射 $\delta\colon\ \Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow} \to \Lambda_{\updownarrow}$ 的核，当且仅当 μ 和 λ 都属于 $\Lambda_{\uparrow}$ 与 $\Lambda^{\downarrow}$的公共子模 $\Lambda = \kappa[\Gamma]$，且二者相等。由于 $(\mu, \lambda) \in (\Lambda^{\downarrow} \oplus_{\Lambda_{\uparrow}})^{\preceq_{a,b}(s,t)}$ 当且仅当 $\nu^{\downarrow}(\mu) \le b + s$ 且 $\nu_{\uparrow}(\lambda) \ge a - t$，这将 $H_k(P\ M\ (a, b, k))_{s,t}$识别为 Λ的子-κ-向量空间，由满足如下条件的和 $\sum_{g\in\Gamma} c_g T^g$ 组成：和中出现的每个 g 都满足 $a - t \le g \le b + s$（等价地，$t \ge a - g$ 且 $s \ge -b + g$）。当 $s \le s'$ 和 $t \le t'$ 时，持久模映射就是包含映射。由此得到持久模的一个同构

$$\mathbb{H}_k(\mathscr{PM}(a, b, k)) \cong \bigoplus_{g\in\Gamma} \kappa_{[-b+g,\infty)\times[a-g,\infty)}. \tag{8.8}$$

现在转而讨论 $\delta|_{(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}}$ 的余核。取 $\gamma = \sum_{g\in\Gamma} c_g T^g$ 为 $\Lambda_{\updownarrow}$ 的一个一般元素；根据 $\Lambda_{\updownarrow}$ 的定义，它通常可能是一个无限和，但需满足这样的约束：在每个有界区间内，仅有有限多个 g 满足 $c_g \neq 0$。如果 $-t \le b + s$，我们可以（或许并不唯一地）将 $\{g | c_g \neq 0\}$ 划分为若干集合 S_1, S_2，使得每个 $g \in S_1$ 都满足 $g \le b + s$，且每个 $g \in S_2$ 都满足 $g \ge a - t$。于是令 $\mu = -\sum_{g\in S_1} c_g T^g$ 和 $\lambda = \sum_{g\in S_2} c_g T^g$，我们看到 $(\mu, \lambda) \in (\Lambda^{\downarrow} \oplus \Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}$ 以及 $\delta(\mu, \lambda) = \gamma$。因此，当 $a - t \le b + s$ 时，映射 $\delta|_{(\Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}}$ 具有平凡余核。反之，假设 $b + s < a - t$，对于如上所述的一般元素 $\gamma = \sum_{g\in\Gamma} c_g T^g$，我们可以唯一地将其表示为

$$\gamma = -\mu + \left(\sum_{b+s<g<a-t} c_g T^g\right) + \lambda$$

其中 $(\mu, \lambda) \in (\Lambda^{\downarrow} \oplus \Lambda_{\uparrow})^{\preceq_{a,b}(s,t)}$。这给出了一个同构

$$\mathbb{H}_{k-1}(\mathscr{PM}(a, b, k))_{s,t} \cong \bigoplus_{g\in\Gamma\cap(b+s,a-t)} \kappa,$$

其持久模结构映射对应于同时增大 s 和t （从而缩小区间 $(b + s, a - t)$），并对应于显然的投影。因此，就块模而言，

$$\mathbb{H}_{k-1}(\mathscr{PM}(a, b, k)) \cong \bigoplus_{g\in\Gamma} \kappa_{(-\infty,-b+g)\times(-\infty,a-g)}. \tag{8.9}$$

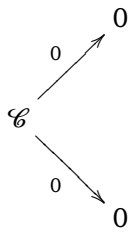
由于分次持久性模 $H_*(P\ E_{\uparrow}(a, L, k))$、$H_*(P\ E^{\downarrow}(b, L, k))$、$H_*(P\ M\ (a, b, k))$旨在作为层间持久性的代数模型的构件，因此（当 $\Gamma = \{0\}$ 时）它们类似于 [BGO19 定义 2.16]，中的块 *MV*-系统，并非巧合。不过， [BGO19] 只处理定义在 $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a + b > 0\}$ 上、而非定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的持久模，因此两者之间存在一些细微差异。当Γ 非平凡时，我们已经看到，这些构件相较于 $\Gamma = \{0\}$ 情形会发生修改

只需以自然的方式使其具有 Γ-周期性即可。另一方面，与[BH17], 一致，当 $\Gamma \neq \{0\}$ 时会出现另一类构件；由于当 $\Gamma \neq \{0\}$ 时，$\kappa[\Gamma]$ 上的模可能具有挠，这一类构件不同于 [BGO19], 的块*MV*-系统。现在我们来描述最后这一构件。

8.3.4. $\mathrm{PR}(T, k)$. 设 T 是一个有限生成的挠 Λ-模，且 $k \in \mathbb{Z}$。设

$$\cdots \to F_m \to F_{m-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to T \to 0 \tag{8.10}$$

是由有限生成自由 Λ-模构成的 T 的自由分解，如 [Rot09, 引理 7.19] 的证明中所述。设 C 是链复形，其在次数 j 上的部分为 F^{j-k}（若 $j < k$，则视为 {0}），微分由自由分解中的映射给出。因此，$H_k(\mathrm{C}) \cong T$，而其他$H_j(\mathrm{C})$均为零。由命题 4.1，$\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda T \cong \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda T = \{0\}$，因为 T 是挠模。因此，由于$\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$ 是平坦的 Λ-模，(8.10) 的正合性意味着复形 $\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda \mathrm{C}$ 和 $\Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda \mathrm{C}$ 均为无圈复形。由于域上的无圈链复形与零复形链同伦等价，以下图表定义了一个链级过滤匹配对 $\mathrm{PR}(T, k)$:



（记号 $\mathrm{PR}(T,k)$ 省略了自由分解的选择，但由于任意两个自由分解都同伦等价，$\mathrm{PR}(T,k)$ 的过滤匹配同伦等价类仅取决于 T 和 k。）

根据定义，我们有

$$\mathbb{H}_j(\mathscr{PR}(T,k))_{s,t} = H_{j+1}\left(\mathrm{Cone}(0 \to \Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda \mathscr{C})\right) = H_{j+1}(\Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda \mathscr{C}),$$

独立于 s、t（且结构映射 $\mathrm{H\,j}(\mathrm{P\,R(T,\,k)})_{s,t} \to \mathrm{H}_j(\mathrm{P\,R(T,\,k)})_{s',\mathrm{t}'}$均为恒等映射）。由于 $\Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda \mathrm{C}$ 在次数 j 上定义为：若 $\mathrm{j} < \mathrm{k}$，则为 {0}；否则为 $\Lambda_\updownarrow \otimes \mathrm{F}^{j-k}$，其微分由 (8.10) 延拓而来，因此我们得出 $\mathrm{H}_j(\mathrm{P\,R(T,\,k)})_{s,t} \cong \mathrm{Tor}^\Lambda_{\mathrm{j+1-k}}(\mathrm{T}, \Lambda_\updownarrow)$（当 $\mathrm{j} < \mathrm{k}-1$ 时显然为零）。根据命题 4.2，由于 T 是挠的，若 $\mathrm{j} > \mathrm{k}$，则 $\mathrm{Tor}^\Lambda_{\mathrm{j+1-k}}(\mathrm{T}, \Lambda_\updownarrow)$ 为零；若 $\mathrm{j} = \mathrm{k}$，则它同构于 T。在剩余情形 $\mathrm{j} = \mathrm{k} - 1$中，我们有 $\mathrm{Tor}^\Lambda_0(\mathrm{T}, \Lambda_\updownarrow) \cong \Lambda_\updownarrow \otimes_\Lambda \mathrm{T}$，它因正合列 $0 \to \Lambda \to \Lambda_\uparrow \oplus \Lambda^\downarrow \to \Lambda_\updownarrow \to 0$ 以及 $(\cdot) \otimes_\Lambda \mathrm{T}$ 的右正合性而为零。因此，$\mathrm{H}_j(\mathrm{P\,R(T,\,k)})_{s,t}$ 除次数 k 外在所有次数上均为零；当 $\mathrm{j} = \mathrm{k}$ 时，它同构于 T（且独立于 (s, t)）。因此，若 T 作为 κ 上向量空间的维数为 d，则有（作为 R^2 上的 κ-向量空间持久模）

$$\mathbb{H}_j(\mathscr{PR}(T,k)) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ \left(\kappa_{(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)}\right)^{\oplus d} & \text{if } j = k \end{cases}.$$

8.4. 直和分解与条形码。本节回顾 Floer 型复形及其条形码的一些事实，这些内容来自 [UZ16], ; 我们将其与第 5 节和第 8.3 节的结果结合起来，证明当 Γ 离散时，链级过滤匹配对在过滤匹配同伦等价意义下，可由 [UZ16] 的条形码与定义 5.8 中的基谱组合描述。在 [UZ16] 中，我们处理持久模关于 Γ 的作用的对称性时，采用的记号约定是将条形码的元素定义为成对的 $([a], L) \in (\mathbb{R}/\Gamma) \times [0, \infty]$；它们旨在对应于等价类区间 $[a, a + L)$，其中左端点 a（而非长度 L）仅在模 Γ 意义下定义。为避免与定义 5.8 中类似的约定混淆，同时也因为在当前语境下，我们需要区分四种类型的区间 $[a, b), (a, b], [a, b], (a, b)$，本文约定将条形码元素直接表示为区间 I^Γ 在 Γ-平移下的等价类，如记号 6.2 所示。

设 $C_\uparrow = (C^{\uparrow *}, \partial_{\mathscr{C}_\uparrow}, \ell_\uparrow)$ 是一个 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形。根据 [UZ16 的推论 2.17 和 2.18], , 正交可化 $\Lambda_\uparrow$-空间 $C^{\uparrow k}$ 的子空间 $\mathrm{Im}(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$ 和 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 均可正交化；$\mathrm{Im}(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$ 的任意 $\ell_\uparrow$-正交基都可以扩充为 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 的一个 $\ell_\uparrow$-正交基，而 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 的任意 $\ell_\uparrow$-正交基都可以扩充为 $C^{\uparrow k}$ 的一个 $\ell_\uparrow$-正交基。 [UZ16 的定理 3.4] 表明，每个映射 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}} : C^{\uparrow(k+1)} \to \ker(\partial_k)$ 都有一个（非阿基米德）奇异值分解：存在 $C^{\uparrow(k+1)}$ 的 $\ell_\uparrow$-正交基 $\{ y_1^{k+1}, \ldots, y^{k+1} r, \ldots, y^{k+1} n \}$，以及 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 的 $\{x\ k\ 1, \ldots, x\ k\ r, \ldots, x\ k\ m\}$，其中 $\{ y\ k{+}1\ r{+}1, \ldots, y\ k^{+1} n \}$ 是 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$ 的一组基，而 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow} y\ k{+}1\ i = x\ k\ i$ 对 $i = 1, \ldots, r$ 均成立。令 $F^{\uparrow(k+1)} = \mathrm{span}^{\Lambda_\uparrow}\{ y_1^{k+1}, \ldots, y\ k^{+1} r \}$。则 $F^{\uparrow(k+1)}$ 和 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$ 是 $C^{\uparrow(k+1)}$ 中的正交补（即它们的直和为 $C^{\uparrow(k+1)}$，且对于 $f \in F^{\uparrow(k+1)}$ 和 $z \in \ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$，有 $\ell_\uparrow(f + z) = \max\{\ell_\uparrow(f), \ell_\uparrow(z)\}$），因此更一般地，$F^{\uparrow(k+1)}$ 的任意 $\ell_\uparrow$-正交基与 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$ 的任意 $\ell_\uparrow$-正交基的并，构成 $C^{\uparrow(k+1)}$ 的一组正交基。

同样，我们得到 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}}$ 的奇异值分解，特别是得到一个子空间 $F_{\uparrow k} \subset C^{\uparrow k}$，它具有一个关于 $\ell_\uparrow$ 正交的基 $\{ y\ k\ 1, \ldots, y\ k\ s \}$，使得 $F^{\uparrow k}$ 与 $\ker(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 互为正交补，并且 $\{\partial_{\mathscr{C}_\uparrow} y_1^k, \ldots, \partial_{\mathscr{C}_\uparrow} y^k s\}$ 是 $\mathrm{Im}(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}})$ 的一个关于 $\ell_\uparrow$ 正交的基。令 $B^{\uparrow k} = \mathrm{Im}(\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow(k+1)}})$（因此 $B^{\uparrow k} = \mathrm{span}^{\Lambda_\uparrow}\{x\ k\ 1, \ldots, x\ k\ r\}$），并令 $H^{\uparrow k} = \mathrm{span}^{\Lambda}\{x\ k\ r{+}1, \ldots, x^k m\}$，于是我们将每个 $C^{\uparrow k}$ 分解为三个正交子空间的直和 $B^{\uparrow k}$、$H^{\uparrow k}$、$F^{\uparrow k}$，其中 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{B_{\uparrow k} \oplus H_{\uparrow k}} = 0$，且 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}$ 将 $F^{\uparrow(k+1)}$ 的关于 $\ell_\uparrow$ 正交的基 $\{ y_1^{k+1}, \ldots, y\ k^{+1} r \}$ 映射到 $B^{\uparrow k}$ 的关于 $\ell_\uparrow$ 正交的基 $\{x\ k\ 1, \ldots, x\ k\ r\}$。

$\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $C_\uparrow$ 的次数 k 详尽条形码定义于 [UZ16，定义 6.3]，它是 $(\mathbb{R}/\Gamma) \times [0, \infty]$ 中由以下元素构成的多重集：对 $i = 1, \ldots, r$，取数对 $([\ell_\uparrow(x\ k\ i)], \ell_\uparrow(y^k i) - \ell_\uparrow(x^k i))$；以及对 $i = r + 1, \ldots, m$，取数对 $([\ell_\uparrow(x\ k\ i)], \infty)$（其中对于一个 $\in \mathbb{R}$，我们用 $[a]$ 表示它在 $\mathbb{R}/\Gamma$中的等价类）。 [UZ16，定理 7.1] 表明，详尽条形码与用于定义它的奇异值分解的选择无关。根据定义，$C_\uparrow$ 的简明条形码由详尽条形码删去所有长度为零的区间得到； [UZ16，定理 B] 证明它是 $C_\uparrow$ 在滤过链同伦等价意义下的完全不变量（而详尽条形码则是在更精细的滤过链同构关系下的完全不变量）；特别是，

从同调持久模的角度来看，详尽条形码与简明条形码之间的区别无关紧要。遵照记号 6.2，本文将简明条形码中的元素表示为区间模去Γ-平移后的等价类 $[\ell_\uparrow(x_{ki}), \ell_\uparrow(y^{k+1}{}_i))^\Gamma$(其中$i \le r$，且 $\ell_\uparrow(x_{ki}) < \ell_\uparrow(y^{k+1}{}_i)$)，或 $[\ell_\uparrow(x_{ki}), \infty)^\Gamma$(其中 $i > r$)。

命题 8.7. 沿用上述记号，链复形的包含映射 $\iota_\uparrow$: $\left(\oplus_k H^{\uparrow k}, 0\right) \to \left(C^{\uparrow *}, \partial_{\mathscr{C}_\uparrow}\right)$ 是一个同伦等价，其同伦逆 $\Pi_\uparrow$ 在每个 $H^{\uparrow k}$ 上限制为恒等映射，并将 $B^{\uparrow k}$ 和 $F^{\uparrow k}$ 都映射到 {0}。

证明。 根据定义， $\Pi_\uparrow \circ \iota_\uparrow$ 是 $\oplus_k H^{\uparrow k}$上的恒等映射。若定义 $L: C^{\uparrow *} \to C^{\uparrow(*+1)}$，使其在每个 $H_{\uparrow k} \oplus F^{\uparrow k}$ 上取零，并将基元素 $x^k{}_i \in B^{\uparrow k}$ 映射到对应的$y^{k+1}{}_i \in F^{\uparrow(k+1)}$，不难验证，$L$ 定义了 $\iota_\uparrow \circ \Pi_\uparrow$ 与 $C^{\uparrow *}$上的恒等映射之间的同伦。□

由于零微分复形的同调就是该复形的底层链模，前述命题中的映射 $\iota_\uparrow$ 诱导出一个同构 $\iota_{\uparrow *}$，将 $\oplus_k \mathrm{C}^{\uparrow k}$ 的子模 $\mathrm{H}_* = \oplus_k \mathrm{H}^{\uparrow k}$ 映至同调 $\mathrm{H}_*(\mathrm{C}_\uparrow)$。根据 [UZ16，推论 2.17]，，（$\mathrm{H}^{\uparrow k}$、$\ell_\uparrow|_{H_{\uparrow k}}$) 是可正交化的 $\Lambda_\uparrow$ 空间，因此令 $\rho_{\uparrow k} = \ell_\uparrow \circ \iota_{\uparrow *}^{-1}|_{H_k(\mathrm{C}_\uparrow)}$，即可得到可正交化的 $\Lambda_\uparrow$ 空间 $(\mathrm{H}_k(\mathrm{C}_\uparrow)$、$\rho_{\uparrow k})$。由 [UZ16，命题 6.6] 可知，映射 $\rho_{\uparrow k}$: $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}_\uparrow) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ 为每个 $\alpha \in \mathrm{H}_k(\mathrm{C}_\uparrow)$ 赋予“谱不变量”

$$\rho_{\uparrow k}(\alpha) = \inf\{\ell_\uparrow(a) | a \in \ker \partial_{\mathscr{C}_\uparrow}|_{C_{\uparrow k}}, [a] = \alpha \in H_k(\mathscr{C}_\uparrow)\}. \tag{8.11}$$

特别地，函数 $\rho_{\uparrow k}$ 与我们最初用于得到它的奇异值分解的选择无关。根据 [UZ16，命题 5.5]，，对于 $H_k(\mathrm{C}_\uparrow)$ 的任意 $\rho_{\uparrow k}$-正交基 $\{h_1, \ldots, h_{m-r}\}$，数值多重集 $\{\rho_{\uparrow k}(h_1) \bmod \Gamma, \ldots, \rho_{\uparrow k}(h_{m-r}) \bmod \Gamma\}$ 独立于正交基的选择，等于 $\{\ell_\uparrow(x^k{}_{r+1}) \bmod \Gamma, \ldots, \ell_\uparrow(x^k{}_m) \bmod \Gamma\}$，即 degree-Γ的（详细或简洁）条形码中无限长度条的左端点（模 Γ）的集合。

照例，利用注记 4.8，类似的结论也适用于 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $\mathrm{C}^\downarrow = (\mathrm{C}^\downarrow_*, \partial_{\mathscr{C}^\downarrow}, \ell^\downarrow)$：每个 $\mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k}$ 都可正交分解为 $\mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k} = \mathrm{B}^\downarrow \mathrm{k} \oplus \mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k} \oplus \mathrm{F}^\downarrow \mathrm{k}$，其中 $\partial_{\mathscr{C}^\downarrow}$在 $\mathrm{B}^\downarrow \mathrm{k} \oplus \mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k}$ 上为零，并将 $\mathrm{F}^\downarrow \mathrm{k}$ 的某个正交基 $\{\mathrm{y}_1^{k+1}, \ldots, \mathrm{y}^{k+1}\mathrm{r}\}$ 一一映射到 $\mathrm{B}^\downarrow \mathrm{k}$ 的一个正交基。令 $\mathrm{x\,k\,i} = \partial_{\mathscr{C}^\downarrow} \mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}$，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r}$，并令 $\{\mathrm{x\,k\,r}_{+1}, \ldots, \mathrm{x}^k\mathrm{m}\}$ 为 $\mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k}$ 的一个正交基，则 $\mathrm{C}^\downarrow$ 的 k 次简明条形码定义为由模 Γ-平移 $(\ell^\downarrow(\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}), \ell^\downarrow(\mathrm{x\,k\,i})]^\Gamma$ 的半开区间组成，其中 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{r}\}$ 且 $\ell^\downarrow(\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}) \neq \ell^\downarrow(\mathrm{x\,k\,i})$；此外还包括 $(-\infty, \ell^\downarrow(\mathrm{x\,k\,i})]^\Gamma$，其中 $\mathrm{i} = \mathrm{r}+1, \ldots, \mathrm{m}$。将 $\mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k}$（带零微分）嵌入 $\mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k}$ 的映射 $\iota^\downarrow$ 给出一个链同伦等价，其同伦逆为投影 $\Pi^\downarrow$: $\mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k} \to \mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k}$，该投影对应于直和分解 $\mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k} = \mathrm{B}^\downarrow \mathrm{k} \oplus \mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k} \oplus \mathrm{F}^\downarrow \mathrm{k}$。由此得到的同构 $\mathrm{H}^\downarrow \mathrm{k} \cong \mathrm{H}_k(\mathrm{C}^\downarrow)$ 将 $\ell^\downarrow|_{H^\downarrow} \mathrm{k}$ 与谱不变量 $\rho^\downarrow \mathrm{k} : \mathrm{H}_k(\mathrm{C}^\downarrow) \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ 对应起来，其定义如下：

$$\rho_k^\downarrow(\alpha) = \sup\{\ell^\downarrow(a) | a \in \ker(\partial_{\mathscr{C}^\downarrow}|_{C_k^\downarrow}), [a] = \alpha \in H_k(\mathscr{C}^\downarrow)\}. \tag{8.12}$$

现在假设我们有一个定义 8.3 中的链级过滤匹配对 $\mathcal{CP} = (C, C^{\downarrow}, C^{\uparrow}, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$。特别地，$C = (C_* = \oplus_k C_k, \partial)$ 是由自由有限生成 Λ-模构成的链复形。为确保能够得到适当的直和分解，我们在此假设 R 的子群 Γ 是离散的，因此 Λ 是主理想整环。于是每个 $\ker(\partial|_{C_k})$ 也是有限生成自由 Λ-模。将微分 $\partial|_{C_{k+1}} : C_{k+1} \to \ker(\partial|_{C_k})$ 化为史密斯标准形，即可得到 C_{k+1} 的基 $\{y_{k,1}^{k+1}, \dots, y_{k,r}^{k+1}, y_{k+1,r+1}, \dots, y_{k,n}^{k+1}\}$ 和 $\ker(\partial|_{C_k})$ 的基 $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,r}, \dots, x_{k,m}\}$，以及非零元素 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Lambda$，使得 $\alpha_i | \alpha_{i+1}$，并满足：对于 $i = 1, \dots, r$，有 $\partial y_i^{k+1} = \alpha_i x_{k,i}$；对于 $i = r+1, \dots, n$，有 $\partial y_i^{k+1} = 0$。

与讨论 $C^{\uparrow}$ 和 $C^{\downarrow}$ 时类似，但由于 α_i 可能不可逆，情况稍微复杂一些。令 $F_{k+1} = \operatorname{span}_\Lambda\{y_1^{k+1}, \dots, y_r^{k+1}\}$，$\tilde{B}_k = \operatorname{span}_\Lambda\{x_{k,1}, \dots, x_{k,r}\}$，并令 $H^{\text{free}}_k = \operatorname{span}_\Lambda\{x_{k,r+1}, \dots, x_{k,m}\}$。（因此 $\ker(\partial|_{C_k}) = H^{\text{free}}_k \oplus \tilde{B}_k$，而第 k 个同调 $H_k(C)$ 是 H^{free}_k 与挠子模 $\tilde{B}_k \operatorname{span}_\Lambda\{\alpha_1 x_1^k, \dots, \alpha_r x_r^k\}$ 的直和。）同理，$\partial|_{C_k}$ 的史密斯标准形给出 C_k 的子模 F_k、~~H^{free}_{k-1} 以及~~ $\ker(\partial|_{C_{k-1}})$ 的子模 $\tilde{B}_{k-1}$。特别地，我们有直和分解 $C_k = F_k \oplus \ker(\partial|_{C_k}) = F_k \oplus H^{\text{free}}_k \oplus \tilde{B}_k$。

记 $H^{\text{free}}_* = \oplus_k H^{\text{free}}_k$，令 $\iota : H^{\text{free}}_* \to C_*$ 为包含映射，并令 $\Pi : C_* \to H^{\text{free}}_*$ 在每个次数 k 上由直和分解 $C_k = F_k \oplus H^{\text{free}}_k \oplus \tilde{B}_k$ 所对应的投影给出。将 H^{free}_* 视为带零微分的链复形，我们看到 ι 是链映射，因为 $\partial|_{H^{\text{free}}_k} = 0$；而 Π 是链映射，因为 $\operatorname{Im}(\partial|_{C_{k+1}})$ 包含于 $\tilde{B}_k$ 中，后者被 Π 消去。与命题 8.7 的情形不同，不应期待 ι 和 Π 互为同伦逆，因为 $H_k(C)$ 可能含有挠，此时它与 H^{free}_k 不同构。不过，回想一下，我们假设 C 是链级过滤匹配对 $\mathcal{CP} = (C, C^{\downarrow}, C^{\uparrow}, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$ 的一部分，因此有：

命题 8.8. 链映射 $\phi_{\uparrow} : C \to C^{\uparrow}$ 与 $\phi_{\uparrow} \circ \iota \circ \Pi$ 链同伦。类似地，$\phi^{\downarrow} : C \to C^{\downarrow}$ 与 $\phi^{\downarrow} \circ \iota \circ \Pi$ 链同伦。

证明。两种情况完全相同，因此我们只考虑 $\phi_{\uparrow}$。回想一下，$C^{\uparrow}$ 除了其他性质外，是域 $\Lambda_{\uparrow} \supset \Lambda$ 上的向量空间链复形。我们可以定义一个同态 $L : C_* \to C^{\uparrow}(*+1)$：令 L 在每个 $F_k \oplus H^{\text{free}}_k$ 上为零，并令 $L(x_{k,i}) = \frac{1}{\alpha_i} \phi_{\uparrow}(y_i^{k+1})$，其中 $i = 1, \dots, r$；和前面一样，$\{y_1^{k+1}, \dots, y_r^{k+1}\}$ 是 F_{k+1} 的一组基，而 $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,r}\}$ 是 $\tilde{B}_k$ 的一组基，且 $\partial y_i^{k+1} = \alpha_i x_{k,i}$。接下来很容易验证，$\phi_{\uparrow} - \phi_{\uparrow} \circ \iota \circ \Pi = \partial_{\mathscr{C}_{\uparrow}} \circ L + L \circ \partial$。□

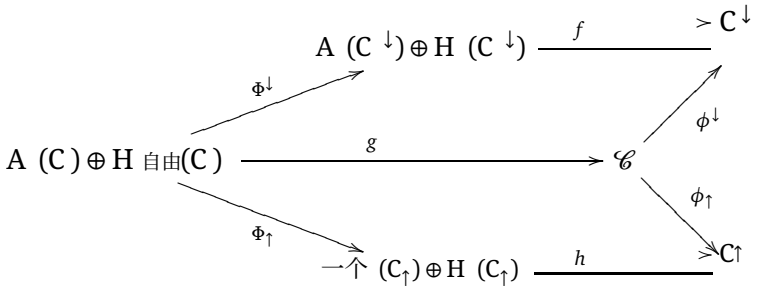
现在令 $A(C)$、$A(C_{\uparrow})$ 和 $A(C^{\downarrow})$ 分别表示 C、$C^{\uparrow}$ 和 $C^{\downarrow}$ 的子复形，其 k 次部分依次为 $F_k \oplus \tilde{B}_k$、$F_{\uparrow k} \oplus B^{\uparrow k}$ 和 $F^{\downarrow k} \oplus B^{\downarrow k}$。因此，$A(C_{\uparrow})$ 是一个 $\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形，其过滤函数由 $\ell_{\uparrow}$ 的限制给出；同样，将 $\ell^{\downarrow}$ 限制后，$A(C^{\downarrow})$ 便成为一个 $\Lambda^{\downarrow}$-Floer 型复形。$A(C_{\uparrow})$ 和 $A(C^{\downarrow})$ 的同调都平凡，而 $A(C)$ 在次数 k 的同调是 $H_k(C)$ 的挠子模 $tH_k(C)$。令 $H\,\text{free}(C)$ 为分次 Λ-模，其次数 k 部分为 $H_k(C)/tH_k(C)$，并将其视为零微分的链复形；包含映射 $\iota : H^{\text{free}}_k \to C_k$ 在同调上诱导的

映射与商投影 $H_k(C) \to H_k(C) \mathrm{t} H_k(C)$复合后，给出从 C 的子复形（同样取零微分）到 H free(C) 的同构，该子复形在次数 k 上由 $H^{\text{free}} k(C)$ 给出。最后，令 $H(C_\uparrow)$ 和 $H(C^\downarrow)$ 表示两个零微分的 Floer 型复形，分别为 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型和 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型，其次数 k 部分分别由同调 $H_k(C_\uparrow)$ 和 $H_k(C^\downarrow)$ 给出，过滤函数则由谱不变量 $\rho_{\uparrow k}$、$\rho^\downarrow k$ 给出。映射 $\iota_\uparrow$: $H_{\uparrow k} \to C_{\uparrow k}$ 和 $\iota^\downarrow$: $H^\downarrow k \to C^\downarrow k$ 在同调上诱导的映射，给出了从 $C_\uparrow$、$C^\downarrow$ 的子 Floer 型复形到这些 Floer 型复形的同构；这些子复形在次数 k 上分别由 $H_{\uparrow k}$ 和 $H^\downarrow k$ 给出。

赋范 $\Lambda_\uparrow$ 空间或 $\Lambda^\downarrow$ 空间的直和，以使各个直和项成为正交子空间的显然方式定义，从而得到下文隐含的 Floer 型复形直和以及链级过滤匹配对的相应概念。

命题 8.9。沿用上述记号，我们有一个图表，该图表在同伦意义下交换，

(8.13)



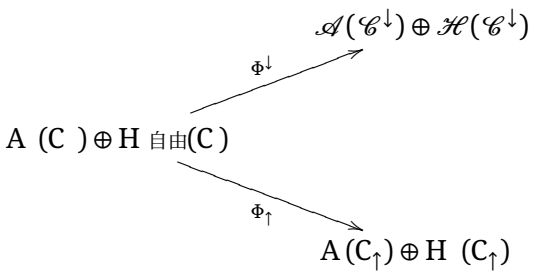
其中f 和h 是滤过链同构，g 是链同构，$\Phi^\downarrow$ 在 A $(C^\downarrow)$ 上的限制为 0，在 H free(C) 上的限制是映射 $\phi^\downarrow_*$: H free(C) $\to$ H $(C^\downarrow)$，该映射由$\phi^\downarrow$在同调上诱导；而 $\Phi_\uparrow$ 在 A $(C_\uparrow)$ 上的限制为 0，在 H free(C) 上的限制是映射 $\phi_{\uparrow *}$: H free(C) $\to$ H $(C_\uparrow)$，该映射由 $\phi_\uparrow$在同调上诱导。

证明。如上文命题之前所述，对每个次数 k，我们都有同构 $H_{\uparrow k} \cong H_k(C_\uparrow)$、$H^\downarrow k \cong H_k(C^\downarrow)$ 和 $H^{\text{free}} k \cong H_k(C) \mathrm{t} H_k(C)$，它们分别由 $\iota_\uparrow$、$\iota^\downarrow$、ι 在同调上诱导；链同构 f、g、h 只是将这些同构（的逆）与每个次数 k 中由直和分解 $C_k = (F_k \oplus \tilde{B}_k) \oplus H^{\text{free}} k$、$C_{\uparrow k} = (F_{\uparrow k} \oplus B_{\uparrow k}) \oplus H_{\uparrow k}$、$C^\downarrow k = (F^\downarrow k \oplus B^\downarrow k) \oplus H^\downarrow k$ 所对应的显然加法映射复合而成。（f 和 h 是过滤同构这一事实，源于相应的直和分解是正交的。）

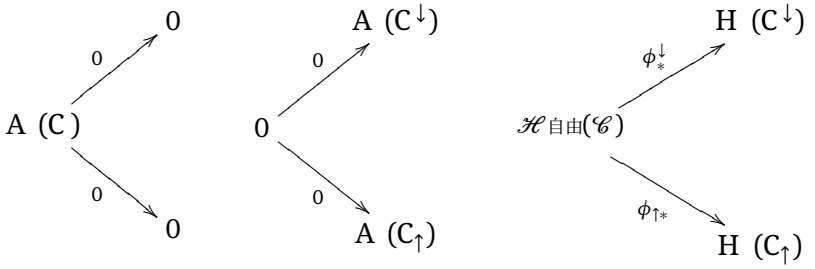
还需证明该图表在同伦意义下交换。按照上一段中将 $H_k(C) \mathrm{t} H_k(C)$ 与 $H^{\text{free}} k$ 以及 $H_k(C_\uparrow)$ 与 $H_{\uparrow k}$ 作相同的识别，映射$\phi_{\uparrow *}$: $H_k(C) \mathrm{t} H_k(C) \to H_k(C_\uparrow)$ 可识别为子模 C_k 和 $C_{\uparrow k}$之间的映射 $\Pi_\uparrow \circ (\phi_\uparrow|_{H^{\text{free}} k})$: $H^{\text{free}} k \to H_{\uparrow k}$。于是，映射 $\Phi_\uparrow$ 在次数 k 下可识别为映射 $C_k \to C_{\uparrow k}$：它在 $F_k \oplus \tilde{B}k$ 上为零，并通过 $\Pi_\uparrow \circ (\phi_\uparrow|_{H^{\text{free}} k})$将 $H^{\text{free}} k$ 映至 $H_{\uparrow k}$；该映射 $C_k \to C_{\uparrow k}$ 可写作 $\iota_\uparrow \circ \Pi_\uparrow \circ \phi_\uparrow \circ \iota \circ \Pi$。由命题 8.7 和 8.8，该后一映射与 $\phi_\uparrow$ 链同伦，因此 (8.13) 的下半部分在同伦意义下交换。用相同的论证可得上半部分也在同伦意义下交换。□

因此，我们原来的链级过滤匹配对 CP 与如下给出的链级过滤匹配对过滤匹配同伦等价：

(8.14)



我们将后一个链级过滤匹配对视为三个更简单对象的直和：



分别将它们记为 T (C P)、A (C P) 和 H 自由(C P)，由命题 8.9 及定义可立即推出，在持久模范畴中，

(8.15) $$\mathbb{H}_k(\mathscr{C}\mathscr{P}) \cong \mathbb{H}_k(\mathscr{T}(\mathscr{C}\mathscr{P})) \oplus \mathbb{H}_k(\mathscr{A}(\mathscr{C}\mathscr{P})) \oplus \mathbb{H}_k(\mathscr{H}^{\text{free}}(\mathscr{C}\mathscr{P})).$$

右端的三个直和项可以用第 8.3 节中的构件来描述。

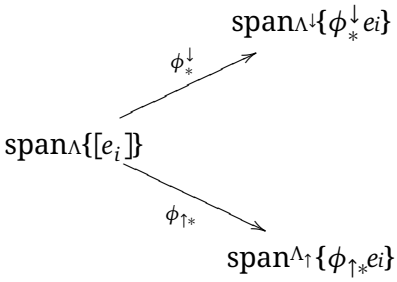
首先，令tH_k(C) 表示H_k(C)的挠部分，对于每个k，我们都有一个自由分解 $0 \to F_{k+1} \to \tilde{B}_k \to tH_k(\mathrm{C}) \to 0$。因此，由于 A (C) 是 C 的子复形 $\oplus_j(F_j \oplus \tilde{B}_j)$，我们可以将 A (C) 识别为对$k$ 求直和，直和项为来自第 8.3 节的链级过滤匹配对 P R(tH_k(C),k) 。因此

$$\mathbb{H}_k(\mathscr{T}(CP)) \cong (\kappa_{(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)})^{\oplus(\dim_\kappa tH_k(\mathscr{C}))}.$$

对于 A (C P)，C↑ 的子复形 A (C↑) 可分解为由成对元素 { $\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}$, x k i } 生成的简单子复形的（过滤）直和，这些成对元素来自 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}$ 的奇异值分解，其中 $\partial_{\mathscr{C}_\uparrow}\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i} = \mathrm{x\ k\ i}$；这些简单子复形同构于第 8.3.1 节中提到的初等复形 $\mathrm{E}_\uparrow(\ell_\uparrow(\mathrm{x\ k\ i}), \ell_\uparrow(\mathrm{y}^k\mathrm{i}) - \ell_\uparrow(\mathrm{x\ k\ i}), \mathrm{k})$，并且，除去满足 $\ell_\uparrow(\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}) = \ell_\uparrow(\mathrm{x\ k\ i})$ 的那些 i，它们也对应于 C↑ 的简明条形码中的有限长度条 $[\ell_\uparrow(\mathrm{x\ k\ i}), \ell_\uparrow(\mathrm{y}^{k+1}\mathrm{i}))^\Gamma$。类似地，A (C ↓) 可分解为过滤直和：对 C ↓ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条 $(\mathrm{a}, \mathrm{b}]^\Gamma$，都有一个初等复形 $\mathrm{E}^{\downarrow}(\mathrm{b}, \mathrm{b}-\mathrm{a}, \mathrm{k})$；此外，还包括因详细条形码与简明条形码之间的区别而产生的任意形如 $\mathrm{E}^{\downarrow}(\mathrm{b}, \mathrm{b}, \mathrm{k})$ 的直和项。因此，A (C) 可分解为若干 $\mathrm{P\,E}_\uparrow(\mathrm{a}, \mathrm{b}-\mathrm{a}, \mathrm{k})$ 和 $\mathrm{P\,E}^{\downarrow}(\mathrm{b}, \mathrm{b}-\mathrm{a}, \mathrm{k})$ 的直和，它们分别对应于 C↑ 的简明条形码中的有限长度条 $[\mathrm{a}, \mathrm{b})^\Gamma$ 以及有限长度

