arXiv:2302.14388v1 [math.AT] 28 Feb 2023

柏拉图立体的 Vietoris–Rips复形

NADA SALEH、THOMAS TITZ MITE 和 STEFAN WITZEL

摘要。我们确定了柏拉图立体（的顶点集）的 Vietoris–Rips复形的同伦类型。最有趣的情形是，当参数介于组合距离 3 和 4 之间时，正十二面体的 Vietoris–Rips复形是九个 3维球面的楔和。

度量空间 X 的 Vietoris–Rips复形 $\mathrm{VR}_r(X)$ 在参数为 r 时，为 X 在尺度 r 下提供了一个拓扑模型。在小尺度下，它被用于拓扑数据分析，以估计与数据集（例如点云）相关的拓扑信息，参见例如 [EH10]。在大尺度下，它被用于几何群论，以分析群的拓扑有限性性质，参见例如 [GdlH90，第 4] 章和 [Alo94]。通常，人们关注某一尺度下的粗略行为，但在结构非常规整的情形中，可能得到完整的图景，例如 [AA17]，其中确定了圆的所有 Vietoris–Rips复形。本文将确定柏拉图立体顶点集的 Vietoris–Rips复形：

定理。设 P 为一个顶点集为 $P^{(0)}$ 的柏拉图立体，$0 < \delta_1 < \ldots < \delta_k$ 表示 $P^{(0)}$中元素对之间的距离。若 $r \leq 0$，则 $\mathrm{VR}r(P^{(0)})$ 的同伦类型为 $\mathrm{VR}r(P^{(0)}) = \emptyset$；若 $r > \delta_k$，则为 $\mathrm{VR}r(P^{(0)}) \simeq *$；其他情况下如下：

(1) 若 P 是一个四面体，则

$$\mathrm{VR}_r(P^{(0)}) \simeq \begin{cases} \bigvee^3 S^0 & 0 < r \leq \delta_1 \end{cases}$$

(2) 若 P 是一个八面体，则

$$\mathrm{VR}_r(P^{(0)}) \simeq \begin{cases} \bigvee^5 S^0 & 0 < r \leq \delta_1 \\ S^2 & \delta_1 < r \leq \delta_2 \end{cases}$$

（3）如果 P 是立方体，那么

$$\mathrm{VR}_r(P^{(0)}) \simeq \begin{cases} \bigvee^7 S^0 & 0 < r \leq \delta_1 \\ \bigvee^5 S^1 & \delta_1 < r \leq \delta_2 \\ S^3 & \delta_2 < r \leq \delta_3 \end{cases}$$

日期：2023年3月1日。2010 数学主题分类。主要分类 55N31；次要分类 51M20、57Q70、05E45。N.S. 获得了德国学术交流中心奖学金的资助。T.T.M 和 S.W. 获得了德国研究基金会海森堡项目 WI 4079/6 的资助。

（*4*）如果 P 是二十面体，那么

$$\mathrm{VR}_r(P^{(0)}) \simeq \begin{cases} \bigvee^{11} S^0 & 0 < r \leq \delta_1 \\ S^2 & \delta_1 < r \leq \delta_2 \\ S^5 & \delta_2 < r \leq \delta_3 \end{cases}$$

（*5*）如果 P 是一个正十二面体，那么

$$\mathrm{VR}_r(P^{(0)}) \simeq \begin{cases} \bigvee^{19} S^0 & 0 < r \leq \delta_1 \\ \bigvee^{11} S^1 & \delta_1 < r \leq \delta_2 \\ S^2 & \delta_2 < r \leq \delta_3 \\ \bigvee^{9} S^3 & \delta_3 < r \leq \delta_4 \\ S^9 & \delta_4 < r \leq \delta_5 \end{cases}$$

除正十二面体在范围（δ_3，δ_4]中的情形外，这些陈述大多很容易，专家们可能也早已知晓。本文的大部分内容将专门讨论这一情形。

自然可以尝试将这一结果推广到所有正多胞体。对于单形、交叉多胞体以及四维正多胞体（120胞体除外），这同样很容易。对于高维立方体，Vietoris–Rips复形不再都是单一维数球面的楔和（这可以从同调计算中看出），低维情形已在 [AA22]中得到研究。120胞体的组合直径为15，因此还存在许多可能饶有趣味的 Vietoris–Rips复形。其他可设想的推广方向包括阿基米德立体，或球面建筑中的（同一类型的顶点）。

本文结构如下。第1节介绍 Vietoris–Rips 复形和组合 Morse 理论的基础，并阐述在存在对称性的情况下，组合 Morse 理论所面临的一项困难。第2节证明定理中较为简单的情形：在范围 $\delta_3 < r \leq \delta_4$ 内，除正十二面体外的所有情形。第3节给出范围 $\delta_2 < r \leq \delta_3$ 内立方体情形的另一种证明；这既为下一节中的有趣情形做准备，也可推广到更高维的超立方体。最后，第4节证明定理的主要情形。本文的 GAP 代码可在 [SMW23] 获取。

致谢。 我们感谢 Ralf Köhl 促使我们思考球面的 Vietoris–Rips 复形，也感谢 Henry Adams 向我们提出这个问题，并慷慨地与我们分享他的见解。

1. 基础

Vietoris–Rips复形。 设 X 是一个度量空间，例如配备标准度量的 $\mathbb{R}^n$ 的子集。参数为 $r \geq 0$ 的*Vietoris–Rips*复形$\mathrm{VR}_r(X)$是一个顶点集为 X的单纯复形，其中有限子集 $F \subseteq X$ 是某个单纯形的顶点集，当且仅当 $\operatorname{diam} F < r$。我们还将考虑复形$\mathrm{VR}_{\leq r}(X)$，其中要求单形满足 $\operatorname{diam} F \leq r$ 。如果 X 是有限的，那么 VR_r 和$\mathrm{VR}_{\leq r}$ 可以用显而易见的方式相互确定。虽然通常考虑的是VR_r ，但对我们而言，使用它将会

更方便。复形$(\mathrm{VR}_{\leq r}(X))_{r\geq 0}$ 构成一个递增的复形序列，最终达到 X 上的全单形（若 X 的直径无限，则在极限时达到；若其直径有限，则经过有限步达到）。我们需要比较 $r < s$ 时的复形$\mathrm{VR}_{\leq r}(X)$和$\mathrm{VR}_{\leq s}(X)$，并将运用组合Morse理论来进行比较。

组合Morse理论。组合Morse理论由 Forman [为98] 引入，但我们将采用 Kozlov 的 [Koz20] 表述。
设 C 是一个单纯复形。若 $\sigma,\ \tau \in C$ 是单形，我们记作 $\sigma < \tau$，表示 σ 是 τ的一个面。若 σ在 τ中的余维为一，则称 σ是 τ的一个面，称 τ是 σ 的一个上余面，并记作 $\sigma \prec \tau$。单纯复形 C 上的一个（部分）匹配是单形 C 上的一种关系 $\nearrow$，满足以下条件：

> (1) 对于每一对 $\sigma \nearrow \tau$匹配的单形，都有 $\sigma \prec \tau$；(2) 对于每个单形 σ，至多存在一个面或上余面（不能同时存在！）τ，使得 $\tau \nearrow \sigma$ 或 $\sigma \nearrow \tau$。

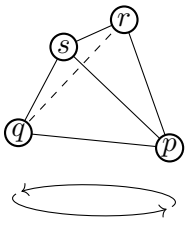
对于那些存在一个满足 $\tau \nearrow \sigma$ 或 $\sigma \nearrow \tau$ 的 τ 的单形 σ，它们会被匹配所匹配；其余的则是临界单形。如果 $\sigma \prec \tau$ 但 $\sigma \nearrow \tau$ 不成立，我们记作 $\tau \searrow \sigma$。这样，部分匹配便将（C 的面偏序集的）Hasse图转化为一个有向图：若边$\sigma \prec \tau$ 对应的单形对已匹配，则该边向上；若未匹配，则向下。若此图不含有向环，则称此匹配为无环匹配。注意，如果确实存在这样的环，那么要证明匹配不是无环匹配，该环必然具有以下形式

$$\sigma_1 \searrow \tau_1 \nearrow \dots \sigma_k \searrow \tau_k \nearrow \sigma_1$$

而且，特别地，它只能涉及相邻维度，因为根据条件 (2)，不可能连续出现两条向上的箭头。我们将使用组合Morse理论中的以下结果：

定理 1.1 ([Koz20, 定理 10.9])**.** 设 C 是一个单纯复形，$D < C$ 是一个子复形。若 C 上存在一个无环匹配，且匹配单形恰好是那些不属于 D 的单形，那么 C 形变收缩到 D。更准确地说，对于每一对 $\sigma \nearrow \tau$，变形收缩依次将 σ 经由 τ 收缩到 τ 的其他面。

只考虑相邻维度中的单形，会使组合Morse理论显得非常优雅，但在存在对称性时却会带来一些麻烦。为了说明我们的意思，我们考虑一个具有图示旋转对称性的 3-单形，同时忽略其余的对称性：



多胞体	组合的	欧几里得的	球面的
四面体	1	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	反余弦 $\left(-\frac{1}{3}\right)$
Cube	1	$2\sqrt{\frac{1}{3}}$	反余弦 $\left(\frac{1}{3}\right)$
	2	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	反余弦 $\left(-\frac{1}{3}\right)$
	3	2	π
八面体	1	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
	2	2	π
正十二面体	1	$\frac{2}{\varphi}\sqrt{\frac{1}{3}}$	反余弦 $\left(\frac{2\varphi-1}{3}\right)$
	2	$2\sqrt{\frac{1}{3}}$	反余弦 $\left(\frac{1}{3}\right)$
	3	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	反余弦 $\left(-\frac{1}{3}\right)$
	4	$2\varphi\sqrt{\frac{1}{3}}$	反余弦 $\left(\frac{1-2\varphi}{3}\right)$
	5	2	π
二十面体	1	$2\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}$	反余弦 $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
	2	$2\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}$	反余弦 $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
	3	2	π

表 1. 组合距离、欧几里得距离与球面距离之间的转换。欧几里得距离和球面距离均指内接于单位球面的多胞体。

显然，可以通过等变的方式将该单纯形形变收缩到底边（其余维为二），例如沿直线进行收缩，将 r 移到 q，并将 s 移到 p。从三维单形到其一维面的这次塌缩，可以分解为相邻维度之间的若干次塌缩，但这些塌缩无法保持等变性。我们能做的最好办法是先进行一次破坏对称性的塌缩，再进行另一次恢复对称性的塌缩，如此反复。例如，我们可以将$prs \nearrow pqrs$ 塌缩掉以破坏对称性，然后将 $rs \nearrow qrs$ 塌缩掉以恢复对称性。接着，将 $pr \nearrow pqr$ 塌缩掉以破坏对称性，再将 $qs \nearrow pqs$ 塌缩掉以恢复对称性。最后，将$s \nearrow ps$ 塌缩掉以破坏对称性，再将 $r \nearrow qr$ 塌缩掉以恢复对称性。

柏拉图立体。 我们可以将任意柏拉图立体 P 实现为其顶点集$P^{(0)}$ 位于单位球面 $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$上。这样，我们便可以在顶点集上定义三种距离：在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$中测量的距离、在球面 S^2上测量的距离，或通过计算两点之间边的数量得到的组合距离（表 1）。由于这些距离彼此之间单调相关，因此只需采用不同的参数，就能得到相同的 Vietoris–Rips复形。使用组合距离会更方便，这不仅因为它取整数值，还因为它使我们能够利用多胞体的边图进行研究。

多胞体	m	n	v	f	k
四面体	3	3	4	4	1
Cube	4	3	8	6	3
八面体	3	4	6	8	2
正十二面体	5	3	20	12	5
二十面体	3	5	12	20	3

表 2. 柏拉图立体的基本组合性质。数字 m 和 n 分别表示一个面的顶点数和一个顶点周围的面数。数字 v 和 f 分别表示顶点数和面数。数字 k 表示边图的直径。