条 $(a, b]^{\Gamma}$（属于 $C^{\downarrow}$ 的简明条形码），此外还可能有一些 $PE_{\uparrow}(a, a, k)$ 或 $PE^{\downarrow}(b, b, k)$。因此，根据第 8.3 节中的计算，$C\uparrow$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条都会对 $H_k(A(CP))$ 贡献一个直和项 $\oplus_{g\in\Gamma}\kappa_{(-\infty,\infty)\times[a-g,b-g)}$；同样，$C^{\downarrow}$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条 $(a, b]^{\Gamma}$ 都会对 $H_k(A(CP))$ 贡献一个直和项 $\oplus_{g\in\Gamma}\kappa_{[-b-g,-a-g)\times(-\infty,\infty)}$。（任何可能出现的直和项 $PE_{\uparrow}(a, a, k)$ 或 $PE^{\downarrow}(b, b, k)$ 都不会影响结果，因为 $H_k(PE_{\uparrow}(a, a, k)) \cong H_k(PE^{\downarrow}(b, b, k)) \cong \{0\}$。）

最后，由于链级过滤匹配对 $Hfree(CP)$ 中所涉及的所有复形上的微分均为零，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，$Hfree_k(CP)$ 中次数为 k 的部分是 $Hfree(CP)$，它是第 5 节中的一个过滤匹配对。因此，由于我们一直假设 Γ 是离散的，根据定理5.3，$Hfree_k(CP)$ 存在一个双正交基 $\{[e_1], \dots, [e_d]\}$。这里，每个 $[e_i] \in H_k(C) t H_k(C)$，我们可以将 $[e_i]$ 视为由商投影从注 8.4 中讨论的过滤匹配对 $H_k(CP)$ 的一个双正交基得到。由此容易看出，对于 $i = 1, \dots, d$，$Hfree_k(CP)$ 可分解为过滤匹配对的（过滤）直和，



而这些（视为零微分的链级过滤匹配对）分别同第 8.3.3 节中的链级过滤匹配对 $PM(\rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow *}e_i), \rho^{\downarrow}(\phi_*^{\downarrow}e_i), k)$ 同构。回顾一下，基谱 $\Sigma(Hfree_k(CP))$ 按定义是由以下配对组成的集合：$([\rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow *}e_i)], \rho^{\downarrow}(\phi_*^{\downarrow}e_i) - \rho_{\uparrow}(\phi_{\uparrow *}e_i)) \in (\mathbb{R}/\Gamma) \times \mathbb{R}$；这与基谱 $\Sigma(H_k(CP))$ 相同。由此，根据第 8.3.3 节中的计算可得

$$\mathbb{H}_k(\mathscr{H}(\mathscr{CP})) \cong \left(\bigoplus_{([a],L)\in\Sigma(\mathscr{H}_k(\mathscr{CP}))} \bigoplus_{g\in\Gamma} \kappa_{[-a-L+g,\infty)\times[a-g,\infty)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{([a],L)\in\Sigma(\mathscr{H}_{k+1}(\mathscr{CP}))} \bigoplus_{g\in\Gamma} \kappa_{(-\infty,-a-L+g)\times(-\infty,a-g)} \right).$$

我们将上述讨论总结如下：

定理 8.10。假设 Γ 是离散的，并令 $CP = (C、C^{\downarrow}、C\uparrow, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$ 为一个链级过滤匹配对。对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，持久模 $H_k(CP)$ 可分解为以下块模的直和：

(i) $\kappa_{tH_k(C)}$ 的 dim 个副本；(ii) 对于 $C\uparrow$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条，表示为 $[a, b)^{\Gamma}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$；并且对于每个 $g \in \Gamma$，取一个 $\kappa_{(-\infty,\infty)\times[a-g,b-g)}$ 的副本；

(iii) 对于 $C^{\downarrow}$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条，表示为$(a, b]^{\Gamma}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$；并且对于每个 $g \in \Gamma$，取一个 $\kappa_{[-b-g,-a-g)\times(-\infty,\infty)}$ 的副本；(iv) 对于 $\Sigma(H_k(C\,P\,))$ 的每个元素，表示为 $([a], b-a)$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$；并且对于每个 $g \in \Gamma$，取一个 $\kappa_{[-b+g,\infty)\times[a-g,\infty)}$ 的副本；以及 (v) 对于 $\Sigma(H_{k+1}(C\,P\,))$ 的每个元素，表示为 $([a], b-a)$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$；并且对于每个 $g \in \Gamma$，取一个 $\kappa_{(-\infty,-b+g)\times(-\infty,a-g)}$ 的副本。He其中，简明条形码或基谱中的所有元素均按重数计数。

特别地，考虑 κ-向量空间 $H_k(C\,P\,)_{-s,s}$，它们旨在对应于水平集同调 $H_k(f^{-1}(\{s\}); \kappa)$。定理 8.10 表明，它们可分解为以下各项贡献之和：

（i）与 s 无关的 κ-向量空间 $tH_k(C)$；（ii）对于 $C^{\uparrow}$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条 $[a, b)^{\Gamma}$，取 κ 的若干个副本，其数目等于满足 $s+g \in [a, b)$ 的 $g \in \Gamma$的数目；（iii）对于 $C^{\downarrow}$ 的 k 次简明条形码中的每个有限长度条 $(a, b]^{\Gamma}$，取 κ 的若干个副本，其数目等于满足 $s+g \in (a, b]$ 的 $g \in \Gamma$的数目；（iv）对于 $H_k(C\,P\,))$ 中每个具有 $\leq b$ 的元素 $([a], b-a) \in \Sigma($，取 κ 的若干个副本，其数目等于满足 $s+g \in [a, b]$ 的 $g \in \Gamma$的数目；以及（v）对于 $H_{k+1}(C\,P\,))$ 中每个具有 $> b$ 的元素 $([a], b-a) \in \Sigma($，取 κ 的若干个副本，其数目等于满足 $s+g \in (b, a)$ 的 $g \in \Gamma$的数目。

此外，若 I 是上述区间 $[a, b), (a, b], [a, b], (a, b)$ 之一，且 $s < s'$ 并且 $g \in \Gamma$，其中 $s+g$，且 $s'+g \in I$，则 $H_k(C\,P\,)_{-s,s}$、$H_k(C\,P\,)_{-s',s'}$ 中相应的直和项之间存在如下关系：它们在持久模结构映射下都映至 $H_k(CP)_{-s,s'}$ 的同一直和项。因此，这些区间（模 Γ-平移）构成的集合具有层间持久性条形码应有的特征。由此，我们作出如下定义：

定义 8.11。假设 Γ 是离散的，令 $k \in \mathbb{Z}$，并设 $C\,P = (C, C^{\downarrow}, C^{\uparrow}, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$ 是一个链级过滤匹配对。其**完整次数为k 条形码** 由以下模 Γ-平移的区间构成：

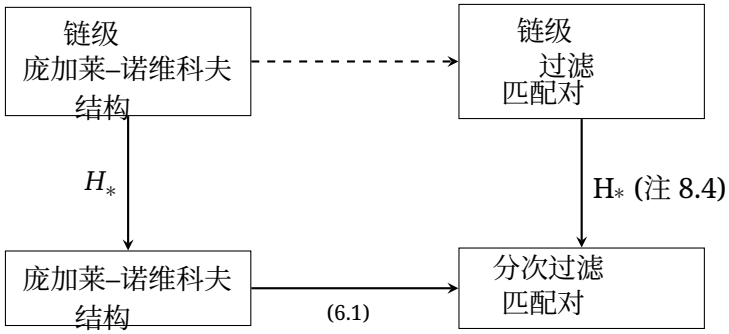
(i) $C^{\uparrow}$的次数为k 的简明条形码中的所有有限长度区间 $[a,b)^{\Gamma}$；(ii) $C^{\downarrow}$的次数为k 的简明条形码中的所有有限长度区间 $(a, b]^{\Gamma}$；(iii) 对每个 $([a], \ell) \in \Sigma($ $H_k(C\,P\,))$ with $\ell \geq 0$，都有一个区间 $[a, a+\ell]^{\Gamma}$；以及 (iv) 对每个 $([a], \ell) \in \Sigma(H_{k+1}(C\,P\,))$ with $\ell < 0$，都有一个区间 $(a+\ell, a)^{\Gamma}$。

注意，关于此条形码的稳定性定理现在可直接由条形码中各组成部分的稳定性定理推出：其中 (iii) 和 (iv) 中的区间对应定理 5.12，而 (i) 和 (ii) 中的区间对应 [UZ16、定理 8.17]（及其一个共轭版本）。

8.5. **链级庞加莱–诺维科夫结构**。若 $C = (C_*, \partial)$ 是一个链复形，且 $a \in \mathbb{Z}$，则与之前一样，我们用 $C[a]$ 表示链模为 $C[a]_k = C_{k+a}$、微分为 $(-1)^a\partial$ 的链复形。此外，我们将用 $^{\vee}C$ 表示这样的链复形：其第k个链模为 $(^{\vee}C)_k := {}^{\vee}(C_{-k})$，其微分在 $(^{\vee}C)_{k+1}$ 上的作用为 $^{\vee}((-1)^{k+1}\partial|_{C_{-k}})$: $^{\vee}(C_{-k-1}) \to {}^{\vee}(C_{-k})$。（因此，$^{\vee}C$ 是由命题 4.14 中的上链复形 (C^*, δ) 经由

将分次取负而得到的链复形。我们的符号约定意味着， $(^{\vee}\mathrm{C})[-n]$ 的微分在 $(^{\vee}\mathrm{C})[-n]_{k+1} = {}^{\vee}(C_{n-k-1})$ 上的作用为 $(-1)^{k+1}$ 乘以 ∂ 的伴随：$C_{n-k} \to C_{n-k-1}$。）

我们定义链级 n-庞加莱-诺维科夫结构 $\mathrm{CN} = (\mathrm{C}, \tilde{\mathrm{D}}, \mathrm{C}\uparrow, \mathrm{S})$，它由一个由自由有限生成的 Λ-模构成的链复形 C、一个链同伦等价 $\tilde{\mathrm{D}} : \mathrm{C} \to (^{\vee}\mathrm{C})[-\mathrm{n}]$, a $\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形 C↑，以及一个链映射 $\mathrm{S} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}\uparrow$ 组成；将 S 与 $1_{\Lambda_{\uparrow}}$ 张量后，它成为链同伦等价。因此，$\tilde{\mathrm{D}}$ 将 C_k 映射到 $^{\vee}(\mathrm{C}_{n-k})$，并且按照命题 4.14 的记号，它诱导同构 $\mathrm{D}_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{H}^{n-k}$。由该命题可得映射 $\mathrm{ev} \circ \mathrm{D}_k : \mathrm{H}_k \to {}^{\vee}\mathrm{H}_{n-k}$；当Γ是离散的时，这些映射定义一个强 n-PD 结构，而对任意 Γ，它们定义一个弱 n-PD 结构。将这一 PD 结构与 S 在同调上诱导的映射结合起来，就得到定义 6.1 意义下的（强或弱）n-庞加莱-诺维科夫结构。



现在来补全上方的交换图，将链级过滤匹配对 CP (CN) 与链级庞加莱–诺维科夫结构 $\mathrm{CN} = (\mathrm{C}, \tilde{\mathrm{D}}, \mathrm{C}\uparrow, \mathrm{S})$ 联系起来，使得传到同调后，在每个次数 k 上都诱导出 (6.1) 中的运算 $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{N})_k$。因此，我们必须指定定义 8.3 中的数据 $(\mathrm{C}, \mathrm{C}^{\downarrow}, \mathrm{C}\uparrow, \phi^{\downarrow}, \phi_{\uparrow})$。对于 C，C↑，我们使用 CN 中相应的数据；对于 $\phi_{\uparrow}$，我们使用 CN 中的映射 S。对于 $\Lambda^{\downarrow}$-Floer 型复形 $\mathrm{C}^{\downarrow}$，我们使用移位对偶 $(^{\vee}\mathrm{C}_{\uparrow})[-n],$，其 k 次链模等于 $^{\vee}(C_{\uparrow(n-k)})$，配备过滤函数 $^{\vee}(\ell_{\uparrow}|_{C_{\uparrow(n-k)}})$，且其微分在 $^{\vee}(C_{\uparrow(n-k-1)})$ 上的作用为 $(-1)^{k+1}$ 乘以 C 上微分的伴随，

还需指定一个链映射 $\phi^{\downarrow} : \mathrm{C} \to (^{\vee}\mathrm{C}_{\uparrow})[-n]$，使其在与 $1_{\Lambda^{\downarrow}}$ 张量化后成为链同伦等价。其构造方式与 (6.1) 中 $\tilde{S}_{n-k} = \delta^{\downarrow}(S_{n-k})$。D 的构造完全相同。具体而言，令 $\mathrm{T} : \mathrm{C}_{\uparrow} \to \Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} \mathrm{C}$ 表示 $1_{\Lambda} \otimes \mathrm{S}$ 的一个同伦逆，我们取 $\phi^{\downarrow}$ 为以下复合

(8.16)

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\tilde{\partial}} (^{\vee}\mathscr{C})[-n] \longrightarrow \Lambda^{\downarrow} \otimes (^{\vee}\mathscr{C})[-n] \xrightarrow{\beta} \left(^{\vee}\Lambda_{\uparrow} \otimes_{\Lambda} \mathscr{C}\right)[-n] \xrightarrow{^{\vee}\mathcal{T}} (^{\vee}\mathscr{C}_{\uparrow})[-n]$$

其中第二个映射是系数扩张，而 β is（在每个分次中）如命题 5.18 所述。由于 β is 是同构，且 D 和 T 都是同伦等价，我们可知 $1_{\Lambda^{\downarrow}} \otimes \phi^{\downarrow}$ is 同样是同伦等价。至此，完成了与链级庞加莱-诺维科夫结构 CN 相关联的链级过滤匹配对 CP (CN) 的定义。由于 T 在同调上诱导的映射是 $1_{\Lambda_{\uparrow}} \otimes \mathrm{S}$ 诱导映射的逆，

容易看出，给定一个链级庞加莱-诺维科夫结构 C N ，先构造 C P (C N) 再取同调，所得的过滤匹配对，与先取同调得到定义 6.1 意义下的庞加莱-诺维科夫复形，再按 (6.1) 取其相关联的过滤匹配对，二者相同。

由此，对于任意k，都可以构造式（8.3）中定义的双参数持久模 H_k(C P (C N))。一般而言，该定义涉及选择同伦逆$\psi_\uparrow, \psi^\downarrow$，分别对应于 $1_{\Lambda_\uparrow} \otimes \phi_\uparrow$和$1_{\Lambda^\downarrow} \otimes \phi^\downarrow$（如定义 8.5 前所述，所得持久模在同构意义下与该选择无关）。由于 $\phi_\uparrow$ =S ，我们可以在 $\psi^\downarrow$的位置使用上一段中的映射 T。由于 $\phi^\downarrow$ 由式（8.16）给出，且$^\vee$T 的同伦逆为 $^\vee(1_{\Lambda_\uparrow} \otimes$S ），因此 $\psi^\downarrow$ 的位置由以下复合映射实现

$$(^\vee\mathscr{C}_\uparrow)[-n] \xrightarrow{^\vee(1_{\Lambda_\uparrow} \otimes \mathscr{S})} \left(^\vee\Lambda_\uparrow \otimes_\Lambda \mathscr{C}\right)[-n] \xrightarrow{\beta^{-1}} \Lambda^\downarrow \otimes (^\vee\mathscr{C})[-n] \xrightarrow{1_{\Lambda^\downarrow} \otimes \tilde{\mathscr{D}}'} \Lambda^\downarrow \otimes_\Lambda \mathscr{C} \tag{8.17}$$

对于任意链级 Poincaré 对偶映射 D 的同伦逆 ˜D′ ，均成立。

现在假设 Γ 是离散的。我们将链级 n-庞加莱–诺维科夫结构 C N 的完整条形码 $\cup_k \mathrm{B}_k$(C N) 定义为定义 8.11 所给出的相应链级过滤匹配对 C P (C N)的完整条形码。显然，定义 8.11 中第 (iii) 和 (iv) 项出现的条形构成了通过对 C N 取同调而得到的 n-庞加莱–诺维科夫结构 N 的本质条形码（定义见定义 6.3）。这些条形满足推论 6.8 的稳定性性质，也满足推论 6.10 的对偶性结论。（对于后者，我们利用命题 4.14 所述的 N 是强 n-庞加莱–诺维科夫结构这一事实，以及 Γ 是离散的这一事实。）定义 8.11 的第 (i) 和 (ii) 项中的条形（对于我们的链级 n-庞加莱–诺维科夫结构 C N = (C , ˜D, C↑, S)而言，即在 C P (C N) 的背景下）构成了 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 C 的有限长度条 $[\mathrm{a}, \mathrm{b})^\Gamma$，以及 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 ($^\vee$C)[−n]的有限长度条 $(\mathrm{a}, \mathrm{b}]^\Gamma$。根据 UZ16 定理 8.17]，这些条形也满足稳定性性质。考虑共轭和次数平移 n 后，由 UZ16 命题 6.7] 可知，对于任意 k，条形$[\mathrm{a}, \mathrm{b})^\Gamma \in \mathrm{B}_k$(C N) 与条形 $(\mathrm{a}, \mathrm{b}]^\Gamma \in \mathrm{B}_{n-k-1}$(C N)一一对应。

结合推论 6.10，我们看到， $\cup_k \mathrm{B}_k$(C N) 中所有类型的条形，$a,a]^\Gamma$形式的条形除外，都具有一种对称性：它将次数为k 的条形与次数为$n - k - 1$ 的条形配对；二者的内部相同，但端点条件相反（闭区间 $[a, b]^\Gamma$与开区间 $(a, b)^\Gamma$配对，而区间 $[a, b)^\Gamma$与区间 $(a, b]^\Gamma$配对）。这种对称性与莫尔斯函数的正则水平集中的庞加莱对偶相一致，也类似于 [CEH09]中的对称性定理。

9. 莫尔斯理论与诺维科夫理论的链级庞加莱–诺维科夫结构

本节将充分详细地回顾莫尔斯复形和诺维科夫复形的基本特征，以便构造并研究与之相关的链级庞加莱–诺维科夫结构。本节最终将证明定理 2.2：对于取值于 R 或S^1 的莫尔斯函数，式 (8.3) 中的双参数持久模与层间持久性相关。

9.1. **Morse复形、延续映射以及带有$\Gamma = \{0\}$的庞加莱–诺维科夫结构**。设 X 是一个光滑的、n 维流形，并设$f : X \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数

在 X 上。回忆一下，若 X 上的向量场 v 满足：对所有不属于函数 f 的临界点集 Crit(f) 的点 p，都有 d f_p(v) > 0；并且在每个 p ∈ Crit(f)附近，都存在一个坐标图，使得 v 在其中具有标准形式$\left(-\sum_{i=1}^{k} x_i \partial_{x_i} + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \partial_{x_i}\right)$，则称 v 是 f 的类梯度向量场。构造这样的向量场并不困难：取 v 为相对于某个黎曼度量的梯度 ∇f，该度量在 Crit(f)各点附近的莫尔斯坐标图中是标准的；反过来，任意 f 的类梯度向量场都是 f 关于某个黎曼度量的梯度（[Paj06，命题 II.2.11]）[17]。

假设流形 X 是紧致且无边界的，并且 v 是关于 f 的梯度型向量场，记 $\{\phi_{-v}^{t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为向量场 $-v$的流。于是，对 f的每个临界点 p，有下降流形和上升流形

$$\mathbf{D}^{v}(p)=\{q\in X\,|\lim_{t\to-\infty}\phi_{-v}^{t}(q)=p\},\qquad \mathbf{A}^{v}(p)=\{q\in X\,|\lim_{t\to+\infty}\phi_{-v}^{t}(q)=p\}.$$

它们是 X 中光滑嵌入的圆盘，其维数分别为 ind_f(p) 和 n −ind_f(p)，其中 ind_f(p) 是 p 的 Morse指标（等于上一段局部表示中出现的整数 k）。显然，向量场 −v 是关于莫尔斯函数 −f 的梯度型向量场，并且有 $D^{-v}(p)=A^{v}(p)$。对于 f 的梯度型向量场中一般位置的 v，−v 的流将是莫尔斯-斯梅尔的，也就是说，每个交集 $W^{v}(p,q):=D^{v}(p)\cap A^{v}(q)$ 都是横截的，因此是维数为 $\mathrm{ind}_f(p)-\mathrm{ind}_f(q)$ 的光滑流形（参见例如 [Paj06, 定理 IV.2.13]）。

由于各个 $D^{v}(p)$、$A^{v}(q)$ 在 −v 的流下均保持不变，该流在 $W^{v}(p,q)$上诱导出一个实数群作用；当 p ≠ q 时，该作用是自由的。因此，在假设满足莫尔斯-斯梅尔条件的情况下，空间 $M^{v}(p,q)=W^{v}(p,q)/\mathbb{R}$ 是一个维数为 $\mathrm{ind}_f(p)-\mathrm{ind}_f(q)-1$ 的光滑流形。在将轨线 $\gamma\colon \mathbb{R}\to X$（负梯度型向量场 −v 的轨线）对应于其初始条件 $\gamma(0)$ 的对应关系下，我们可以将 $W^{v}(p,q)$ 视为 −v 的轨线空间：当 $t\to-\infty$ 趋于 p、当 $t\to+\infty$ 趋于 q 时分别具有渐近行为；而 $M^{v}(p,q)$ 则可视为此类轨线模去重新参数化后的空间。

继续假设满足莫尔斯-斯梅尔条件，若 $\mathrm{ind}_f(p)-\mathrm{ind}_f(q)=1$，则 $\mathbf{M}_f(p,q)$是一个零维流形，并且还是紧的（[Paj06，引理 VI.1.1]），因此由有限个点组成。我们在 A.2 节中回顾如何对各个$\mathbf{M}^{v}(p,q)$ 进行定向（基于圆盘 $\mathbf{D}^{v}(p)$的任意定向 $o_{v,p}$）；零维流形的定向意味着为其中每个点选择一个符号，因此由这些定向可得到$n_f(p,q)\in\mathbb{Z}$ 中 $\mathbf{M}^{v}(p,q)$各元素的计数，其中每个点根据其定向符号分别贡献 +1 或 −1。

对于$k\in\mathbb{N}$，令 $\mathrm{Crit}_k(f)$ 表示f的指标为k 的临界点集。整数系数 Morse 链复形$\mathbf{CM}_*(f;\mathbb{Z})$（或者$\mathbf{CM}_*(f,v;\mathbb{Z})$，若要强调其对类梯度向量场$v$的依赖性）中，次数为$k$ 的部分是由 $\mathrm{Crit}_k(f)$中的每个元素各对应一个生成元的自由阿贝尔群；Morse 边界算子 ∂_{fk+1}: $\mathbf{CM}_{k+1}(f;\mathbb{Z})\to\mathbf{CM}_k(f;Z)$ 定义为如下同态：对每个 $p\in\mathrm{Crit}_{k+1}(f)$,

$$\partial_{k+1}^{f}p=\sum_{q\in\mathrm{Crit}_k(f)} n_{f,v}(p,q)q.$$

[17]下文中我们均使用罗马数字表示章号。在 [Paj06], 中，因此这里指的是第2章的命题 2.11；[Paj06] 中的定理编号不包含章号

例如，参见 [Sc93，第4节。1] 或 [AD14，第 3] 章，其中给出了基于断裂梯度轨迹空间的自包含证明，说明有 $\partial_{fk} \circ \partial_{fk+1} = 0$，因此$\mathbf{CM}_*(f; \mathrm{Z})$确实是一个链复形；其同调记为$\mathbf{HM}_*(f; \mathrm{Z})$，并且同构于$X$的奇异同调。事实上，在 [Paj06，第 VI.3 节中，3]，Pajitnov构造了一个链同伦等价 $\mathrm{E}(f, v)$，它从$\mathbf{CM}_*(f; \mathrm{Z})$映到奇异链复形$\mathbf{S}_*(X)$。

关于 Morse复形的一种相关经典观点（例如 [Mil63，定理 3.5],[Kal75，定理 1]）是将其视为 CW复形的胞腔链复形。 [Qin10，定理 3.8 和 3.9] 表明，我们的流形X 有一个 CW分解，其开k胞腔等于$\mathbf{D}_f(p)$，其中$p \in$属于临界点集$_k(f)$；此外，利用$\mathbf{D}^v(p)$的定向$\mathfrak{o}_{v,p}$，将该 CW复形的第k个胞腔链群与以临界点集 $\mathrm{Crit}_k(f)$为基的自由阿贝尔群（即，与$\mathbf{CM}_k(f; \mathrm{Z})$）等同，则该 CW复形的胞腔微分与上文定义的 Morse微分一致。另见 [AD14，第4节9]，其中给出了另一种证明；以及[Lau92], [BH01]，其中包含更早的相关结果。

对于任意环R，我们都可以构造R-模的链复形$\mathbf{CM}_*(f, v; R) := \mathbf{CM}_*(f, v; \mathrm{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$。对于域 κ，$\mathbf{CM}_*(f, v; \kappa)$可以自然地赋予一种结构（使用第 8 节的术语，即群 Γ等于{0}），使其成为一个 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形，方法是定义过滤函数 $\ell^f_\uparrow : C_k \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$如下

$$\ell^f_\uparrow \left(\sum_{p \in \mathrm{Crit}_k(f)} n_p p \right) = \max\{f(p) | n_p \neq 0\},$$

空集的最大值为 $-\infty$。事实上，$\mathbf{CM}_k(f, v; \kappa)$的基由 $\mathrm{Crit}_k(f)$给出，显然，根据上面的公式，它是 $\ell^f_\uparrow$-正交的；不等式 $\ell^f_\uparrow(\partial_k x) \leq \ell^f_\uparrow(x)$则源于$f$沿负梯度型向量场 $-v$的流递减。我们将由链复形 $\mathbf{CM}_*(f, v; \kappa)$及过滤函数$\ell^f_\uparrow$组成的 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形记为 $\mathbf{CM}(f, v; \kappa)_\uparrow$（若 v和 κ 已明确，则简记为 $\mathbf{CM}(f)_\uparrow$）。

备注 9.1。 若只关注这里的情形，即 $\Gamma = \{0\}$，那么我们的代数语言就显得过于繁复：域 $\Lambda_\uparrow$ 和 $\Lambda^\downarrow$、环 Λ以及模 $\Lambda_\updownarrow$都等于域 κ。即便如此，在此语境下，“$\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形”仍与“$\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形”略有不同，因为前者的过滤函数满足 $\ell_\uparrow \circ \partial \leq \ell_\uparrow$，而后者的过滤函数满足 $\ell^\downarrow \circ \partial \geq \ell^\downarrow$。

现在假设 f_-、f_+ 是 X 上的两个莫尔斯函数，其对应的类梯度向量场 v_-、v_+ 各自都具有莫尔斯-斯梅尔流。按照例如 [Sc93, 第4.1节3], 中的做法，可以定义延续映射 $\Phi_{f_-} \mathrm{f}_+ : \mathrm{CM}_*(\mathrm{f}_-, \mathrm{v}_-; \mathrm{Z}) \to \mathrm{CM}_*(\mathrm{f}_+, \mathrm{v}_+; \mathrm{Z})$，如下所示。选取一个以 R 为参数的光滑向量场族 $\mathrm{V} = \{\mathrm{v}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$，使得对于 $\mathrm{s} \leq -1$，$\mathrm{v}_s = \mathrm{v}_-$；对于 $\mathrm{s} \geq 1$，$\mathrm{v}_s = \mathrm{v}_+$。对于 $\mathrm{p}_- \in \mathrm{Crit}(\mathrm{f}_-)$ 和 $\mathrm{p}_+ \in \mathrm{Crit}(\mathrm{f}_+)$，令 $\mathrm{N}^{\mathrm{V}}(\mathrm{p}_-, \mathrm{p}_+)$ 表示满足非自治方程的解 $\gamma : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$

$$\gamma'(s) + v_s(\gamma(s)) = 0 \tag{9.1}$$

使得 $\gamma(s) \to p_-$ 当 $s \to -\infty$ 时，以及 $\gamma(s) \to p_+$ 当 $s \to \infty$时。若将 $\Psi^{\mathrm{V}} : X \to X$记为把 $x \in X$映到值 $\eta_x(1)$的微分同胚，其中 $\eta_x : [-1, 1] \to X$是满足初始条件 $\eta_x(-1) = x$的方程 $\eta'_x(s) = v_s(\eta_x(s))$的唯一解，那么任意

$\gamma \in N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$包含 $\gamma(-1) \in D^{\nu_-}(p_-)$, $\gamma(1) \in A^{\nu_+}(p_+)$，以及 $\Psi^{\mathbb{V}}(\gamma(-1)) = \gamma(1)$。由此可见，$N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$与交集 $D^{\nu_-}(p_-) \cap (\Psi^{\mathbb{V}})^{-1}(A^{\nu_+}(p_+))$构成双射。对于插值族 V 的一般位置选取，该交集对所有 p_- 和 p_+ 均为横截的（[Paj06，命题 VI.4.7]），因而是维数为 $\operatorname{ind}_{f_-}(p_-) - \operatorname{ind}_{f_+}(p_+)$的流形。当该维数为零时，$N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$是有限集（[Paj06，引理 VI.4.5]），因此对于 $CM_k(f_-, v_-; Z)$的生成元 p_-，我们定义 $\Phi_{f_-f_+} p_- = \sum_{p_+ \in \mathrm{Crit}_k(f_+)} \#N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+) p_+$，其中 $\#N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$是紧致零维流形 $N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$中点的带符号计数，其定向方式如 A.2 节所述。

延续映射 $\Phi_{f_-f_+}$是链复形 $\mathbf{CM}_*(f_-, v_-; Z)$与 $\mathbf{CM}_*(f_+, v_+; Z)$之间的链同伦等价，其链同伦类与插值族 V 的选择无关。事实上，$\Phi_{f_-f_+}$显然等于用 [Paj06 第 221] 页的记号写出的映射 $(\Psi^{\mathbb{V}})_\flat$，因此根据 [Paj06，命题 VI.4.3 和定理 VI.4.6]，以及 $\Psi^{\mathbb{V}}: X \to X$ 同伦于恒等映射这一事实，我们得到一个同伦交换图

(9.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CM}_*(f_-, v_-; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{f_-f_+}} & \mathbf{CM}_*(f_-, v_-; \mathbb{Z}) \\ & {\scriptstyle \mathcal{E}(f_-, v_-)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{E}(f_+, v_+)} & \\ & \mathbf{S}_*(X) & \end{array}$$

其中 $E(f_\pm, v_\pm)$是 [Paj06 第 VI.3.3] 节中的链同伦等价。当然，我们随后可以与任意环作张量积，从而得到关于该环上系数的 Morse 复形和奇异复形的相应结论。

关于 $\Phi_{f_-f_+}$与过滤函数 $\ell_\uparrow^{f_\pm}$ 的关系也值得研究。为此，我们取一族函数 f_s，其形式为 $f_s = f_- + \beta(s)(f_+ - f_-)$，其中 β 是一个光滑函数，满足对所有 s 都有 $\beta'(s) \geq 0$，当 $s \leq -1$时有 $\beta(s) = 0$，当 $s \geq 1$时有 $\beta(s) = 1$；对于向量场族 $V = \{v_s\}_{s \in \mathbb{R}}$，我们要求对所有 $s \in R$、$p \in X$ 都有 $(d f_s)_x(v_s) \geq 0$。（例如，v_s 可以是关于随 s 光滑变化的黎曼度量的 f_s 的梯度。）那么，如果 γ 是满足 (9.1) 的解，并且当 $s \to \pm\infty$ 时有 $\gamma(s) \to p_\pm$，我们将有

$$\begin{aligned} f_+(p_+) - f_-(p_-) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}(f_s(\gamma(s)))ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left((df_s)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(\gamma(s)) \right) ds \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} (df_s)_{\gamma(s)}(v_s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} \beta'(s)\,(f_+(\gamma(s)) - f_-(\gamma(s)))\,ds \\ &\leq \max_X (f_+ - f_-). \end{aligned} \tag{9.3}$$

取系数于域 κ（因此我们有 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $CM(f_\pm, v_\pm; \kappa)_\uparrow$，其过滤函数为 $\ell_\uparrow^{f_\pm}$），可知 $\ell_\uparrow^{f_+}(\Phi f_- f_+ x) \leq \ell_\uparrow^{f_-}(x) + \max_X(f_+ - f_-)$ 对所有 $x \in CM_*(f_-, v_-; \kappa)$ 均成立，前提是用于定义 $\Phi_{f_-f_+}$ 的向量场族 V 按上述方式选取。特殊情形下，若 f_- 和 f_+ 都是同一个莫尔斯函数 f（但梯度型向量场 $v_\pm$ 可以不同），则 $\Phi_f f$ 是滤过复形的一个态射。事实上，在这种情况下，$\Phi_f f$ 是一个过滤同伦等价，这一点可以

通过考察 [Sc93 命题 4.6] 中相应链同伦的构造看出。下文中，我们仍会经常在莫尔斯复形的记号中省略相关的类梯度向量场和域 κ。

现在，我们几乎已经具备了所需的全部要素，可以为紧流形 X 上的莫尔斯函数 f 定义链级庞加莱–诺维科夫结构 $CP(f)$（相对于域κ，且群 Γ等于 $\{0\}$）。若 κ 的特征不为 2，我们还要求 X 是定向的。要描述 $CP(f)$，必须像第 8.5 节开头那样指定数据 $(C, \tilde{D}, C^{\uparrow}, S)$。$\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形 $C^{\uparrow}$ 的角色由 f 的过滤Morse复形 $CM(f)_{\uparrow}$ 担任，其系数取自域 κ。对于链复形 C，我们使用另一个莫尔斯函数 h_0 的（未过滤） Morse 复形 $CM_*(h_0)$；为了规范化，应将函数 h_0 视为与流形 X 一同固定的对象（因此，默认情况下，对于同一流形上的不同函数 f，我们会使用同一个 h_0 来构造 $CP(f)$，不过这并非绝对必要，因为选择不同的 h_0 不会改变条形码）。由于在当前情形下 $\Gamma = \{0\}$（因此 $\Lambda_{\uparrow} = \Lambda = \kappa$），映射 S 只需是从 $CM_*(h_0)$ 到 $CM_*(f)$的链同伦等价；为此，我们可以使用延续映射 $\Phi_{h_0 f}$。

下面仍需描述“链级Poincaré对偶映射” $\tilde{D}\colon \mathbf{CM}_*(h_0) \to ({}^{\vee}(\mathbf{CM}_*(h_0)))[-n]$，其中 $\dim X = n$。为此，我们建立以下命题；当 $\mathrm{char}(\kappa) \neq 2$ 时，其证明部分依赖于符号分析，而我们将这一分析推迟至附录 A。回忆一下，若$h\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数，我们将 $\mathrm{Crit}_k(f)$ 记作h的指标为k的临界点集，并注意到 $\mathrm{Crit}_k(-h) = \mathrm{Crit}_{n-k}(h)$。在命题的陈述和证明中，我们将向量场$v$ 和域 κ 恢复到$\mathbf{CM}_*(\pm h_0)$ 的记号中，以明确表示各种依赖关系。

命题9.2。给定元素$c = \sum_{p \in \mathrm{Crit}_k(-h_0)} a_p p$，定义 $\epsilon_c\colon \mathbf{CM}_{n-k}(h_0, v;\ \kappa) \to \kappa$通过

$$\epsilon_c\left(\sum_{q \in \mathrm{Crit}_{n-k}(h_0)} b_q q\right) = \sum_{p \in \mathrm{Crit}_k(h_0)} a_p b_p.$$

于是，假设 $\mathrm{char}(\kappa) = 2$，或者$X$是定向的，并且我们按照 A.2 节为下降流形$\mathbf{D}^{v}(p)$、$\mathbf{D}^{-v}(q)$选定定向，则赋值$c \mapsto \epsilon_c$定义了链复形的同构 $\epsilon\colon \mathbf{CM}_*(-h_0, -v;\ \kappa) \to ({}^{\vee}\mathbf{CM}_*(h_0, v;\ \kappa))[-n]$。

证明。注意，按定义，$({}^{\vee}CM_*(h_0, v; \kappa))[-n]$ 的 k 次分量是 $CM_{n-k}(h_0, v; \kappa)$ 的对偶。（由于我们处于 $\Gamma = \{0\}$ 的情形，共轭对偶 ${}^{\vee}$ 与通常的向量空间对偶没有区别。）现在，作为 κ-向量空间，$CM_k(-h_0, -v;\ \kappa)$ 和 $CM_{n-k}(h_0, v; \kappa)$ 彼此相等，它们都以 $\mathrm{Crit}_k(-h_0)$ 为基。在次数 k 上，映射 ϵ 是一个线性映射，它将 $CM_k(-h_0, -v;\ \kappa)$ 的基 $\mathrm{Crit}_k(-h_0)$ 中的每个元素映到 $CM_{n-k}(h_0, v; \kappa)$ 的对偶空间中的相应对偶基元素。因此，ϵ 是分次向量空间同构；接下来只需验证它是一个链映射。

后一陈述等价于如下主张：对于任意 $q \in$ 临界点集$_{k+1}(-h_0) =$ 临界点集$_{n-k-1}(h_0)$以及 $p \in$ 临界点集$_k(-h_0) =$ 临界点集$_{n-k}(h_0)$，都有 $\left(\epsilon(\partial^{-}{}_{h_0} q)\right)(p) = (-1)^{k+1}(({}^{\vee}\partial_{h_0})(\epsilon q))(p)$。（右边的 $(-1)^{k+1}$ 源于第 8.5 节开头提到的约定：因微分的符号约定会产生一个因子 $(-1)^{k+1-n}$