2. 简单情形

在全文中，我们将考察一个柏拉图立体 P，并令 m，n，v，f，k 表示表 2 中所示的基本不变量。我们希望确定关于组合距离 $r \in [0, \dots, k]$ 的 Vietoris–Rips复形 VR$_{\leq r}(P^{(0)})$ 的同伦类型，其中 k 表示组合直径。

第一个情形是平凡的。

引理 2.1. 如果 $0 \leq r < 1$，那么 VR$_{\leq r}$ 是由 v 个顶点构成的离散集，因此它是 $\bigvee^{v-1} S^0$。□

引理 2.2。若 $P = -P$（因此若 P 不是正则单纯形），且若 $k - 1 \leq r < k$，则 $\mathrm{VR}_{\leq r} \cong S^{v/2-1}$。

证明。对于 $x \in P^{(0)}$，与 x 距离为 k 的唯一点是 $-x$。因此，除非全单形 $P^{(0)}$ 的一个面包含两个对顶点，否则它属于 VR$_r$。由此可见，VR$_r$ 与 $*_v S^0$ 单纯同构，同时也是 v维交叉多胞体的边界。这两种描述都表明，VR$_r$ 与 $S^{v/2-1}$同胚。□

下一个情形同样显而易见。

引理 2.3。若 $m = 3$、$1 < k$ 和 $1 \leq r < 2$，则 $\mathrm{VR}_{\leq r} = P^{(2)}$，即二维骨架，因此特别有 $\mathrm{VR}_r \cong S^2$。□

情况 $m \neq 3$ 稍微更有意思一些。注意，对于这两个多胞体，一个面的（组合）直径为 2。

引理 2.4。若 $m > 3$ 且 $1 \leq r < 2$，则 $\mathrm{VR}_{\leq r} = P^{(1)}$，因此特别有VR$_{\leq r} \cong \bigvee_{f-1} S^1$。□

引理 2.5。对于正十二面体，若 $2 \leq r < 3$，则 $\mathrm{VR}_{\leq r} \simeq S^2$。更准确地说，$P^{(2)}$ 的每一种不添加顶点的三角剖分，都是VR$_{\leq r}$的一个强变形收缩。

证明。VR$_{\leq r}$中有两种极大单形：第一种称为 σ_x，由 P 的一个顶点 x 及其 $m = 3$ 邻居构成，因此它

是一个3-单形。第二种称为 τ_F，由 P的一个面F 的顶点构成，因此它是一个（$m-1$）-单纯形。对所有 x，将 $\sigma_x \smallsetminus \{x\}$ 与 σ_x 匹配，描述了VR$_r$ 到由这样的单形组成的子复形的形变收缩，其中每个单形都包含在 P的某个面中。

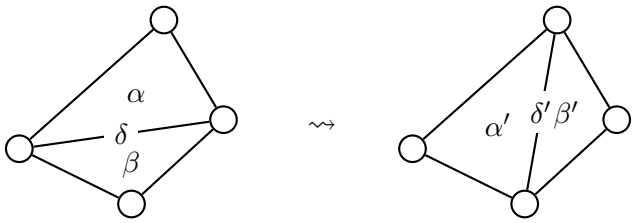
接下来要证明， τ_F 形变收缩到 F的任意三角剖分。这由下面的引理给出。□

说到多边形 F 的三角剖分时，我们总是指顶点集与 F的顶点集相同的三角剖分。对于下面的引理，我们只需要第一段中证明的结论（因为我们只关心带有 $n \leq 5$的n边形），但我们将一般情形也证明出来。

引理 2.6. 设 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个正多边形， T 是F的一个三角剖分， Δ 是以 F的顶点集为顶点集的全单形。将 T视为 Δ 的子复形，则存在一个从 Δ 到 T的变形收缩。

证明。 首先考虑特殊情形： T 是这样一种三角剖分，其中一个固定顶点 v 与其他每个顶点都由一条边相连。我们在 Δ 中不属于 T 的单形上定义一个匹配：将包含 v 的单形 σ与余面 $\sigma \smallsetminus v$配对。该匹配是无环的，因为若 $\sigma \nearrow \tau$，则 τ 包含 v 而 σ 不包含；而若 $\tau \searrow \sigma$，则σ 和 τ 都包含 v。因此，一个循环必须涉及一个不包含 v的单形，但这是不可能的。根据定理 1.1，这表明 Δ 形变收缩到 T。

众所周知， [Wag36], 任何三角剖分 T 都可以通过一系列翻转变换为任意其他三角剖分 T'。这些翻转是指：将由一条对角线 δ 和三角形 α, β进行三角剖分的四边形 γ，替换为该四边形的另一种三角剖分，即由对角线 δ' 和三角形 α', β'组成的三角剖分：



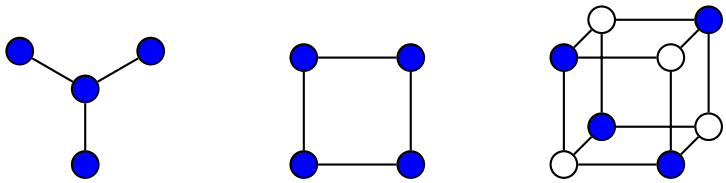
因此，给定 Δ not in T 上单形的一个匹配，只需从该匹配中移除α'， β'， δ'，并将 α， β， δ 加入其中。在原匹配中，与 γ 对应的 3-单形必须与 α' 和 β' 之一匹配，而 δ' 则与另一个匹配。从匹配中移除这两组匹配，并改为加入相应的不带撇号的匹配，即可得到所需的匹配。新匹配是无环的，因为在所得匹配中，四边形 τ 的边未匹配，除与 τ 对应的单形匹配的那个三角形外，所有三角形也都未匹配。因此，任何涉及 α， β， δ 的极大 $\nearrow$-$\searrow$ 序列，最终都会到达一条未匹配的边或一个未匹配的三角形，因而不会形成循环。□

至此，除了带有 $\delta_3 < r \leq \delta_4$ 的十二面体这一情形外，我们已经证明了该定理。

3. 预备：立方体

我们现在可以直接着手证明剩下的情形，读者也可以直接跳到下一节。不过，我们选择先用另一种方法证明：若 P 是立方体，则复形 $X := \mathrm{VR}_{\leq 2}(P^{(0)})$ 是一个 3-球面（这可由上文的引理 2.2 推出）。我们这样做有两个原因：首先，也是最重要的一点，这个证明采用了与下一节证明正十二面体时相同的策略，但更为简单；其次，它可以推广到高维立方体。

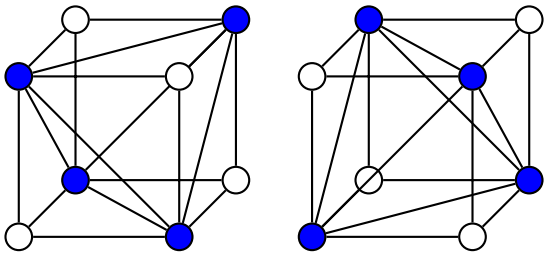
复形 X 包含三类直径为 2 的极大单形，每个都是一个 3-单形：



这样的图示确定了一类单形，具体如下：该图可以嵌入立方体边图的一个导出子图中，而任何这样的嵌入都会给出一个单形，它由着色顶点的像组成。因此，第一类由一个顶点及其邻居组成，共有八个，记作 $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$。第二类由一个正方形的顶点组成，共有六个，记作 $\beta_1, \ldots, \beta_6$。最后一类由立方体中其余的顶点组成，共有两个，记作 τ_1, τ_2。

现在我们可以如下理解 $X = \mathrm{VR}_{\leq 2}$。首先考虑子复形 $Y := X \setminus \{\tau_1, \tau_2\}$，它是通过移除第三类的两个单形得到的。我们在这个子复形上定义一个匹配，将每个 α_i 与由外侧顶点构成的 2-单形匹配（它是唯一一个任意两个顶点之间距离均为 2 的面）。这定义了一个从 Y 到由包含在某个 β_i 中的单形构成的子复形的形变收缩。这个复形是立方体的 2-骨架，其中每个正方形都加厚为一个 3-单形。特别地，很容易看出它与一个 2-球面同伦等价。更确切地说，我们可以利用引理 2.6，将每个 β_i 收缩到其对应正方形的两种细分之一。

此时我们知道，X 是一个 2-球面 Y，其上附加了两个 3-球 τ_1，τ_2。这很可能是一个 3-球面，但并非必然如此。接下来需要了解这些球是如何粘合的，也就是确定映射 $\partial\tau_i \cong S^2 \to S^2 \simeq Y$ 在同伦意义下的情况。为此，我们需要追踪每个 τ_j 的面在匹配所定义的形变收缩下如何映射。τ_j 的每个面都与某个 α_i 匹配，因此会收缩到 α_i 的另外三个面上。于是，τ_1 的边界会收缩到立方体 2-骨架边界的某个细分上，而 τ_2 则会收缩到另一种细分上：



由于这两个细分都是 Y 的收缩，我们看到映射 $\partial\tau_i \to Y$ 是同伦等价。因此，X 确实是一个 3-球面。

下一节中关于正十二面体的证明与此处有两点不同：首先，需要移除的不是两个而是十个 3-单形；其次，形变收缩更加复杂。

半径为 2 的高维立方体。上述证明可以推广到 VR≤2(C_n)，其中 C_n 是一个 n 维超立方体。该结果已在 [AA22] 中证明，因此我们只概述证明。直径为 2 的极大单形仍分为三类：顶点周围的 1-球、2-面，以及上文提到的第三类；每个 3-面内有两个这种单形。与上文一样，可以移除第三类单形，并将剩余的复形收缩到 2-骨架的一个细分。显然，2-骨架是球面的楔和，其同调由 3-面的 2-骨架生成。同样显然（参见上文关于 3-立方体的讨论），每个 3-面的 2-骨架都会被第三类单形之一填满。因此，VR≤2(C_n) 是 3-球面的楔和，剩下的问题是确定其数量，即 3-面的数量的两倍减去 b_2($C_n^{(2)}$)。

f_n^k k维面的数量满足 n维立方体的关系式 $f_{n+1}^{k+1} = f_n^{k+1} + f_n^k$，其中 $f_0^0 = 1$ 和 $f_n^k = 0$ 适用于 $n < k$。由此得到生成函数

$$\alpha(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} f_n^k x^n y^k = \frac{1}{1-(2+y)x}.$$

由于 $C_n^{(k)}$是若干个 k维球面的楔和， b_k($C_n^{(k)}$)是经过适当符号调整的约化欧拉示性数：

$$\tilde{e}_n^k = (-1)^k(\chi(C_n)^{(k)} - 1) = b_k(C_n^{(k)})$$

其生成函数为

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} \tilde{e}_n^k x^n y^k \\ &= \frac{1}{1+y}\alpha(x,y) - \frac{1}{(1+y)(1-x)} = \frac{x}{(1-x)(1-(2+y)x)}.\end{aligned}$$

将 k 固定后，我们看到 n 中关于 f_n^k 和$b_k(C_n^{(k)})$ 的生成函数为

$$\alpha_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\alpha(x,0) = \frac{x^k}{(1-2x)^{k+1}} \qquad \text{and}$$
$$\beta_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\beta(x,0) = \frac{x^{k+1}}{(1-x)(1-2x)^{k+1}}.$$

由于 $b_3(\mathrm{VR}_{\leq 2}(C_n)) = 2f_n^3 - b_2(C_n^{(2)})$，其生成函数为

$$2\alpha_3 - \beta_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)^4}.$$

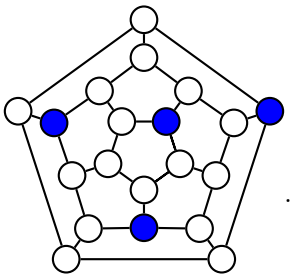
特别值得注意的是，这就是 $1/x \cdot \beta_3$，因此 $b_3(\mathrm{VR}_{\leq 2}(C_n)) = b_3(C_{n+1}^{(3)})$，这或许暗示着另一种方法。

4. 有趣的情形

本节讨论第2节之后剩下的情形： P 是正十二面体，且 $3 \leq r < 4$，因此我们只需取 $r = 3$。设 Γ 为 P的边图。我们沿用上一节的策略，首先确定临界单形：