在命题 4.14 中，对偶复形上的微分会产生一个因子，而因子 $(-1)^n$ 则源于这样的约定：将复形的分次平移 n 时，微分也要乘以 $(-1)^n$。）但 $\big(\epsilon(\partial^{-}\mathrm{h}^{0}\mathrm{q})\big)(\mathrm{p})$ 是零维空间 $\mathrm{M}^{-\nu}($q, p)中元素的带符号计数 $\mathrm{n}_{-h_0},-\mathrm{v}($q, p)，而 $((^{\vee}\partial\mathrm{h}^{0})(\epsilon\mathrm{q}))(\mathrm{p})=(\epsilon\mathrm{q})(\partial\mathrm{h}^{0}\mathrm{p})$ 则是 M^{ν}(p, q)中元素的相应带符号计数 $\mathrm{n}_{h_0},\mathrm{v}($p, q)。若 $\mathrm{char}(\kappa)=2$，则计数 $\mathrm{n}_{h_0},\mathrm{v}($p, q)、$\mathrm{n}_{-h_0},-\mathrm{v}($q, p)中的正贡献与负贡献没有区别，且 $(-1)^{k+1}=1$ 在 κ中亦然，因此由 M_{-h_0}(q, p)与 M_{h_0}(p, q)之间显然的双射即可得到所需等式。若假设 X 定向，则等式 $\mathrm{n}_{-h_0},-\mathrm{v}($q, p $)=(-1)^{k+1}\mathrm{n}_{h_0},\mathrm{v}($p, q) 已由推论 A.3 证明。□

因此，我们有理由作出如下定义，该定义将在第 9.3 节中推广：

定义9.3. 设X 为光滑紧流形；若我们的基域 κ 的特征为$(\kappa)\neq 2$，则假设X 是定向的。固定一个莫尔斯函数$h_0\colon X\to \mathrm{R}$。对于任意其他莫尔斯函数$f\colon X\to \mathrm{R}$，我们取 C M (f) 为具有以下数据的链级庞加莱–诺维科夫复形：（C、 ˜D、C↑、S ），如第 8.5 节所述：

- C $=\mathbf{CM}_{*}(h_0)$ 是$h0$ 的 Morse复形；
- ˜D : **Morse 复形**$_{*}(h_0)\to(^{\vee}$**Morse 复形**$_{*}(h_0))[-n]$ 是延续映射 $\Phi_{h_0,-h_0}$: **Morse 复形**$_{*}(h_0)\to$ **Morse 复形**$_{*}(-h_0)$与命题 9.2 中的链同构 ϵ: **Morse 复形**$_{*}(-h_0)\to(^{\vee}$**Morse 复形**$_{*}(h_0))[-n]$ 的复合。
- C↑ = **Morse 复形**$(f)_{\uparrow}$（即，带有链复形 **Morse 复形**$_{*}(f)$ 和过滤函数 ℓ_f↑的 $\Lambda_{\uparrow}$-Floer 型复形）。
- S : **Morse 复形**$_{*}(h_0)\to$**Morse 复形**$_{*}(f)$ 是延续映射 $\Phi_{h_0 f}$。

9.2. **覆盖空间上的提升的莫尔斯复形**。 为了推广第 9.1 节的讨论，我们考虑定义在正则覆盖空间 π: ˜$X\to X$的定义域上的函数 ˜f: ˜$X\to$R 的 Morse 理论，其中X 是一个紧致光滑的 n维流形。令 $\tilde{\Gamma}$为 π的甲板变换群；我们通常关注 $\tilde{\Gamma}$为自由阿贝尔群、且与本文中始终考虑的子群 $\Gamma<\mathrm{R}$ 同构的情形，不过目前暂不作此假设。

除非 $\tilde{\Gamma}$是有限群，否则空间 ˜X 将是非紧的，因此从这类函数 f 的 Morse理论中得到的代数结构˜（如果存在）取决于该˜函数在无穷远处的行为。最简单的情形是 f $=\pi^{*}$h，其中 h: X $\to$ R 是一个莫尔斯函数。在这种情形下，f 的指标为 k 的临界点 ˜p，恰好是那些经 π 映射到 h 的指标为 k 的临界点的 ˜X 中的元素。我们在 ˜X 上取向量场 ˜v，它是 X 上 h 的一个类梯度向量场 v 在 ˜X 上的提升，且其流为莫尔斯-斯梅尔；那么 ˜X 上 $-$˜v 的流就是 X 上 $-$v 的流的提升，因而也将是莫尔斯-斯梅尔。˜ ˜对于 ˜p $\in\mathrm{Crit}_k(\pi^{*}\mathrm{h})$，下降流形 $\mathrm{D}^{\nu}($˜p) 和上升流形 $\mathrm{A}^{\nu}($˜p) 分别是 D^{ν}(p) 和 A^{ν}(p)经过 ˜p 的唯一提升。

设 ˜p、˜q 是 π^{*}h 的两个临界点，其中 $\pi(\tilde{p})=\mathrm{p},\pi(\tilde{q})=\mathrm{q}$。按照惯例，将一维流形 $\mathrm{W}^{\nu}(\mathrm{p},\mathrm{q})=\mathrm{D}^{\nu}(\mathrm{p})\cap\mathrm{A}^{\nu}(\mathrm{q})$ 与轨线空间 η: R $\to$X 对应起来，其中 v 满足：当 t $\to-\infty$ 时 $-$v $\eta(\mathrm{t})\to$ p，当 t $\to+\infty$ 时 $\eta(\mathrm{t})\to$ q（在将 η 识别为 $\eta(0)$ 的对应关系下）。任意这样的 η 都唯一提升为 $-$˜v 的一条负梯度轨线 $\tilde{\eta}$，当 t $\to-\infty$ 时其满足 $\tilde{\eta}(\mathrm{t})\to\tilde{\mathrm{p}}$；极限 $\lim_{t\to\infty}\tilde{\eta}(\mathrm{t})$ 将投影到 q，因此，由于我们的

覆盖空间是正则的，因此具有如下形式： $\gamma \tilde{q}\ \gamma \in \tilde{\Gamma}$。由此可见， π 限制后是一个微分同胚

$$\coprod_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} \mathbf{W}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p},\gamma\tilde{q}) \cong \mathbf{W}^{\nu}(p,q)$$

它与由 $-\tilde{\nu}$ 和 $-\nu$ 的流给出的实数群作用相容，因此诱导出这些作用之商空间之间的微分同胚，

$$\coprod_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} \mathbf{M}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p},\gamma\tilde{q}) \cong \mathbf{M}^{\nu}(p,q). \tag{9.4}$$

特别地，若 $\mathrm{ind}_{\pi^*h}(\tilde{p}) - \mathrm{ind}_{\pi^*h}(\tilde{q}) = 1$，则由于 $\mathbf{M}^{\nu}(p,q)$ 是有限集，因此只有有限多个 γ 使得 $\mathbf{M}^{\nu}(\tilde{p},\gamma\tilde{q})$ 非空。

我们可以为各个 $\mathbf{M}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p},\tilde{q})$ 其中从而 $\tilde{p}$ 属于临界点集为各个 $\mathbf{M}$ 取定向，然后要求 $\tilde{}$ 投影 π 将 $\mathrm{D}^{\nu}(\tilde{}\mathrm{p})$ 上的定向映射到 $\mathrm{D}^{\nu}(\pi(\tilde{}\mathrm{p}))$上选定的定向。于是（9.4）将是一个保定向微分同胚；此外，任何甲板变换 $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ 都会诱导一个保定向微分同胚 $\mathrm{M}^{\tilde{\nu}}(\tilde{}\mathrm{p},\ \tilde{}\mathrm{q}) \cong \mathrm{M}^{\tilde{\nu}}(\gamma\tilde{}\mathrm{p},\gamma\tilde{}\mathrm{q})$。因此，点的带符号计数 $\mathrm{n}_{\pi^*}\mathrm{h},\tilde{}\mathrm{v}$、$\mathrm{n}_{h,\nu}$ 满足：每当 $\tilde{}\mathrm{p}$ ∈属于临界点集$_{k+1}(\pi^*\mathrm{h})$，且 $\tilde{}\mathrm{q}$ ∈属于临界点集$_k(\pi^*\mathrm{h})$时，

$$n_{h,\nu}(\pi(\tilde{p}),\pi(\tilde{q})) = \sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} n_{\pi^*h,\tilde{\nu}}(\tilde{p},\gamma\tilde{q})$$

and

$$n_{\pi^*h,\tilde{\nu}}(\gamma\tilde{p},\gamma\tilde{q}) = n_{\pi^*h,\tilde{\nu}}(\tilde{p},\tilde{q})\ (\forall \gamma\in\tilde{\Gamma}). \tag{9.5}$$

给定一个域 κ，我们便可像之前一样定义 Morse 复形 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$，使其链群 $\widetilde{\mathbf{CM}}_k(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 等于以 $\mathrm{Crit}_k(\pi^*h)$为基的 κ-向量空间，其微分 $\partial^{\pi^*h}{}_{k+1}$：$\widetilde{\mathbf{CM}}_{k+1}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]) \to \widetilde{\mathbf{CM}}_k(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 定义如下：对每个 $\tilde{}p\ \in \mathrm{Crit}_{k+1}(\pi^*h)$，

$$\partial^{\pi^*h}_{k+1}\tilde{p} = \sum_{\tilde{q}\in\mathrm{Crit}_k(\pi^*h)} n_{\pi^*h,\tilde{\nu}}(\tilde{p},\tilde{q})\tilde{q}.$$

现在， $\tilde{\Gamma}$作用于每个集合 $\mathrm{Crit}_k(\pi^*h)$，从而在 $\widetilde{\mathbf{CM}}_k(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$上诱导出左 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模结构；接着，由 (9.5) 可知， $\partial^{\pi^*h}{}_{k+1}$ 是 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模同态。 $\widetilde{\mathbf{CM}}_k(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$是有限生成自由 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模，其基可通过对每个$p\ \in \mathrm{Crit}_k(h)$选取一个在 π下的原像 $\tilde{}p$ 来给出。

通常关于 Morse边界算子平方为零的论证，很容易看出同样可以证明 $\partial^{\pi^*h}{}_k \circ \partial^{\pi^*h}{}_{k+1} = 0$，因此 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 是由自由有限生成左 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模构成的链复形。根据 [Paj95, Theorem A.5], , 存在 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模的链同伦等价 $\tilde{}\mathrm{E}(h)$: $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h;\ \kappa[\tilde{\Gamma}]) \to \mathbf{S}_*(\tilde{}X)$（其中， κ-系数奇异链复形 $\mathbf{S}_*(\tilde{}X)$ 以显然的方式，利用 $\tilde{\Gamma}$ 在 $\tilde{}X$ 上的作用，被赋予 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模复形的结构）。

注记 9.4。 由于 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 表示一个在 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$ 上的模复形，其结构尤其取决于 $\tilde{\Gamma}$ 在 $\tilde{}X$ 上的作用，而不仅仅取决于 $\tilde{}X$ 的拓扑以及 $\tilde{\Gamma}$ 的抽象群结构。当第 9.4 节中

同一个子群 $\Gamma<\mathbb{R}$ 以两种不同的方式作用于 $\tilde{X}$ 时，这一区别就变得相关。我们将通过记号来消除歧义：根据所讨论的作用，我们交替将 Γ 称为 Γ_ξ 或 $\Gamma_{-\xi}$。

在群代数 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$ 上，正如第4节.1[18] 中所述，我们定义一个共轭运算：对于每个 $\lambda=\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}}a_\gamma\gamma$，令 $\bar{\gamma}=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma\gamma^{-1}$。如果 M 是左（分别为右） $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模，我们将其共轭模记为 M，它是一个右（分别为左）模，具有相同的阿贝尔群结构，并且 M 与 M 上的数乘满足 $\lambda m=m\lambda$，其中 $m\in M$ 且 $\lambda\in\kappa[\tilde{\Gamma}]$。如果 M 是左 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模，则如第4.1节中所述，我们记 ${}^{\vee}M$ 为左$\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模，它由右 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模 $\mathrm{Hom}_{\kappa[\tilde{\Gamma}]}(M,\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 的共轭得到。（因此，对于 $\phi\in{}^{\vee}M$、$\lambda\in\kappa[\tilde{\Gamma}]$ 以及 $m\in M$，有 $(\lambda\phi)(m)=\phi(m)\bar{\lambda}$。）

特别地，对于我们正则覆盖空间 $\pi\colon\tilde{X}\to X$ 的底空间 X 上的莫尔斯函数 h（以及 X 上一个适当的一般位置的、关于 h 的类梯度向量场，并将其拉回到$\tilde{X}$ 上），我们有一个左 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模的链复形 $\widetilde{CM}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$，由此可以构造其共轭对偶链复形（带分次平移） $({}^{\vee}\widetilde{CM}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))[-n]$。这个左 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模的复形的分次 k 部分等于 ${}^{\vee}(\widetilde{CM}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))$，其微分 $({}^{\vee}\widetilde{CM}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))[-n]_{k+1}\to({}^{\vee}\widetilde{CM}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))[-n]_k$ 的作用方式为 $(-1)^{k+1}$ 乘以微分 ∂^{π^*h} n–k 的伴随。与命题9.2一样，我们有：

命题 9.5. 给定一个元素 $c=\sum_{\tilde{p}\in\text{临界点集}_k(-\pi^*h)}a_{\tilde{p}}\tilde{p}\in\widetilde{\mathbf{CM}}_k(-\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 定义 $\epsilon_c\colon\widetilde{\mathbf{CM}}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])\to\kappa[\tilde{\Gamma}]$，其定义为

$$\epsilon_c\left(\sum_{\tilde{q}\in\mathrm{Crit}_{n-k}(\pi^*h)}b_{\tilde{q}}\tilde{q}\right)=\sum_{\tilde{p}\in\mathrm{Crit}_k(-\pi^*h)}\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}}a_{\tilde{p}}b_{\gamma\tilde{p}}\gamma.$$

于是，假设要么 $\mathrm{char}(\kappa)=2$，要么 X 是定向的，并且我们按照 A.2 节为下降流形选择定向 $\mathbf{D}^{\nu}(p)$、$\mathbf{D}^{-\nu}(q)$，则赋值 $c\mapsto\epsilon_c$ 定义了链复形同构 $\epsilon\colon\widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])\to({}^{\vee}\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))[-n]$。

证明。映射 ϵ_c 显然是 κ-线性的，映射 $c\mapsto\epsilon_c$ 也是如此。若 $c=\sum_{\tilde{p}}a_{\tilde{p}}\tilde{p}\in\widetilde{CM}_k(-\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$ 且 $d=\sum_{\tilde{q}}b_{\tilde{q}}\tilde{q}\in\widetilde{CM}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])$，那么对于 $\xi,\eta\in\tilde{\Gamma}$，有 $\xi c=\sum_{\tilde{p}}a_{\tilde{p}}\xi^{-1}\tilde{p}\tilde{p}$ 和 $\eta d=\sum_{\tilde{q}}b_{\tilde{q}}\eta^{-1}\tilde{q}\tilde{q}$，因此（在第二个等式的求和中代入 $\tilde{q}=\xi^{-1}\tilde{p}$，并在第三个等式中代入 $\mu=\eta^{-1}\gamma\xi$）

$$\begin{aligned}\epsilon_{\xi c}(\eta d)&=\sum_{\tilde{p}\in\mathrm{Crit}_k(-\pi^*h)}\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}}a_{\xi^{-1}\tilde{p}}b_{\eta^{-1}\gamma\tilde{p}}\gamma\\&=\sum_{\tilde{q}\in\mathrm{Crit}_k(-\pi^*h)}\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}}a_{\tilde{q}}b_{\eta^{-1}\gamma\xi\tilde{q}}\gamma=\sum_{\tilde{q}\in\mathrm{Crit}_k(-\pi^*h)}\sum_{\mu\in\tilde{\Gamma}}a_{\tilde{q}}b_{\mu\tilde{q}}\eta\mu\xi^{-1}\\&=\eta\epsilon_c(d)\xi^{-1}.\end{aligned}$$

令 ξ 等于恒等映射，可得 $\epsilon_c\in\mathrm{Hom}_{\kappa[\tilde{\Gamma}]}(\widetilde{\mathbf{CM}}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}]),\kappa[\tilde{\Gamma}])$。反之，令 η 等于恒等映射，则可知对任意 $\lambda\in\kappa[\tilde{\Gamma}]$，$\epsilon_{\lambda c}(d)=\epsilon_c(d)\bar{\lambda}$，以及

[18]由于我们将 $\tilde{\Gamma}$ 视为一个原则上不必是阿贝尔的抽象群，因此这里将群运算写成乘法形式，不过在最终所关注的情形中，$\tilde{\Gamma}$ 将同构于本文其余部分所考虑的子群 $\Gamma<\mathbb{R}$。相应地，群代数中的元素在这里写作 $\sum_\gamma a_\gamma\gamma$，而不是 $\sum_g a_g T^g$。

因此 $\epsilon\colon c \mapsto \epsilon_c$ 定义了一个 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模同态 $\widetilde{\mathbf{CM}}_k(-\pi^*h;\kappa) \to {}^{\vee}\big(\widetilde{\mathbf{CM}}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])\big)$。回想一下，$\widetilde{\mathbf{CM}}_k(-\pi^*h;\kappa)$ 的基由提升 $\tilde{p}_i$ 到 $\tilde{X}$ 的各个指标为 k 的h的临界点构成。容易看出，ϵ 将此基映射到 ${}^{\vee}\big(\widetilde{\mathbf{CM}}_{n-k}(\pi^*h;\kappa[\tilde{\Gamma}])\big)$的相应对偶基，因此它是一个模同构。

于是，由恒等式$\epsilon_{\partial^{-\pi^*h}\tilde{q}}(\tilde{p}) = (-1)^{k+1}\epsilon_{\tilde{q}}(\partial^{\pi^*_-h}\tilde{p})$（其中 $\tilde{q} \in$属于临界点集 $\mathrm{Crit}_{k+1}(-\pi^*h)$，而 $\tilde{p} \in$属于临界点集 $\mathrm{Crit}_k(-\pi^*h)$）可知，ϵ 是链复形的同构；其证明与命题9.2中的计算相同。□

现在，若 h_-、h_+ 是 X 上的两个莫尔斯函数，则通过选取 X 上一族向量场 $V = \{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$，使其在 h_- 和 h_+的梯度型向量场之间插值，并将这些向量场提升到 $\tilde{X}$，再按照通常方式，根据渐近条件计数 $\tilde{X}$ 中满足 (9.1) 的显然类似方程的解，即可得到延续映射 $\tilde{\Phi}_{h_-h_+}\colon \widetilde{CM}_*(h_-;\kappa[\tilde{\Gamma}]) \to \widetilde{CM}_*(h_+;\kappa[\tilde{\Gamma}])$。（或者，也可以直接利用构造原延续映射 $\Phi_{h_-h_+}$ 时所依据的空间 $N^{\mathbb{V}}(p_-,p_+)$ 来构造 $\tilde{\Phi}_{h_-h_+}$，同时追踪 (9.1) 的解提升到 $\tilde{X}$ 后的渐近行为。）由此得到一个 $\kappa[\tilde{\Gamma}]$-模复形之间的链同伦等价（其链同伦逆为 $\tilde{\Phi}_{h_+h_-}$）。

特别地，通过将延续映射 $\tilde{\Phi}_{h,-h}$ 与命题 9.5 中的同构 ϵ 复合，可得到链级Poincaré对偶映射 $\tilde{D}\colon \widetilde{\mathbf{CM}}_*(h;\kappa[\tilde{\Gamma}]) \to (\widetilde{\mathbf{CM}}_*(h;\kappa[\tilde{\Gamma}]))[-n]$。

9.3. 诺维科夫复形。现在考虑一个紧致连通光滑流形 X 以及一个 de Rham上同调类 $\xi \in H^1(X;\mathbb{R})$。令 $\pi\colon \tilde{X}_\xi \to X$ 为与求值映射 $\langle\xi,\cdot\rangle\colon \pi_1(X) \to \mathbb{R}$ 的核相关联的覆盖空间。于是 $\pi^*\xi = 0 \in H^1(\tilde{X}_\xi;\mathbb{R})$，并且我们将 $\tilde{X}_\xi$ 的甲板变换群识别为 $\mathbb{R}$ 的子群 $\Gamma_\xi = \mathrm{Im}(\langle\xi,\cdot\rangle\colon \pi_1(X) \to \mathbb{R})$，且作如下约定：对于 $\tilde{p} \in \tilde{X}_\xi$ 和 $g \in \Gamma_\xi$，$g\tilde{x}$ 的路径经 π 映射后的像上的取值为 $-g$。注意，虽然 $\tilde{X}_\xi = \tilde{X}_{-\xi}$，且 $\Gamma_\xi = \Gamma_{-\xi}$ 作为集合成立，但我们的约定使得 $\Gamma_{-\xi}$ 在 $\tilde{X}_{-\xi}$ 上的作用与 Γ_ξ 在 $\tilde{X}_\xi$ 上的作用方向相反。

若 $\theta \in \Omega^1(X)$ 是表示 ξ 的闭 1-形式，则存在光滑函数 $\tilde{f}\colon \tilde{X}_\xi \to \mathbb{R}$，使得 $\pi^*\theta = d\tilde{f}$，并满足 $\tilde{f}(g\tilde{p}) = \tilde{f}(\tilde{p}) - g$，对所有 $g \in \Gamma_\xi$ and $\tilde{p} \in \tilde{X}_\xi$ 均成立。若将 1-形式 θ 视为余切丛 T^*X 上的截面，它与零截面横截，则称其为 Morse；这等价于 f 是莫尔斯函数。此时，Novikov复形 $CN_*(f;\xi)$ 由用于 f 的类梯度向量场$-\nabla v$ 的负向量场的流定义，其中该向量场是 X 上莫尔斯-斯梅尔向量场 v 的提升。于是，θ 的每个零点 p 都有关于 v 的流的单射浸入下降流形 $D^v(p)$ 和上升流形 $A^v(p)$；根据莫尔斯-斯梅尔条件（通过令 v 等于相对于适当一般度量的 θ 的度量对偶，可以使该条件成立，见 [BH01，命题 1]），各种 $D^v(p)$ 和 $A^v(q)$ 都彼此横截。f 的临界点 $\tilde{p}$ 是 π 下 θ 零点的原像，其下降流形 $D^v(\tilde{p})$ 和上升流形 $A^v(\tilde{p})$ 是嵌入圆盘，分别是 $D^v(p)$ 和 $A^v(p)$ 的提升。我们通过提升 $D^v(p)$ 上选定的定向，为 $D^v(\tilde{p})$ 定向；因此，对于同一纤维 π 中彼此不同的临界点 $\tilde{p}$、$g\tilde{p}$，f 的 $D^v(\tilde{p})$ 和 $D^v(g\tilde{p})$ 的定向在甲板变换 g 下相对应。

在这种情况下，对于不同的临界点 $\tilde{p}$、$\tilde{q}$，以及 $M^v(\tilde{p},\tilde{q}) = W^v(\tilde{p},\tilde{q})/\mathbb{R}$，且若 $\mathrm{ind}_{\tilde{f}}(\tilde{p}) - \mathrm{ind}_{\tilde{f}}(\tilde{q}) = 1$，则 $M^v(\tilde{p},\tilde{q})$中的点的带符号计数为 $n_{\tilde{f},-\nabla v}(\tilde{p},\tilde{q})$。然而，与上一

节不同的是，给定 $\tilde{p} \in$ 临界点集$_{k+1}(f)$，可能存在无穷多个 $\tilde{q} \in$ 临界点集$_k(f)$ 使得$n_{\tilde{f},\tilde{v}}(\tilde{p}, \tilde{q}) \neq 0$。不过，满足任意给定下界 $\tilde{f}(\tilde{q}) \geq c$的此类$q$只有有限多个，因此按照 [Nov81]，的做法，将f 的 Novikov 链复形中次数为k 的部分定义为由以下可能无穷和组成：

$$\mathbf{CN}_k(\tilde{f};\xi) = \left\{ \sum_{\tilde{p}\in \mathrm{Crit}_k(\tilde{f})} a_{\tilde{p}}\tilde{p} \,\middle|\, a_{\tilde{p}} \in \kappa, (\forall c \in \mathbb{R})(\#\{\tilde{p} | a_{\tilde{p}} \neq 0, \tilde{f}(\tilde{p}) > c\} < \infty) \right\}.$$

这是一个定义在第4节中的域 $\Lambda_\uparrow$ 上的向量空间（其中 Γ_ξ 扮演 Γ 的角色），并带有将群环作用自然延拓而来的显然作用；请注意我们的符号约定：对任意 $\in \Gamma_\xi$，$f(g\tilde{p}) = f(\tilde{p}) - g$。此外，按通常的规定定义边界算子 ∂f_{k+1}: $\mathrm{CN}_{k+1}(\tilde{f};\xi) \to \mathrm{CN}_k(\tilde{f};\xi)$，其中 $\partial f_{k+1}\tilde{p} = \sum_{\tilde{q}\in \mathrm{Crit}_k(\tilde{f})} n_{\tilde{f},\tilde{v}}(\tilde{p},\tilde{q})\tilde{q}$，便可使 $(\mathrm{CN}_*(\tilde{f};\xi), \partial f)$ 成为一个定义在 $\Lambda_\uparrow$-向量空间上的链复形。若 θ 的指标为 k 的零点为 $p_1, \ldots, p_d$，则任取一组将这些零点提升到 $\tilde{X}_\xi$ 的提升 $\{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_d\}$，都构成 $\mathrm{CN}_k(f;\xi)$ 的一组基。关于诺维科夫复形的构造，更多详情请参见 [Lat94],[BH01]。

通过如下设定，诺维科夫复形便成为 Floer 型复形

$$\ell_\uparrow^{\tilde{f}}\left(\sum_{\tilde{p}} a_{\tilde{p}}\tilde{p}\right) = \max\{\tilde{f}(\tilde{p}) | a_{\tilde{p}} \neq 0\}.$$

如前一段所述的基 $\{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_d\}$ 随后将是 $\ell_\uparrow^f$-正交的，其中 $\ell_\uparrow^f\left(\sum_i \lambda_i \tilde{p}_i\right) =$ $\max_i\{f(\tilde{p}_i) - v_\uparrow(\lambda_i)\}$ 对于 $\lambda_i \in \Lambda_\uparrow$。我们将由诺维科夫链复形 $(\mathbf{CN}_*(\tilde{f};\xi), \partial_{\tilde{f}})$ 及滤过函数 $\ell_\uparrow^f$ 构成的 Floer 型复形记作 $\mathbf{CN}(f;\xi)_\uparrow$。

假设 θ_-, θ_+ 是 X 上的闭Morse一形式，且二者都代表 de Rham 上同调类 ξ；令 $\tilde{f}_-, \tilde{f}_+: \tilde{X}_\xi \to \mathbb{R}$ 为满足 $d\tilde{f}_\pm = \pi^*\theta_\pm$ 的（必为 Morse）函数。利用 X 上某个适当的一参数向量场族在 $\tilde{X}$ 上的提升，按照第 9.1 节中的相同步骤，我们便得到延续映射 $\Phi_{\tilde{f}_-\tilde{f}_+}: \mathrm{CN}_*(f_-;\xi) \to \mathrm{CN}_*(f_+;\xi)$ 以及 $\Phi_{\tilde{f}_+\tilde{f}_-}: \mathrm{CN}_*(f_+;\xi) \to \mathrm{CN}_*(f_-;\xi)$。这些映射是定义在$\Lambda_\uparrow$ 上的链映射，且互为链同伦逆，因此 $\mathrm{CN}_*(f;\xi)$ 的链同伦类型只取决于上同调类 ξ。需要注意的是，这些延续映射的存在依赖于 $f_\pm$ 是同调的 1-形式的拉回；若非如此，差值 $f_+ - f_-$ 将无界，因此 (9.1) 将无法给出所需的界，而这些界对于证明 $\Phi_{\tilde{f}_-\tilde{f}_+}$ 定义良好且满足诺维科夫链复形定义中的有限性条件是必需的。尤其是，如果 $\xi \neq 0$，即使它们的同调作为同一域 $\Lambda_\uparrow$; 上的分次向量空间彼此同构，$\mathrm{CN}_*(f;\xi)$ 到 $\mathrm{CN}_*(-f;-\xi)$ 之间也不存在自然的延续映射；若存在这样的映射，本文的大部分复杂性或许都可以避免。

改编 [Lat94 定理 2 的部分证明，18], $\mathbf{CN}_*(f$ 的同伦型；$\xi)$可如下确定。先取一个莫尔斯函数 $h_0: X \to \mathbb{R}$，以及一个关于 h_0 的类梯度向量场 v_0，其流为莫尔斯-斯梅尔流。然后在 X 上选取一个闭 1-形式 θ_0，使其代表上同调类 ξ，且其支集包含于 $X \setminus \Omega$ 中，其中

该处为 Ω dh0 的零点集的可缩邻域。于是若 N $\gg 1$，则 X 上的闭 1-形式 $\theta_N := N\,dh_0 + \theta_0$ 也代表类 ξ，在 Crit(h0) 的某个邻域内与 N dh0 一致，并且满足：对所有 $x \in X \setminus \mathrm{Crit}(h_0)$，都有 $(\theta_N)_x(v_0) > 0$。因此，令 $\tilde{h}_N : \tilde{X}_\xi \to \mathbb{R}$ 满足 $d\tilde{h}_N = \pi^*(N\,dh_0 + \theta_0)$，则 v0 在 $\tilde{X}_\xi$ 上的提升 $\tilde{v}_0$ 既是 $\tilde{h}_N$ 的类梯度向量场，也是 π^*h_0 的类梯度向量场。因此，我们可以用同一个向量场 $\tilde{v}_0$ 的下降流形和上升流形，分别构造 $\widetilde{CM}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 提升的莫尔斯复形 $CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 和诺维科夫复形 $CN_*(h_N;\xi)$。由此很容易得出，我们有相同的链复形

$$\widetilde{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi) = \Lambda_\uparrow \otimes_{\kappa[\Gamma_\xi]} \widetilde{CM}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]). \tag{9.6}$$

我们将拉图尔映射 $L_{h_0}\tilde{f} : CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \to CN_*(f;\xi)$ 定义为 $\widetilde{CM}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 系数扩张 $\to \Lambda_\uparrow \otimes_{\kappa[\Gamma_\xi]} CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 与延拓映射 $CN_*(h_N;\xi) \to CN_*(f;\xi)$ 的复合，因为 (9.6) 将前者的陪域与后者的定义域等同起来。于是，$1_{\Lambda_\uparrow} \otimes L_{h_0}\tilde{f}$ 就是延拓映射 $CN_*(h_N;\xi) \to CN_*(f;\xi)$，因此是链同伦等价。现在我们已经具备了将定义 9.3 推广到诺维科夫情形所需的要素：

定义 9.6. 设 X 为光滑紧流形。若我们的基域 κ 的特征为 $(\kappa) \neq 2$，则假设 X 是定向的。固定一个莫尔斯函数 $h_0 : X \to \mathbb{R}$。令 $\xi \in H^1(X;\mathbb{R})$，其关联的覆盖空间为 $\pi : \tilde{X}_\xi \to \mathbb{R}$，并令 $\Gamma = \Gamma_\xi = \mathrm{Im}(\langle \xi, \cdot \rangle : \pi_1(X) \to \mathbb{R})$。给定任意莫尔斯函数 $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$，使得 $d\tilde{f}$ 是某个属于类 ξ 的形式的拉回，我们将 CN $(\tilde{f};\xi)$ 定义为如下数据 $(C, \tilde{D}, C^\uparrow, S)$ 所构成的链级庞加莱–诺维科夫复形，如第 8.5 节所述：

- $C = \widetilde{\textbf{莫尔斯复形}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 是 h_0 的提升的莫尔斯复形；
- $\tilde{D} : \textbf{莫尔斯复形}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \to (^\vee\textbf{莫尔斯复形}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]))[-n]$ 是连续性映射 $\Phi_{\pi^*h_0,-\pi^*h_0} : \textbf{莫尔斯复形}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \to \textbf{莫尔斯复形}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 与来自命题 9.5 的链同构 $\epsilon : \widetilde{\textbf{莫尔斯复形}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \to (^\vee\widetilde{\textbf{莫尔斯复形}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]))[-n]$ 的复合。
- $C^\uparrow = \widetilde{\mathbf{CN}}(f;\xi)_\uparrow$（即，具有链复形 $\widetilde{\mathbf{CN}}_*(f;\xi)$ 以及滤过函数 $\ell_{\tilde{f}}\uparrow$ 的 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形）。
- S 是上文所述的拉图尔映射 $L_{h_0}\tilde{f} : \widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \to \widetilde{\mathbf{CN}}_*(f;\xi)$。

9.4. **相关的链级过滤匹配对**。定义了与覆盖空间 $\tilde{X}_\xi$ 上的莫尔斯函数 $\tilde{f} : \tilde{X}_\xi \to \mathbb{R}$ 相关的链级庞加莱–诺维科夫结构 CN $(\tilde{f};\xi)$，其中 $d\tilde{f}$ 是上同调类 ξ 中某个闭一形式的拉回。现在让我们讨论根据第 8.5 节的构造，由此得到的链级过滤匹配对 CP (CN $(f;\xi)$)，它们又是第 8 节其余构造的输入。

根据定义，数据 $(C, C^\downarrow, C^\uparrow, \phi^\downarrow, \phi_\uparrow)$ of CP (CN $(\tilde{f};\xi)$) 将包括 $C = \widetilde{CM}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$、$C^\uparrow = \widetilde{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow$ 和 $\phi_\uparrow = L_{h_0}\tilde{f}$。在 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $C^\downarrow$ 中扮演相应角色的是 $\left(^\vee\widetilde{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow\right)[-n]$，不过用命题 9.5 的一个类比来描述会更简单。首先注意，在我们的约定下，覆盖空间 $\tilde{X}_\xi$ 和 $\tilde{X}_{-\xi}$ 相同，并且我们可以使用同一个子群 $\Gamma = \Gamma_\xi = \Gamma_{-\xi}$，构造良定义的 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形 $CN_*(f;\xi)$ 和 $CN_*(-f;-\xi)$

作为两种情形下 Novikov域的系数群；然而，由于一般规则规定，元素 $g \in \Gamma$ 的作用应使相应˜　　˜函数（分别为f 或 $-f$）的值减少g，因此将该子群与 $\tilde{X}_\xi = \tilde{X}_{-\xi}$ 的甲板变换群相对应的方式有所不同。因此，接下来需要对 $\Lambda_\uparrow$-Floer 型复形$\mathbf{CN}(-\tilde{f};-\xi)_\uparrow$ 进行共轭，以得到一个 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形。（尽管命题的表述中省略了类梯度向量场的记号，但应当理解，若 $\tilde{v}$ 是用于定义$\mathbf{CN}_*(f;\xi)$ 的向量场，那么我们就用$-\tilde{v}$ 来定义$\mathbf{CN}_*(-f;-\xi)$。）

命题 9.7. 给定一个元素 $c = \sum_{\tilde{p}\in\text{临界点集}_k(-\tilde{f})} a_{\tilde{p}}\,\tilde{p} \in \mathbf{CN}_k(-\tilde{f};-\xi)$ 定义 $\epsilon_c\colon \mathbf{CN}_{n-k}(\tilde{f};\xi) \to \Lambda_\uparrow$ 为

$$\epsilon_c\left(\sum_{\tilde{q}\in \mathrm{Crit}_{n-k}(\tilde{f})} b_{\tilde{q}}\tilde{q}\right) = \sum_{\tilde{p}\in\mathrm{Crit}_k(-\tilde{f})}\sum_{g\in\Gamma} a_{\tilde{p}}\, b_{g\tilde{p}}\, T^g \tag{9.7}$$

其中，记号 $g\,\tilde{p}$ 指的是甲板变换作用在 $\tilde{X}_\xi$ 上的作用，该作用与 ξ (not$-\xi$)相关。然后，假设 $\mathrm{char}(\kappa) = 2$，或者假设 X 是定向的，并且我们为下降流形 $\mathbf{D}_{\tilde{f}}(p), \mathbf{D}_{-\tilde{f}}(q)$ 选择定向，如 A.2 节所述，则映射 $c \mapsto \epsilon_c$
定义了 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形 $\epsilon\colon \mathbf{CN}(-\tilde{f};-\xi)_\uparrow \to (^\vee\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow)[-n]$ 的一个同构。

证明。令 $\mathrm{Crit}_k(-f) = \{p_1,\dots,p_d\}$，并选取提升 $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_d$，将其提升到覆盖空间$\tilde{X}_{-\xi} = \tilde{X}_\xi$上。因此，$\{\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_d\}$构成两个可正交化 $\Lambda_\uparrow$-空间$\mathbf{CN}_k(-f;-\xi)$和$\mathbf{CN}_{n-k}(f;\xi)$的正交基。

任意 $\tilde{f}$ 的临界点集可表示为$h\tilde{p}_i$，其中$i \in \{1,\dots,d\}$和$h \in \Gamma_\xi$唯一。与命题陈述中一样，在此记号中，我们使用与 ξ 相关联的甲板变换作用，而非 $-\xi$。因此，相应的元素 $\tilde{p}$ 在各自的诺维科夫复形中将等于$T^{-h}\tilde{p}_i$，属于$\mathbf{CN}_k(-\tilde{f};-\xi)$ 以及$T^h\tilde{p}_i$，属于$\mathbf{CN}_{n-k}(\tilde{f};\xi)$。因此，配对 $(c,x) \mapsto \epsilon_c(x)$ 可用基改写为

$$\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{s\in\Gamma} a_{i,s}T^s\tilde{p}_i, \sum_{i=1}^{d}\sum_{t\in\Gamma} b_{i,t}T^t\tilde{p}_i\right) \mapsto \sum_{i=1}^{d}\sum_{s,t\in\Gamma} a_{i,s}b_{i,t}T^{s+t},$$

或者等价地，对于 $\lambda_i,\mu_i \in \Lambda_\uparrow$,

$$\left(\sum_i \lambda_i\tilde{p}_i, \sum_i \mu_i\tilde{p}_i\right) \mapsto \sum_i \lambda_i\mu_i.$$