引理4.1。 复形$\mathrm{VR}_{\leq r}$ 包含10 个四面体 τ_1，……， τ_{10}，其中任意两个顶点之间的距离3。□

这些都是众所周知的：在十二面体的旋转群 H 作用下，它们分成两个轨道，而每个轨道上的作用都表明该旋转群是$H \cong A_5$。令 $G = \mathrm{Aut}(P)$表示 P的完整对称群，因此 $G = H \times \{\pm 1\}$。与上一节一样，我们希望称呼 G-轨道或单形的类型：绘制一个图 Λ 并将一组B 顶点着色时，它同时描述了所有这样得到的单形：$\iota(B)$是 ι； $\Lambda \to \Gamma$ 是一个作为导出子图的嵌入。取同一个图并将我们指定的一个子集 $B' \subseteq B$ 着色后，对于每个单形 $\iota(B)$，我们都指定了一个面 $\iota(B')$。按照这种记号，引理4.1中的单形属于以下类型



.

我们证明中的主要技术要素是：

命题4.2. 存在一个从$\mathrm{VR}_{\leq 3} \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_{10}\}$到$\mathrm{VR}_{\leq 2}$的强变形收缩。更确切地说，在 $\mathrm{VR}_{\leq 3}$ 中直径为3 的单形上存在一个部分无环匹配，其唯一的临界单形为 $\tau_1, \ldots, \tau_{10}$。

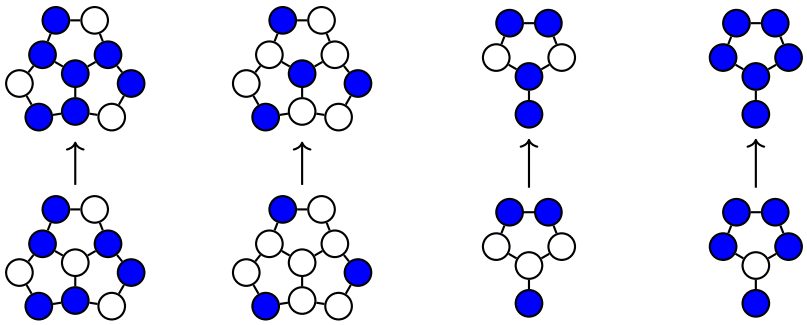


图1. 具有 C_3 和 C_2 对称性的匹配单纯形。

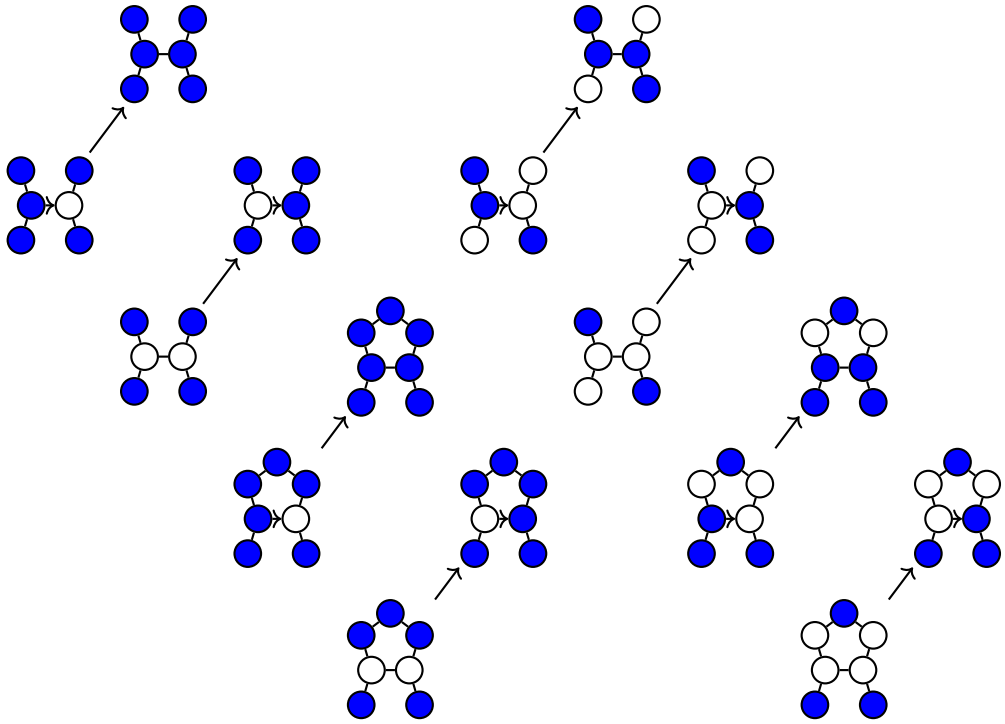


图2. 对称性被破坏的匹配单纯形（ C_2 ）。

该匹配在满足第1节所述限制的范围内将是 G-等变的。由于该匹配无法完全做到等变，我们对指定单形的方法作如下调整：我们预先固定<style>边 Γ的一种随机定向。现在，我们至多对<style>边 Λ 中的一条边定向，并要求嵌入 $\iota\colon \Lambda \to \Gamma$ 将该边映射到一条定向方向相同的边。 Λ 中的每条无向边都可以映射到定向任意的边。

为了说明这一点的重要性，考虑这三类单形。

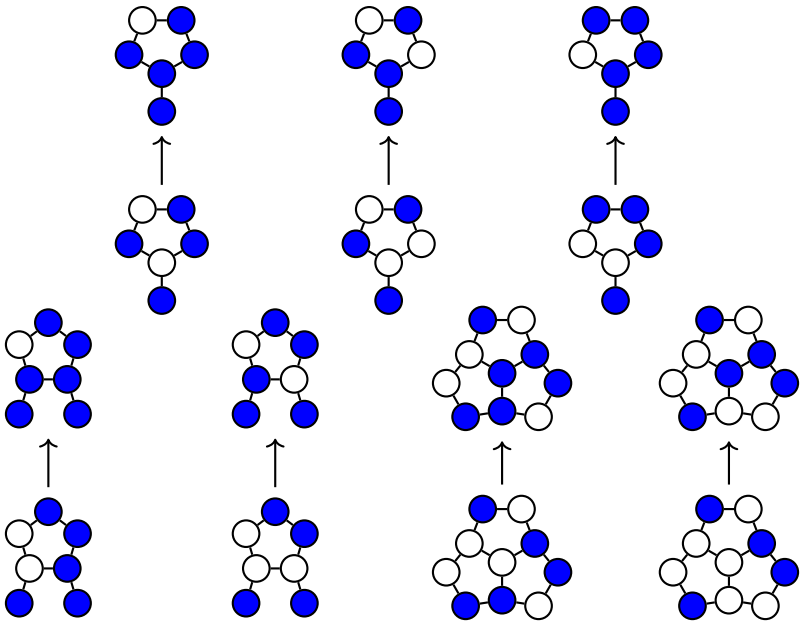
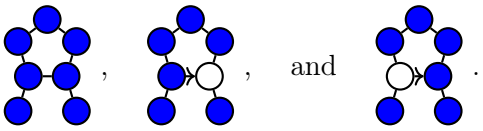


图3. 稳定子平凡的匹配单纯形。



我们希望将第一类与第二类匹配起来。但请注意，第一类具有第二类和第三类都不具备的对称性。因此，如果没有边定向，第一类会以两种方式将第二类作为一个面，但它不可能同时与这两种方式匹配。因此，边定向的作用是区分具有对称性的单形的（余）面。

了解如何阅读图示后，命题4.2中提到的匹配就是图1、图2和图3所示的匹配。构造这种匹配时采用的启发式方法是：尽可能像图1那样保留对称性；否则，就像图2那样破坏对称性并使其恢复（如引言中所述）。

命题*4.2*的证明。 为证明该命题，我们需要验证，VR≤3(Γ)中每个直径为3的单纯形都出现在图1、图2和图3中，但 $\tau_1, \ldots, \tau_{10}$ 除外。这项工作繁琐但简单，因此留给读者（或其计算机）完成。

接下来需要证明该匹配是无环的。证明方法是说明，在相邻维数的 VR≤3(Γ) 单形上，关系 $\nearrow$ 和 $\searrow$ d，$d+1$ 可以细化为一个偏序。更确切地说，维数为 d，$d+1$ 中的一个潜在 $\nearrow$-$\searrow$环只会涉及这些维数中属于匹配对的单形。因此，只需证明这些单形

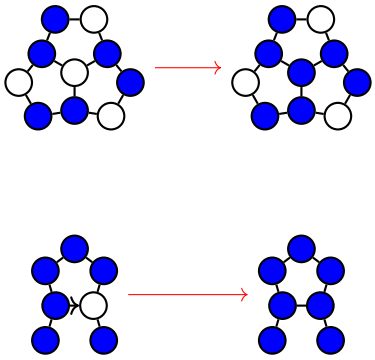


图4。维数 5 和 6 中匹配的无环性。从 σ 到 τ 的红色箭头表示 $\sigma \nearrow \tau$。展示了所有关系 $\nearrow$，且这些单形之间不存在关系 $\searrow$。关键在于每个箭头都指向右方。

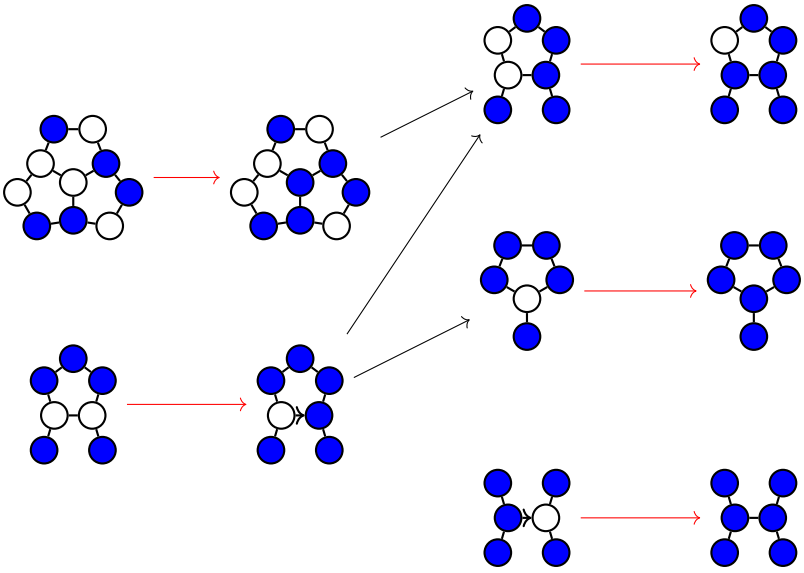


图5。维数 4 和 5 中匹配的无环性。从 σ 到 τ 的红色箭头表示 $\sigma \nearrow \tau$。从 τ 到 σ 的黑色箭头表示 $\tau \searrow \sigma$。展示了所有关系 $\nearrow$，以及这些单形之间的所有关系 $\searrow$。关键在于每个箭头都指向右方。

属于此类匹配的单形可以排序。图4至图8展示了这类排序。□

为了证明我们的定理，剩下要证明的是该映射

$$\partial\tau_i \cong S^2 \to S^2 \simeq \mathrm{VR}_{\leq 3} \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_{10}\}$$