这清楚地表明，(9.7) 给出了 $\Lambda_\uparrow$ 中一个定义良好的元素，并且 ϵ 定义了一个同构：从 $\mathbf{CN}_k(-f;-\xi)$ 到 $\mathbf{CN}_{n-k}(f;\xi)$ 的（未共轭）对偶；因此，共轭之后，它给出了从 $\mathbf{CN}_k(-f;-\xi)$ 到 $^\vee(\mathbf{CN}_{n-k}(f;\xi))$ 的同构。根据命题 9.5，同样由恒等映射 $n_{-\tilde{f},-\tilde{v}}(\tilde{q},\tilde{p}) = (-1)^{k+1}n_{\tilde{f},\tilde{v}}(\tilde{p},\tilde{q})$ 可知，ϵ 是链复形的同构。

为得出 ϵ 是 $\Lambda^\downarrow$-Floer 型复形的同构，我们需要验证 ˜ 它与过滤函数相交换，即在 $\mathbf{CN}(-\tilde{f};-\xi)_\uparrow$ 上（见注记 4.8），以及在 $(^\vee\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)_\uparrow)[-n]$ 上（见第 4.3 节），验证 ˜ $^\vee\ell^f_\uparrow$。在分次 k 中，由前文可知

段落中的 $(-\ell_{\uparrow}^{-f})$-正交基 $\{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d\}$，即 $\mathrm{CN}_k(-\tilde{f}; -\xi)$ 的基，经 ϵ 映射后成为对偶基 $\{\tilde{p}_1^*, \dots, \tilde{p}^* d\}$，而后者是 $\ell_{\uparrow}^{f}$-正交基 $\{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d\}$，即 $\mathrm{CN}_{n-k}(\tilde{f}; \xi)$ 的基。根据注 5.17，该对偶基是 $^{\vee}\mathrm{CN}_{n-k}(f; \xi)$ 的 $^{\vee}\ell_{\uparrow}^{f}$-正交基；此外我们还可 $(-\ell_{\uparrow}^{-f})(\tilde{p}_i) = {}^{\vee}\ell_{\uparrow}^{f}(\tilde{p}^* i) = \tilde{f}(\tilde{p}_i)$。因此，在每个分次中，$\epsilon$ 将一个 $(-\ell^{-}f_{\uparrow})$-正交基映射为一个 $^{\vee}\ell_{\uparrow}^{f}$-正交基，并保持每个基元素的过滤层级，由此可立即得出 $^{\vee}\ell_{\uparrow}^{f} = (-\ell_{\uparrow}^{-f}) \circ \epsilon$，如所需。□

记号 9.8。我们将 $\mathbf{CN}(\tilde{f}; \xi)^{\downarrow}$ 记作 $\Lambda^{\downarrow}$-Floer 型复形 $\overline{\mathbf{CN}(-\tilde{f}; -\xi)}$。

这一记号旨在强调，$\mathrm{CN}(-f; -\xi)_{\uparrow}$ 可以直接根据 $\tilde{f}$ 而不是 $-f$ 来解释：它是 f 的滤过诺维科夫链复形的一个版本，其中微分根据 f 的正梯度流而非通常诺维科夫复形中的负梯度流定义，相应地，滤过是下降的而非上升的。$\mathrm{CN}(\tilde{f}; \xi)^{\downarrow}$ 中的一般 k 次链具有如下形式：$\sum_{\tilde{p} \in \text{临界点集}_{n-k}(\tilde{f})} a_{\tilde{p}} \tilde{p}$，其中对于任意 $C \in \mathbb{R}$，只有有限多个 $\tilde{p}$ 同时满足 $a_{\tilde{p}} \neq 0$ 和 $\tilde{f}(\tilde{p}) < C$，而过滤函数 $\ell^{\downarrow}\tilde{f} := -\ell_{\uparrow}^{-f}$ 定义为

$$\ell_{\tilde{f}}^{\downarrow}\left(\sum_{\tilde{p} \in \mathrm{Crit}_{n-k}(\tilde{f})} a_{\tilde{p}} \tilde{p}\right) = \min\{\tilde{f}(\tilde{p}) | a_{\tilde{p}} \neq 0\}.$$

存在一个拉图尔映射的版本，我们将其记为 $\mathrm{L}_{h_0 \tilde{f}}$，它从提升的莫尔斯复形 $\widetilde{\mathbf{C}\mathbf{M}}_*(\pi^* h_0$ 映射到其底层链复形 $\mathbf{CN}_*(-\tilde{f} - \xi)$，即 $\mathbf{CN}(f \xi)^{\downarrow}$。具体而言，正如注 9.4 Γ_{ξ} 中所暗示的，$\Gamma_{-\xi}$ 指的是同一个群 Γ，但其在 $\tilde{X}_{\xi} = \tilde{X}_{-\xi}$ 上的作用彼此互为逆，因此我们得到一个 $\kappa[\Gamma]$-模复形的等式

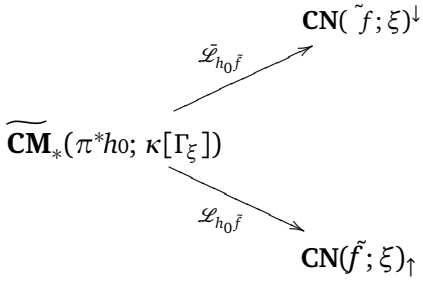
$$\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^* h_0; \kappa[\Gamma_{\xi}]) = \overline{\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^* h_0; \kappa[\Gamma_{-\xi}])}.$$

于是我们得到一个拉图尔映射 $\mathrm{L}_{h_0, -\tilde{f}}$: $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^* h_0; \kappa[\Gamma_{-\xi}]) \to \mathbf{CN}_*(-f; -\xi)$; 将共轭函子与上述对 $\kappa[\Gamma]$-模的识别结合起来，便得到所需的共轭拉图尔映射

$$\mathscr{L}_{h_0 \tilde{f}}: \widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^* h_0; \kappa[\Gamma_{\xi}]) \to \overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{f}; -\xi)}.$$

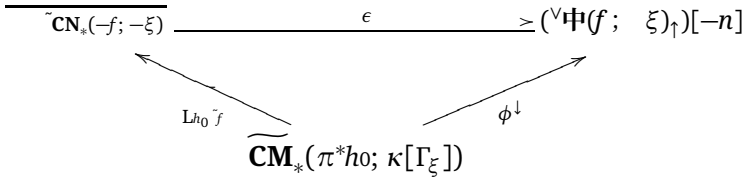
命题9.9。 与 $CN(f;\xi)$相关联的链级过滤匹配对 $CP(CN(f;\xi))$ 与以下链级过滤匹配对过滤匹配同伦等价

(9.8)



证明。 按照定义 8.3 的一般记号，所涉及的两个链级过滤匹配对具有相同的数据 C 和 C↑，而 $C^{\downarrow}$所扮演的角色分别由 $({}^{\vee}\mathbf{CN}(f;\xi)_{\uparrow})[-n]$和 $\mathbf{CN}(f;\xi)^{\downarrow}$来实现。因此，我们可以使用命题 9.7 中的同构 ϵ 作为定义 8.5 中顶部水平映射，并以相应的恒等映射作为其他水平映射；现在只需验证该图表

(9.9)



在同伦意义下交换，其中 $\phi^{\downarrow}$ 是按照（8.16）得到的映射，并且其中的映射 T 等于 $1_{\Lambda_\uparrow}\otimes L_{h_0\tilde{f}}$的一个同伦逆。（所需的结论与我们使用哪一个同伦逆无关。）

与拉图尔映射的定义一样，令 θ_0 为代表上同调类 ξ 的闭一形式，它在 $\mathrm{Crit}(h_0)$ 的某个邻域内为零；并选取充分大的 N，使得 h_0 的类梯度向量场 v 在 $\tilde{X}_\xi$ 上的提升 $\tilde{v}$ 对于 1-形式 $\pi^*(N\,dh_0+\theta_0)$ 的某个原函数 h_N 仍是梯度型。如有必要，进一步增大 N，假设 $\tilde{v}$ 对于 1-形式 $\pi^*(N\,dh_0-\theta_0)$ 的某个原函数 $\tilde{g}_N$ 也仍是梯度型。用 $\tilde{v}$ 来定义 Morse 复形和诺维科夫复形上的微分，其中分别对应 π^*h_0，h_N 和 $\tilde{g}_N$，于是得到相同的复形 $\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_\xi]}CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])=CN_*(h_N;\xi)$，以及相同的复形 $\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_{-\xi}]}CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])=CN_*(\tilde{g}_N;-\xi)$。利用第一组识别，$1_{\Lambda_\uparrow}\otimes L_{h_0\tilde{f}}$ 等于延续映射 $\Phi_{\tilde{h}_N\tilde{f}}$。因此，对于式 (8.16) 中的同伦逆 T，我们可以取延续映射 $\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}: CN_*(f;\xi)\to CN_*(h_N;\xi)$。

我们考虑图表

(9.10)
$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{f};-\xi)} & & \xrightarrow{\quad\epsilon\quad} & & (^\vee\mathbf{CN}(f;\xi)_\uparrow)[-n] \\
\uparrow{\scriptstyle \Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{f}}} & & & & \uparrow{\scriptstyle {}^\vee\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}} \\
\overline{\mathbf{CN}_*(\tilde{g}_N;-\xi)} & \xrightarrow[\Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{h}_N}]{} & \overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{h}_N;-\xi)} & \xrightarrow[\epsilon]{} & (^\vee\mathbf{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi))[-n] \\
\uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f_2} & & \uparrow{\scriptstyle f_3} \\
\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) & \xrightarrow[\Phi_{\pi^*h_0,-\pi^*h_0}]{} & \widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) & \xrightarrow[\epsilon]{} & (^\vee\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]))[-n]
\end{array}$$

这里，记作 Φ 的映射是延拓映射，记作 ϵ 的映射是命题 9.5 和 9.7 中映射的适当版本，而映射 f_1,f_2,f_3 如下：

- $f1$: $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi]) \to \overline{\mathbf{CN}_*(\tilde{}g_N;\ -\xi)}$ 是恒等识别的复合——
  对 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])$ 与 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])$，它是.....的系数扩张
  后者扩张到 $\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_{-\xi}]}\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])$，以及 $\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_{-\xi}]}$ 的识别 $\overline{\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_{-\xi}])}$
  其中，$\overline{\mathbf{CN}_*(\tilde{}g_N;\ -\xi)}$ 是由 $\tilde{}\nu$ 对 π^*h_0 和 $\tilde{}g_N$ 都是梯度型的条件所得到的。
- 类似地，$f2$ 是复合
$$\widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) = \overline{\widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])}$$
$$\to \overline{\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_{-\xi}]}\widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])} = \overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{h}_N;-\xi)}$$
  $\widetilde{\ }$其中我们使用向量场 $-\tilde{}\nu$（它对于 $-\pi^*h_0$ 和 $-h_N$都是梯度型的）
  $\tilde{}$来定义 $\overline{\mathbf{CM}_*(-\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])}$ 以及 $\mathbf{CN}_*(-h_N;\ -\xi)$。
- $f3$: $(\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi]))[-n] \to (^\vee\mathbf{CN}_*(\tilde{}h_N;\ \xi))[-n]$ 是（8.16）中的第二个和第三个映射的复合（应用于 $\mathrm{C} = \mathbf{CM}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])$），随后再与 $\Lambda_\uparrow\otimes_{\kappa[\Gamma_\xi]}\mathbf{CM}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])$ 与 $\mathbf{CN}_*(h_N;\ \xi)$的识别的对偶复合而成。

$\tilde{}$根据定义，（9.10）左侧的复合是 $\mathrm{L}_{h_0\tilde{}f}$。此外，（9.10）底部的复合是庞加莱对偶映射 $\tilde{}\mathrm{D}$，因此底部和右侧合在一起给出了（9.9）中的映射 $\phi^\downarrow$。所以，要完成证明，只需证明（9.10）是同伦交换的。[19]

(9.10) 的左下方方块是（同伦）交换的，因为在构造 $\Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{}h_N}$ 时，我们可以使用与构造 $\Phi_{\pi^*h_0,-\pi^*h_0}$ 时相同的时变向量场 V；这使得所有相关的轨迹空间都相同，因此 $\Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{}h_N}$ 就是 $\Lambda_\uparrow$ 上 $\kappa[\Gamma_\xi]$-模同态 $\Phi_{\pi^*h_0,-\pi^*h_0}$ 的系数扩张。

（9.10）右下方的方块也是交换的。事实上，如果 $\tilde{}S \subset \mathrm{Crit}(\pi^*h_0)$ 在原莫尔斯函数 h_0: $X \to \mathrm{R}$ 的每个临界点上方的纤维中都恰好包含一个点，

[19]严格来说，(9.10) 的表述并不充分，因为我们没有说明在构造各种延续映射时应使用哪些时变向量场 $\mathrm{V} = \{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$；不过，由于这些延续映射的同伦类与此类选择无关，我们可以采用任何方便的选择。

那么 $\tilde{S}$ 同时构成分次 $\kappa[\Gamma_\xi]$-模 $\widetilde{\mathbf{CM}}_*(-\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 和分次 $\Lambda_\uparrow$-模 $\mathbf{CN}_*(h_N;\xi)[n]$ 的基。容易验证，两个复合 $\epsilon\circ f_2$ 和 $f_3\circ\epsilon$ 都会将该基的元素映射到 $^\vee(\mathbf{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi)[n])$ 中相应的对偶基元素（作为分次向量空间，它与 $(^\vee\mathbf{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi))[-n]$ 一致）。

最后，我们考察（9.10）中的顶部矩形。现在，$\Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{h}_N}$ 有同伦逆 $\Phi_{-\tilde{h}_N,\tilde{g}_N}$，并且 $\Phi_{\tilde{g}_N,-\tilde{f}}\circ\Phi_{-\tilde{h}_N,\tilde{g}_N}$ 与 $\Phi_{-\tilde{h}_N,-\tilde{f}}$ 同伦。因此，当且仅当满足以下条件时，（9.10）中的顶部矩形在同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccc}\overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{f};-\xi)} & \xrightarrow{\epsilon} & (^\vee\mathbf{CN}_*(\tilde{f};\xi))[-n]\\ \uparrow{\scriptstyle \Phi_{-\tilde{h}_N,-\tilde{f}}} & & \uparrow{\scriptstyle {}^\vee\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}}\\ \overline{\mathbf{CN}_*(-\tilde{h}_N;-\xi)} & \xrightarrow[\epsilon]{} & (^\vee\mathbf{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi))[-n]\end{array}\tag{9.11}$$

在同伦意义下交换。假设 $\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}$ 是通过一个时变向量场 $\mathrm{V}=\{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$（将其提升到 $\tilde{X}_\xi$）定义的；那么在构造 $\Phi_{-\tilde{h}_N,-\tilde{f}}$ 时，我们可以使用时变向量场 $\bar{\mathrm{V}}=\{-v_{-s}\}_{s\in\mathbb{R}}$。我们将证明，采用这一选择后，上述图表交换。事实上，只需证明，对于每个 $\tilde{p}\in$ 临界点集$_k(-h_N)$ 以及每个 $\tilde{q}\in$临界点集$_k(-f)=$临界点集$_{n-k}(f)$，都有

$$\Big(\epsilon(\Phi_{-\tilde{h}_N,-\tilde{f}}\tilde{p})\Big)(\tilde{q})=(\epsilon(\tilde{p}))(\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}\tilde{q}).\tag{9.12}$$

但这些量分别等于零维延拓轨迹空间 $\mathbf{N}^{\mathbb{V}}(\tilde{p},\tilde{q})$ 和 $\mathbf{N}^{\mathbb{V}}(\tilde{q},\tilde{p})$中点的计数（当 char $(\kappa)\neq 2$ 时，取定向计数）。这些延拓轨迹空间在将路径 γ 映到其时间反演 $\bar{\gamma}(s)=\gamma(-s)$ 的映射下构成双射；在定向情形下，根据命题 A.2，此双射保定向。（命题 A.2 中的符号为 1，因为 $\mathrm{ind}_{\tilde{h}_N}(\tilde{p})=\mathrm{ind}_{\tilde{f}}(\tilde{q})$。）由此完成了 (9.11) 可交换的证明，从而 (9.10) 和 (9.9) 在同伦意义下可交换。□

9.5. **与层间持久性的同构**。如第 9.3 节所述，设 ξ 是紧致连通光滑流形 X 的 de Rham上同调 $H^1(X;\mathrm{R})$ 中的一个类。本节关注这样一种特殊情形：积分同态 $\langle\xi,\cdot\rangle:\ \pi_1(X)\to\mathrm{R}$ 的像 $\Gamma=\Gamma_\xi$ 是离散的，因此等于某个 $\lambda_0\geq 0$ 的 $\lambda_0\mathrm{Z}$。若 $\lambda_0=0$，则 $\xi=0$，且积分覆盖 $\tilde{X}_\xi$ 等于 X，因此第 9.3 节中的函数 $\tilde{f}$ 只是 X 上的实值莫尔斯函数，其诺维科夫复形就是通常的 Morse复形。否则，$\lambda_0>0$，$\tilde{X}_\xi$ 是 X的无限循环覆盖，而第 9.3 节中的莫尔斯函数 $\tilde{f}:\ \tilde{X}_\xi\to\mathrm{R}$ 可纳入一个交换图中

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}_\xi & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}\\ \downarrow & & \downarrow\\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}/\lambda_0\mathbb{Z}\end{array}$$

$\tilde{}$对于圆值莫尔斯函数$f\colon X \to \mathrm{R}/\lambda_0\mathrm{Z}$。注意，$f$ 是 proper 的，其临界值构成 R 的一个离散子集（更具体地说，是离散群 Γ_ξ的有限个陪集之并）。

若X 是 κ定向的，则与 $\tilde{}f\colon \tilde{}X^\xi \to \mathrm{R}$ 相关联的链级庞加莱–诺维科夫$\tilde{}$结构为 $\mathrm{CN}(f;\ \xi)$ 如定义 9.6 所述（当 $\xi = 0$ 时，该定义特化为定义 9.3，因为此时 1-形式 θ_0 可以取为零）。根据第$\tilde{}$8 节的一般代数理论，这给出一个链级过滤匹配对 $\mathrm{CP}(\mathrm{CN}(f;\ \xi))$进而，对每个$k \in \mathrm{Z}$，都有一个由式 (8.3) 给出的、定义在 R 上的 κ-向量空间上的持久模 $\mathrm{H}_k(\mathrm{CP}(\mathrm{CN}(\tilde{}f;\xi)))$。

我们的主要比较结果是定理 2.2，它将 κ-系数奇异同调与持久模进行比较。该定理断言，持久模 $\mathrm{H}_k(\mathrm{CP}(\mathrm{CN}(f;\ \xi)))$ 在指标集 $\{s+t \geq 0\}$ 上的限制，与由层间集合的奇异同调群给出的持久模相一致（其中将一对 (s,t) 对应到区间 $[-s,t]$）。

根据命题 8.6 和 9.9，R^2 处由映射锥的第 $(k+1)$阶同调给出的持久模同构 $f\colon \tilde{}\xi \to \mathrm{R}$ 在 $(s,t) \in \mathrm{R}^2$ 处由 $\mathrm{H}_k(\mathrm{CP}(\mathrm{CN}(\tilde{}f;\xi)))$

(9.13)

$$\mathrm{Cone}\left(\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\downarrow}_{\geq -s} \oplus \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\leq t}_{\uparrow} \xrightarrow{-j^{\downarrow}\otimes\psi^{\downarrow}+j_{\uparrow}\otimes\psi_{\uparrow}} \Lambda_{\updownarrow} \otimes_{\kappa[\Gamma_\xi]} \widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^* h_0;\kappa[\Gamma_\xi])\right)$$

其中

$$\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\downarrow}_{\geq -s} = \{c \in \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\downarrow} | \ell^{\downarrow}_{\tilde{f}}(c) \geq -s\},\ \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\leq t}_{\uparrow} = \{c \in \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)_{\uparrow} | \ell^{\tilde{f}}_{\uparrow}(c) \leq t\}$$

其余记号与第 8.2 节中的相同，持久模结构映射由子复形的包含映射诱导。因此，要证明定理 2.2，只需证明该持久模（简记为 $\mathrm{H}_k(f)$）与 $\mathrm{H}_k(\mathrm{CP}(\mathrm{CN}(f;\ \xi)))$同构。明确陈述如下：

定理 9.10。 假设 Γ_ξ 是离散的，并令 $\tilde{}f\colon \tilde{}X^\xi \to \mathrm{R}$ 为一个莫尔斯函数，使得 $d\tilde{}f$是代表类 $\xi \in H^1(X;\mathrm{R})$ 的 1-形式在 $\tilde{}X^\xi$ 上的拉回。对于 $(s,t) \in \mathrm{R}^2$, ，令 $\mathrm{H}_k(\tilde{}f)_{s,t}$ 表示（9.13）的第 $(k+1)$阶同调。则对于 $s+t \geq 0$，存在同构

$$\sigma_{s,t}\colon \mathbb{H}_k(\tilde{f})_{s,t} \to H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]);\kappa)$$

使得当 $s \leq s'$ 和 $t \leq t'$时，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_k(\tilde{f})_{s,t} & \longrightarrow & \mathbb{H}_k(\tilde{f})_{s',t'} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{s,t}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{s',t'}} \\ H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]);\kappa) & \longrightarrow & H_k(\tilde{f}^{-1}([-s',t']);\kappa) \end{array}$$

其中，水平映射由包含映射诱导。

本节其余部分将用于证明该定理。事实上，该定理比定理 2.2 稍微$\tilde{}$一般一些，因为即使 X 不是 κ-定向的，$\mathrm{H}_k(f)$ 也有定义。

我们首先说明，只需在 $\tilde{}s+t > 0$ 且 $-s$ 和 t 都是 f 的正则值的情形下，构造定理 9.10 中的映射 $\sigma_{s,t}$。为此，注意到由于 $\tilde{}f$ 的临界值集是离散的，对于任意 $(s,t) \in \mathrm{R}^2$，都存在 $\epsilon_{s,t} > 0$ 使得

两个开区间的并集 $(t, t+\epsilon_{s,t}) \cup (-(s+\epsilon_{s,t}), -s)$ 中没有临界值。于是，若 $\delta, \epsilon \in [0, \epsilon_{s,t})$，子复形 $CN(\tilde{f}; \xi)^{\downarrow}_{\geq -s} \subset CN(\tilde{f}; \xi)^{\downarrow}_{\geq -(s+\delta)}$ 和 $CN(\tilde{f}; \xi)^{\leq t}_{\uparrow} \subset CN(\tilde{f}; \xi)^{\leq t+\epsilon}_{\uparrow}$ 的包含映射都是等式。因此，对于 $0 \leq \delta, \epsilon < \epsilon_{s,t}$，我们有 $H_k(\tilde{f})_{s,t} = \tilde{H}_k(f)_{s+\delta, t+\epsilon}$，且结构映射 $H_k(f)_{s,t} \to H_k(f)_{s+\delta,t+\epsilon}$ 是恒等映射。

类似地，仍假设 $\delta, \epsilon \in [0, \epsilon_{s,t})$。由于 $\tilde{f}$ 的临界值中，落在区间 $[-s-\delta, t+\epsilon]$ 内的临界值实际上都落在 $[-s, t]$ 内，因此可以利用 f 的梯度流构造 $\tilde{f}^{-1}([-s-\delta, t+\epsilon])$ 到 $\tilde{f}^{-1}([-s, t])$ 的变形收缩。（若 s 和 t 都不是 f 的临界值，则可直接仿照 [Mil63, 定理 3.1]，先应用于 f，再应用于 −f；若 −s 和/或 t 是临界值，则可改用 [Mil63, 注 3.4] 中的论证。）因此，若 $0 \leq \delta, \epsilon < \epsilon_{s,t}$，包含诱导映射 $H_k(\tilde{f}^{-1}([-s, t]); \kappa) \to H_k(\tilde{f}^{-1}([-(s+\delta), t+\epsilon]); \kappa)$ 是同构。于是，假设定理 9.10 中的映射 $\sigma_{s,t}$ 已对所有属于集合 $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | s+t > 0, s, t \notin \text{临界点集}(\tilde{f})\}$ 的 (s,t) 构造完成，那么对于所有满足 $\{(s,t) | s+t \geq 0\}$ 的情形，我们可以唯一地扩展这一构造：每当 $s+t \geq 0$ 时，任取 $\delta, \epsilon \in [0, \epsilon_{s,t})$，使得 $(s+\delta, t+\epsilon) \in U$，并要求 $\sigma_{s,t}$ 在同构 $H_k(f)_{s,t} = H_k(\tilde{f})_{s+\delta,t+\epsilon}$ 和包含诱导同构 $H_k(\tilde{f}^{-1}([-s, t]); \kappa) \cong H_k(\tilde{f}^{-1}([-(s+\delta), t+\epsilon]); \kappa)$ 下与 $\sigma_{s+\delta,t+\epsilon}$ 一致。这个规定显然与 δ, ϵ 的选取无关，并保持相关图表的交换性。由此可知，以下只需考虑属于子集 U 的那些 (s,t)。

9.5.1. 经典莫尔斯情形。我们首先在$\xi = 0$这一较简单的情形下证明定理 9.10。因此，$\Gamma_\xi = 0$ 和 $\kappa[\Gamma_\xi]$、$\Lambda_\uparrow$、$\Lambda^\downarrow$以及 $\Lambda_\updownarrow$ 都等于 κ，Novikov 复形也简化为原紧流形 X 上函数的 Morse 复形。（特别地，$CN(\tilde{f}; 0)^\downarrow$ 的底层链复形是 Morse 复形 $CM_*(-\tilde{f})$，其中 $CN(\tilde{f}; 0)^{\downarrow}_{\geq -s}$ 等于由满足 $-\tilde{f}(p) \leq s$ 的临界点 p 生成的子复形 $CM_*(-\tilde{f})^{\leq s}$。）参见（9.13），映射 $j^\uparrow$、$j^\downarrow$ 在此情形下就是 κ上的恒等映射；$\tilde{}$映射 $\psi_\uparrow : CM_*(f) \to CM_*(h_0)$ 是延拓映射 $\Phi_{h_0}\tilde{f}$ 的同伦逆，因此可以取为延拓映射 $\Phi_{\tilde{f}}h_0$；同样，$\psi^\downarrow$可以取为$\Phi_{-\tilde{f}}$、h_0。

对于任意空间 Y，令 $S_*(Y)$ 表示系数取 κ 的 Y 的奇异链复形；对于 $Z \subset Y$，令 $S_*(Y, Z) = S_*(Y)S_*(Z)$ 表示相对奇异链复形。若 $g : W \to [a, b]$ 是紧流形（带边界）W 上的莫尔斯函数，且∂W 是正则水平集 $\partial_0 W = g^{-1}(\{a\})$ 与 $\partial_1 W = g^{-1}(\{b\})$ 的不交并，则有（略去梯度型向量场的记号）一个 Morse复形 $CM_*(g)$ 和链同伦等价 $E(g): CM_*(g) \to S_*(W, \partial W_0)$，见 [Paj06，第 218] 页。特别地，令 g 等于我们的莫尔斯函数 $f : X \to R$，可得到链同伦等价 $E(f): CM_*(f) \to S_*(X)$；此外，对于 f 的任意正则值 t，记 $X^{\leq t} = \tilde{f}^{-1}((-\infty, t])$ 和 $\tilde{f}^t = \tilde{f}|_{X^{\leq t}}$，我们可以观察到 $CM_*(\tilde{f}^t) = CM_*(\tilde{f})^{\leq t}$，从而得到链同伦等价 $E(\tilde{f}^t): CM_*(\tilde{f})^{\leq t} \to S_*(X^{\leq t})$。由 [Paj06] 中的论证可知，

存在一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CM}_*(\tilde{f})^{\leq t} & \longrightarrow & \mathbf{CM}_*(\tilde{f}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(\tilde{f}^t)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(\tilde{f})} \\ \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) & \longrightarrow & \mathbf{S}_*(X) \end{array} \tag{9.14}$$

其中水平映射为包含映射。事实上，正如 [Paj06, Propositon VI.2.4], 的证明中所做的那样，用于构造 E ($\tilde{f}$ t) 的胞腔滤过可以取为包含在用于构造 E(f) 的胞腔滤过之中；上方的箭头可以解释为由这些滤过的包含映射诱导，因此该图的同伦交换性由 [Paj06, Corollary VI.3.8]中的函子性结论得出。同样，若 $\tilde{f}$ 的一个正则值为 −s，我们令 $X_{\geq -s} = \tilde{f}^{-1}([-s, \infty))$ 和 $\tilde{f}_{-s} = \tilde{f}|_{X_{\geq -s}}$，于是有链同伦等价 $E(-\tilde{f}): CM_*(-\tilde{f}) \to S_*(X)$ 和 $E(-\tilde{f}_{-s}): CM_*(-\tilde{f})^{\leq s} \to S_*(X_{\geq -s})$，它们与包含映射在同伦意义下相容。鉴于诸如 (9.2) 这样的图的同伦交换性（将其应用于定义在完整 Morse 复形 $\tilde{CM}_*(\pm f)$ 上的 $\psi_\uparrow = \Phi_{\tilde{f}, h_0}$ 和 $\psi^\downarrow = \Phi_{-\tilde{f}, h_0}$），由此可得我们有一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CM}_*(-\tilde{f})^{\leq s} \oplus \mathbf{CM}_*(\tilde{f})^{\leq t} & \xrightarrow{-j^\downarrow \otimes \psi^\downarrow + j_\uparrow \otimes \psi_\uparrow} & \mathbf{CM}_*(h_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(-\tilde{f}_{-s}) \oplus \mathcal{E}(\tilde{f}^t)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(h_0)} \\ \mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) \oplus \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) & \xrightarrow{-j_{-s} + j^t} & \mathbf{S}_*(X) \end{array} \tag{9.15}$$

其中，j_{-s}、j^t 是由将 $X_{\geq -s}$、$X^{\leq t}$ 包含到 X 中所诱导的奇异链上的映射。由于我们的持久模 $H_k(f)$ 在 (s, t) 处由上述顶端水平映射之锥的 (k + 1)阶同调给出，因此由命题 8.2 可知，$H_k(f)_{s,t}$ 同样可以通过底端水平映射之锥的 (k+1)阶同调来计算。对于满足 $s \leq s'$、$t \leq t'$ 的两对 (s, t)、(s′, t′)，这种对应与包含映射所诱导的映射相容；这是因为 Pajitnov 链同伦等价 E 同样与包含映射 $X^{\leq t} \subset X^{\leq t'}$、$X_{\geq -s} \subset X_{\geq -s'}$ 在同伦意义下相容。（这可由上文用于构造诸如 (9.14) 这类同伦交换图表的相同论证得出。）

因此，我们现在考虑 (9.15) 底部映射 $-j_{-s} + j^t$ 的锥。如本小节开头之前所述，为证明该定理，只需将注意力限制在满足以下条件的数对 (s, t) 上：−s 和 t 是 f 的正则值，且 s + t > 0。此时，$X^{\leq t}$ 和 $X_{\geq -s}$ 的内部 $\{x | \tilde{f}(x) < t\}$ 与 $\{x | \tilde{f}(x) > -s\}$ 覆盖 X。因此，若令 $S^\circ_*(X)$ 表示由 $S_*(X^{\leq t})$ 和 $S_*(X_{\geq -s})$ 生成的 $S_*(X)$ 子复形，则小链定理（[Ha02，命题 2.21]）表明，包含映射 $S^\circ_*(X) \hookrightarrow S_*(X)$ 是链同伦等价。当然，映射 $-j_{-s} + j^t$ 经由 $S^\circ_*(X)$ 分解，因此该包含映射给出一个链同伦等价

$$\text{锥}(-j_{-s} + j^t : \mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) \oplus \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) \to \mathbf{S}^\circ_*(X)) \sim \text{Cone}(-j_{-s} + j^t : \mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) \oplus \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) \to \mathbf{S}_*(X)) \tag{9.16}$$

此外，由于 $X^{\leq t} \cap X_{\geq -s} = \tilde{f}^{-1}([-s, t])$，我们有一个链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}_*(\tilde{f}^{-1}([-s, t])) \xrightarrow{(i_{-s}, i^t)} \mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) \oplus \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) \xrightarrow{-j_{-s}+j^t} \mathbf{S}_*^\circ(X) \longrightarrow 0 \tag{9.17}$$

其中i_{-s}, i^t 是包含映射。

现在一般而言，若 $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\beta} C_* \longrightarrow 0$ 是链复形的短正合列，则由 $\hat{\alpha}: A_k \to B_k \oplus C_{k+1} = (\mathrm{Cone}(\beta)[1])_k$ 定义的映射 $\hat{\alpha}(a) = (\alpha a, 0)$ 是从A_*到 $\mathrm{Cone}(\beta)[1]$的拟同构。将此结果（连同 (9.16)）应用于 (9.17)，得到一个同构

$$\mathfrak{p}_{s,t}: H_k(\tilde{f}^{-1}([-s, t]); \kappa) \to H_{k+1}\left(\mathrm{Cone}\left(\mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) \oplus \mathbf{S}_*(X^{\leq t}) \xrightarrow{-j_{-s}+j^t} \mathbf{S}_*(X)\right)\right).$$

随着s, t 变化，$\mathfrak{p}_{s,t}$ 显然与$s \leq s', t \leq t'$对应的显然的包含诱导映射相容。将 $\mathfrak{p}^{-1}{}_{s,t}$ 与由 (9.15) 诱导的锥同构复合，便得到定理 9.10 中所述的同构 $\sigma_{s,t}$。这就完成了该定理在 $\xi = 0$ 情形下的证明。

9.5.2. S^1值情形。现在我们转向定理 9.10 中稍复杂的情形：$\langle \xi, \cdot \rangle$：$\pi_1(X) \to \mathrm{R}$ 的像是 R 的非平凡离散子群 $\Gamma_\xi = \lambda_0 \mathrm{Z}$，其中 $\lambda_0 > 0$。此时 Novikov 域为

$$\Lambda_\uparrow = \left\{ \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m T^{\lambda_0 m} \middle| m_0 \in \mathbb{Z}, a_m \in \kappa \right\};$$

代入 $x = T^{\lambda_0}$，我们可以将 $\Lambda_\uparrow$识别为 Laurent级数域 $\kappa[x^{-1}, x]]$；类似地，Λ 是 Laurent多项式环 $\kappa[x^{-1}, x]$，而 $\Lambda^\downarrow$ 是 $\kappa[[x^{-1}, x]$（变量 x^{-1}的 Laurent 级数域）。

对于 $t \in \mathrm{R}$ 和 $m \in \mathrm{N}$，$x^m = T^{\lambda_0} m$ 在 Novikov链复形 $\mathrm{CN}_*(\tilde{f}; \xi)$上的作用，将过滤子复形 $\mathrm{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t}$ 同构地映到 $\mathrm{CN}(\tilde{f}; \xi)^{\leq (t-\lambda_0} m_\uparrow{}^{)}$。如果 t 是 $\tilde{f}$ 的正则值且 $m > 0$，商复形 $\mathrm{N}_*(t, m) := \mathrm{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t} x^m \mathrm{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t}$ 恰好等同于 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{f}^{-1}([t - \lambda_0 m, t])$上的限制的（相对）Morse复形，因此，上一小节中提到的构造 [Paj06，第 218] 页，给出一个链同伦等价 $\mathrm{N}_*(t, m) \to \mathrm{S}_*(\tilde{f}^{-1}([t - \lambda_0 m, t]), \tilde{f}^{-1}(\{t - \lambda_0 m\}))$，进而利用切除，得到链同伦等价 $E(\tilde{f}, t, m): \mathrm{N}_*(t, m) \to \mathrm{S}_*(X^{\leq t}, X^{\leq (t-\lambda_0 m)})$。这里与上一小节一样，我们通常记 $X^{\leq t} = \tilde{f}^{-1}((-\infty, t])$，并在后文记 $X_{\geq -s} = \tilde{f}^{-1}([-s, \infty))$。

现在可以直接说明过滤子复形$\mathbf{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t}$ 的逆极限

$$\varprojlim_{m \to \infty} \mathcal{N}_*(t, m) = \varprojlim_{m \to \infty} \frac{\mathbf{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t}}{x^m \mathbf{CN}(\tilde{f}; \xi)_\uparrow^{\leq t}}$$

尽管 $CN(\tilde{f};\xi)^{\le t}_{\uparrow}$ 在完整 Novikov域 $\Lambda_{\uparrow}=\kappa[x^{-1}$ 的作用下并非不变，但在子环 $\kappa[[x]]$ 的作用下保持不变（即在具有 $\nu_{\uparrow}\ge 0$ 的元素作用下不变）。同样，由于 x 在 $\tilde{X}_\xi$ 上的作用会降低 $\tilde{f}$ 的值，奇异链复形 $S_*(X^{\le t})$ 是一个由 $\kappa[x]$ 模构成的复形。导出映射 $E(f,t,m)$ 的构造，使其成为 $\kappa[x]\,x^m\kappa[x]$ 模（而不仅仅是 κ 模）复形之间链同伦等价且在同伦意义下典范的讨论，见 [Paj06, 定义 XI.4.5]。我们有 $S_*(X^{\le t},X^{\le(t-\lambda_0 m)})=S_*(X^{\le t})\,x^m S_*(X^{\le t})$，于是 $\kappa[[x]]\otimes_{\kappa[x]}S_*(X^{\le t})$ 可识别为 $\lim\limits_{\longleftarrow m\to\infty}S_*(X^{\le t},X^{\le(t-\lambda_0 m)})$。

在 [Paj06, 命题 XI.6.3], Pajitnov 构造了一个由 $\kappa[[x]]$-模组成的复形之间的链同伦等价 $\Psi_t\tilde{f}\colon \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\le t}\to\kappa[[x]]\otimes_{\kappa[x]}\mathbf{S}_*(X^{\le t})$，它具有如下性质：每个图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\le t}_{\uparrow} & \xrightarrow{\Psi^t_{\tilde{f}}} & \kappa[[x]]\otimes_{\kappa[x]}\mathbf{S}_*(X^{\le t})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathscr{M}_*(t,m) & \xrightarrow{\mathscr{E}(\tilde{f},t,m)} & \mathbf{S}_*(X^{\le t},X^{\le(t-\lambda_0 m)})\end{array}$$