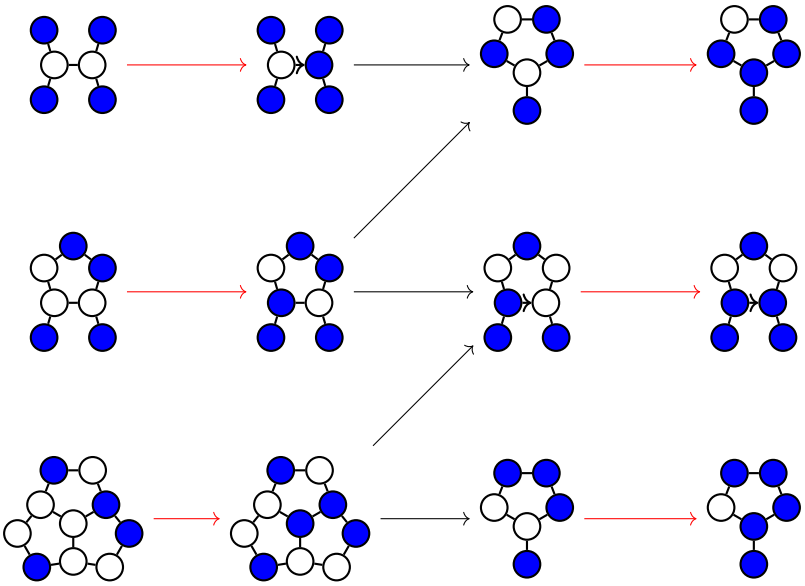


图6。维数3和4中匹配的无环性。含义与图5相同。

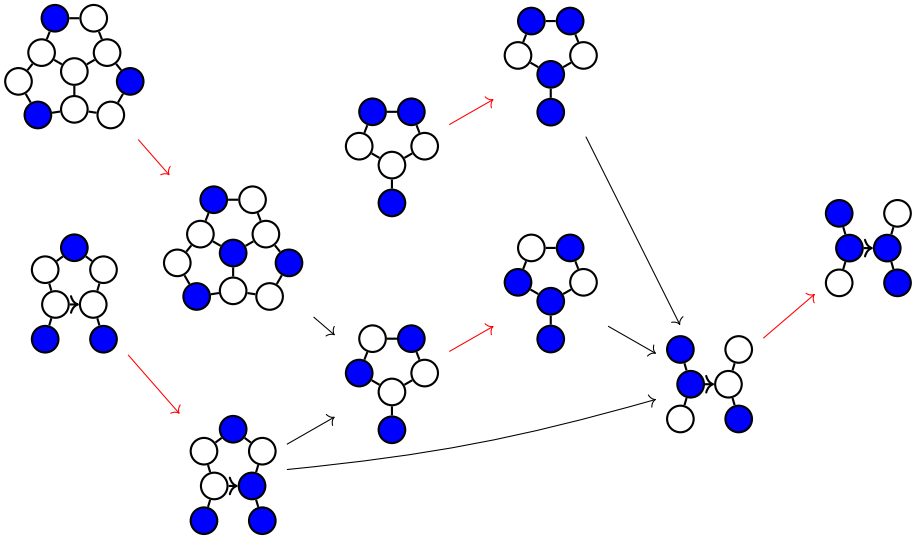


图7。维数2和3中匹配的无环性。含义与图5相同。

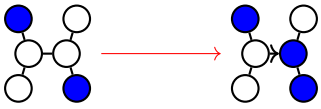


图8。维数1和2中匹配的无环性。含义与图5相同。

沿着其粘入的 τ_i 是一个同伦等价。研究这个映射纯粹是一个算法问题：我们只需利用命题 4.2 中的变形收缩沿其进行同伦。为便于说明，我们使用 Hurewicz 定理：

定理 4.3 （[Hat02，定理 4.32]）。 如果空间 X 是1连通的，那么映射 $\pi_2（X）\to H_2（X）$ 是一个同构。

因此，只需证明：

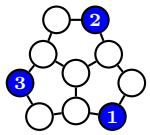
命题 4.4。 对于每个 i ，同调类 $[\partial\tau_i]$生成

$$H_2(\mathrm{VR}_{\leq 3} \smallsetminus \{\tau_1, \ldots, \tau_{10}\}) \cong H_2(\mathrm{VR}_{\leq 2}) \cong H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}.$$

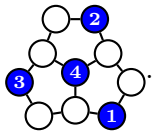
为了计算整系数同调，我们需要处理带定向的单纯形。我们通过给定义图 Λ中的蓝色顶点 B 添加编号来实现这一点。按照惯例，对单纯形 σ 的编号进行偶置换得到相同的单纯形，而进行奇置换则得到具有相反定向的单纯形，即 $-\sigma$。我们对边界的符号约定是

$$\partial[1, \ldots, n] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n].$$

命题 *4.4* 的证明。 单形 $\tau_1, \ldots, \tau_{10}$ 的面属于以下类型

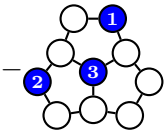
$\varphi =$ 

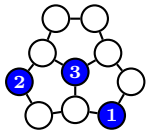
因此，我们需要知道它们在变形收缩下如何（在同调意义上）映射。我们的匹配将它们与单形

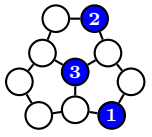
$\psi =$ 

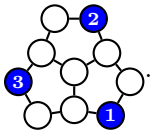
.

为了确定 φ 在收缩下的像，我们计算 ψ 的边界，得到

$\partial\psi = -$ 

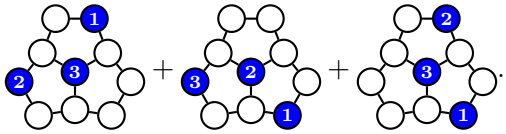
$+$ 

$-$ 

$+$ 

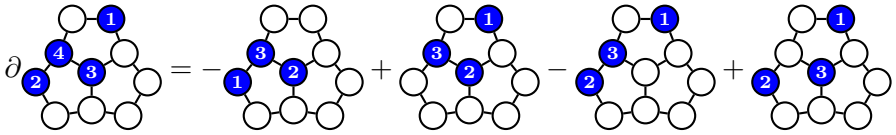
.

因此，在收缩的第一步中， φ 被映射到

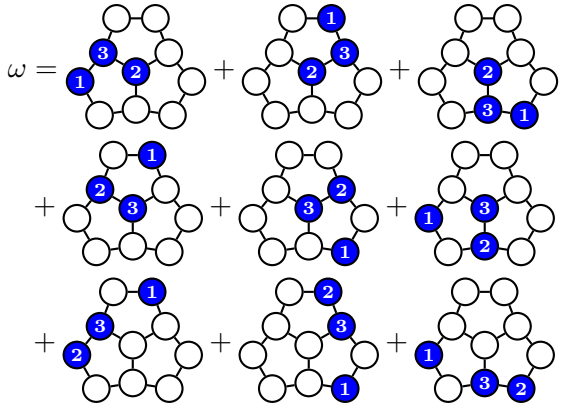


.