都在同伦意义下交换，其中垂直映射是相应逆极限的投影。此外，完整的诺维科夫复形 $CN_*(f;\xi)$ 可由 $CN(\tilde{f};\xi)^{\le t}_{\uparrow}$ 恢复，方式为 $\kappa[x^{-1},x]]\otimes_{\kappa[[x]]}CN(\tilde{f};\xi)^{\le t}_{\uparrow}$。根据 [Paj06, 定理 XI.6.2]，存在一个链同伦等价 $P_f\colon CN_*(\tilde{f};\xi)\to\kappa[x^{-1},x]]\otimes_{\kappa[[x]]}S_*(\tilde{X}_\xi)$，在同伦意义下由如下性质唯一确定（鉴于 [Paj06, 第 XI.6.1] 节中的构造）：对于每个正则值 t，P_f 与 $\Psi^t f$ 从 $\kappa[[x]]$ 到 $\kappa[x^{-1},x]]$ 的系数扩张链同伦。（注意，按照本文其余部分的记号，$P_{\tilde{f}}$ 的陪域应写作 $\Lambda_{\uparrow}\otimes_\Lambda S_*(\tilde{X}_\xi)$。）有了这些链同伦等价，本情形下定理 9.10 的证明采用了与第 9.5.1 节所讨论情形相似的策略。

证明的一部分需要将 (9.13) 中的映射 $-j^{\downarrow}\otimes\psi^{\downarrow}+j_{\uparrow}\otimes\psi_{\uparrow}$ 在$\tilde{}$同伦等价意义下与奇异链复形之间的一个映射对应起来。令 $h_0, h_N, \tilde{}g_N$如第 9.4 节所述，其中 v 是 X 上的一个莫尔斯-斯梅尔梯度型向量场，其提升 $\tilde{}v$ 到$\tilde{}X_\xi=\tilde{}X_{-\xi}$ 对 $\tilde{}g_N$ 和 $\tilde{}h_N$都是梯度型的。因此，使用 $\tilde{}v$ 来定义 $\pi^*h_0, h_N, \tilde{}g_N$的各种 Morse$\tilde{}$ $\widetilde{\ }$或诺维科夫复形，我们有 $CN_*(h_N;\xi)=\Lambda_{\uparrow}\otimes_\Lambda CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])$ 以及$\widetilde{\ }$ $CN_*(\tilde{}g_N;-\xi)=\Lambda_{\uparrow}\otimes_\Lambda CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])$。我们还回顾一下 [Paj95, Theorem A.5]中关于由 $\kappa[\Gamma_\xi]$-模组成的复形的链同伦等价 $\tilde{}E(h_0)$: $\widetilde{\ }CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])\to S_*(\tilde{}X_\xi)$。应用第 4.1 节的共轭函子（它不会改变底层的集合论映射），$\tilde{}E(h_0)$ 同样可以被视为由 $\kappa[\Gamma_{-\xi}]$-模组成的复形之间的链同伦等价 $\widetilde{\ }CM_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_{-\xi}])\to S_*(\tilde{}X_{-\xi})$。（如前所述，尽管 $\tilde{}X_{-\xi}$ 与 $\tilde{}X_\xi$指的是同一个覆盖空间，且 $\Gamma_{-\xi}$ 与 Γ_ξ with$\kappa[\Gamma_\xi]=\kappa[\Gamma_{-\xi}]=\Lambda$是同一个群，但我们对它们使用不同的记号，以反映 $\Gamma_{-\xi}$ 在$\tilde{}X_{-\xi}$ 上的作用与 Γ_ξ 在 $\tilde{}X_\xi$上的作用互为逆作用。）

引理 9.11。链同伦等价

$$\mathbb{P}_{\tilde{h}_N}\colon \mathbf{CN}_*(\tilde{h}_N;\xi)=\Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda \widetilde{\mathbf{CM}}(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi])\to\Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda \mathbf{S}_*(\tilde{X}_\xi)$$

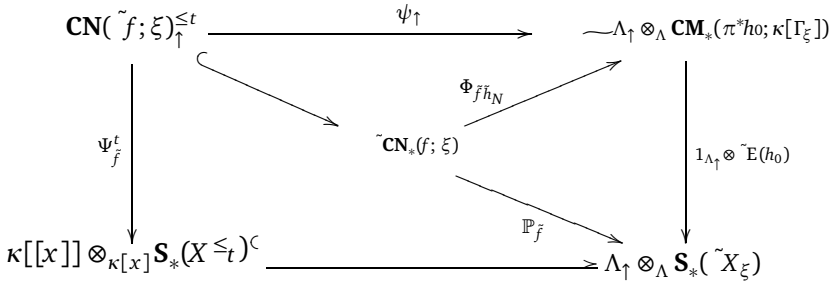
同伦于将 $\tilde{\mathrm{E}}(h_0)$ 的系数扩张至 $\Lambda_\uparrow$：$\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])\to\mathbf{S}_*(\tilde{X}_\xi)$。类似地，$\mathrm{P}^{\tilde{g}_N}$：$\mathbf{CN}_*(\tilde{g}_N;\ -\xi)\to\Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda\mathbf{S}_*(\tilde{X}_{-\xi})$ 同伦于将同伦等价 $\tilde{\mathrm{E}}(h_0)$ 的系数扩张至 $\Lambda_\uparrow$：$\mathbf{CM}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_{-\xi}])\to\mathbf{S}_*(\tilde{X}_{-\xi})$。

证明。两种情形相同，因此我们只证明第一个陈述，即涉及 h_0 和 $\tilde{h}_N$ 的情形。或许最简便的做法是利用 Paj06 第 XI.7 节中基于 HL99] 的 $\mathrm{P}^{\tilde{h}_N}$ 的同伦逆的刻画。具体而言，令 $\mathrm{S}^{\pitchfork}_*(\tilde{X}_\xi)$ 表示由满足条件的 C^∞ 单形 $\sigma\colon\ \Delta^k\to\tilde{X}_\xi$ 生成的 $\mathrm{S}_*(\tilde{X}_\xi)$ 的子复形，这些单形与所有上升流形 $\mathrm{A}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p})$ 横截。定义 $\phi\colon\ \Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda \mathrm{S}^{\pitchfork}_k(\tilde{X}_\xi)\to \mathrm{CN}_k(\tilde{h}_N;\ \xi)$，方法是令 $\phi(\sigma)=\sum_{\tilde{p}\in \mathrm{Crit}_k(\tilde{h}_N)}[\sigma:\ \tilde{p}]\tilde{p}$，其中 $[\sigma:\ \tilde{p}]$ 是 σ 与 $\mathrm{A}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p})$ 的交数。由此得到一个链映射，而 Paj06 定理 XI.7 断言，$\mathrm{P}^{\tilde{h}_N}\circ\phi$ 同伦于将 $\mathrm{S}^{\pitchfork}_*(\tilde{X}_\xi)$ 的系数扩张包含映射至 $\mathrm{S}_*(\tilde{X}_\xi)$，而该映射本身是链同伦等价。

但在当前情形中，$\tilde{v}$ 是 h_0，的 Morse-Smale 梯度型向量场在 $\tilde{X}_\xi$ 上的提升，因此，如上所述，σ 与上升流形 $\mathrm{A}^{\tilde{\nu}}(\tilde{p})$ 在 $\tilde{X}_\xi$ 中的交集，与 $\pi\circ\sigma$ 与上升流形 $\mathrm{A}^{\nu}(p)$ 在 X 中的交集构成双射；由紧致性可知，这类交集只有有限个。因此，定义 ϕ 的求和是有限的，所以 ϕ 是到 $\Lambda_\uparrow$ 的系数扩张，其对应的映射 $\phi_0\colon \mathrm{S}^{\pitchfork}_*(\tilde{X}_\xi)\to\widetilde{\mathrm{CM}}(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])$ 的定义方式类似。接着，通过将 [Paj06, Theorem VI.4.12] 直接提升到覆盖空间，可知 $\tilde{\mathrm{E}}(h_0)\circ\phi_0$ 同伦于 $\mathrm{S}^{\pitchfork}_*(\tilde{X}_\xi)$ 到 $\mathrm{S}_*(\tilde{X}_\xi)$ 的包含映射。

由此可知，$1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\tilde{\mathrm{E}}(h_0)$ 和 $\mathrm{P}^{\tilde{h}_N}$ 是同一个链映射的链同伦逆（即将 ϕ_0 与包含映射 $\mathbf{S}^{\pitchfork}_*(\tilde{X}_\xi)\hookrightarrow\mathbf{S}_*(\tilde{X}_\xi)$的链同伦逆复合后，再扩张系数到 $\Lambda_\uparrow$ 所得的映射）；因此，$1_{\Lambda_\uparrow}\otimes\tilde{\mathrm{E}}(h_0)$ 和 $\mathrm{P}^{\tilde{h}_N}$ 同伦。□

在证明的其余部分，设 $-s, t$ 是 f 的正则值，且 $s+t>0$。在 (9.13) 中，映射 $\psi_\uparrow$ 是包含映射 $\mathrm{CN}(\tilde{f};\xi)^{\le t}_\uparrow\to\mathrm{CN}_*(\tilde{f};\xi)$ 与延续映射 $\Phi_{\tilde{h}_N\tilde{f}}\colon \Lambda_\uparrow\otimes_\Lambda \mathrm{CM}_*(\pi^*h_0;\ \kappa[\Gamma_\xi])\to\mathrm{CN}_*(f;\xi)$的链同伦逆的复合；对于这个链同伦逆，我们可以采用延续映射 $\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}$。根据与 (9.2) 相同的论证，$\mathrm{P}^{\tilde{h}_N}\circ\Phi_{\tilde{f}\tilde{h}_N}$ 与 $\mathrm{P}^{\tilde{f}}$ 链同伦，因此由引理 9.11 可得一个 $\kappa[[x]]$-模复形的同伦交换图



其中竖直箭头是链同伦等价。类似地，采用相同的推理，并将 ξ, f, h_N 替换为 $-\xi, -f, \tilde{g}_N$，再使用共轭函子和命题 4.4 将 $\Lambda_\uparrow$-向量空间转换为 $\Lambda^\downarrow$-向量空间，我们得到一个 $\kappa[[x^{-1}]]$-模复形的同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\downarrow}_{\geq -s} & \xrightarrow{\psi^{\downarrow}} & \Lambda^{\downarrow}\otimes_{\Lambda}\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\Psi}^{-s}_{-\tilde{f}}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Lambda^\downarrow}\otimes\tilde{\mathcal{E}}(h_0)} \\ \kappa[[x^{-1}]]\otimes_{\kappa[x^{-1}]}\mathbf{S}_*(X_{\geq -s}) & \hookrightarrow & \Lambda^{\downarrow}\otimes_{\Lambda}\mathbf{S}_*(\tilde{X}_\xi) \end{array}$$

取上述两个图表的直和，并与映射 $-j^{\downarrow}+j^{\uparrow}\colon \Lambda^{\downarrow}\oplus\Lambda_{\uparrow}\to\Lambda_{\updownarrow}$ 结合，可知我们有一个同伦交换图（在 κ-向量空间的复形层面上）

(9.18)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\downarrow}_{\geq -s}\oplus\mathbf{CN}(\tilde{f};\xi)^{\leq t}_{\uparrow} & \xrightarrow{-j^{\downarrow}\otimes\psi^{\downarrow}+j_{\uparrow}\otimes\psi_{\uparrow}} & \Lambda_{\updownarrow}\otimes_{\Lambda}\widetilde{\mathbf{CM}}_*(\pi^*h_0;\kappa[\Gamma_\xi]) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi^{t}_{\tilde{f}}\oplus\bar{\Psi}^{-s}_{-\tilde{f}}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Lambda_\updownarrow}\otimes\mathcal{E}(\tilde{h}_0)} \\ \left(\kappa[[x^{-1}]]\otimes_{\kappa[x^{-1}]}\mathbf{S}_*(X_{\geq -s})\right)\oplus\left(\kappa[[x]]\otimes_{\kappa[x]}\mathbf{S}_*(X^{\leq t})\right) & \xrightarrow{-j^{\downarrow}\otimes\iota_{X_{\geq -s}}+j_{\uparrow}+\otimes\iota_{X^{\leq t}}} & \Lambda_{\updownarrow}\otimes_{\Lambda}\mathbf{S}_*(X) \end{array}$$

其中 $\iota_{X_{\geq -s}}, \iota_{X^{\leq t}}$ 是包含映射，竖直映射是链同伦等价。这会在水平映射的锥的同调群之间诱导同构；当数对 (s, t) 变化时，这些同调同构与 $s \leq s'$、$t \leq t'$ 对应的包含映射诱导的映射相容，这归因于 [Paj06, 命题 XI.4.6]。因此，只需识别 $H_{k+1}(\mathrm{Cone}(-j^{\downarrow}\otimes\iota_{X_{\geq -s}}+j_{\uparrow}\otimes\iota_{X^{\leq t}}))$ 与 $H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]);\kappa)$，并使其与包含映射 $[-s,t]\subset[-s',t']$ 相容；以下仍假设 $s+t>0$。任取满足 $0<\delta<s+t$ 的数 δ，对于 $\tilde{X}_\xi$ 的任意子集 Y，令 $S^{\delta}_*(Y)$ 表示由满足 $\Delta^k\to Y$ 且 $\max(\tilde{f}\circ\sigma)-\min(\tilde{f}\circ\sigma)\leq\delta$ 的单形 σ 生成的 $S_*(Y)$ 的子复形。根据 [Ha02, 命题 2.21]，应用于 $\tilde{X}_\xi$ 的覆盖 $\{\tilde{f}^{-1}([a,a+\delta])|a\in\mathbb{R}\}$，包含映射 $S^{\delta}_*(Y)\to S_*(Y)$ 是一个同伦等价，因此我们可以改为考虑 1 的锥

(9. 9)

$$-j^{\downarrow}\otimes\iota_{X_{\geq -s}}+j_{\uparrow}\otimes\iota_{X^{\leq t}}\colon \left(\kappa[[x^{-1}]]\otimes_{\kappa[x^{-1}]}\mathbf{S}^{\delta}_*(X_{\geq -s})\right)\oplus\left(\kappa[[x]]\otimes_{\kappa[x]}\mathbf{S}^{\delta}_*(X^{\leq t})\right)\to\Lambda_{\updownarrow}\otimes_{\Lambda}\mathbf{S}^{\delta}_*(\tilde{X}_\xi).$$

假设 $\lambda=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m x^m$ 是 $\Lambda_{\updownarrow}$ 的一般元素（其中 $a_m\in\kappa$），且 $\sigma\colon\Delta^k\to\tilde{X}_\xi$ 是 $S^{\delta}_*(X_\xi)$ 的一个生成元。若 $m_0\in\mathbb{Z}$ 是满足 $\max(\tilde{f}\circ\sigma)-m\lambda_0\leq t$ 的最小整数，则 $x^{m_0}\sigma$ 的像包含于 $X^{\leq t}$ 中；而根据 δ 的选择，$x^{m_0-1}\sigma$ 的像包含于 $X_{\geq -s}$ 中。由此立即可得，$\lambda\otimes\sigma$ 属于 (9.19) 的像；因此该映射是满射，并且容易看出，它的核等于 $S^{\delta}_*(\tilde{f}^{-1}([-s,t]))$ 在对角嵌入下的像。因此，正如第 9.5.1 节中那样，我们得到 (9.19) 的锥的 $(k+1)$ 次同调与 $H_k(S^{\delta}_*(\tilde{f}^{-1}([-s,t])))$ 之间的同构；而根据小链定理再次可得，后者又与 $H_k(\tilde{f}^{-1}([-s,t]))$ 同构。若 $s'\geq s$ 且 $t'\geq t$，则所得同构与显然的包含映射相容，因为对于两对 (s,t)、(s',t')，我们可以使用相同的 δ 值。定理 9.10 的证明至此完成。

附录 A. 定向

本附录将介绍我们对 Morse 理论和哈密顿弗洛尔理论中出现的各种空间所采用的定向约定，并推导由此产生的一些符号。有些作者采用的约定与我们不同（例如，在 [Lat 94]，等参考文献中，Morse 轨迹空间是通过选择上升流形而非下降流形的定向来定向的），一般而言，这会影响某些公式中出现的符号。愿意在特征 2 下工作的读者可以放心略过这部分内容；在特征不为 2 时，需要这里的计算来证明，按照我们的约定，定义 9.3 和 9.6 中出现的链级Poincaré对偶映射$\check{D}$是链映射，并且命题 7.7 以及恒等式 (7.11) 和 (9.12) 均成立，无需对符号作任何修正。

A.1. **初始约定**。 首先，我们确立一些将反复使用的一般规则。

A.1.1. 短正合列。 给定一个实向量空间的短正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

其中，三个向量空间 A、B、C 中有两个带有指定定向，则可通过如下要求为剩下的向量空间定向：若 $(a_1,\dots,a_k)$ 是 A 的正向有序基，且 $\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_\ell \in B$ 满足 $(\beta(\hat{c}_1),\dots,\beta(\hat{c}_\ell))$ 是 C 的正向有序基，则 $(\alpha(a_1),\dots,\alpha(a_k),\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_\ell)$ 是 B 的正向有序基。（当 $\dim A = 0$，因而 β 是向量空间同构，且 A 的定向按定义是符号的选择时，应将此判据理解为：若 $\beta: B \to C$ 保定向，则 A 的定向符号为正，否则为负。）例如，若 B 和 C 已有定向，则由此规定确定的 A 上的定向称为“由短正合列 (A.1) 诱导的定向”。稍作改述，对于任意实向量空间 V，令 $\det V = \Lambda^{\dim V} V$，于是 $\det V$ 是一维的，为 V 选择定向等价于为 $\det V$ 选择定向（即，选择 $\det V \setminus \{0\}$ 的一个连通分支）。短正合列 (A.1) 给出一个同构 γ：$(\det A)\otimes(\det C)\to\det B$，它将 $(a_1\wedge\cdots\wedge a_k)\otimes(c_1\wedge\cdots\wedge c_\ell)$ 映到 $\alpha(a_1)\wedge\cdots\wedge\alpha(a_k)\wedge\hat{c}_1\wedge\cdots\wedge\hat{c}_\ell$，其中 $\hat{c}_i$ 可任意选取，但须满足 $\beta(\hat{c}_i) = c_i$；我们的定向规定等价于要求 γ保定向。

A.1.2. 逆像。 设 A 和 Z 为光滑流形，且 $f: A \to Z$ 为一个光滑映射，它与某个子流形 $B \subset Z$横截。进一步假设 A 带有一个定向，而 B 带有一个余定向（即，其法丛 NB的一个定向）。于是，原像 $f^{-1}(B)$ 在每一点 $x \in f^{-1}(B)$ 处由以下短正合列赋予定向

$$0 \longrightarrow T_x f^{-1}(B) \longrightarrow T_x A \xrightarrow{\pi_{NB}\circ f_*} N_{f(x)}B \longrightarrow 0\,,$$

其中，$f_*: TxA \to T_{f(x)}Z$是导数，而 π_{NB}是从$TZ|_B$到法丛NB的投影。

A.1.3. 带边界流形。如果 A 是一个光滑定向流形，且带有边界，则我们按照通常的“外法向量优先”约定为 ∂A 定向：对于每个 $x \in \partial A$，若 $n_x \in T_xA$ 指向远离 int(A)的方向，则 $T_x\partial A$ 的一个基 $\{v_1, \dots, v_{a-1}\}$ 是正定向的，当且仅当 $\{n_x, v_1, \dots, v_{a-1}\}$ 作为 T_xA 的一个基是正定向的。当然，如果 $\dim A = 1$，这应解释为：若 T_xA 的正生成元指向远离 int(A) 的方向，则 x 是 ∂A 中的正定向点；否则为负定向点。

对于余定向，我们同样采用外法向优先约定。具体来说，设B是Z的带边界余定向子流形，且$y \in \partial B$，并且$n_y \in T_yB$指向远离 int(B)的方向。于是，我们按照以下条件为 ∂B赋予余定向：若$\{w_1, \dots, w_c\}$是N_yB的正向基，则$\{n_y, w_1, \dots, w_c\}$是$N_y\partial B$的正向基。

为说明这些约定的一个直接推论，设A是带边界的光滑流形，且有光滑映射$f : A \to Z$，并设B是Z的带边界光滑余定向子流形。进一步假设$f^{-1}(\partial B) \cap \partial A = \varnothing$，f和$f|_{\partial A}$都与B横截，且f与 ∂B横截。那么，$f^{-1}(B)$、$(f|_{\partial A})^{-1}(B)$以及$f^{-1}(\partial B)$ 均依照(A.1.2)获得定向；对于后两者，使用 ∂A上的定向和我们刚才描述的 ∂B上的余定向。与此同时，$f^{-1}(A)$ 是带边界的光滑流形，其边界 $\partial f^{-1}(A)$ 由 $(f|_{\partial A})^{-1}(B)$ 与$f^{-1}(\partial B)$的不交并构成，因此，作为 $\partial f^{-1}(A)$的一部分，后两个流形也获得定向。容易验证，作为定向流形，

$$\partial f^{-1}(A) = (f|_{\partial A})^{-1}(B) \sqcup (-1)^{\dim f^{-1}(A)-1} f^{-1}(\partial B) \tag{A.2}$$

其中，右侧的流形通过 (A.1.2) 定向。特别地，当 $\dim f^{-1}(A) = 1$ 时，$(f|_{\partial A})^{-1}(B)$ 和 $f^{-1}(\partial B)$ 上的边界定向与其原像定向相同。

A.2. Morse理论中的定向。对于莫尔斯函数 $f : X \to R$ 的临界点 p、q，回顾一下如何为流形 $W^\nu(p, q)$ 和 $M^\nu(p, q)$ 定向（使用第 9.1 节中的相同记号，并继续假设 v 是 f 的类梯度向量场，且 v 的流为莫尔斯-斯梅尔的，因此这些流形具有预期的维数）；可以验证，我们下面的约定等价于 [Qin10, Section 6] 和 [Paj06, Chapter 6] 中的约定。首先，为每个下降流形 $D^\nu(p)$ 选取一个定向 $\mathfrak{o}_{v,p}$。这些定向确定上升圆盘 $A^\nu(p)$ 的法丛 $NA^\nu(p)$ 的定向，因为纤维 $N_pA^\nu(p)$ 自然地与 $T_pD^\nu(p)$ 等同，所以 $\mathfrak{o}_{v,p}$ 为纤维 $N_pA^\nu(p)$ 定向，而该定向唯一地延拓为向量丛 $NA^\nu(p)$ 的定向。对于每个 $x \in W^\nu(p, q)$，由于 $D^\nu(p)$ 与 $A^\nu(q)$ 横截，我们通过对包含映射 $\iota : D^\nu(p) \to X$ 应用 (A.1.2)，得到交集 $W^\nu(p, q) = D^\nu(p) \cap A^\nu(q)$ 的定向，其中 $W^\nu(p, q) = \iota^{-1}(A^\nu(q))$。因此，每个 $T_xW^\nu(p, q)$ 上的定向是由短正合列（按 (A.1.1) 的含义）诱导的定向

$$0 \to T_x\mathbf{W}^\nu(p, q) \to T_x\mathbf{D}^\nu(p) \to N_x\mathbf{A}^\nu(q) \to 0.$$

给定定向的 $W^\nu(p, q)$，对于 $p \neq q$，无参数化轨迹空间 $M^\nu(p, q) = W^\nu(p,q)/\mathbb{R}$ 按如下方式定向。若 $x \in W^\nu(p, q)$ 在商投影下的像为 $[x] \in M^\nu(p, q)$，则商投影的导数给出一个满射 $T_xW^\nu(p, q) \to$

$T_{[x]}\mathbb{M}^{v}(p,q)$，其核由 $-v(x)$ 张成。若 $(-v(x), e_2, \ldots, e_d)$ 是 $T_x W^{v}(p,q)$ 的正向定向基，则我们将上述满射下 $(e_2, \ldots, e_d)$ 的像定义为 $T_{[x]}\mathbb{M}^{v}(p,q)$ 的正向定向基。（换言之，$T_{[x]}\mathbb{M}^{v}(p,q)$ 上的定向由短正合列诱导

$$0 \to \mathbb{R} \to T_x \mathbf{W}^{v}(p,q) \to T_{[x]}\mathbf{M}^{v}(p,q)$$

其中，第一个映射将 t 映到 $(-tv(x))$，第二个则是商投影的导数。）

因此，在 $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_f(q)+1$ 这一特殊情形下，$\mathbf{M}^{v}(p,q)$ 是一个定向的 0维流形；对于每个 $x \in \mathbf{W}^{v}(p,q)$，与等价类 $[x] \in \mathbf{M}^{v}(p,q)$ 相关联的符号为 $+1$，如果流方向 $-v$ 相对于 $T_x\mathbf{W}^{v}(p,q)$ 的定向为正；否则为 -1。

一般而言，下降流形 $D^{v}(p)$ 可按例如 [Qin10], 中所述进行紧化，其余维一面与各种 $M^{v}(p,q) \times D^{v}(q)$ 相对应，其中 $\mathrm{ind}_f(q) < \mathrm{ind}_f(p)$；$D^{v}(p)$ 到 X 的包含映射可延拓至每个这样的面，成为 $D^{v}(q)$ 的包含映射（参见 [Qin10, 定理 3.4]）。类似地，上升流形 $A^{v}(q)$ 可紧化为 $A^{v}(q)$，~~其余~~维一分层为 $A^{v}(p) \times M^{v}(p,q)$。

对于 $D^{v}(p)$ 和 $A^{v}(q)$，我们只考虑那些对应于 $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_f(q)+1$ 情形的分层，因为只有这些分层在包含映射的延拓下的像仍然具有余维数一。用 $\hat{}D^{v}(p)$ 和 $\hat{}A^{v}(p)$ 表示 $D^{v}(p)$（分别是 $A^{v}(p)$）与这些余维一分层的并；于是 $\hat{}D^{v}(p)$ 和 $\hat{}A^{v}(p)$ 是带边界光滑流形。这些余维一分层又可进一步分解为各种 $\{[x]\} \times D^{v}(q)$ 或 $A^{v}(p) \times \{[x]\}$ 的不交并，其中 $[x]$ 遍历定向零维流形 $M^{v}(p,q)$。给定 v 的所有下降流形的定向后，每个 $\{[x]\} \times D^{v}(q)$ 原则上可获得两种定向：一种直接来自 $D^{v}(q)$ 的定向，另一种则来自它作为 $D^{v}(p)$ 的部分紧化的边界分支这一事实。类似地，每个 $A^{v}(p) \times \{[x]\}$ 都有两种余定向方式，其中一种采用 (A.1.3) 中的边界余定向规定。[20] 为 A.3 节之用，我们记录这些定向和余定向之间的关系：

命题 A.1 ([Qin10])。给定 $[x] \in \mathbf{M}^{v}(p、q)$，且 $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_f(q)+1$，令 $\epsilon([x]) \in \{-1, 1\}$ 表示 $[x]$ 的定向符号。那么：

- $\{[x]\} \times \mathbf{D}^{v}(q)$ 作为 $\hat{}\mathbf{D}^{v}(p)$ 的边界分支时，其定向为 $\epsilon([x])$ 倍的 $\mathbf{D}^{v}(q)$ 的定向。
- $\mathbf{A}^{v}(p) \times \{[x]\}$ 作为 $\hat{}\mathbf{A}^{v}(q)$ 的边界分支时，其余定向为 $-\epsilon([x])$ 倍的 $\mathbf{A}^{v}(p)$ 的余定向。

证明。关于 $\mathbf{D}^{v}(p)$ 的陈述在 [Qin10, 定理 3.6(2)] 中有明确表述。[Qin10] 中没有与我们关于 $\mathbf{A}^{v}(q)$ 的陈述直接对应的断言，但我们可以从 [Qin10, 定理 3.6(3)] 推出所需结果；该定理讨论的是空间 $\mathbf{W}^{v}(y、z)$ 的紧化边界。考虑一个 $a \in$ 临界点集(f)，满足

[20] 更准确地说，包含映射 $i\colon \mathbf{A}^{v}(q) \to X$ 可光滑延拓为映射 $\hat{}i\colon \hat{}\mathbf{A}^{v}(q) \to M$，它是一个浸入；不过，如果某个 $\mathbf{M}^{v}(p,q)$ 包含多个元素，它就不再是单射。在这种情况下，$\hat{}\mathbf{A}^{v}(q)$ 的余定向应理解为向量丛 $\hat{}i^{*}TX/T\hat{}\mathbf{A}^{v}(q)$ 的定向；对分层 $\{[x]\} \times \mathbf{A}^{v}(p)$ 的余定向也作类似理解。

$\mathrm{ind}_f(a) = n = \dim X$，因此 $D^\nu(a)$ 是 X 的开子集；根据我们的 Morse-斯梅尔假设，对这样的 a，所有 $W^\nu(a,p)$ 的并集在 $A^\nu(p)$ 中开且稠密，$W^\nu(a,q)$ 的并集也同样如此。因此，只需证明，对于任意这样的 a，若 $y \in W^\nu(a,p) \subset A^\nu(p)$，则 $A^\nu(p) \times \{[x]\} \subset \partial\hat{}A^\nu(q)$ 在 $(y,[x])$ 处的边界余定向是 $-\epsilon([x])$ 乘以 $A^\nu(p)$ 的余定向。

开集 $W^\nu(a,p) \subset A^\nu(p)$ 和 $W^\nu(a,q) \subset A^\nu(q)$ 均使用 $D^\nu(a)$ 原先选定的定向进行定向，使得：若 $\{w_1, \dots, w_k\}$ 是 $N_y A^\nu(p)$ 的一个正向定向基在 $T_y D^\nu(a) = T_y X$ 中的提升，且 $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ 是 $W^\nu(a,p)$ 的一个正向定向基，则 $\{v_1, \dots, v_{n-k}, w_1, \dots, w_k\}$ 是 $T_y D^\nu(a)$ 的一个正向定向基；对 $W^\nu(a,q)$ 也同理。现在，[Qin10, 定理 3.6(3)] 表明，$W^\nu(a,p) \times \{x\} \subset \partial W^\nu(a,q)$ 的边界定向是 $W^f(a,p)$ 定向的 $(-1)^{n-k+1}\epsilon([x])$ 倍，后者正是前一句所描述的定向。因此，若 $y \in W^\nu(p)$，且 $n_y \in T_{(y,[x])} W^\nu(a,q)$ 沿着从开集 $\overline{W^\nu(a,p)} \times \{[x]\}$ 指向 $A^\nu(p) \times \{[x]\}$ 的外法向，且 $\{w'_1, \dots, w'_{k-1}\}$ 是 $N_{(y,[x])}\hat{}A^f(q)$ 的一个正向定向基在 $T_y D^\nu(a)$ 中的提升，则相对于 $T_y D^\nu(a)$ 上的定向，$\{n_y, v_1, \dots, v_{n-k}, w'_1, \dots, w'_{k-1}\}$ 的符号为 $(-1)^{n-k+1}\epsilon([x])$。（这里我们将 X 的切向量平凡地视为 $X \times \{[x]\}$ 的切向量。）因此，相对于 $T_y D^\nu(a)$ 上的定向，$\{v_1, \dots, v_{n-k}, n_y, w'_1, \dots, w'_{k-1}\}$ 的符号为 $-\epsilon([x])$。于是，$A^\nu(p)$ 的原始余定向等于由外法向优先约定诱导的 $A^\nu(p) \times \{[x]\}$ 余定向的 $(-\epsilon([x]))$ 倍。□

作为延续映射 $\Phi_{f_-,f_+}: \mathrm{CM}_*(f_-, v_-; Z) \to \mathrm{CM}_*(f_+, v_+; Z)$的基础空间 $N^{\mathbb{V}}(p_-$，其定向方式与 $W^\nu(p,q)$类似。与第 9.1 节一样，我们假设 $\mathbb{V} = \{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$是一个光滑向量场族，使得对于 $v_s = v_\pm$，当 $v \pm s \geq 1$ 时成立，其中 v_+ 和 v_- 分别是莫尔斯函数 f_+ 和 f_-的类梯度向量场。我们还选取下降流形 $D^{\nu_-}(p_-)$、$D^{\nu_+}(p_+)$ 的定向，其中 $p_- \in \mathrm{Crit}(f_-)$ 且 $p_+ \in \mathrm{Crit}(f_+)$。于是，令 $\Psi^{\mathbb{V}}$ 表示 X 上的微分同胚，它将时变向量场 $\mathbb{V}$ 的一般积分曲线在时刻 -1 的值映射到该曲线在时刻 1 的值，则延续轨迹空间 $N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$可识别为交集 $D^{\nu_-}(p_-) \cap (\Psi^{\mathbb{V}})^{-1}(A^{\nu_+}(p_+))$；通过对 $\mathbb{V}$ 作一般位置选择，我们假设该交集是横截的。如前所述，$D^{\nu_+}(p_+)$的定向等价于 $A^{\nu_+}(p_+)$的余定向。因此，我们将 $N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$视为映射 $\Psi^{\mathbb{V}}|_{D^{\nu_-}(p_-)}: D^{\nu_-}(p_-) \to X$ 下余定向子流形 $A^{\nu_+}(p_+)$的原像，并由此为其赋予定向。于是，$N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 上的定向由以下短正合列诱导

$$0 \to T_x \mathbf{N}^{\mathbb{V}}(p_-, p_+) \to T_x \mathbf{D}^{\nu_-}(p_-) \to N_{\Psi^{\mathbb{V}}(x)} \mathbf{A}^{\nu_+}(p_+) \to 0$$

其中第二个非平凡映射是 $\Psi^{\mathbb{V}}$ 的导数与商投影的复合。

我们之前的轨迹空间 $W^\nu(p,q)$ 可以看作连续轨迹空间 $N^{\mathbb{V}}(p,q)$ 的一个特殊情形，在该情形中，莫尔斯函数 f_-, f_+ 都等于 f，并且 $\mathbb{V} = \{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 中的每个 v_s 都等于同一个向量场 v。在此情形下，该微分同胚$\Psi^{\mathbb{V}}$ 是向量场 $-v$ 的时间 2 映射；由于 $-v$ 的流保持子流形 $A^\nu(q)$ （因而也保持它们的余定向），所以上一段中对 $N^{\mathbb{V}}(p,q)$ 的定向规定显然与我们之前对 $W^\nu(p,q)$所作的定向一致。

现在，我们通过将莫尔斯函数和向量场替换为它们的负值，来考察“将X 上下颠倒”的效果。对于如上所述的时变向量场 $\mathbb{V} = \{v_s\}_{s\in\mathbb{R}}$

令 $\bar{V} = \{-v_{-s}\}_{s\in\mathbb{R}}$；那么对于 $p_- \in$ 临界点集(f_-) 和 $p_+ \in$ 临界点集(f_+)，我们得到空间 $N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$，可用来定义延续映射 $\Phi_{-f_+,-f_-}$；将这些空间视为由满足适当版本的（9.1）的解 $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ 构成，$N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$ 通过将 $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ 映射为其反向轨迹 $\bar{\gamma}(s) = \gamma(-s)$的映射，与 $N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 形成双射。我们上面的规定为 $N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$ 赋予了定向，该定向取决于对 $D^{-v_\pm}(p_\pm)$的定向选择$o_{-v_-,p_-}, o_{-v_+,p_+}$（即对上升流形 $A^{v_\pm}(p_\pm)$的定向选择）。让我们比较 $\bar{N}^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 和 $N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$的定向，其中这些空间通过双射 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$被隐式地识别。注意，如果我们使用赋值 $\gamma \mapsto \gamma(-1)$ 将 $\bar{N}^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$与 $D^{v_-}(p_-)\cap(\Psi^{\mathbb{V}})^{-1}(A^{v_+}(p_+))$识别，并且同样地处理 $N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$，那么从 $N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 到 $N^{\mathbb{V}}(p_+, p_-)$ 的双射$\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ 对应于微分同胚

$$\Psi^{\mathbb{V}}\colon \mathbf{D}^{v_-}(p_-) \cap (\Psi^{\mathbb{V}})^{-1}(\mathbf{A}^{v_+}(p_+)) \to \mathbf{A}^{v_+}(p_+) \cap \Psi^{\mathbb{V}}(\mathbb{D}^{v_-}(p_-)).$$

命题 A.2. 假设 n 维光滑流形 X 是定向的，并且对每个 $p \in$临界点集$(f_\pm)$，都以如下方式选取每个 $D^{v_\pm}(p)$上的定向 $o_{v_\pm,p}$ 以及 $A^{v_\pm}(p)$上的定向 $o_{-v_\pm,p}$：对于每个临界点 p（属于 f_+ 或 f_-），作为定向向量空间，$T_pA^{v_\pm}(p) \oplus T_pD^{v_\pm}(p) = T_pX$。于是，对于 $p_- \in$ 临界点集(f_-) 和 $p_+ \in$ 临界点集(f_+)，$N^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 与 $N^{\bar{\mathbb{V}}}(p_+, p_-)$ 上由此得到的定向之间相差符号 $(-1)^{(n-\mathrm{ind}_{f_-}(p_-))(\mathrm{ind}_{f_-}(p_-)-\mathrm{ind}_{f_+}(p^+))}$。

证明. 如命题前文所述，对于 p（是 f_- 或 f_+ 的临界点），$o_{v_\pm,p}$ 的选取会同时诱导切丛 $TD^{v_\pm}(p)$ 和法丛 $NA^{v_\pm}(p)$ 的定向。同理，$o_{-v_\pm,p}$ 也会同时诱导切丛 $TA^{v_\pm}(p)$ 和法丛 $ND^{v_\pm}(p)$ 的定向。从现在起，我们借助黎曼度量，将子流形 S 的法丛视为 $TX|_S$ 的子丛（而非商向量丛）。我们对 $o_{v_\pm,p}$ 与 $o_{-v_\pm,p}$ 之间关系的规定意味着，作为定向向量空间，$N_pD^{v_\pm}(p) \oplus T_pD^{v_\pm}(p) = T_pX$；因此（由于 $D^{v_\pm}(p)$ 连通），对于所有 $x \in D^{v_\pm}(p)$ 以及 $f_\pm$ 的所有临界点 p，作为定向向量空间，$N_xD^{v_\pm}(p) \oplus T_xD^{v_\pm}(p) = T_xX$。由于 $N_pA^{v_\pm}(p) = T_pD^{v_\pm}(p)$，且 $T_pA^{v_\pm}(p) = N_pD^{v_\pm}(p)$，又由于 $A^{v_\pm}(p)$ 连通，因此同样可得，对于所有 $x \in A^{v_\pm}(p)$ 以及 $f_\pm$ 的所有临界点 p，作为定向向量空间，$T_xA^{v_\pm}(p) \oplus N_xA^{v_\pm}(p) = T_xX$。

简记为 $\Psi = \Psi^{\mathbb{V}}$，并注意到此时 $\Psi_-\mathbf{N}^{\mathbb{V}}(p_-, p_+) \cong (\Psi|_{\mathbf{D}^{v_-}(p_-)})^{-1}(\mathbf{A}^{v_+}(p_+))$，以及$\mathbf{N}^{\mathbb{V}}(p_+, p_-) \cong (\Psi^{-1}|_{\mathbf{A}^{v_+}(p_+)})^{-1}(\mathbf{D}^{v_-}(p_-))$。我们的任务是考察这些空间上的原像定向在它们之间的微分同胚 Ψ 下有何关系。我们用 Ψ_* 表示 Ψ 的导数。

给定 $x \in \mathbf{N}^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$，考虑 T_xX 的一个如下形式的有序基：

$$\mathscr{B}_x = (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_m)$$

其中 $(u_1, \ldots, u_k)$ 是 $T_xN^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 的正向定向基，$(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ 是 $T_xD^{v_-}(p_-)$ 的正向定向基，而 $(\Psi_*u_1, \ldots, \Psi_*u_k, \Psi_*v_1, \ldots, \Psi_*v_\ell)$ 是 $T_{\Psi(x)}A^{v_+}(p_+)$ 的正向定向基。因此 $k + m = |p_-|$，$k + l = n - |p_+|$，且 $k + \ell + m = n$，所以$\ell = n - |p_-|$ 且 $k = |p_-| - |p_+|$，其中我们将 $\mathrm{ind}_{f_\pm}(p_\pm)$ 简记为 $|p_\pm|$。$T_xN^{\mathbb{V}}(p_-, p_+)$ 上定向的定义意味着，$(w_1, \ldots, w_m)$经 Ψ_* 映射为 $N_{\Psi(x)}A^{v_+}(p_+)$ 的正向定向基。因此，由于 $T_{\Psi(x)}A^{v_+}(p_+) \oplus N_{\Psi(x)}A^{v_+}(p_+) = T_{\Psi(x)}X$ 是定向向量空间，可知 Ψ_*B_x 是 $T_{\Psi(x)}X$ 的正向定向基。

令 ϵ 表示 $(\Psi_* u_1, \dots, \Psi_* u_k)$ 相对于 $N^V(p_+, p_-)$ 上定向的符号；该命题的结论是 $\epsilon = (-1)^{k\ell}$。由于 $(\Psi_* u_1, \dots, \Psi_* u_k, \Psi_* v_1, \dots, \Psi_* v_\ell)$ 是 $T^{\Psi(x)}A^{\nu_+}(p_+)$ 的正向定向基，因此 ϵ 也是 $(v_1, \dots, v_\ell)$ 相对于 $N_x D^{\nu_-}(p_-)$ 上定向的符号。因此，由于 $N_x D^{\nu_-}(p_-) \oplus T_x D^{\nu_-}(p_-) = T_x X$ 是定向向量空间，且 $(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m)$ 是 $T_x D^{\nu_-}(p_-)$ 的正向定向基，有序基 $(v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m)$ 相对于 $T_x X$ 上的定向，其符号为 ϵ。将其与我们最初的有序基 B_x 比较；我们先前已证明该基是正向定向的，因此可知 $\epsilon = (-1)^{k\ell}$。□

如前所述，在 $f_- = f_+ = f$ 和 $v_s = v$ 均与 s 无关这一特殊情形下，对于 $p, q \in \mathrm{Crit}(f)$，空间 $N^{\mathbb{V}}(p, q)$ 和 $N^{\mathbb{V}}(q, p)$ 作为定向流形，分别与空间 $W^{\nu}(p, q)$、$W^{-\nu}(q, p)$ 重合。对这些空间取 R-平移商，得到 $M^{\nu}(p, q)$、$M^{-\nu}(q, p)$，则与 [Paj06, 引理 VI.1.17] 一致：

推论 A.3. 假设 X 是定向的，且定向 $\mathfrak{o}_{\nu,p}, \mathfrak{o}_{-\nu,p}$ 如命题 A.2 中所述相关。设 p, q 是 f 的临界点，满足 $\mathrm{ind}_f(p) = n - k$、$\mathrm{ind}_f(q) = n - k - 1$（因此 $\mathrm{ind}_{-f}(p) = k$、$\mathrm{ind}_{-f}(q) = k + 1$）。那么，$M^{\nu}(p, q)$ 和 $M^{-\nu}(q, p)$ 中点的带符号计数 $n_{f,\nu}(p, q)$、$n_{-f,-\nu}(q, p)$ 之间满足关系

$$n_{-f,-\nu}(q, p) = (-1)^{k+1} n_{f,\nu}(p, q).$$

证明。命题 A.2 表明，集合相等的定向 1维流形 $W^{\nu}(p, q)$and $W^{-\nu}(q, p)$ 的定向相差符号 $(-1)^k$。根据我们对 0维流形 $M^{\nu}(p, q)$定向的定义，对于任意 $x \in W^{\nu}(p, q)$，x 在 $M^{\nu}(p, q)$上的投影为正向定向，当且仅当 $-v(x)$ 与 $W^{\nu}(p, q)$的定向一致。另一方面，x 在 $M^{-\nu}(q, p)$ 上的投影为正向定向，当且仅当 $-(-v)(x) = +v(x)$ 与 $W^{-\nu}(p, q)$的定向一致。因此，x 对 $n_{f,\nu}(p, q)$和 $n_{-f,-\nu}(q, p)$的贡献（分别取其等价类）相差 $-(-1)^k = (-1)^{k+1}$。□

备注 A.4. 推论 A.3 的结论取决于我们在命题 A.2 中关于 $\mathfrak{o}_{\nu,p}$ 与 $\mathfrak{o}_{-\nu,p}$ 关系所采用的约定；如果我们改为假设 $T_p\mathbf{D}^{\nu}(p) \oplus T_p\mathbf{A}^{\nu}(p) = T_p X$为定向向量空间，那么联系 $n_{-f,-\nu}(q, p)$与 $n_{f,\nu}(p, q)$的符号就会是 $(-1)^{n-k}$。

备注 A.5. 对于双线性映射 $L^{M,\kappa}_{f,k} : CM_{n-k}(f; \kappa) \times CM_k(-f; \kappa) \to \kappa$，其定义如命题 7.7 的证明中所述，即通过 $(\sum_i a_i p_i, \sum_j b_j p_j) \mapsto \sum_i a_i b_i$ 定义，推论 A.3 表明，对于 $a \in CM_{n-k}(f; \kappa)$ 和 $y \in CM_{k+1}(-f; \kappa)$，有：

$$L^{M,\kappa}_{f,k}(a, \partial^{-f} b) = (-1)^{k+1} L^{M,\kappa}_{f,k+1}(\partial^f a, b).$$

A.3. **哈密顿 Floer 理论与 PSS 映射的定向**。现在我们转而讨论如何为哈密顿 Floer 同调所涉及的模空间定向。实现这一点的一般方法可追溯至 [FH93], , 其中证明了 Floer 轨迹空间可以定向，并且这种定向与该理论的基础——粘合映射——相协调。相干定向并非唯一；对于给定的哈密顿量，不同相干定向选择所对应的链复形彼此同构，但诸如命题 7.7 这样的论述，实际上要求用于哈密顿量 H 的 Floer 复形与其

时间反演 $\hat{H}$的相干定向之间存在某种关系；此外，还要求用于构造两个哈密顿量 H 和 $\hat{H}$各自的 PSS 同构与量子同调时所采用的定向之间存在某种关系。在哈密顿 Floer 理论中关于 PSS 映射的许多文献里，对所用定向的描述都不够具体，因而无法确定这类关系；我们的目标正是弥补这一不足。 [KM09] 和特别是[Zap15]在拉格朗日 Floer 理论中 PSS 映射这一（更复杂的）版本的背景下，对一些相关问题作了详细讨论；后者也简要涉及哈密顿版本，但并未以便于提取我们在命题 7.7 的证明中所需符号的方式进行阐述。

首先，我们回顾一些相关背景；对于许多在（例如， [FH93],[Sc95], 以及 [McSa 12], ）中讨论过的标准分析细节，我们将略去不谈；此外，我们还会经常不加解释地假设相关数据已被置于一般位置，从而使各种模空间均被横截地切出。

¯A.3.1. ∂-算子与行列式线。设 $(M,\ \omega)$是一个闭的半正 $2m$维辛流形，并且 $H\colon S^1\times M\to\mathrm{R}$ 是一个一般位置的非退化哈密顿量。为在一般特征下定义 Floer 微分 ∂_H（其作用于哈密顿弗洛尔复形 $CF_*(H)$上）所需的定向，源自对 Fredholm 算子 $D_B\colon W^{1,p}(Z,\mathrm{C}^m)\to L^p(Z,\mathrm{C}^m)$的考察，其形式为

$$(D_B\xi)(s,t)=\frac{\partial\xi}{\partial s}+J_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-B(s,t)\xi(s,t)\right). \tag{A.3}$$

这里 $\mathrm{p}>2$，$\mathrm{Z}=\mathrm{R}\times\mathrm{S}^1$ 的坐标为（s、t），J_0 是 $\mathrm{C}^m=\mathrm{R}^{2m}$上的标准复结构，而 $\mathrm{B}:\mathrm{Z}\to\mathfrak{gl}_{2m}$ 具有如下性质：对某个 $\mathrm{s}_0>0$ 以及所有满足 $\pm\mathrm{s}\geq\mathrm{s}_0$的 s，有 $\mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{t})=\mathrm{B}_\pm(\mathrm{t})$，其中固定的 $\mathrm{B}_+(\mathrm{t})$ 和 $\mathrm{B}_-(\mathrm{t})$ 属于辛线性群的李代数 $\mathfrak{sp}_{2m}$。此外，要求路径 $\mathrm{t}\mapsto\mathrm{B}_\pm(\mathrm{t})$ 具有如下性质：对于由 $\Psi_\pm(0)=\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{2m}}$ 和 $\mathrm{d}_{\Psi_\pm(\mathrm{t})}\,\mathrm{d}\,\mathrm{t}=\mathrm{B}_\pm(\mathrm{t})\Psi_\pm(\mathrm{t})$给出的辛线性映射 $\Psi_\pm(\mathrm{t})$，映射 $\Psi_\pm(1)$ 不具有特征值 1。于是得到康利–岑德指数$\mu_C\mathrm{Z}\,(\Psi_\pm)$，并且算子 D_B是 Fredholm 算子，其指标为 $\mu_C\mathrm{Z}\,(\Psi_+)-\mu_C\mathrm{Z}(\Psi_-)$([Sal97, 定理 2.2])。

Floer 边界算子由有限能量解空间 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma^-,\mathrm{w}^-],[\gamma^+,\mathrm{w}^+])$ 构造，这些解是 Floer 方程 $\partial\mathrm{u}\,\partial\mathrm{s}+\mathrm{J}(\mathrm{u}(\mathrm{s},\mathrm{t}))\left(\frac{\partial}{\partial}\mathrm{u}\,\mathrm{t}-\mathrm{X}\,\mathrm{H}_t(\mathrm{u},\mathrm{s},\mathrm{t})\right)=0$的解 $\mathrm{u}\colon\mathrm{Z}\to\mathrm{M}$，满足 $\mathrm{u}(\mathrm{s},\cdot)\to\gamma^\pm$ 在 $\mathrm{s}\to\pm\infty$ 时趋于渐近状态，并且将 w^- 与 u 粘合后形成的 γ^+ 的封盖圆盘，代表 $\mathrm{L}_0\mathrm{M}$ 中与 w^+相同的元素。（我们使用与第 7 节相同的记号。）用 $\mathrm{u}^*\mathrm{T}\,\mathrm{M}$ 的一个合适平凡化表示时，Floer 方程左侧在 u 处的线性化具有形式 (A.3)；因此，$\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma^-,\mathrm{w}^-],[\gamma^+,\mathrm{w}^+])$（假设它被横截地切出）的定向规定，是由对诸如 D_B 这样的 Fredholm 算子的行列式线进行连续定向的规定所诱导的。这里回顾一下，一般而言，两个巴拿赫空间之间的 Fredholm 算子 $\mathrm{D}:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ 的行列式线是一个一维向量空间 $\mathrm{Det}(\mathrm{D})=\det(\ker(\mathrm{D}))\otimes\det(\mathrm{coker}(\mathrm{D}))^*$（与第 A.1.1 节一样，det 表示最高外幂）。正如 [FH93], 的附录中所述，若 $\alpha\colon\mathrm{Y}\to\mathrm{Fred}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ 是从拓扑空间 Y 到从 E 到 F 的 Fredholm 算子空间的连续映射，则对每个 $\mathrm{y}\in\mathrm{Y}$，各个 $\mathrm{Det}(\alpha(\mathrm{y}))$ 组合起来构成 Y 上的实线丛 $\alpha^*\mathrm{Det}$。因此

若 Y 是单连通的，则为某个 $y_0 \in Y$ 选择 $\mathrm{Det}(\alpha(y_0))$ 的一个定向，会典范地诱导出每个 $\mathrm{Det}(\alpha(y))$的定向，因为 $\alpha^*\mathrm{Det}$ 存在一个唯一到同伦的处处非零截面，并且该截面与所选的 $\mathrm{Det}(\alpha(y_0))$定向一致。在这种情况下，我们称 $\mathrm{Det}(\alpha(y))$ 上的定向是从 $\mathrm{Det}(\alpha(y_0))$上的定向经延拓得到的。例如，对某个 B 的单个选择，$\mathrm{Det}(D_B)$ 的一个定向经延拓后，会诱导出所有其他具有相同渐近算子 B_+ 和 B_- 的 B 的定向，因为这类 D_B 构成一个由 Fredholm 算子组成的凸集。

更一般地，如 [Sc95, Chapter 3], 所述，可以用一个复一维流形 Σ 替代圆柱 Z，该流形具有（可能为空的）一组柱状端 C_i，每个柱状端都以 ei- ther $(-\infty, 0) \times S^1$ or $(0, \infty) \times S^1$, 为模型，且满足 $\Sigma \setminus \cup_i C_i$ 紧致；同时考虑其上的一个复秩为 m 的 Hermite 向量丛 E Σ，以及一个算子 $D : W^{1,p}(\Sigma, E) \to L^p(\Sigma, T^{0,1}\Sigma \otimes_{\mathbb{C}} E)$。在适当的局部平凡化下，该算子是标准 ∂ 算子的零阶扰动，并且在柱状端上与 (A.3) 中的算子 D_{B_i}一致。按照 [Sc95, Definition 3.1.6]（其中给出了更精确的表述），这类算子称为 ∂- 上的可容许 ∂-算子。就本文目的而言，只需考虑 Σ 具有 0 个或 1 个正柱状端，且具有 0 个或 1 个负柱状端的情形。因此，经过双全纯映射后，Σ 只能是圆柱、标准复平面 C（具有一个正柱状端）、赋予标准复结构负结构的平面 C^-（因而具有一个负柱状端），或 CP^1。我们按标准方式将 CP^1 与 $C \cup \{\infty\}$等同，并将 C^- 与$(C \setminus \{0\}) \cup \{\infty\})$等同（取其标准复结构）。若 $\Sigma = Z$，则 E 有一个全局平凡化，在此平凡化下，可容许的 ∂-算子 D 由上述算子 D_B 给出。若 $\Sigma = C$ 或 $\Sigma = C^- \subset C \cup \{\infty\}$，则其柱状端由 $(s, t) \mapsto e^{2\pi(s+it)}$ 参数化；在一个可延拓至 Σ 上的平凡化中，D 在柱状端上的表达式所对应的矩阵 $B(s, t)$ 具有极限值 $B_+(t)$（当 $\Sigma = C$ 时）或 $B_-(t)$（当 $\Sigma = C^-$时），并由此如前所述生成辛矩阵路径 $\Psi_+(t)$ 或 $\Psi_-(t)$。[Sc95, Proposition 3.3.8]给出这两种情形下 D 的 Fredholm 指数为 $m \pm \mu_{CZ}(\Psi^{\pm})$。最后，当 $\Sigma = CP^1$, 时，由黎曼-罗赫定理，D 的 Fredholm 指数为 $2(m + \langle c_1(E), [CP^1] \rangle)$。

若D 是定义在闭复一维流形（例如 CP^1, ）上的一个可容许 $\bar{\partial}$-算子，那么 $\mathrm{Det}(D)$ 就有一个典范定向：当D 是复线性时，该定向由 $\ker(D)$ 和 $\mathrm{coker}(D)$上的复定向诱导；更一般地，D 的复线性部分$D^{\mathbb{C}}$ 也会是一个可容许的 $\bar{\partial}$-算子，$D^{\mathbb{C}}$ 与 D 的凸组合也同样如此。因此，沿连接D 与$D^{\mathbb{C}}$的线段作延拓，可由 $\mathrm{Det}(D^{\mathbb{C}})$ 的复定向诱导出 $\mathrm{Det}(D)$的一个定向。

当∂-算子的容许类通常没有典范定向；我们的做法是任意选取某些可容许 ∂-算子D（具体而言，是定义在 C^-上的算子）的 $\mathrm{Det}(D)$ 的定向，然后要求其他D 的定向与 [FH93、Section 3], [Sc95, 第 3 节.2] 中所述的粘合操作相容，从而得到这些定向。从底层几何的角度看，这与 [Abo13, Section 1.4], 中的方法非常相似，不过 Abouzaid 将其转化为 Floer理论中的一种方式，使其明显不依赖于选择。

粘合过程以可容许的 $\bar{\partial}$-算子 $D_j : W^{1,p}(\Sigma^j, E_j) \to L^p(\Sigma, T^{0,1}_{\Sigma \otimes_{\mathbb{C}} E_j})$ 作为输入，其中 $j = 1,2$, 且 Σ^1 具有正柱状端 C^1，而 Σ^2 具有负端

C^2,，并在 C j 上对 E j 进行平凡化，使得相对于这些平凡化，D j 与 D_{Bj}一致，如 (A.3) 中所示；其中，对于某个 S_0 以及所有 $s > S_0$，$B^1(s,\cdot) = B^2(-s,\cdot) = B_0$，固定环 $B_0 : S^1 \to \mathfrak{sp}_{2m}$。对于 $S > S_0$，于是可以从 Σ^1 与 Σ^2 的不交并以及管 $T = (-2S, 2S) \times S^1$ 构造一个复一维流形 $\Sigma^1 \#_S \Sigma^2$：删去 C^1 中 $s \geq 2S$ 的轨迹和 C^2 中 $s \leq -2S$ 的轨迹，并通过映射 $(s,t) \mapsto (s \pm 3S, t)$，将 $(-2S, -S) \times S^1 \subset T$ 粘合到 $(S, 2S) \times S^1 \subset C^1$，将 $(S, 2S) \times S^1 \subset T$ 粘合到 $(-2S, -S) \times S^1 \subset C^2$。向量丛 $E^1 \to \Sigma^1$ 和 $E^2 \to \Sigma^2$ 同样以显然的方式粘合为 $\Sigma^1 \#_S \Sigma^2$ 上的一个向量丛，并且在 T 上是平凡的；关于 B^1 和 B^2 的渐近性假设意味着，我们得到一个粘合的可容许 $\bar{\partial}$-算子 $D^1 \#_S D^2$：它在 $\Sigma^j \setminus C\,j$ 上与 D j 一致，并且在 T 上等于 (A.3) 中 D_B 的版本，其中 $B(s,t) = B_0(t)$。我们所需的关键事实是，将 ^{j} 中如 [Sc95, Corollary 3.2.11] 所述的 D 的稳定化版本的元素进行粘合，会产生一个同构 $\mathrm{Det}(D^1) \otimes \mathrm{Det}(D^2) \cong \mathrm{Det}(D^1 \#_S D^2)$，见 [FH93, p. 25], [Abo13, Lemma 1.4.5]。通过这一同构，$\mathrm{Det}(D^1)$、$\mathrm{Det}(D^2)$ 和 $\mathrm{Det}(D^1 \#_S D^2)$ 中任意两个的定向，可以规范地确定第三个的定向。此外，这一构造关于沿路径的定向延拓是自然的，并且在适当意义下具有结合性（[FH93, Proposition10]）。

现在，给定一般位置的非退化哈密顿量 $H : S^1 \times M \to R$，其中 (M, ω)是半正辛流形，且 $S^1 = R/Z$；再给定莫尔斯函数 $f : M \to R$，其对应的 Morse-Smale 梯度型向量场为 v，我们将说明一种确定与 Floer 边界算子 $\partial_H : C\,F_*(H) \to C\,F_{*-1}(H)$ 以及 PSS 映射 $\tilde{\Phi}^f$，$H^+ PSS : \hat{} \Lambda_\uparrow \otimes_\kappa CM_*(f) \to C\,F_*(H)$和 $\tilde{\Psi}^{H^-}, f\,PSS : C\,F_*(H) \to \hat{\Lambda}_\uparrow \otimes_\kappa CM_*(f)$相关的矩阵元符号的方法。令 P(H)表示可缩的一周期轨道 $\gamma : S^1 \to M$ 的集合。用 D 表示 C 中的闭单位圆盘，并令

$$\mathbb{D}^- = \{|z| \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

对于任意 $\gamma \in P(H)$，γ 的左帽是一个光滑映射 $w : D \to M$，使得对所有 $t \in S^1$, 都有 $w(e^{2\pi i t}) = \gamma(t)$；而 γ 的右帽是一个光滑映射 $y : D^- \to M$，使得对所有 $t \in S^1$都有 $y(e^{2\pi i t}) = \gamma(t)$。定义 $\hat{H} : S^1 \times M \to R$ 为 $\hat{H}(t,x) = -H(1-t,x)$，则时间反演$\bar{\gamma} : S^1 \to M$（由 $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ 给出）属于 $P(\hat{H})$。如果 w 是 $\gamma \in P(H)$的左帽，我们使用以下记号：

- w_R 是 γ 的右帽，定义为 $w_R(z) = w(1/\bar{z})$，其中 $z \in D^- \subset C \cup \{\infty\}$；
- $\bar{w}$ 是由 $\bar{w}(z) = w(\bar{z})$ 为 $z \in D$ 定义的 $\bar{\gamma}$ 左帽。
- w_I 是由 $w_I(z) = w(1/z)$ 为 $z \in D^-$ 定义的 $\bar{\gamma}$ 右帽。（因此 $w_I = \bar{w}_R$。）

令 $\{\phi^t H\}_{t \in [0,1]}$ 表示 H 的哈密顿流，并为每个 $\gamma \in P(H)$ 选取一个左帽 w_γ，以及与之对应的右帽 w_γ^R。$\gamma^* T M$ 的一个辛平凡化若可延拓为 $w_\gamma^* T M$ 的平凡化，则通过将 $\phi^t H_* : T_{\gamma(0)} M \to T_{\gamma(t)} M$ 用该平凡化表示，可得到辛线性群中的一条路径 $t \mapsto \Psi_\gamma(t)$。令 $B_\gamma : S^1 \to \mathfrak{sp}_{2m}$为由 $d\Psi_\gamma\, dt = B_\gamma(t)\Psi_\gamma(t)$给出的环。现在取光滑映射 $B_\gamma^- : C^- \to \mathfrak{gl}_{2m}$，使得当 $s \ll 0$ 时 $B_\gamma^-(e^{2\pi(s+it)}) = B_\gamma(t)$，当 ~~$s$~~ $\gg 0$ 时 $B_\gamma^-(e^{2\pi(s+it)}) = 0$（因此 $B_\gamma^-(\infty) = \bar{0}$）。于是，在 C^-上的平凡向量丛的截面上存在一个可容许的 ∂-算子 $D^- w_\gamma$，它在 ∞ 附近与 2π 倍的标准 $\bar{\partial}$-算子一致；在 $C^- \setminus \{\infty\} = C \setminus \{0\}$ 上，以标准极坐标 (r, θ)表示时，则与 $2\pi\left(r \frac{\partial}{\partial r} + J_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - J_0 B_\gamma^-(r e^{i\theta})$一致。（因此，就

坐标 s,t 而言，它们通过 $(s,t) \mapsto e^{2\pi(s+it)}$ 参数化 $\mathbb{C}^- \setminus \{\infty\}$；$D^-{}_{w_\gamma}$ 在柱状端上的限制形式为 (A.3)，其中 $B = B^-_\gamma$。）

作为我们后续 Floer理论定向的基础，现在我们任意选取每个 $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ 上 $\mathrm{Det}(D^-_{w_\gamma})$ 的定向。这些定向所发挥的作用，类似于构造 Morse复形时为下降流形所选取的定向。由于 $w^*_\gamma TM$ 的所有可能平凡化构成的集合，以及所有满足上述条件、在原点附近的小圆上限制为 $B_\gamma: S^1 \to \mathfrak{sp}_{2m}$ 的映射 $B^-_\gamma : \mathbb{C}^- \to \mathfrak{gl}_{2m}$ 所构成的集合，都是可缩的，因此，我们为 $\mathrm{Det}(D^-_{w_\gamma})$ 选定的定向，会通过延拓自然地诱导出由不同平凡化选择或不同 B^-_γ 选择得到的算子的定向。事实上，$\mathrm{Det}(D^-_{w_\gamma})$ 的定向选择还会自然地诱导出与不同左帽 w'_γ 相关的类似算子 $D^-_{w'_\gamma}$ 的行列式线的定向，因为在同伦意义下，$D^-_{w'_\gamma}$ 可与将 $D^-_{w_\gamma}$ 粘合到一个复线性 $\bar\partial$-算子 $D^{\mathbb{C}}$（定义在 $\mathbb{CP}^1$，上）所得到的算子相识别；因此，$\mathrm{Det}(D^-_{w'_\gamma})$ 的定向可由将 $\mathrm{Det}(D^-_{w_\gamma})$ 的定向与 $\mathrm{Det}(D^{\mathbb{C}})$ 的复定向进行粘合而获得。（参见 [Abo13, 引理 1.4.10]。）从现在起，对于那些通过粘合和/或延拓与 $D^-_{w_\gamma}$ 相关的算子，我们将默认使用其行列式线的这些定向。

A.3.2. Floer 帽与 PSS 映射。选取 M 上一个 ω-相容几乎复结构 J，以及一个光滑映射 $H^-: \mathbb{C}^- \times M \to \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in M$，只要 $|z| > 2$，就有 $H^-(z,x) = 0$；并且对所有 $x \in M$，只要 $r < \frac{1}{2}$，就有 $H^-(re^{2\pi it}, x) = H(t,x)$。对于轨道 $\gamma \in \mathcal{P}(H)$，外向 Floer 帽是满足下列方程的有限能量解 $u: \mathbb{C}^- \times M \to \mathbb{R}$（在开稠密子集 $\mathbb{C}^- \setminus \{\infty\}$ $\mathbb{C}^-$ 上用极坐标 (r,θ) 表示）：

$$2\pi r \frac{\partial u}{\partial r} + J(u)\left(2\pi \frac{\partial u}{\partial \theta} - X_{H^-(re^{i\theta},\cdot)}(u)\right) = 0 \tag{A.4}$$

使得 $u(re^{2\pi it}) \to \gamma(t)$ 当 $t \to 0$ 时。对于任意这样的 u，映射 $re^{i\theta} \mapsto u((r-1)e^{i\theta})$（定义在 D^- 的内部）连续延拓至 D^- 的边界，从而得到一个针对γ的右帽；再将这个映射与 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 复合，便得到一个针对 γ 的左帽，我们将其记作 u^L。采用第 7 节开头的记号，给定一个针对 γ的左帽 $w: D \to M$，令

$$\mathcal{M}^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma, w])$$

记满足$[\gamma, u^L] = [\gamma, w] \in \widetilde{\Omega_0 M}$ 的向外 Floer 帽 u 的空间为 γ（辅助数据为 J、H^-）。对于一般数据 (J, H^-)，在每个 $u \in M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma, w])$ 处，方程 (A.4) 左端的线性化 D_{u,J,H^-} 都是满射，因此 $M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma, w])$ 是一个光滑流形，其维数等于 D_{u,J,H^-}的指标；这个量在第 7 节开头记作 $\mu_H([\gamma, w])$。事实上，适当选取平凡化和函数 B^-_γ 后，$D_{u,J,H}$ 与前一段中的算子 D^-_w 一致；因此，我们最初对 $\mathrm{Det}(D^-_{w_\gamma})$ 的定向，经由延拓和粘合，诱导出 $\mathrm{Det}(D_{u,J,H})$的定向，进而诱导出光滑流形 $M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma, w])$的定向。此外，我们有一个光滑映射 $\mathrm{ev}^{J,H^-}_\infty, _{[\gamma,w]}: M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma, w]) \to M$，定义为 $\mathrm{ev}^{J,H^-}_\infty, _{[\gamma,w]}(u) = u(\infty)$。

对称地，对于轨道 $\gamma \in \mathrm{P}(\mathrm{H})$，我们考虑相对于相容几乎复结构 J 和光滑函数 $\mathrm{H}^{+}\colon \mathrm{C}\times \mathrm{M}\to \mathrm{R}$ 的向内 Floer 帽，其中 $\mathrm{H}^{+}(\mathrm{z},\cdot)\equiv 0$ 对 $|\mathrm{z}|<\frac{1}{2}$ 成立，且对所有 $\mathrm{r}>2$ 和 $\mathrm{x}\in \mathrm{M}$，$\mathrm{H}^{+}(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{x})=\mathrm{H}(\mathrm{t},\mathrm{x})$。这些是有限能量解 $\mathrm{u}\colon \mathrm{C}\to \mathrm{M}$，它们满足一个方程：在 $\mathrm{C}\setminus\{0\}$ 上，该方程与方程 (A.4) 相同，只是将 H^{-} 替换为 H^{+}，并且当 $\mathrm{r}\to\infty$ 时满足 $\mathrm{u}(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it})\to\gamma(\mathrm{t})$。（这类解限制在 0 周围半径为 $\underline{1}\,2$ 的圆盘上时是 J-全纯曲线，正如向外 Floer 帽在 ∞ 附近是 J-全纯曲线一样。）经由微分同胚 $\mathrm{int}(\mathrm{D})\cong\mathrm{C}$（为明确起见，取 $\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{i\theta}\mapsto \mathrm{e}^{\overline{1-\mathrm{r}}}$）重新参数化后，任一向内 Floer 帽都延拓为 D 上的左帽 u^{L} for γ；给定左帽 $\mathrm{w}\colon \mathrm{D}\to\mathrm{M}$ for γ，我们记 $\mathrm{M}^{\mathrm{in}}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{+}([\gamma,\mathrm{w}])$ 为满足 $[\gamma,\mathrm{u}^{L}]=[\gamma,\mathrm{w}]\in\widetilde{\ \ _{0}}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}$ 的轨道 γ 的向内 Floer 帽空间。

对于任意内向 Floer 帽 u，非线性算子的线性化 $\mathrm{D}_{u,J,H^{+}}$（其零点集为 $\mathrm{M}^{\mathrm{in}}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{+}([\gamma,\mathrm{w}])\,\mathrm{at}^{-}$）是 C 上一个可容许的 ∂-算子，其 Fredholm 指数等于 $2\mathrm{m}-\mu_{H}([\gamma,\mathrm{w}])$。对于一般位置的 $(\mathrm{J},\mathrm{H}^{+})$，$\mathrm{M}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{+}([\gamma,\mathrm{w}])$ 将被横截地切出，因此是一个维数为 $2\mathrm{m}-\mu_{H}([\gamma,\mathrm{w}])$的光滑流形。要给这个光滑流形定向，和 $\mathrm{M}^{\mathrm{out}}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{-}([\gamma,\mathrm{w}])$的情形一样，只需给 C 上单个可容许的 ∂-算子 $\mathrm{D}^{+}\,\mathrm{w}_{\gamma}$ 的行列式线定向；对于 γ，可按类似我们先前构造 $\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma}$的方式构造左帽 w_{γ}，这样便可通过延拓与粘合给各个 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}_{u,J,H^{+}})$ 定向。为明确起见，若 $\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma}$ 定义在 $\mathrm{C}^{-}\setminus\{\infty\}$ 上，其形式为 $2\pi(\mathrm{r}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{J}_{0}\frac{\partial}{\partial\theta})-\mathrm{J}_{0}\mathrm{B}_{\gamma}^{-}(\mathrm{z})$，其中 $\mathrm{B}_{\gamma}^{-}\colon \mathrm{C}^{-}\to \mathfrak{gl}_{2m}$在 ∞ 附近消失，且对于较小的 r，$\mathrm{B}_{\gamma}^{-}(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it})=\mathrm{B}_{\gamma}(\mathrm{t})$，则可令 $\mathrm{D}^{+}\mathrm{w}_{\gamma}$ 在 $\mathrm{C}\setminus\{0\}$ 上等于 $2\pi(\mathrm{r}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{J}_{0}\frac{\partial}{\partial\theta})-\mathrm{J}_{0}\mathrm{B}_{\gamma}^{-}(1/\bar{\mathrm{z}})$（并在 0 的邻域内等于 2π 乘以标准的 $\bar\partial$算子）。

所需的 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{+}\,\mathrm{w}_{\gamma})$ 上的定向，随后由如下要求诱导：粘合同构（为 $\mathrm{S}\gg 0$定义）$\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{+}\,\mathrm{w}_{\gamma})\otimes\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma})\cong\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{+}\,\mathrm{w}_{\gamma}\#_{S}\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma})$ 保定向。这里，$\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma})$上的定向是我们先前任意选取的定向，而 CP^{1} 上可容许 $\bar\partial$-算子 $\mathrm{D}^{+}\mathrm{w}_{\gamma}\#_{S}\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{\gamma}$ 的行列式线的定向，则是通过延拓到复线性算子的行列式线所诱导的定向。这足以为轨道 $\gamma\in\mathrm{P}(\mathrm{H})$的左帽 w 所对应的光滑流形 $\mathrm{M}^{\mathrm{in}}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{+}([\gamma,\mathrm{w}])$ 规定定向。记 $\mathrm{ev}_{0}^{J\,H^{+}},{}_{,[\gamma,\mathrm{w}]}\colon \mathrm{M}^{\mathrm{in}}\,\mathrm{J},\mathrm{H}^{+}([\gamma,\mathrm{w}])\to \mathrm{M}$ 为由 $\mathrm{u}\mapsto\mathrm{u}(0)$定义的光滑映射。

给定 $\gamma^{-},\gamma^{+}\in\mathrm{P}\ (\mathrm{H})$，以及左帽 w^{-}、w^{+}，我们按如下方式为 Floer 轨线空间 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma^{-},\mathrm{w}^{-}],[\gamma^{+},\mathrm{w}^{+}])$ 定向；这些轨线从 $[\gamma^{-},\mathrm{w}^{-}]$ 到 $[\gamma^{+},\mathrm{w}^{+}]$（参见 [Abo13, 定理 1.5.1]）。根据我们的初始选择以及延拓和粘合，我们已为 γ^{-} 和 γ^{+} 的外帽算子 $\mathrm{D}^{-}\mathrm{w}^{-}$ 和 $\mathrm{D}^{-}\mathrm{w}^{+}$ 选定定向。对于 $\mathrm{u}\in\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma^{-},\mathrm{w}^{-}],[\gamma^{+},\mathrm{w}^{+}])$（特别是当 $\mathrm{s}\to\pm\infty$ 时，$\mathrm{u}(\mathrm{s},\cdot)\to\gamma^{\pm}$），Floer 方程左端在 u 处的线性化 D_{u} 是 Z 上的一个可容许 ∂-算子；对于适当选取的 $\mathrm{D}^{-}\mathrm{w}^{\pm}$，我们可以构造粘合算子 $\mathrm{D}_{u}\#_{S}\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{+}$，其行列式线也通过延拓和粘合，由我们对 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{-})$ 的初始定向选择定向。因此，我们要求粘合同构 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}_{u})\otimes\mathrm{Det}(\mathrm{D}^{-}\,\mathrm{w}_{+})\cong\mathrm{Det}(\mathrm{D}_{u}\#_{S}\,\mathrm{D}^{-}\mathrm{w}_{+})$ 保定向，从而为 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}_{u})$ 定向。这便为光滑流形 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma^{-},\mathrm{w}^{-}],[\gamma^{+},\mathrm{w}^{+}])$ 赋予定向（假设这些流形横截地切出）。

对于 $[\gamma^-,w_-]\neq[\gamma^+,w^+]$，存在一个自由的实数群作用，其中 $s_0\in\mathbb{R}$ 通过与 (s 预复合而作用，t) $\mapsto$ (s + s0,t)；因此，$u\in\tilde{\mathcal{M}}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])$ 处的无穷小生成元是 $\partial_s u$，而商 $\mathcal{M}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])=\tilde{\mathcal{M}}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])/\mathbb{R}$ 则由下列正合列定向：

$$0\to\mathbb{R}\to T_u\tilde{\mathcal{M}}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])\to T_{[u]}\mathcal{M}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])\to 0$$