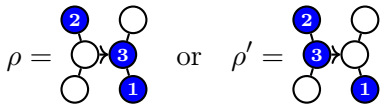
每个加项再次与一个上余面配对，我们计算其边界如下



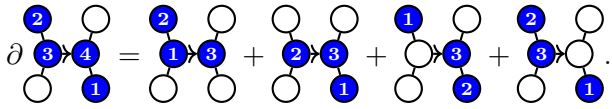
因此， φ 经过两次收缩步骤后的像为



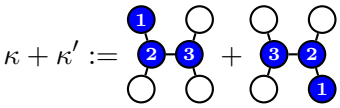
前两行中的各项都属于 VR≤2(Γ)。对于最后一行中的各项



收缩像取决于 Γ中的边定向。虽然 ρ 与一个面配对，因此不会对第二同调作出贡献，但 ρ' 与一个上余面配对，其边界为

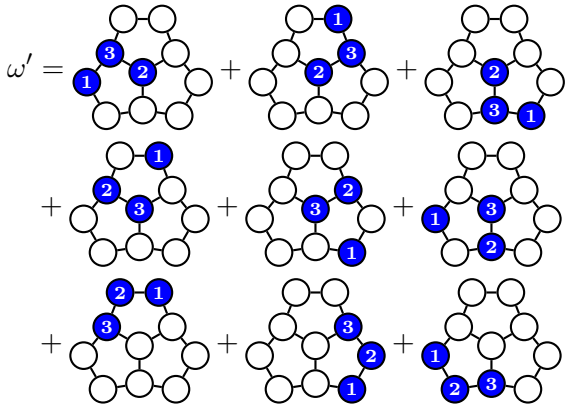


由此我们得到，和 $\rho+\rho'$ 收缩为

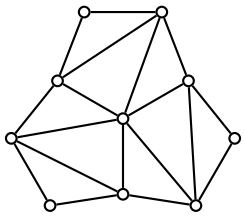


还需要作一个观察。每个单纯形 τ_i 都有四个φ类型的面。虽然我们不知道一个 φ 类型的单纯形是否会经由 ρ' 或 ρ 类型的单形收缩，因此其收缩像中是否包含 κ ，但这四个面的总和的收缩像中会包含 $\rho+\rho'$，因此也会包含$\kappa+\kappa'$。

因此，总而言之， τ_i 的边界收缩为四条类型的链之和



每个都对应于细分



$P^{(2)}$ 的相应子复形。该和表示生成 $H_2(P^{(2)})$ 的一个同调类。□

注 4.5. 从证明中可以看出， $H_3(\mathrm{VR}_{\leq 3}(P^{(2)}))$ 与 $\mathbb{Z}G$-模等变同构

$$\ker(\mathbb{Z}\tau_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\tau_{10} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z})$$

其中，对所有 i， $\varphi(\tau_i) = 1$ 。这使我们能够读出 G-模结构，至少在域系数下是如此。适当编号后，$H \cong A_5$ 通过自然置换表示分别作用于 τ_1、……、τ_5 和 τ_6、……、τ_{10}，而 $\{\pm 1\}$ 因子则在 $1 \leq i \leq 5$ 时交换 τ_i 和 τ_{i+5}。

采用表示记号，我们令 $1 \oplus \nu$ 为 A_5 的自然表示，其中 $\mathbf{1}$ 是平凡表示，而 ν 是（4 维）标准表示。我们还令 $\mathbf{1}$ 和 σ 分别为 $\{\pm 1\}$ 的平凡表示和符号表示。我们用相同的符号表示通过与商同态复合所得到的 G 的表示（这是有意义的，因为两个平凡表示都给出平凡表示）。那么，上述讨论表明，$\mathbb{Q}\tau_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}\tau_{10}$ 是表示 $(1 \oplus \nu) \otimes (1 \oplus \sigma) = 1 \oplus \sigma \oplus \nu \oplus (\nu \otimes \sigma)$。由此可得，作为 G-表示， $H_3(\mathrm{VR}_{\leq 3}(P^{(2)}); \mathbb{Q})$ 等于 $\sigma \oplus \nu \oplus (\nu \otimes \sigma)$。

参考文献

[AA17] MichałAdamaszek 和 Henry Adams，圆的 *Vietoris-Rips*复形，Pacific J. Math. **290** (2017年)，第 1 期，1–40。 [AA22] , 超立方体图的 *Vietoris-Rips*复形，J. Appl. Comput. Topol. **6** (2022年)，第 2 期，177–192。

[Alo94] Juan M. Alonso，群的有限性条件与拟等距，纯粹与应用代数杂志 **95** (1994)，第 2 期，121–129。[EH10] Herbert Edelsbrunner 和 John L. Harer，计算拓扑学，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年，导论。[For98] Robin Forman，胞腔复形的莫尔斯理论，Adv. Math. **134** 1, 90 1998 145 ( ), no. – .[GdlH90] Etienne Ghys 和 Pierre de la Harpe（编），关于 *Mikhael Gromov* 的双曲群。（*Gromov* 式双曲群），Prog. Math.，第 83 卷，马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，1990年（法文）。[Hat02] Allen Hatcher，代数拓扑学，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[Koz20] Dmitry N. Kozlov，有序塌缩：离散莫尔斯理论导论，Graduate Studies in Mathematics，第 207 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020年。[SMW23] Nada Saleh、Thomas Titz Mite 和 Stefan Witzel，$switzel/regular_$多胞体 $\overline{vr}$，https://doi.org/10.5281/zenodo.7670647。[Wag36] K. Wagner，关于四色问题的评述，Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **46** (1936)，26–32。

吉森尤斯图斯-李比希大学数学研究所，Arndtstr. 2, D-35392 吉森，德国电子邮箱地址: saleh.nada@math.uni-giessen.de 吉森尤斯图斯-李比希大学数学研究所，Arndtstr. 2, D-35392 吉森，德国电子邮箱地址: thomas.titz-mite@math.uni-giessen.de 吉森尤斯图斯-李比希大学数学研究所，Arndtstr. 2, D-35392 吉森，德国电子邮箱地址: stefan.witzel@math.uni-giessen.de