其中，第一个非平凡映射将 1 映为 $\partial_s u$，而第二个非平凡映射是商投影的导数。

Floer 边界算子 $\partial_H\colon CF_*(H)\to CF_{*-1}(H)$ 当然由 $\partial[\gamma^-,w^-]=\sum\#(\mathcal{M}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+]))[\gamma^+,w^+]$ 定义，其中求和遍及满足 $\mu_H([\gamma^-,w^-])-\mu_H([\gamma^+,w^+])=1$ 的 $[\gamma^+,w^+]$，而“#”表示零维流形 $\mathcal{M}_{J,H}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])$中点的带符号计数（依照我们刚刚指定的定向，并取值于全文所用的域 κ）。由此可知，如同 [FH93],[Abo13] 中那样，我们的定向是一致的，因此 $\partial_H\circ\partial_H=0$。

现在转向 PSS 映射 $\tilde{\Phi}^{f,H^+}\mathrm{PSS}:\hat{\Lambda}_\uparrow\otimes_\kappa CM_*(f)\to CF_*(H)$ 以及 $\tilde{\Psi}^{H^-,f}\mathrm{PSS}:CF_*(H)\to\hat{\Lambda}_\uparrow\otimes_\kappa CM_*(f)$。我们假设 $CM_*(f)$ 的构造方式与第 9.1 节和附录 A.2 节相同：取 f 的一个类梯度向量场 v，其对应的上升流形和下降流形分别为 $A^v(p)$、$D^v(p)$，其中 $p\in\mathrm{Crit}(f)$；并使用各个 $D^v(p)$的（任意选定但固定的）定向。我们还假设数据选取得处于一般位置，从而确保各个求值映射 $\mathrm{ev}_0^{J,H^+},_{[\gamma,w]}\colon M^{\mathrm{in}}_{J,H^+}([\gamma,w])\to M$ 和 $\mathrm{ev}_\infty^{J,H^-},_{[\gamma,w]}\colon M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w])\to M$ 均与每个 $D^v(p)$ 和 $A^v(p)$横截。

如 A.2 节所述，我们对 $D^v(p)$ 的定向通过将由显然的识别 $N_pA^v(p)=T_pD^v(p)$ 诱导的余定向延拓到 $A^v(p)$ 的其余部分，从而诱导出 $A^v(p)$ 的余定向。在下文中，我们还采用由命题 A.2 及其证明中的约定所诱导的 $D^v(p)$ 上的余定向：也就是说，我们要求 $A^v(p)$ 的定向满足 $T_pA^v(p)\oplus T_pD^v(p)=T_pM$ 作为定向向量空间，然后利用识别 $N_pD^v(p)=T_pA^v(p)$ 对 $D^v(p)$ 进行余定向。（更简洁地说，我们有 $N_{D^v(p)}\oplus TD^v(p)=TM|_{D^v(p)}$ 作为定向丛；当然，这里使用了与 M 的辛结构相关联的典范定向。）

现在，对于 $p\in$临界点集(f) 和 $[\gamma,w]\in L_0M$，其中 $\gamma\in P(H)$，我们定义

$$\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^+}(p;[\gamma,w])=(ev^{J,H^+}_{0,[\gamma,w]})^{-1}(\mathbf{D}^v(p))\subset\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^+}([\gamma,w])$$

and

$$\mathcal{M}^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w];p)=(ev^{J,H^-}_{\infty,[\gamma,w]})^{-1}(\mathbf{A}^v(p))\subset\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^-}([\gamma,w]).$$

根据我们的横截性假设，这些都是光滑流形，其中 $\dim M^{\mathrm{in}}_{J,H_+}(p;[\gamma,w])=\mathrm{ind}_f(p)-\mu_H([\gamma,w])$，且 $\dim M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w];p)=\mu_H([\gamma,w])-\mathrm{ind}_f(p)$。此外，根据 A.1.2节中的规定，利用我们为 $M^{\mathrm{in}}_{J,H^+}([\gamma,w])$ 和 $M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w])$规定的定向，以及我们为 $D^v(p)$ 和 $A^v(p)$规定的余定向，可以为它们赋予定向。当 $\mathrm{ind}_f(p)=\mu_H([\gamma,w])$ 时，我们的横截性假设与关于 $M^{\mathrm{in}}_{J,H^+}([\gamma,w])$、$M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w])$、$D^v(p)$ 和 $A^v(p)$ 紧化的标准结果共同推出，定向零维流形 $M^{\mathrm{in}}_{J,H_+}(p;[\gamma,w])$ 和 $M^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w];p)$ 是紧的。

有了这些，我们便可以定义 PSS 映射 $\tilde{\Phi}^{f,H^+PSS}:\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)\to CF_*(H)$，方法是对每个指标为$k$ 的临界点p （属于f），从 $\hat{\ }\Lambda_\uparrow$ 线性延拓:

$$\tilde{\Phi}^{f,H^+}_{PSS}\,p=\sum_{[\gamma,w]\in\tilde{P}_k(H)}\#\Big(\mathscr{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^+}(p;[\gamma,w])\Big)[\gamma,w]$$

其中，按照惯例，“#”表示紧致定向零维流形中各点的 κ 值带符号计数。类似地，定义 $\tilde{\Psi}^{H^-,fPSS}:CF_*(H)\to\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)$，方法是对每个 $[\gamma,w]\in\tilde{\ }P_k(H)$，从……出发作 $\hat{\ }\Lambda_\uparrow$-线性扩张，

$$\tilde{\Psi}^{H^-,f}_{PSS}[\gamma,w]=\sum_{\substack{p\in\mathrm{Crit}(f),A\in\hat{\Gamma}\\ \mathrm{ind}_f(p)=k+2I_{c_1}(A)}}\#\Big(\mathscr{M}^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w\#(-A)];p)\Big)\,T^Ap.$$

（回想一下，$T^A\in\hat{\ }\Lambda_\uparrow$ 的分次为 $-2I_{c_1}(A)$。$[w\#(-A)]$ 中负号的几何原因是：将同调类为 $-A$ 的球面粘合到左帽 w 上，等同于将同调类为 A 的球面粘合到对应的右帽 w^R上。）至少模 2 意义下，这些定义与 [PSS94],[Oh15 第 20 节中的标准定义一致。3], 不过，为了确认我们对 $_{J,H_+}(p;[\gamma,w])$ 处的 M in 和 $_{J,H^-}([\gamma,w];p)$ 处的 M out 所作的定向规定恰当，我们应检查以下情形中的符号是否正确:

命题 A.6。 $\tilde{\Phi}^{f,\ H^+PSS}:\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)\to CF_*(H)$和 $\tilde{\Psi}^{H^-,\ fPSS}:CF_*(H)\to\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)$ 是链映射。

命题 A.7。 $\tilde{\Psi}_{f,H^+PSS}\circ\tilde{\Phi}^{H^-,fPSS}:\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)\to\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)$ 在同调上诱导恒等映射。

（我们不单独验证 $\tilde{\Phi}^{H^+,fPSS}\circ\tilde{\Psi}_{f,H^-PSS}$ 在 $HF_*(H)$ 上诱导恒等映射，因为这可由相反顺序复合的相应事实，以及 $HF_k(H)$ 在 $\Lambda_\uparrow$ 上的维数与 $\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)$ 的同调的分次为 k 部分具有相同维数这一事实形式上推出。）

命题 *A.6* 的证明概要。 对于两个命题的证明，我们都着重讨论符号问题，并将横截性、紧致性和粘合相关的标准论证所得的事实作为已知。

记 ∂f 为作用于 $\hat{\ }\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathrm{CM}_*(\mathrm{f})$ 的微分，记 ∂_H 为作用于 $\mathrm{CF}_*(\mathrm{H})$ 的微分。我们首先考虑 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}$。令 $[\gamma,\mathrm{w}]\in\tilde{\ }\mathrm{P}_k(\mathrm{H})$，$\mathrm{A}\in\hat{\ }\Gamma$，以及 $\mathrm{q}\in$临界点集(f)，其中 $\mathrm{ind}_f(\mathrm{q})=\mathrm{k}+2\mathrm{I}_{c_1}(\mathrm{A})-1$。T Aq 上的系数分别出现在 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}\ \partial_H[\gamma,\mathrm{w}]$ 和 $\partial\mathrm{f}\ \tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}\ [\gamma,\mathrm{w}]$ 中，它们枚举了一维流形 $\mathrm{M\ out\ J,H^-}([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})];\mathrm{q})$ 的格罗莫夫–弗洛尔紧化的两类边界点。为证明 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}$ 是链映射，即 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}\ \partial_H-\partial\mathrm{f}\ \tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}=0$，我们必须证明，这两类边界点对 $\partial\mathrm{M\ out\ J,H^-}([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})];\mathrm{q})$ 中各点的总带符号计数贡献符号相反。

求值映射 $ev^{J\ H^-}_{\infty},_{[\gamma,w\#(-A)]}$ 可连续延拓为映射 $ev^{J}_{\infty}{}^{H^-},_{[\gamma,w\#(-A)]}$，其定义在 $(k+2I_{c_1(A)})$ 维向外 Floer 帽流形 $\mathrm{M}^{\mathrm{out}}{}_{J,H^-}([\gamma,w\#(-A)])$ 的格罗莫夫–弗洛尔紧化上。在我们的横截性假设下，紧集

$(\mathrm{ev}^J, \overset{H^-}{\infty}, [\gamma, w\#(-A)])^{-1}(A^\nu(q)) \backslash M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)]; q)$ 将只包含这样的元素 $u \in M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w(-\#)]A^\nu($, 它们被映射到某个 $A^\nu(p)$，且 $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_f(q)+1$；此外还包含元素 $([u_0], u_1) \in M_{J,H}([\gamma, w\#(-A)], [\gamma', w'\#(-A)]) \times M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma', w'\#(-A)])$，其中 $u_1(\infty) \in A^\nu(q)$，且 $\mu_H([\gamma', w'\#(-A)]) = \mu_H([\gamma, w\#(-A)]) - 1$。

记 $\hat{}A^\nu(q)$ 为 $A^\nu(q)$ 与其紧化中（如命题 A.1 前所述）形如 $A^\nu(p) \times M^\nu(p, q)$ 且 $\mathrm{ind}_f(p) - \mathrm{ind}_f(q) = 1$ 的那些分层之并。因此，$\hat{}A^\nu(q)$ 是一个带边光滑流形，其边界分支为各种 $A^\nu(p) \times \{[x]\}$，其中 $[x] \in M^\nu(p, q)$；根据命题 A.1，它们各自的边界余定向由 $-\epsilon([x])$ 乘以 $A^\nu(p)$ 的余定向给出，而该余定向用于定义零维流形 $M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)]; p)$ 的定向，从而也用于定义 $\tilde{\Psi}^{H^-}, f\ \mathrm{PSS}([\gamma, w])$ 中 $T^A p$ 的系数。这里，$\epsilon([x])$ 是 $[x]$ 对 $\partial f\ p$ 中 q 的系数的贡献符号。因此，利用 (A.2)，$\partial f\ \tilde{\Psi}^{H^-}, f\ \mathrm{PSS}[\gamma, w]$ 中 $T^A q$ 的系数为 -1 乘以一维流形 $M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)]; q)$ 的端的带符号数；这些端在 $\mathrm{ev}^J, \overset{H^-}{\infty}, [\gamma, w\#(-A)]$ 下的像趋近于某个 $A^f(p)$，且 $\mathrm{ind}_f(p) = \mathrm{ind}_f(q)+1$。（这里，若定向的一维流形的定向与指向端外侧的方向一致，则该端的符号为正，否则为负。注意，对于每个 $[x] \in M^\nu(p, q)$，我们都会得到一个不同的这样的端。）

令 $\hat{}M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)])$ 表示 $M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)])$ 与其格罗莫夫–弗洛尔紧化中形如 $M_{J,H}([\gamma, w\#(-A)], [\gamma', w'\#(-A)]) \times M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma', w'\#(-A)])$ 的那些分层之并，其中 $\mu_H([\gamma', w'\#(-A)]) = \mu_H([\gamma, w\#(-A)]) - 1$。这是一个带边界的光滑流形，而 $M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)]; q)$ 的其余端（除上一段讨论的端外）对应于 $(\mathrm{ev}^J, \overset{H^-}{\infty}, [\gamma, w\#(-A)])|_{\partial \hat{}M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)])}^{-1}(A^\nu(q))$ 在 $M^{\mathrm{out}} J,H\partial w\#_-([\gamma, A(-; q)]$ 中的子集。根据 (A.2)，$)\mathrm{ev}(, ^J, \overset{H^-}{\infty}\ w\#_{[\gamma, A(-\hat{}M)]}|_{\partial} J,H^{\mathrm{out}} w\#_{-([\gamma, A(-A)])}^{-1}(q^\nu($ 作为 $))M^{\mathrm{out}} J,H\partial w\#_-([\gamma, A(-; q)]$ 的子集所具有的定向，与其作为原像的定向一致。现在，$)\hat{}M^{\mathrm{out}} J,H\partial w\#_-([\gamma, A(-$ 是流形 $V)]), _{[u_0]} w_{[\gamma', \cdot]} (= u[]_0]M \times J,H^{\mathrm{out}} w_-([\gamma', \#'A(-$ 的不交并，其中 $)])w\ [\gamma', \#'A(-$ 遍历 $)]P\ \tilde{}A_{k+2I_{c_1}}(H)-1($ 中的元素，$)\ u\ [$ 遍历零维流形 $\underset{H^-}{M_0}]\ , Jw\#_H([\gamma, A(-,)]w[\gamma', \#'A(-$ 中的元素（后者又等同于 $M)])\ , Jw_H([\gamma, ,]w[\gamma',)$。于是，$']))ev(, ^J, \overset{\ }{\infty}\ w\#_{[\gamma, A(-,)]}|_{V_{[u_0]} A_{[\gamma', w']}}^{-1}(q^\nu($ 中点的带符号数等于 $))\ u\ \delta([$ 乘以 $T_0])\ q$ 在 $^A, f\ \mathrm{PSS}\ \tilde{\Psi}^{H^-} w[\gamma', \#'A(-$ 中的系数，其中 $)]u\ \delta([$ 是 $V_0])\ , _{[u_0]} w_{[\gamma', \{']} = u[\}_0]M \times J, H^{\mathrm{out}} w_-([\gamma', \#'A(-$ 作为 $)])\ \hat{}M\ \partial J,H^{\mathrm{out}} w\#_-([\gamma, A(-$ 的余维数为零的子集所具有的定向，与 $M^{\mathrm{out}} J,H)])w_-([\gamma',$ 的定向之间的符号。

我们声称，$\delta([u_0])$ 与符号 $\epsilon([u_0])$ 一致；这个符号表示 $[u_0]$ 对 $\partial_H[\gamma, w]$ 中 $[\gamma', w']$ 的系数所作的贡献（等价地，表示 $\partial_H[\gamma, w\#(-A)]$ 中 $[\gamma', w'\#(-A)]$ 的系数）。对于 $S \in \mathbb{R}$，记 $u_S \in \tilde{}M_{J,H}([\gamma, w], [\gamma', w'])$ 为将某个代表元 u_0 与平移 $(s, t) \mapsto (s + S, t)$ 预复合所得的结果。对于某个 $S_0 \gg 0$，可通过粘合映射 $\{u_S | S > S_0\} \times M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma', w'\#(-A)]), \to M^{\mathrm{out}} J,H_-([\gamma, w\#(-A)])$ 构造 $V_{[u_0], [\gamma', w']}$ 的一个领圈。我们的定向构造确保此映射是保定向的（将 $\{u_S | S > S_0\}$ 视为一个开

子集 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma,w],[\gamma',w'])$），且领圈的外法向量由 $du^S dS$ 的像给出。由于当 $\epsilon([u_0])=1$时，$du^S dS$ 与 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma,w],[\gamma',w'])$ 的定向一致，否则则相反，因此可得 $\delta([u_0])=\epsilon([u_0])$。

因此，$(\mathrm{ev}^J,\infty^{H^-},{}_{,[\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})]}|_{V_{[u_0],[\gamma',w']}})^{-1}(\mathrm{A}^\nu(\mathrm{q}))$ 中点的带符号计数，等于 $[\mathrm{u}_0]$ 对 $\partial_H[\gamma,\mathrm{w}]$ 中 $[\gamma',\mathrm{w}']$ 的系数的贡献，乘以 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f}\ \mathrm{PSS}\ [\gamma',\mathrm{w}']$ 中 $\mathrm{T}\ \mathrm{Aq}$ 的系数。对 $H^-[\mathrm{u}_0]$，$[\gamma',\mathrm{w}']$ 求和后可知，$\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f}\ \mathrm{PSS}\ \partial_H[\gamma,\mathrm{w}]$ 中 $\mathrm{T}\ \mathrm{Aq}$ 的系数带符号地计数了 $(\mathrm{ev}^J,\infty^{},{}_{,[\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})]}|_{\partial\hat{}\mathrm{M}\ \mathrm{out}\ \mathrm{J},\mathrm{H}_-([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})])})^{-1}(\mathrm{A}^\nu(\mathrm{q}))$ 中的元素。结合我们先前对 $\mathrm{M}\ \mathrm{out}\ \mathrm{J},\mathrm{H}^-([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})];\mathrm{q})$ 的端的讨论——其在 $\mathrm{ev}^J_\infty{}^{H^-},{}_{,[\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})]}$ 下的像收敛至 $\mathrm{A}^\nu(\mathrm{p})$，其中 $\mathrm{ind}_f(\mathrm{p})=\mathrm{ind}_f(\mathrm{q})+1$——我们得出，$\mathrm{M}\ \mathrm{out}\ \mathrm{J},\mathrm{H}^-([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})];\mathrm{q})$ 的全部边界点由 $(\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f}\ \mathrm{PSS}\ \partial_H-\partial_H\ \tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f}\ \mathrm{PSS})[\gamma,\mathrm{w}]$ 中 $\mathrm{T}^A\mathrm{q}$ 的系数带符号地计数。由于对所有 $[\gamma,\mathrm{w}]$,A 和 q，$\mathrm{M}\ \mathrm{out}\ \mathrm{J},\mathrm{H}^-([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})];\mathrm{q})$ 的所有边界点的带符号计数均为零，我们得出 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f}$ PSS 是一个链映射。

对……的分析 $\tilde{\Phi}^f,{}_{PSS}{}_{H}{}^{+}$ 也类似，不过符号稍微复杂一些。给定$p\in$临界点集(f)满足 $\mathrm{ind}_f(p)=k$，以及 $[\gamma,w]\in\tilde{P}_{k-1}(H)$，我们将证明，带边界的紧致定向~~一维流形 M 在 J,H_+~~$(p;[\gamma,w])$ 中的边界点个数由 $[\gamma,w]$ 在 $(-1)^k(\tilde{\Phi}^f{}_{H^+PSS}\partial_f-\partial_H\tilde{\Phi}^f,{}_{H^+PSS})p$中的系数给出。

M 在 $\mathrm{J},\mathrm{H}_+(\mathrm{p};[\gamma,\mathrm{w}])$ 中的第一类边界点，源于一列 Morse 轨线断裂，这些轨线将临界点 p 与 $\mathrm{ev}_0^J{}^{H^+},{}_{,[\gamma,\mathrm{w}]}$ 的像相连；它对应于部分紧化 $\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})\ \text{of}\ \mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})$ 的边界中的一个分支，其形式为 $\{[\mathrm{x}]\}\times\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$，其中 $\mathrm{ind}\,\mathrm{f}(\mathrm{q})=\mathrm{k}-1$且 $[\mathrm{x}]\in\mathrm{M}^\nu(\mathrm{p},\mathrm{q})$。这些边界点带符号计数为 $\eta([\mathrm{x}])$乘以 $[\gamma,\mathrm{w}]$在 $\tilde{\Phi}\mathrm{f},\mathrm{H}^+\mathrm{PSS}\ \mathrm{q}$ 中的系数，其中 $\eta([\mathrm{x}])$是 $\{[\mathrm{x}]\}\times\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$ 相对于按原先规定的 $\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$ 余定向的边界余定向符号。下面证明 $\eta([\mathrm{x}])=(-1)^k\epsilon([\mathrm{x}])$，其中 $\epsilon([\mathrm{x}])$ 是 $[\mathrm{x}]$ 对 $\partial\,\mathrm{f}\,\mathrm{p}$ 中 q 的系数所作贡献的符号。根据命题 A.1.3，$\{\mathrm{x}\}\times\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$ 作为 $\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})$的一个边界分支，其定向为原定向乘以 $\epsilon([\mathrm{x}])$；因此，若 n_x 是 $\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$中指向 $\{\mathrm{x}\}\times\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})$的外法向量场，则 $\langle\mathrm{n}_x\rangle\oplus\mathrm{T}\,\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})=\epsilon([\mathrm{x}])\mathrm{T}\,\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})|_{\{[x]\}\times\mathbf{D}^\nu(\mathrm{q})}$ 作为定向丛成立。由于对一般临界点 y，有 $\mathrm{N}\,\mathrm{D}^\nu(\mathrm{y})\oplus\mathrm{T}\,\mathrm{D}^\nu(\mathrm{y})=\mathrm{T}\,\mathrm{M}|_{\mathbf{D}^\nu(\mathrm{y})}$，因此 $\mathrm{N}\,\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})=\epsilon([\mathrm{x}])\mathrm{N}\,\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})|_{\{[x]\}\times\mathbf{D}^\nu(\mathrm{q})}\oplus\langle\mathrm{n}_x\rangle$ 作为定向丛成立。按定义，符号 $\eta([\mathrm{x}])$由 $\mathrm{N}\,\mathrm{D}^\nu(\mathrm{q})=\eta([\mathrm{x}])\langle\mathrm{n}_x\rangle\oplus\mathrm{N}\,\hat{}\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})|_{\{[x]\}\times\mathbf{D}^\nu(\mathrm{q})}$给出，由此可得

$$\eta([x])=(-1)^{\mathrm{rank}(N\mathbf{D}^\nu(p))}\epsilon([x])=(-1)^{2m-k}(\epsilon([x]))=(-1)^k\epsilon([x]).$$

因此，$[\gamma,]$中由 Morse 轨线断裂产生的$J,H_+(p;[\gamma,w])$的边界点，由 $[\gamma,w]$在 $(-1)^k\tilde{\Phi}^f,{}_{H^+PSS}\partial_f p$中的系数枚举。

M 在$J,H_+(p;[\gamma,w])$边界上的其他点，$\overline{\text{由}ev_0^J{}^{H^+},{}_{,[\gamma,w]}\text{在}}$紧化空间 M 在$J,H_+(p;[\gamma',w'])\times\{[u_0]\}$的分层 M 在$J,H_+(p;[\gamma,w])$,上的原像构成，

其中 $\mu_H([\gamma',w'])=k$ 且 $[u_0]\in M_{J,H}([\gamma',w'],[\gamma,w])$。利用 (A.2)，这些点的带符号计数为 $\delta([u_0])$ 乘以 $[\gamma',w']$ 在 $\tilde{\Phi}^f,H^+PSS\ p$ 中的系数，其中 $\delta([u_0])$ 是 M 在 $J,H_+([\gamma',w'])\times\{[u_0]\}$ 作为 $M^{in}J,H^+([\gamma,w])$ 紧化边界的一部分时的定向，与 M 在 $J,H_+([\gamma',w'])$ 的原始定向之间的符号。令 u_0 为 $\tilde{M}_{J,H}([\gamma',w'],[\gamma,w])$ 中代表 $[u_0]$ 的代表，并令 u_S 表示将 u_0 与 $(s,t)\mapsto(s+S,t)$ 复合前的映射。对于 $S_0\gg 0$，$M^{in}J,H_+([\gamma',w'])\times\{[u_0]\}$ 的一个领圈由保定向粘合映射 M 在 $J,H_+([\gamma',w'])\times\{u_S|S<-S_0\}\to M$ 在 $J,H^+([\gamma,w])$ 给出，其中外法向量对应于 $-\frac{du_S}{dS}$。记 $\epsilon([u_0])$ 为 $[u_0]$ 对 $[\gamma,w]$ 在 $\partial_H[\gamma',w']$ 中的系数所作贡献的符号；当且仅当 $\epsilon([u_0])=-1$ 时，此外法向量与 $\tilde{M}_{J,H}([\gamma',w'],[\gamma,w])$ 的定向一致。因此，在计入一个符号 $(-1)^{\dim\mathcal{M}^{in}J,H_+([\gamma',w'])}=(-1)^{2m-k}$（该符号来自将 $-du^s dS$ 从 $M^{in}J,H_+([\gamma',w'])\times\{u_S|S<-S_0\}$ 切空间定向基的最后一项移至第一项）后，我们得到 $\delta([u_0])=(-1)^{k+1}\epsilon([u_0])$。因此，由 Floer 轨线断裂产生的 M 在 $J,H_+(p;[\gamma,w])$ 边界点，其带符号计数由 $[\gamma,w]$ 在 $(-1)^{k+1}\partial_H\tilde{\Phi}^f,H^+PSS\ p$ 中的系数给出。

结合此前对 Morse 轨线断裂所对应边界点的计数，并利用紧致定向一维流形边界上的点的带符号计数为零这一事实，我们推得 $(-1)^k\tilde{\Phi}_{f,H^+PSS}\partial_f+(-1)^{k+1}\partial_H\tilde{\Phi}^f,H^+PSS=0$，进而得到 $\tilde{\Phi}^f,H^+PSS$ 是一个链映射。□

命题 *A.7* 的证明概要。设 p,q 是 f 的临界点，且 $A\in\hat{\Gamma}$ 满足 $\mathrm{ind}_f(p)=k$ 且 $\mathrm{ind}_f(q)=k+2I_{c_1}(A)$。$\tilde{\Psi}^{H^-}{}_{,fPSS}\tilde{\Phi}_{f,H^+PSS}p$ 中 T^Aq 的系数，是对 $[\gamma,w]\in\tilde{P}_k(H)$ 求和所得的定向零维流形中点的带符号计数

(A.5)

$$\mathcal{M}^{in}_{J,H^+}(p;[\gamma,w])\times\mathcal{M}^{out}_{J,H^-}([\gamma,w\#(-A)];q)=(ev^{J,H^+}_{0,[\gamma,w]})^{-1}(\mathbf{D}^\nu(p))\times(ev^{J,H^-}_{\infty,[\gamma,w\#(-A)]})^{-1}(\mathbf{A}^\nu(q))$$
$$\subset\mathcal{M}^{in}_{J,H^+}([\gamma,w])\times\mathcal{M}^{out}_{J,H^-}([\gamma,w\#(-A)]).$$

我们注意到，作为一个定向的零维流形，(A.5) 等于乘积映射 $ev_0^{J,H^+},{}_{,[\gamma,w]}\times ev_\infty^{J,H^-},{}_{,[\gamma,w\#(-A)]}$: $M\ in\ J,H^+([\gamma,w])\times M\ out\ J,H^-([\gamma,w\#(-A)])\to M\times M$ 下子流形 $D^\nu(p)\times A^\nu(q)$ of $M\times M$ 的原像，并使用显然的识别 $N_{(D^\nu(p)\times A^\nu(q))}\cong N_{D^\nu(p)}\oplus N_{A^\nu(q)}$ 赋予其余定向。事实上，根据定义，点 $(u_0,u_\infty)\in(ev_0^{J,H^+},{}_{,[\gamma,w]}\times ev_\infty^{J,H^-},{}_{,[\gamma,w\#(-A)]})^{-1}(D^\nu(p)\times A^\nu(q))$ 是正定向的，当且仅当 $ev_0^{J,H^+},{}_{,[\gamma,w]}\times ev_\infty^{J,H^-},{}_{,[\gamma,w\#(-A)]}$ 在 (u_0,u_∞) 处的导数将 $T_{u_0}M\ in\ J,H^+([\gamma,w])\times T_{u_\infty}M\ out\ J,H^-([\gamma,w\#(-A)])$ 保定向地映射到 $N_{u_0(0)}D^\nu(p)\oplus N_{u_\infty(\infty)}A^\nu(q)$；这成立当且仅当 u_0 和 u_∞ 作为 $M\ in\ J,H^+([\gamma,w])$ 与 $M\ out\ J,H^-([\gamma,w\#(-A)])$ 的元素具有相同的定向符号，也就是说，当且仅当 (u_0,u_1) 作为 $M^{in}J,H^+([\gamma,w])\times M\ out\ J,H^-([\gamma,w\#(-A)])$ 的元素是正定向的。

将 CP^1 与 $C\cup\{\infty\}$ 等同，其中包含 C 和 C^-。给定一个适当处于一般位置的光滑映射 $H:CP^1\times M\to R$，其支集包含于 $(C\setminus\{0\})\times M$，并给定 $B\in\hat{\Gamma}$，令 $M_{J,\mathcal{H}}(B)$ 表示由光滑映射 $u:CP^1\to M$ 构成的空间，这些映射在 $\hat{\Gamma}$ 中代表 B，

在 0 和 ∞ 处是J-全纯的，并且在带有通常极坐标r、θ 的 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上满足

$$2\pi r\frac{\partial u}{\partial r}+J(u)\left(2\pi\frac{\partial u}{\partial\theta}-X_{\mathcal{H}(re^{i\theta},\cdot)}(u)\right)=0.$$

对于一般位置的J，H，这是一个维数为 $2m+2I_{c_1}(B)$的光滑流形，其定向由以下规定诱导：通过延拓从复线性算子出发，为 $\mathbb{C}P^1$ 上的可容许 ∂-算子的行列式线定向。我们将$ev_0^{J,\mathcal{H}},_B$，$ev_\infty^{J,\mathcal{H}},_B\colon \mathcal{M}^{J,\mathcal{H}}(B)\to M$ 记为由$u\mapsto u(0)$ 和$u\mapsto u(\infty)$给出的映射；一般而言，它们将与f的所有临界点的上升和下降流形横截。由于 (M,ω)的半正性，$\mathcal{M}^{J,\mathcal{H}}(B)$的格罗莫夫紧化的所有边界分层一般而言余维数至少为二。

对于满足这些横截性性质的J、H，我们可以定义映射 $\Upsilon^{J,\mathcal{H}}\colon \hat{\Lambda}_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)\to\hat{\Lambda}_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f)$，方法是从以下情形线性扩张：对于$p\in\in$临界点集$(f)$且指标为$k$，

$$\Upsilon^{J,\mathcal{H}}p=\sum_{\substack{q\in\mathrm{Crit}(f),B\in\hat{\Gamma}\\ \mathrm{ind}_f(q)=k+2I_{c_1}(B)}}\#\left(\left(ev_{0,B}^{J,\mathcal{H}}\times ev_{\infty,B}^{J,\mathcal{H}}\right)^{-1}(\mathbf{D}^\nu(p)\times\mathbf{A}^\nu(q))\right)T^Bq.$$

通过标准论证并结合类似于前述命题证明部分内容中的符号分析，可以验证这是一个链映射；此外，运用涉及对（J、H）作单参数选择族的标准论证可知，不同的此类选择会得到同伦链映射 $\Upsilon^{J,\mathcal{H}}$。

回到对 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}_{\tilde{\Phi}^f,H^+}\mathrm{PSS}$ 的讨论，回想一下，用于定义 PSS 映射的函数 $\mathrm{H}^-\colon \mathbb{C}^-\times\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ 和 $\mathrm{H}^+\colon \mathbb{C}\times\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ 满足：当 $\mathrm{r}<\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{H}^-(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{x})=\mathrm{H}(\mathrm{t},\mathrm{x})$；当 $\mathrm{r}<2$ 时，$\mathrm{H}^+(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{x})=\mathrm{H}(\mathrm{t},\mathrm{x})$。因此，若 $\mathrm{S}>2$，我们可以定义 $\mathrm{H}_S\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1\times\mathrm{M}\to\mathbb{R}$，令 $\mathrm{H}_S(\mathrm{z},\mathrm{x})=\mathrm{H}^+(\mathrm{Sz},\mathrm{x})$（对于 $|\mathrm{z}|\le 1$），并令 $\mathrm{H}_S(\mathrm{z},\mathrm{x})=\mathrm{H}^-(\mathrm{z}/\mathrm{S},\mathrm{x})$（对于 $|\mathrm{z}|\ge 1$），这样 H_S 限制在 $\{\,{}^2\mathrm{S}<|\mathrm{z}|<\mathrm{S}\,2\,\}\times\mathrm{M}$ 上时，等于 $(\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{x})\mapsto\mathrm{H}(\mathrm{t},\mathrm{x})$。

对于 $A\in\hat{\Gamma}$，标准的粘合构造会在所有充分大的 S 下给出一个微分同胚

$$\bigsqcup_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ [\gamma,w]\in\mathscr{P}_k(H)}}\mathscr{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^+}([\gamma,w])\times\mathscr{M}^{\mathrm{out}}_{J,H^-}([\gamma,w\#(-A)])\cong\mathscr{M}_{J,\mathcal{H}_S}(A).$$

此外，$\mathrm{M}^{\mathrm{in}}\mathrm{J},\mathrm{H}^+([\gamma,\mathrm{w}])$ 上的定向正是以使该微分同胚保定向的方式构造的。当 $\mathrm{S}\to\infty$ 时，在这些微分同胚下，求值映射 $\mathrm{ev}_0^{J,H^+},_{[\gamma,\mathrm{w}]}\times\mathrm{ev}_\infty^{J,H^-},_{[\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})]}\colon \mathrm{M\ in\ J},\mathrm{H}^+([\gamma,\mathrm{w}])\times\mathrm{M\ out\ J},\mathrm{H}^-([\gamma,\mathrm{w}\#(-\mathrm{A})])\to\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ 与 $\mathrm{ev}_0^{J,\mathcal{H}},\mathrm{A}\times\mathrm{ev}_\infty^{J,\mathcal{H}},\mathrm{A}\colon \mathcal{M}^{J,\mathcal{H}_S}(\mathrm{A})\to\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ 一致。因此，对于证明开头所述的任意 p、q、A，若 S 充分大，则 $\tilde{\Psi}^{H^-},\mathrm{f\,PSS}_{\tilde{\Phi}^f,\mathrm{H}^+}\mathrm{PSS\ p}$ 中 $\mathrm{T\,Aq}$ 的系数与 $\Upsilon^{J,\mathcal{H}_S}\mathrm{p}$ 中相应的系数一致。

因此，对于较大的S，$\tilde{\Psi}^{H^-}{}_{fPSS}{}_{\tilde{\Phi}^{fH^+PSS}}$在同调上诱导的映射与 $\Upsilon_{J\mathcal{H}^S}$ 诱导的映射相同。但 $\Upsilon^{J\mathcal{H}}$在同调上诱导的映射与 H 无关，因此可令 $\mathrm{H}=0$来确定。我们现在将证明 Υ^{J0} 是恒等映射，从而完成证明。假设J 处于适当的一般位置；由于 $\mathcal{M}^{J0}(A)$ 在局部自由地受一个二维群作用，该群由保持 0 和 ∞不变的 $\mathbb{C}P^1$ 的自同构组成，因此像 $(ev_0^{J\,0},_A\times ev_\infty^{J\,0},_A)(\mathcal{M}^{J0}(A))$ 将

包含于某个维数至多为 $2m + 2I_{c_1}(A) - 2$ 的伪循环的像中；该伪循环避开余维数为$(2m + 2 I_{c_1}(A))$的子流形$\mathbf{D}^f(p) \times \mathbf{A}^f(q)$，只要 $\mathrm{ind}_f(q) - \mathrm{ind}_f(p) = 2I_{c_1}(A)$。因此

$$\Upsilon^{J,0}p = \sum_{\mathrm{ind}_f(q)=\mathrm{ind}_f(p)} \#\left(\left(ev_{0,0}^{J,0} \times ev_{\infty,0}^{J,0}\right)^{-1}(\mathbf{D}^\nu(p) \times \mathbf{A}^\nu(q))\right).$$

映射空间 $\mathrm{M}_{J,0}(0)$ of $ev_0^{J\,0}, ,_0 \times ev_\infty^{J\,0}, ,0$ 只是常值映射空间 $CP^1 \to M$，我们将其与M等同；于是$ev_0^{J\,0}, ,_0 \times ev_\infty^{J\,0}, ,0$ 就等同于对角嵌入$\Delta\colon M \to M \times M$。对于任意相容几乎复结构$J'$，空间 $\mathrm{M}_{J',0}(0)$ 都是横截切出的 [McSa12, 引理 6.7.6]；利用这一事实以及涉及选取一个在某个邻域内可积的J' 的延拓论证，不难验证，$\mathrm{M}_{J,0}(0)$ 的定向（通过延拓到复线性算子来定义）与M 由其辛结构诱导的定向一致。

根据莫尔斯-斯梅尔条件，当p、q 是指标相同但彼此不同的临界点时，对角嵌入下$\mathbf{D}^\nu(p) \times \mathbf{A}^\nu(q)$ 的原像为空；而当$p = q$ 时，它仅由p 构成。因此，要确认 $\Upsilon^{J,0}$ 是恒等映射，我们只需检验每个临界点p 作为 $\Delta^{-1}(\mathbf{D}^\nu(p) \times \mathbf{A}^\nu(p))$ 的元素时，其定向符号是 $+1$ 而不是 -1。这等价于如下复合映射的陈述

$$T_pM \to T_pM \oplus T_pM \to N_p\mathbf{D}^\nu(p) \oplus N_p\mathbf{A}^\nu(p)$$

是保定向的，其中第一个映射是对角包含，第二个映射是商投影的直和。之所以成立，是因为按照我们的约定，$\mathrm{N}_p\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})$ 和 $\mathrm{N}_p\mathrm{A}^\nu(\mathrm{p})$ 的定向分别由它们与 $\mathrm{T}_p\mathrm{A}^\nu(\mathrm{p})$ 和 $\mathrm{T}_p\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})$的识别给出，而 $\mathrm{T}_p\mathrm{A}^\nu(\mathrm{p})$ 的定向选取为使得 $\mathrm{T}_p\mathrm{M} = \mathrm{T}_p\mathrm{A}^\nu(\mathrm{p}) \oplus \mathrm{T}_p\mathrm{D}^\nu(\mathrm{p})$ 作为定向向量空间成立。□

A.3.3. 时间反演。 给定一个一般位置的非退化哈密顿量 $H\colon S^1 \times M \to \mathrm{R}$ 以及莫尔斯函数 $f\colon M \to \mathrm{R}$，前一小节描述了为边界算子 ∂_H 以及 PSS映射 $\tilde{\Phi}^f$、$_{HPSS}$和 $\tilde{\Psi}^{H^-}$、$_{fPSS}$所依托的模空间确定定向的方案。¯该方案以 C^- 上与任意选取的各个一周期轨道$\gamma \in P(H)$的右帽 w_γ^R 相关的可容许 ∂-算子的行列式线的定向为输入；对于 PSS 映射，我们还要求用于构造莫尔斯复形 f 的下降流形$\mathbf{D}^\nu(p)$ 的定向。

现在考虑将 H 替换为其时间反演 $\hat{\mathrm{H}} : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{M} \to \mathrm{R}$，定义为 $\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) = -\mathrm{H}(1 - \mathrm{t}, \mathrm{x})$, 这样 H 和 $\hat{\mathrm{H}}$ 的时间一映射互为逆映射，而 $\hat{\mathrm{H}}$ 的哈密顿流的一周期轨道由 $\bar{\gamma}(\mathrm{t}) = \gamma(1 - \mathrm{t})$ 给出，其中 γ 遍历 P(H)。我们也将 f 替换为 $-\mathrm{f}$。我们可以对数据 $(\hat{\mathrm{H}}, -\mathrm{f})$ 应用上一小节的构造方法，并以适当行列式线和下降流形的任意定向作为输入，从而构造 Floer 边界算子 $\partial_{\hat{H}}$ 以及 PSS 映射 $\tilde{\Phi}^{-f}$, $\hat{\mathrm{H}}^+$PSS 和 $\tilde{\Psi}\hat{\mathrm{H}}^-$,$-\mathrm{f}$ PSS。然而，为了得到第 7 节中 $\mathrm{CF}_*(\mathrm{H})$ 与 $\mathrm{CF}_*(\hat{\mathrm{H}})$ 之间的关系，我们将要求用于 $\hat{\mathrm{H}}$ 和$-\mathrm{f}$ 的输入定向与用于 H 和 f 的输入定向以特定方式相关。（如果输入定向之间不存在这些关系，则第 7 节中可能需要额外的符号。）

首先，与命题 A.2 一致，若 ν 是用于构造 $\mathbf{CM}_*(f)$ 的 f 的类梯度向量场，则在构造 $-f$ 的 $\mathbf{CM}_*(-f)$ 时，我们使用 $-\nu$ 作为类梯度向量场，并通过以下条件为流形 $\mathbf{D}^{-\nu}(p)=$ 定向：$T_p\mathbf{A}^{\nu}(p)\oplus T_p\mathbf{D}^{\nu}(p)=T_pM$ 作为定向向量空间。

对于 C^- 上相关的 $\bar\partial$-算子，首先注意，若 $\bar\gamma\in P(\hat H)$，则可通过以下方式得到一个用于 $\bar\gamma$ 的右帽 $w^I\colon D^-\to M$：从用于 $\gamma\in P(H)$（其中 $\bar\gamma(t)=\gamma(1-t)$）的左帽 $w\colon D\to M$ 出发，然后令 $w^I(z)=w(1/z)$。（因此 $w^I=\bar w^R$，其中 $\bar w(z)=w(\bar z)$。）$T_w\colon w^*TM\xrightarrow{\sim}C\times\mathbb{R}^{2m}$ 的辛平凡化，通过与 $(z,\bar v)\mapsto(1/z,\bar v)$ 复合，诱导出平凡化 $T_{w^I}\colon w^{I*}TM\xrightarrow{\sim}C^-\times\mathbb{R}^{2m}$。若 $B_\gamma\colon S^1\mapsto\mathfrak{sp}_{2m}$ 表示相对于平凡化 T_w、沿 γ 的 H 的线性化哈密顿流的生成元，则相对于 T_{w^I}，沿 $\bar\Gamma$ 的 $\hat H$ 的线性化哈密顿流由 $B_{\bar\gamma}(t)=-B_\gamma(1-t)$ 生成。接着，我们可以如 A.3.1 节所述，在 C^- 上构造一个可容许的 ∂-算子 D^-w：任取 $B^-_{\bar\gamma}\colon C^-\to\mathfrak{gl}_{2m}$，使得当 $s\ll0$ 时 $B^-_{\bar\gamma}(e^{2\pi(s+it)})=B_{\bar\gamma}(t)$，当 $s\gg0$ 时 $B^-_{\bar\gamma}(e^{2\pi(s+it)})=0$，并令 $D^-w=2\pi\left(r\frac{\partial}{\partial r}+J_0\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-B^-_{\bar\gamma}(re^{i\theta})$。令 $B^+_\gamma(z)=-B^-_{\bar\gamma}(1/z)$，便得到类似的算子 $D^+w=2\pi\left(r\frac{\partial}{\partial r}+J_0\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-B^+_\gamma(re^{i\theta})$，其定义在 C 上。

现在，假设我们已经为 $CF_*(H)$ 选定了定向规定，这些规定便确定了 $\mathrm{Det}(D^+w)$的一个定向。具体而言，我们的定向规定直接给出可容许 ∂-算子 D^-w 在 C^- 上的行列式线的一个定向；该算子由将 D^+w 的公式中的 $B^+_\gamma(z)$ 替换为 $B^+_\gamma(1/\bar z)$得到。随后，要求粘合映射 $\mathrm{Det}(D^+w)\otimes\mathrm{Det}(D^-w)\to\mathrm{Det}(D^+w\#_s D^-w)$在 S 充分大时保定向，便可确定 $\mathrm{Det}(D^+w)$ 的定向；其中，可容许的 $\bar\partial$-算子 $D^+w\#_s D^-w$ 在 CP^1 上的行列式线，通过延拓至一个复线性算子来定向。但容易看出，双全纯映射 $z\mapsto1/z$（从 C 到 C^-）会诱导一个同构 $\mathrm{Det}(D^-w)\cong\mathrm{Det}(D^+w)$。在此，我们规定：对 $P(\hat H)$ 中各种元素 $\bar w$ 的封帽 $\bar w$，其行列式线 $\mathrm{Det}(D^-w)$ 的定向，应使这些同构 $\mathrm{Det}(D^-w)\cong\mathrm{Det}(D^+w)$保定向。

这足以通过 A.3.2 节所述的步骤，确定 $CF_*(\hat H)$ 的 Floer 微分和 PSS 映射中涉及的空间的定向。具体而言，向外 Floer 帽空间 $M^{\mathrm{out}}_J(\hat H;[\bar\gamma,\bar w])$ 的定向由我们刚刚选定的 $\mathrm{Det}(D^-w)$ 的定向经延拓得到。对于 Floer 轨迹空间$\tilde M_J(\hat H;[\bar\gamma,\bar w],[\bar\gamma',\bar w'])$ 中的元素 u，Floer 方程在 u 处的线性化是 $\mathbb{R}\times S^1$ 上的一个可容许 $\bar\partial$-算子 D_u，其行列式线的定向由以下条件确定：粘合映射 $\mathrm{Det}(D_u)\otimes\mathrm{Det}(D^-w')\to\mathrm{Det}(D_u\#_s D^-w')$ 相对于由所选 $\mathrm{Det}(D^-w)$ 的定向经延拓诱导的陪域定向是保定向的。最后，向内 Floer 帽空间 $M^{\mathrm{in}}_J(H;[\bar\gamma,\bar w])$ 的定向由延拓得到；其中，可容许 ∂-算子 $D^\pm w$ 在 C 上的行列式线的定向由以下条件确定：粘合映射 $\mathrm{Det}(D^\pm w)\otimes\mathrm{Det}(D^-w)\to\mathrm{Det}(D^\pm w\#_s D^-w)$ 是保定向的，这里使用先前选定的 $\mathrm{Det}(D^-w)$ 的定向，以及由复线性算子经延拓诱导的 $\mathrm{Det}(D^\pm w\#_s D^-w)$ 的标准定向。

对于 $\gamma,\gamma'\in P(H)$ 带有左帽 w、w′的情形，我们有 Floer 轨迹空间的微分同胚 $I_{\mathrm{cyl}}\colon\tilde M_{J,H}([\gamma,w],[\gamma',w'])\to\tilde M_{J,\hat H}([\bar\gamma',\bar w'],[\bar\gamma,\bar w])$，其定义为 $(I_{\mathrm{cyl}}u)(s,t)=u(-s,1-t)$，其中 $(s,t)\in\mathbb{R}\times S^1$。类似地，如果 $H^+\colon C\times M\to\mathbb{R}$、$H^-\colon C^-\times M\to\mathbb{R}$、$\hat H^+\colon C\times M\to\mathbb{R}$，

并且 $\hat{H}^-: C^- \times M \to R$ 与之满足 $\hat{H}^{\pm}(z,x) = H^{\mp}(1/z,x)$，则我们有微分同胚 $I^{\pm}$： M in $J, H^+([\gamma,w]) \to M$ out $J, \hat{H}^-([\bar{\gamma},\bar{w}])$，以及 $I^{\mp}$： M out $J, H^-([\gamma,w]) \to M$ in $J, \hat{H}^+([\bar{\gamma},\bar{w}])$；这两个微分同胚都会将映射 u 发送为其与 $z \mapsto 1/z$ 的前复合。

命题 A.8. 微分同胚 I^{cyl}、$I^{\pm}$、$I^{\mp}$ 对定向的作用如下：

(i) $I^{\pm}: M$ in $J, H^+([\gamma,w]) \to M$ out $J, \hat{H}^-([\bar{\gamma},\bar{w}])$ 是保定向的。(ii) $I^{\mp}: M$ out $J, H^-([\gamma,w]) \to M$ in $J, \hat{H}^+([\bar{\gamma},\bar{w}])$ 对定向的作用由符号 $(-1)^{\mu_H([\gamma,w])}$ 决定。(iii) $I^{cyl}: \tilde{M}^{J,H}([\gamma,w],[\gamma',w']) \to \tilde{M}^{J,\hat{H}}([\bar{\gamma}',\bar{w}'],[\bar{\gamma},\bar{w}])$ 对定向的作用由符号 $(-1)^{\mu_H([\gamma,w])(\mu_H([\gamma,w])-\mu_H([\gamma',w'])}$ 决定。

注记 A.9。 (iii) 中的符号应被视为与命题 A.2 中的符号直接类似；需要注意的是，在当前语境下，命题 A.2 中出现的数 $n = \dim M$ 是偶数。

证明。 每一条陈述都对应于由切出各种模空间的方程的线性化所得到的算子的行列式线之间的关系。(i) 直接由我们的约定得出：$z \mapsto 1/z$ 在先前记作 D^+_w 和 D^-_w 的算子的行列式线之间诱导一个保定向同构。

其余符号与以下一般事实有关（参见例如 [Se08，第 150] 页）。设 $A_1: X_1 \to Y_1$ 和 $A_2: X_2 \to Y_2$ 是两个 Fredholm 算子，它们导出直和算子 $A_1 \oplus A_2: X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2$ 和 $A_2 \oplus A_1: X_2 \oplus X_1 \to Y_2 \oplus Y_1$。存在自然同构 $\mathrm{Det}(A_1) \otimes \mathrm{Det}(A_2) \cong \mathrm{Det}(A_1 \oplus A_2)$，反过来交换 A_1 和 A_2 时也类似。另一方面，$\mathrm{Det}(A_1 \oplus A_2)$ 与 $\mathrm{Det}(A_2 \oplus A_1)$ 之间存在一个直接的识别；就前一句所述的同构而言，这一识别由映射 $\Sigma: \mathrm{Det}(A_1) \otimes \mathrm{Det}(A_2) \to \mathrm{Det}(A_2) \otimes \mathrm{Det}(A_1)$ 给出，其定义为 $\Sigma(a_1 \otimes a_2) = (-1)^{\mathrm{ind}(A_1)\mathrm{ind}(A_2)} a_2 \otimes a_1$。

话虽如此，(ii) 中的符号是由 $z \mapsto 1/z$ 诱导的映射 $\mathrm{Det}(D^- w) \to \mathrm{Det}(D^{\pm} w)$ 所对应的符号。现在，$z \mapsto 1/z$ 还诱导出映射 $\mathrm{Det}(D^+ w) \to \mathrm{Det}(D^- w)$ 以及 $\mathrm{Det}(D^+ w \# {}_S D^- w) \to \mathrm{Det}(D^{\pm} w \# {}_S D^- w)$，且这两个映射都是保定向的。（在第一种情况下，这直接由我们的定向约定得到；在第二种情况下，通过延拓到适当的复线性算子，这一结论源于 $z \mapsto 1/z$ 作为 $CP^1 \to CP^1$ 的映射是全纯的。）我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Det}(D^+_w) \otimes \mathrm{Det}(D^-_w) & \longrightarrow & \mathrm{Det}(D^+_w \#_S D^-_w) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{I}_* \otimes \mathbb{I}_*} & & \\
\mathrm{Det}(D^-_{\bar{w}}) \otimes \mathrm{Det}(D^+_{\bar{w}}) & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{I}_*} \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma} & & \\
\mathrm{Det}(D^+_{\bar{w}}) \otimes \mathrm{Det}(D^-_{\bar{w}}) & \longrightarrow & \mathrm{Det}(D^+_{\bar{w}} \#_S D^-_{\bar{w}})
\end{array}$$

其中水平映射是粘合映射，它们保定向；所有标记为 I_* 的映射均由 $z \mapsto 1/z$（在适当的定义域上）诱导。由于右侧箭头保定向，左侧的复合也保定向。由于 I_*: 行列式线 $(D^+_w) \to$ 行列式线 (D^-_w)

保定向，因此可知 I_*: 行列式线$(D^- w) \to$行列式线$(D^+ w)$对定向的影响由 Σ 的公式中的符号给出，即 $(-1)^{\mathrm{ind}(D^+ w)}\mathrm{ind}_{(D^- w)} = (-1)^{(2m-\mu_H([\gamma,w]))\mu_H([\gamma,w])} = (-1)^{\mu_H([\gamma,w^])}$。

(iii) 的证明类似：对于 $\mathrm{u} \in \tilde{\mathrm{M}}([\gamma,\mathrm{w}],[\gamma',\mathrm{w}'])$，令 D_u 为 Floer 方程左端在 u 处的线性化，则反转 s 和 t 变量会诱导一个同构 $\mathrm{J}_*: \mathrm{Det}(\mathrm{D}_u) \to \mathrm{Det}(\mathrm{D}_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}}\mathrm{u}})$，而粘合算子 $\mathrm{D}^+ \mathrm{w}\#_S \mathrm{D}_u$ 和 $\mathrm{D}_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}}\mathrm{u}}\#_S \mathrm{D}^- \mathrm{w}$ 通过 $\mathrm{z} \mapsto 1/\mathrm{z}$ 相互交织。诱导映射 $\mathrm{I}_*: \mathrm{Det}(\mathrm{D}^+ \mathrm{w} \#_S \mathrm{D}_u) \to \mathrm{Det}(\mathrm{D}_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}}\mathrm{u}}\#_S \mathrm{D}^- \mathrm{w})$ 保持定向，因为定义域与值域上的定向通过延拓分别与 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^+ \mathrm{w},)$ 和 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^- \mathrm{w},)$ 上的定向相关联，并且我们的定向约定规定 $\mathrm{z} \mapsto 1/\mathrm{z}$ 在 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^+ \mathrm{w},)$ 与 $\mathrm{Det}(\mathrm{D}^- \mathrm{w},)$ 之间诱导一个保定向映射。于是得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Det}(D_w^+) \otimes \mathrm{Det}(D_u) & \longrightarrow & \mathrm{Det}(D_w^+ \#_S D_u) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{I}_* \otimes \mathbb{J}_*} & & \\
\mathrm{Det}(D_{\tilde{w}}^-) \otimes \mathrm{Det}(D_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}} u}) & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{I}_*} \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma} & & \\
\mathrm{Det}(D_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}} u}) \otimes \mathrm{Det}(D_{\tilde{w}}^-) & \longrightarrow & \mathrm{Det}(D_{\mathbb{I}_{\mathrm{cyl}} u} \#_S D_{\tilde{w}}^-)
\end{array}$$

其中，水平粘合映射以及记作 I_* 的两个映射均为保定向的；因此，J_* 对定向的影响由符号 $(-1)^{\mathrm{ind}(D^+ w)}\mathrm{ind}_{(D_u)} = (-1)^{(2m-\mu_H([\gamma,w]))(\mu_H([\gamma,w])-\mu_H([\gamma',w']))} = (-1)^{\mu_H([\gamma,w])(\mu_H([\gamma,w])-\mu_H([\gamma',w'^]))}$ 决定。□

回顾 (7.7) 和 (7.9) 中的 $\Lambda_\uparrow$-双线性配对 $L^F{}_{H,k}: CF_{2m-k}(H) \times CF_k(\hat{}H) \to \Lambda$ 以及 $L^M{}_{f,k}: (\hat{}\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f;\kappa))_{2m-k} \times (\hat{}\Lambda_\uparrow \otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(-f;$ 这两种情形下的配对均由两个因子的标准基之间显然的双射诱导。上述内容使我们能够确定各种映射与这些配对相互作用时产生的符号。（参见备注 A.5。）

推论 A.10. 对于 $c \in CF_{2m-k}(H)$ 和 $d \in CF_{k+1}(\hat{}H)$，我们有

$$L^F_{H,k}(c, \partial_{\hat{H}} d) = (-1)^{k+1} L^F_{H,k+1}(\partial_H c, d).$$

证明. 由双线性性，只需在 Floer 复形相应分次部分的生成元上验证恒等映射。设 $[\gamma,\mathrm{w}] \in \tilde{\mathrm{P}}_{2m-k}(\mathrm{H})$ 和 $[\gamma',\mathrm{w}'] \in \tilde{\mathrm{P}}_{2m-k-1}(\mathrm{H})$，于是 $[\bar{\gamma}, \bar{\mathrm{w}}] \in \tilde{\mathrm{P}}_k(\hat{}\mathrm{H})$ 和 $[\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'] \in \tilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathrm{H})$。若 $\mathrm{B} \in \Gamma'$，则 $\mathrm{T}\,\mathrm{I}_\omega(\mathrm{B})$ 在 $\mathrm{L}^F\mathrm{H},\mathrm{k}([\gamma,\mathrm{w}],\partial\hat{}\mathrm{H}[\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'])$ 中的系数，是零维流形 M_J、$\hat{}\mathrm{H}([\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'],[\bar{\gamma},\mathrm{B}\#\ \bar{\mathrm{w}}]) = \tilde{\mathrm{M}}_J$、$\hat{}\mathrm{H}([\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'],[\bar{\gamma},\mathrm{B}\#\ \bar{\mathrm{w}}])\mathrm{R}$ 中元素的带符号计数；而 $\mathrm{T}\,\mathrm{I}_\omega(\mathrm{B})$ 在 $\mathrm{L}^F\mathrm{H},\mathrm{k}+1(\partial_H[\gamma,\mathrm{w}],[\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'])$ 中的系数，则是 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma,\mathrm{w}],[\gamma',\mathrm{B}\#\mathrm{w}'])\,\mathrm{R}$ 中元素的带符号计数。

现在，作为定向流形，$\tilde{\mathrm{M}}_J, \hat{}\mathrm{H}([\bar{\gamma}', \bar{\mathrm{w}}'],[\bar{\gamma},\mathrm{B}\#\ \bar{\mathrm{w}}])$ 等于 $\tilde{\mathrm{M}}_J, \hat{}\mathrm{H}([\bar{\gamma}',(-\mathrm{B})\#\ \bar{\mathrm{w}}'],[\bar{\gamma}, \bar{\mathrm{w}}])$；后者（由于 $[\bar{\gamma}',(-\mathrm{B})\#\ \bar{\mathrm{w}}'] = [\bar{\gamma}',\mathrm{B}\#\overline{\mathrm{w}'}]$）通过 $\mathrm{I}_{\mathrm{cyl}}$ 微分同胚于 $\tilde{\mathrm{M}}_{J,H}([\gamma,\mathrm{w}],[\gamma',\mathrm{B}\#\mathrm{w}'])$，其定向符号为 $(-1)^{\mu_H([\gamma,\mathrm{w}^])} = (-1)^k$，根据命题 A.8(iii)。由于映射 $\mathrm{I}_{\mathrm{cyl}}$ 相对于实数群作用是反等变的（两种情况下的作用均由平移给出，沿

正s 方向），它下降为商空间上的微分同胚，并使定向受到 $(-1)^{k+1}$ 的影响。因此，$L^F_{H,k}([\gamma,w],\partial\hat{}_H[\bar{\gamma}',\bar{}w'])$ 和$L^F{}_{H,k+1}(\partial_H[\gamma,w],[\bar{\gamma}',\bar{}w'])$ 中所有 T 的幂的系数均由符号 $(-1)^{k+1}$ 联系起来，由此可得结论。□

推论 A.11. 对于 $c\in(\hat{}\Lambda_\uparrow\otimes_\kappa \mathbf{CM}_*(f;\kappa))_{2m-k}$ 以及 $d\in CF_k(\hat{}H)$，我们有

$$L^F_{H,k}(\tilde{\Phi}^{f,H^+}_{PSS}(c),d)=L^M_{f,k}(c,\tilde{\Psi}^{\hat{H}^-,-f}_{PSS}(d)). \tag{A.6}$$

这里，正如证明中将会显而易见的，我们使用了由命题 A.2 的陈述所规定的关于 f 和 $-f$ 的 Morse 链复形的定向规则（这些规则关联于 $\pm\nu$ 的下降流形）。

证明。再次，只需在 c 和 d 分别为相关向量空间在 $\Lambda_\uparrow$ 上的标准生成元时证明该结论。设 p ∈ 临界点集 (f)，且 A ∈ˆT，其中 ind f (p) − 2I$_{c_1}$(A) =k ；再设 $[\gamma,w]\in\tilde{}P_{2m-k}($ H)（因此 $[\bar{\gamma},\bar{}w]\in\tilde{}P_k(\hat{}H)$）。那么，T^0 在 L^{F}H,k$(\tilde{\Phi}^{f,}H^+$PSS (T Ap),$[\gamma,w])$ 中的系数（取值于 κ）等于下列点的带符号计数：

$$\mathscr{M}^{\mathrm{in}}_{J,H^+}(p;[\gamma,w\#(-A)])=(ev^{J,H^+}_{0,[\gamma,w\#(-A)]})^{-1}(\mathbf{D}^\nu(p)), \tag{A.7}$$

而相应的系数 $L^M{}_{f,k}(T_{Ap},\ \tilde{\Psi}\hat{}_{H^-,-fPSS}[\bar{\gamma},\bar{}w])$ 则是

$$\mathscr{M}^{\mathrm{out}}_{J,\hat{H}^-}([\bar{\gamma},\bar{w}\#A])=(ev^{J,\hat{H}^-}_{\infty,[\bar{\gamma},\bar{w}\#A]})^{-1}(\mathbf{A}^{-\nu}(p)). \tag{A.8}$$

由于 $[\bar{\gamma},\bar{}w\#A]=[\bar{\gamma},\overline{w\#(-A)}]$，命题 A.8(i) 表明，定义域 M in $_{J,H^+}([\gamma,w\#(-A)]$) 以及 ev$_0^{J\ H^+}$, ,$_{[\gamma,}$w#(–A)] 和 ev$_\infty^{J\ \ \bar{}}$, ˆH ,$_{[\bar{\gamma},\bar{}}$w#A] 的 M out J, ˆH$_-$([$\bar{\gamma}$, $\bar{}$w#A]) 通过微分同胚 I± 保定向地相互对应；此外，ev$_0^{J\ H^+}$, ,$_{[\gamma,}$w#(–A)] = = ev$_\infty^{J\ \ \bar{}}$, ˆH ,$_{[\bar{\gamma},\bar{}}$w#A] ◦ I±。当然，(A.7) 和 (A.8) 中出现的子流形 D$^\nu$(p) 与 A$^{-\nu}$(p) 作为集合彼此相等。按照我们的约定定义、并用于确定 (A.7) 和 (A.8) 定向的余定向也彼此相同：D$^\nu$(p) 的余定向满足 N$_p$D$^\nu$(p) ⊕ ⊕ T$_p$D$^\nu$(p) = = T$_p$M，且这些是定向向量空间；与此同时，按照一般规则，我们通过将 N$_p$A$^{-\nu}$(p) 与 T$_p$D$^{-\nu}$(p) 等同来为 A$^{-\nu}$(p) 赋予余定向，而命题 A.2 规定 T$_p$D$^{-\nu}$(p) ⊕ ⊕ T$_p$D$^\nu$(p) = = T$_p$M，且这些是定向向量空间。既然这些余定向一致，I± 在 (A.7) 和 (A.8) 中的零维流形之间的限制就是保定向微分同胚。因此，对于任意满足 ind$_f$(p)−2I$_{c_1}$(A) = μ_H([γ,w]) =2m−k 的 ˆA ∈ˆT，T ^{0} 在 L^{F}H,k$(\tilde{\Phi}^{f,}$H$^+$PSS (T Ap),$[\gamma,w])$ 和 L^{M}f ,k(T Ap, $\tilde{\Psi}$ˆH$^-$,–f PSS$[\bar{\gamma},\bar{}w]$) 中的系数相同。将 A 替换为任意满足 I$_{c_1}$(B) = 0 的 A−B 应用这一结论，可知 T$^{\omega(B)}$ 的相应系数也全部相同，从而得到所需结果。□

注记 A.12。 在 Morse 和 Floer 两种理论中，我们都可以通过采用 [Se08, (12f)],[Abo13, 第 1 节5]中的方法，减少定义中的一些任意性：不再将 Morse 复形 $\mathbf{CM}_*(f;\kappa)$ 中对应于临界点 p 的直和项取为域 κ 的一个显式副本（带有指定的生成元 1），而是取为一个一维 κ向量空间 $o_{p,f}$，由 $\mathbf{D}^\nu(p)$ 的两种可能定向生成，并规定它们的和为零。类似地，每个 $\gamma\in P(H)$ 对应

的左帽 w 都会使 $CF_k(H)$ 中出现一个一维$\Lambda_\uparrow$向量空间 $o_{\gamma,H}$，它由 $\det(D^- w)$的两种可能定向生成，并规定它们的和为零。通过将我们对 $D^v(p)$或 $\det(D^- w)$所作的定向选择用作 $o_{p,f}$ 或 $o_{\gamma,H}$ 的优选基，我们的构造与这些构造同构；但是，采用 [Se08],[Abo13] 中的表述，无需选择此类定向。构造我们所考虑的各种映射时，可以对相应零维模空间中的每个元素赋予相应定向模 $o_{p,f}$ 或 $o_{\gamma,H}$之间的一个同构，而不是赋予符号 ± 1。

在本小节的计算中，除此之外还会留下一个多少有些任意的选择对，不过可以将其确立为统一约定：由于 $o_{p,f}$、$o_{\gamma,H}$ 没有优选的生成元，为了定义配对 $L^M f,k$、$L^F H,k$，需要选择同构 $o_{p,f}\otimes o_{p,-f}\to\kappa$和 $o_{\gamma,H}\otimes o_{\bar\gamma,}\hat{}H\to\Lambda_\uparrow$。在我们的语境中，这分别对应于以下规则：将 $T_pD^{-v}(p)\oplus T_pD^v(p)=T_pM$ 视为定向向量空间，以及通过将前者与 $\det(D^+ w)$等同，再利用 $\det(D^+ w\#\ {}_sD^- w)$上的标准定向，来关联 $\det(D^+ w)$ 和 $\det(D^- w)$上的定向，从而建立 $\det(D^- w)$ 与 $\det(D^- w)$ 之间的关系。推论 A.11 中没有出现符号，而备注 A.5 和推论 A.10 中的符号相同，这些事实可以视为表明这些定向约定彼此兼容。

参考文献

[Abo13] M. Abouzaid. 辛上同调与 Viterbo 定理。载于《几何与拓扑中的自由环路空间》，IRMA 数学与理论物理讲座，24，EMS Press，苏黎世，2015年，271–485。[AD14] M. Audin 和 M. Damian。Morse理论与Floer同调。Universitext，施普林格，2014年。[BX22] S. Bai 和 G. Xu。整数上的阿诺德猜想。arXiv:2209.08599。[Ba94] S. Barannikov。带框莫尔斯复形及其不变量。《奇点与分岔》，93–115，苏联数学进展，21，美国数学会，普罗维登斯，RI，1994年。[BGO19] N. Berkouk、G. Ginot 和 S. Oudot。水平集持久性与层理论。arXiv:1907.09759。[Bo87] N. Bourbaki。拓扑向量空间。第1–5章。数学基础丛书，施普林格出版社，柏林，1987年。由 H. G. Eggleston 和 S. Madan 从法文译出。[Bu17] D. Burghelea。在连续函数存在时对Betti数和同调的细化，I。代数几何拓扑 17（2017），第4期，2041–2080。[Bu18a] D. Burghelea。实值映射与角值映射的新拓扑不变量：Morse-Novikov理论的替代方案。世界科学出版社，哈肯萨克，NJ，2018年。[Bu18b] D. Burghelea。在连续函数存在时对Betti数和同调的细化，II：角值映射的情形。代数几何拓扑 18（2018），第5期，3037–3087。[Bu20a] D. Burghelea。闭1-形式的Morse-Novikov理论替代方案。I。欧洲数学杂志 6（2020），第3期，713–750。勘误见欧洲数学杂志 8（2022），第1期，426。[Bu20b] D. Burghelea。闭1-形式的Morse-Novikov理论替代方案。II。arXiv:2009.05858v5。[BD13] D. Burghelea 和 T. Dey。圆值映射的拓扑持久性。Discrete Comput. Geom. 50（2013），第1期，69–98。[BH01] D. Burghelea 和 S. Haller。关于闭1-形式的拓扑与分析（重新审视诺维科夫理论）。数学教学专著 38（2001），133–175。[BH17] D. Burghelea 和 S. Haller。角值映射、条形码与若尔当块的拓扑。应用计算拓扑杂志 1（2017），第1期，121–197。[CdSKM19] G. Carlsson、V. de Silva、S. Kališnik 和 D. Morozov。通过之字形持久性实现参数化同调。代数几何拓扑 19（2019），第2期，657–700。[CdSM09] G. Carlsson、V. de Silva 和 D. Morozov。之字形持久同调与实值函数，载于第25届 ACM 计算几何研讨会（SoCG）论文集，2009年，第247–256页。

[CdSGO16] F. Chazal、V. de Silva、M. Glisse、S. Oudot。持久模的结构与稳定性，SpringerBriefs in Mathematics。施普林格，2016年。[CGG21] E. Cineli、V. Ginzburg 和 B. Gürel。Hamiltonian微分同胚的拓扑熵：持久同调与Floer理论的视角。arXiv:2111.03983。[CEH09] D. Cohen-Steiner、H. Edelsbrunner 和 J. Harer。利用庞加莱对偶与Lefschetz对偶扩展持久性。Found. Comput. Math. 9（2009），第1期，79–103。勘误见 Found. Comput. Math. 9（2009），第1期，133–134。[CO20] J. Cochoy 和 S. Oudot。精确 pfd 持久双模的分解。Discrete Comput. Geom. 63（2020），第2期，255–293。[Dol80] A. Dold。《代数拓扑讲义》。第二版。施普林格出版社，柏林，1980年。[EH10] H. Edelsbrunner 和 J. Harer。《计算拓扑：导论》。美国数学学会，普罗维登斯，RI，2010年。[EP03] M. Entov 和 L. Polterovich。Calabi拟态与量子同调。Int. Math. Res. Not. 2003，第30期，1635–1676。[FH93] A. Floer 和 H. Hofer。辛几何中周期轨道问题的相干定向。Math. Z. 212（1993），第1期，13–38。[FH94] A. Floer 和 H. Hofer。辛同调。I。C^n中的开集。Math. Z. 215（1994），第1期，37–88。[Ha02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002年。[HS95] H. Hofer 和 D. Salamon。Floer同调与Novikov环。载于《Floer纪念文集》，483–524，Progr. Math.，133，Birkhäuser，巴塞尔，1995年。[HL99] M. Hutchings 和 Y.-J. Lee。圆值Morse理论、Reidemeister挠率与三维流形的 Seiberg-Witten 不变量。Topology 38（1999），861–888。[IH71] M. Ikeda 和 M. Haifawi。关于非阿基米德赋范空间中的最佳逼近性质。Indag. Math. 74（1971），49–52。[Kal75] G. Kalmbach。关于Morse理论中的一些结果。Canadian J. Math. 27（1975），88–105。[KM09] J. Kati´c 和 D. Milinkovi´c。Morse-Floer理论中混合模空间的相干定向。Bull. Braz. Math. Soc. 40（2009），第2期，253–300。[Lat94] F. Latour。在 de Rham 上同调类中非奇异闭1-形式的存在性。Publ. Math. de l'I.H.É.S.，80（1994），第135–194页。[Lau92] F. Laudenbach。附录。关于 Thom-Smale复形。Astérisque 205（1992），219–233。[LO95] H. V. Lê 和 K. Ono。辛不动点、Calabi不变量与诺维科夫同调。Topology 34（1995），第1期，155–176。[Lev77] J. Levine。纽结模。I。Trans. Amer. Math. Soc. 229（1977），1–50。[Mc10] D. McDuff。Hamiltonian Floer理论中的单值化。Comment. Math. Helv. 85（2010），第1期，95–133。[McSa12] D. McDuff 和 D. Salamon。《J-全纯曲线与辛拓扑》。第二版。美国数学学会丛书，52。美国数学学会，普罗维登斯，RI，2012年。[Mil63] J. Milnor。《Morse理论》。Annals of Mathematics Studies，51，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，N.J.，1963年。[MoSp65] A. F. Monna 和 T. A. Springer。关于非阿基米德Banach空间的结构。Indag. Math. 68（1965），602–614。[Mor25] M. Morse。n个独立变量的实函数临界点之间的关系。Trans. Amer. Math. Soc. 27（1925），第3期，345–396。[Nov81] S. P. Novikov。多值函数与泛函：Morse理论的一个类比。Dokl. Akad. Nauk SSSR 260（1981），第1期，31–355。[Oh97] Y.-G. Oh。作为作用泛函几何学的辛拓扑。I。余切丛上的相对Floer理论。J. Differential Geom. 46（1997），第3期，499–577。[Oh15] Y.-G. Oh。辛拓扑与Floer同调。New Mathematical Monographs，剑桥大学出版社，2卷，2015年。[Paj95] A. V. Pajitnov。关于有理Morse形式的诺维科夫复形。Ann. Fac. Sci. Toulouse 4（1995），297–338。[Paj06] A. V. Pajitnov。圆值Morse理论。de Gruyter数学研究丛书32，柏林，2006年。

[Par16] J. Pardon. 一种代数方法，用于处理伪全纯曲线模空间上的虚基本循环。Geom. Topol. 20 (2016), 779–1034.[PSS94] S. Piunikhin、D. Salamon 和 M. Schwarz. 辛Floer-Donaldson理论与量子上同调。载于《接触几何与辛几何》（剑桥，1994），Publ. Newton Inst., 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 171–200.[PS16] L. Polterovich 和 E. Shelukhin. 自治哈密顿流、Hofer几何与持久模。Selecta Math. 22 (2016), 227–296.[Qin10] L. Qin. 希尔伯特流形上由Morse理论产生的模空间与CW结构。J. Topol. Anal. 2 (2010), no. 4, 469–526.[Ran02] A. Ranicki. 代数与几何手术。Oxford Mathematical Monographs, 2002.[Rot09] J. Rotman. 同调代数导论。第二版。Universitext, Springer, 2009.[Sal97] D. Salamon. Floer同调讲义。IAS/PCMI辛几何与拓扑研究生暑期学校讲义，1997.[Sc93] M. Schwarz. Morse同调。Progr. Math. 111, Birkhäuser, 1993.[Sc95] M. Schwarz. Floer同调中由 S^1-配边产生的上同调运算。苏黎世联邦理工学院博士论文，1995.[Sc00] M. Schwarz. 关于闭辛非球面流形上的作用谱。Pacific J. Math. 193 (2000), 419–461.[Se97] P. Seidel. 辛自同构群与量子同调环中的可逆元。Geom. Funct. Anal. 7 (1997), no. 6, 1046–1095.[Se08] P. Seidel. Fukaya范畴与Picard–Lefschetz理论。Zurich Lectures in Advanced Mathematics, EMS, Zürich, 2008.[Sh22] E. Shelukhin. 关于Hofer-Zehnder猜想。Ann. Math. (2) 195 (2022), no. 3, 775–839.[Us08] M. Usher. Floer理论中的谱数。Compositio Math. 144 (2008), 1581–1592.[Us10] M. Usher. 滤过Floer-Novikov复形中的对偶性。J. Topol. Anal. 2 (2010), no. 2, 233–258.[Us11] M. Usher. 变形哈密顿Floer理论、容量估计与Calabi拟同态。Geom. Topol. 15 (2011), no. 3, 1313–1417.[UZ16] M. Usher 和 J. Zhang. 持久同调与Floer-Novikov理论。Geom. Topol. 20 (2016), 3333–3430.[Vit92] C. Viterbo. 作为生成函数几何的辛拓扑。Math. Ann. 292 (1992), no. 4, 685–710.[Zap15] F. Zapolsky. 拉格朗日Floer-量子-PSS体系与Floer理论中的典范定向，arXiv:1507.02253.[ZC05] A. Zomorodian 和 G. Carlsson. 计算持久同调。Discrete Comput. Geom. 33 (2005), 249–274.

数学系数学，佐治亚大学佐治亚州，雅典，佐治亚州 30602电子邮件地址：
usher@uga.edu